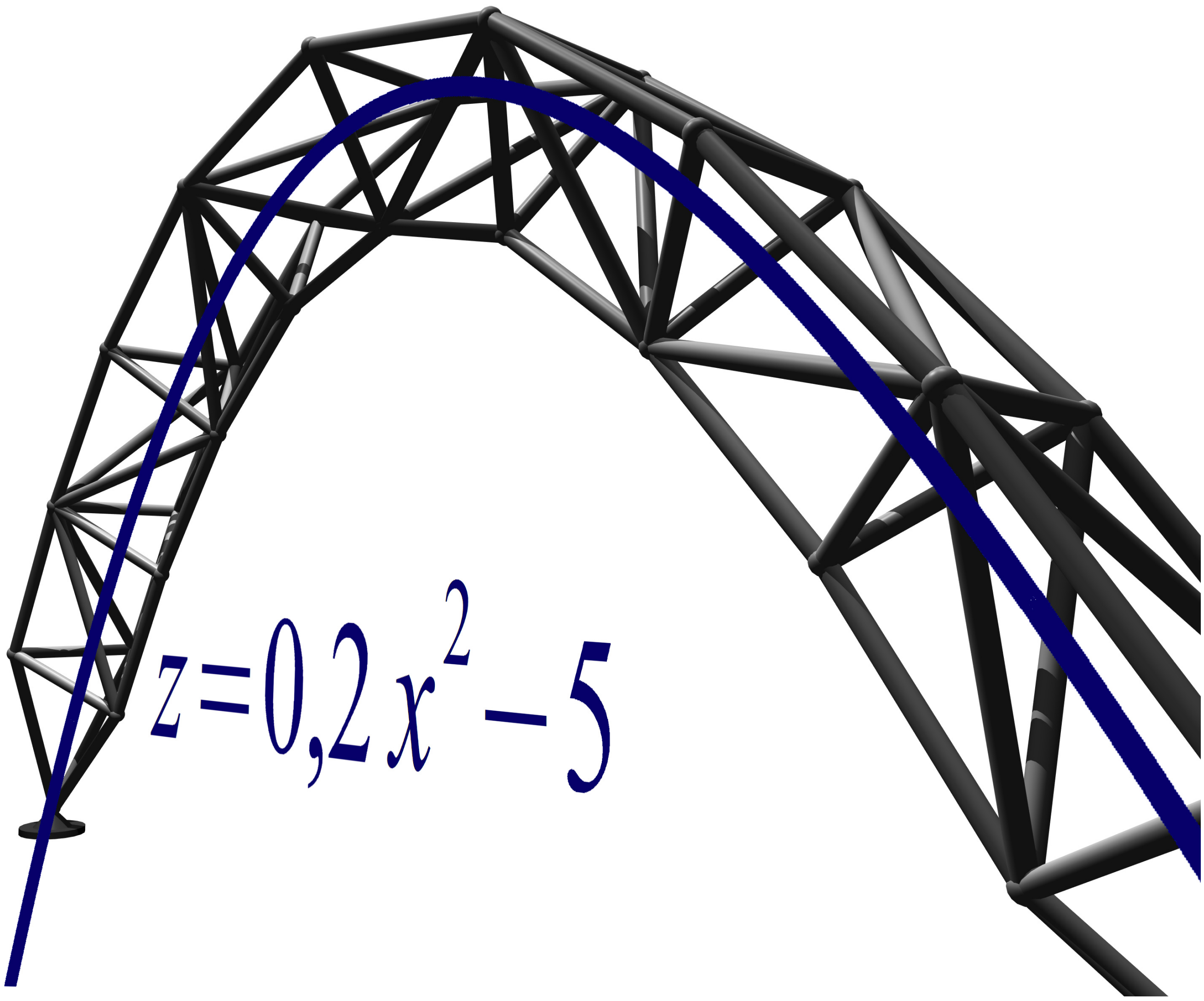
MODEL OM DE STAAFKRACHTEN TE BENADEREN VAN EEN 3D VAKWERKBOOG

BACHELOR EINDWERK

A.J.W. BLOEMERS



SAMENVATTING

Dit onderzoek betreft een driedimensionale vakwerkboog zoals op het titelblad van dit rapport. Deze vakwerkboog is opgelegd op twee scharnieren, en heeft slechts scharnierende verbindingen. De boog volgt een parabolische kromme.

Er is een wiskundig model ontwikkeld in het computerprogramma MAPLE voor het bepalen van alle staafkrachten. Dit model is na het bepalen van de statisch onbepaalde spatkracht geheel gebaseerd op krachtenevenwicht van de knooppunten en momentenevenwicht van vrijgemaakte constructiedelen. Dit blijkt goed mogelijk: in het algemeen blijven de afwijkingen in berekende kracht in een relatief zwaar belaste staaf staaf beperkt tot ten hoogste 10% van de werkelijke kracht in die staaf, vaak minder. Elke familie van staven, zoals onderrandstaven en diagonalen, heeft haar eigen model nodig. Dikwijls zijn resultaten van berekeningen voor andere staven nodig voor het berekenen van de kracht in een staaf.

Nooit is er in dit onderzoek een echte vakwerkboog gebouwd, noch beproefd. Alles is theoretisch met pen en papier en met de computer beredeneerd.

VOORWOORD

Dit is een Bachelor Eindwerk ter afronding van de bachelor-opleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit te Delft. Ik dank de heren ir. J.W. Welleman en dr. ir. P.C.J. Hoogenboom voor hun hulp en aanbevelingen.

A.J.W. Bloemers

INHOUDSOPGAVE

OPMERKINGEN VOORAF

MATRIXFRAME

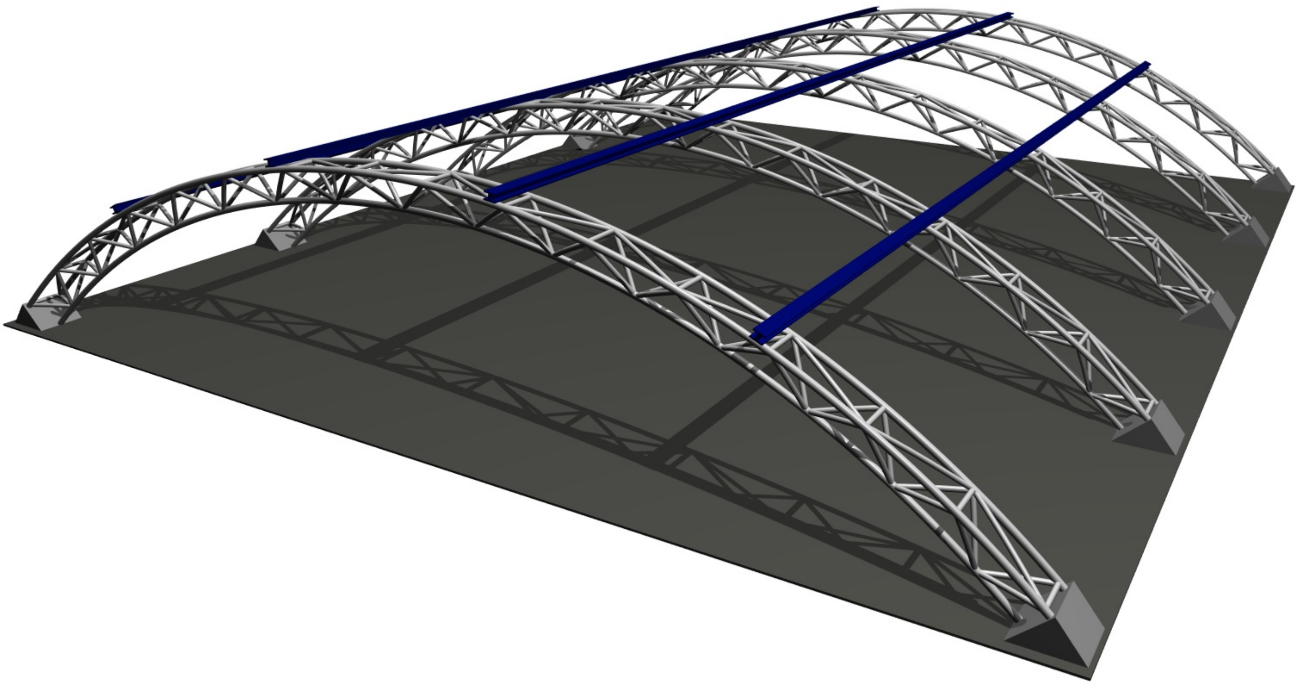
Ten eerste: In sommige MatrixFrame-diagrammen staan vierkanten als aanduiding van de verbindingen tussen de staven. Algemeen duidt een vierkant een starre verbinding aan. Onze boog is in MatrixFrame vanuit de vakwerkmodus geconverteerd naar de raamwerkmodus, aangezien dat noodzakelijk is om gebruik te kunnen maken van verdeelde belastingen. De cirkels worden in dat geval vierkanten, maar de verbindingen blijven scharnierend.

Ten tweede: Evenzo vindt men soms rechthoeken als aanduiding voor de opleggingen. Algemeen duidt een rechthoek op een inklemming. MatrixFrame weigert de constructie anders door te rekenen omdat hij denkt dat de constructie niet plaatsvast is. Hiervoor geldt hetzelfde als hierboven: in de praktijk functioneren de opleggingen als scharnierende opleggingen. Dit is gecontroleerd zowel aan de hand van de momentenlijnen als door een tweede berekening met 3D TRUSS.

Dus: de berekeningen zijn te allen tijde uitgevoerd met alleen maar scharnierende verbindingen.

1 INLEIDING IN HET ONDERZOEK

Dit onderzoek betreft een driedimensionale vakwerkboog zoals men kan vinden in een overkappingsconstructie zoals in afbeelding 1.



Afbeelding 1: Voorbeeld van een hal met vakwerkbogen

Dit onderzoek betreft een enkele boog, geenszins een complete constructie. Bovenstaande constructie is slechts gegeven als mogelijke en toepassing van zo'n boog.

Het doel van dit onderzoek is om het gedrag van zo'n enkele boog te onderzoeken, en om tenslotte een model op te stellen waarmee van te voren, dat is zonder eindige-elementen-programma's, redelijkerwijs de staafkrachten kunnen worden voorspeld.

Vakwerkbogen zijn licht van gewicht in verhouding tot hun draagvermogen, en zien er bovendien volgens velen mooi uit, waardoor zij een logische en veel toegepaste constructie zijn wanneer grote afstanden overspannen moeten worden.

1.1 PROBLEEMDEFINITIE

Het probleem is dat men niet altijd gebruik wil maken van grote eindige-elementenberekeningen om een snelle schatting te krijgen van de optredende krachten in een vakwerkboog. Het zou nuttig zijn om een simpel wiskundig model te hebben waarmee deze krachten in het vakwerk met een zekere nauwkeurigheid kunnen worden benaderd, afhankelijk van een aantal parameters. Met zo'n model kan men dan ook een optimalisatie uitvoeren, bijvoorbeeld zo weinig mogelijk materiaalgebruik bij gegeven belasting. Dat is het doel van dit onderzoek: het maken van zo'n model.

De vorm van de boog is nog onbepaald, en zal gedurende het onderzoek vastgesteld worden. Het enige dat vaststaat is dat het een driedimensionale vakwerkboog zal worden zoals de bogen in afbeelding 1.

1.2 STRUCTUUR VAN DIT RAPPORT

In het eerste hoofdstuk zal de probleemdefinitie worden geformuleerd, namelijk het vinden van een model voor de voorspelling van de staafkrachten.

In het tweede hoofdstuk zal kort relevante theorie voor bogen worden behandeld. Deze theorie is algemeen geldig voor bogen uit lijnelementen, en is van groot belang voor het begrip van een vakwerkboog.

In het derde hoofdstuk zullen de grondbeginselen worden vastgesteld volgens welke onze boog wordt samengesteld. Keuzes moeten worden gemaakt betreffende de opleggingen, vorm enz. Vaak heeft men meerdere mogelijkheden waarbij het de onervarene onduidelijk is wat het voordeel is van de ene boven de andere. Toch zal getracht worden met zoveel mogelijk verstand te werk te gaan.

In het vierde hoofdstuk is het duidelijk volgens welke beginselen onze boog samengesteld wordt, en wordt het tijd om het gedrag onder belasting van onze boog te analyseren. Het meest voor de hand liggende om dan te doen is een representatieve versie van de boog maken, men heeft immers een oneindig aantal mogelijkheden in bijvoorbeeld overspanningslenge en -hoogte, en dan deze proefboog maar eens onderwerpen aan verschillende proeven. En dat zal dus ook gebeuren.

Dan, als er voldoende inzicht opgedaan is en zich geen onaangename verrassingen hebben voorgedaan, is het tijd om te beginnen met een model opstellen voor het voorspellen van de normaalkracht in elke staaf in de boog. Alleen normaalkracht, want de boog wordt hier uitsluiten gemodelleerd met scharnierende verbindingen. Dit model opstellen zal nog makkelijker gezegd dan gedaan blijken, men moet immers alles ook uitproberen om te kijken of de resultaten genoeg overeenkomen. Bovendien zal blijken dat iedere familie van staven in de boog haar eigen model nodig heeft.

2 THEORIE VOOR BOGEN

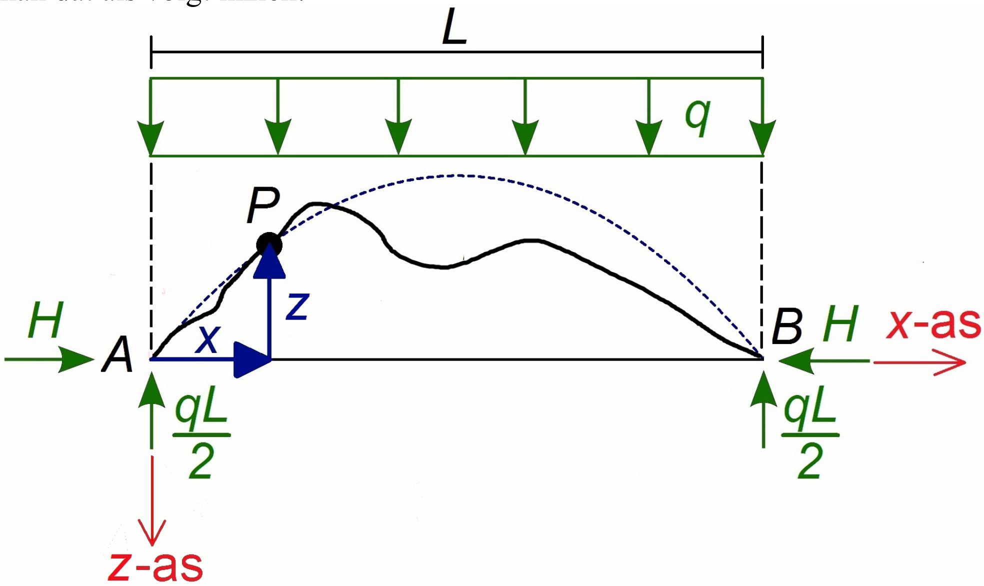
In dit hoofdstuk wordt kort enige theorie voor bogen uit lijnelementen gegeven die van belang is voor ons onderzoek. Alleen bogen onder verticale belasting worden beschouwd.

2.1 BOOG EN DRUKLIJN

In het algemeen probeert men een boog zodanig vorm te geven dat daarin onder een zekere belasting voornamelijk drukkrachten aanwezig zijn. In het geval dat een boog een belasting afdraagt middels alleen drukkrachten, dan volgt deze boog de druklijn onder de gegeven belasting.

2.2 GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING: PARABOOL

Zoals algemeen bekend is de druklijn bij een gelijkmatig verdeelde belasting direct onder die belasting een parabool. Men kan dat als volgt inzien:



Afbeelding 2: Druklijn bij gelijkmatig verdeelde belasting: parabool

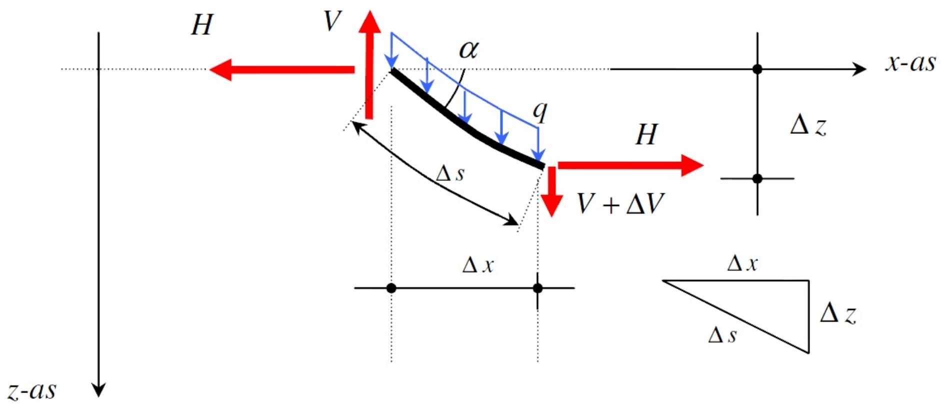
Men heeft een lijnelement *APB*. Bepaalt men alle locaties van *P* waarvoor bij evenwicht in *P* geen moment werkt:

$$\Sigma M^P = H\,z + \frac{1}{2} q\,L\,x - \frac{1}{2} q\,x^2 = 0 \tag{1}$$

$$z = \frac{q\,x(x-L)}{2\,H} \tag{2}$$

Dit is de druklijn en is een parabool door *A* en *B*. Wanneer men *H* zou omkeren krijgt men op vergelijkbare wijze de treklijn, dezelfde parabool maar dan onderlangs, welke overeenkomt met de vorm van een kabel in rust onder dezelfde belasting.

2.3 BELASTING LANGS BOOGLENGTE: KETTINGLIJN



Afbeelding 3: Evenwicht van kabelelement onder eigen gewicht en een zekere spanning

Bij beschouwing van evenwicht van een kabeldeeltje onder invloed van eigen gewicht vindt men na enig rekenwerk de differentiaalvergelijking [1]:

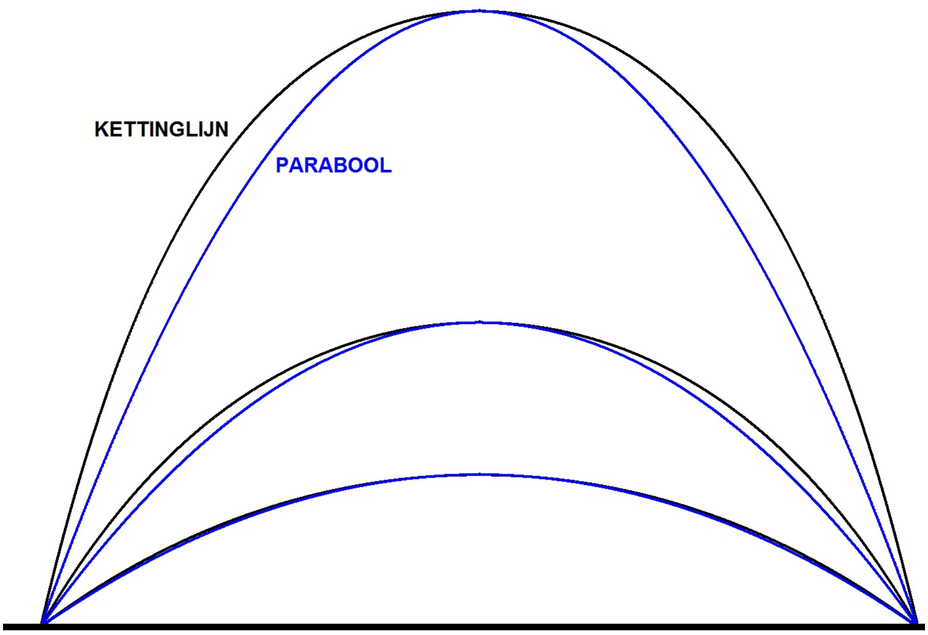
$$H\frac{d^2z}{dx^2}=-q\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \tag{3}$$

Waarvan de algemene oplossing:

$$z=-\frac{H}{q}\cosh\left(-\frac{q\,x}{H}+C_1\right)+C_2 \tag{4}$$

2.4 VERSCHIL TUSSEN PARABOOL EN KETTINGLIJN

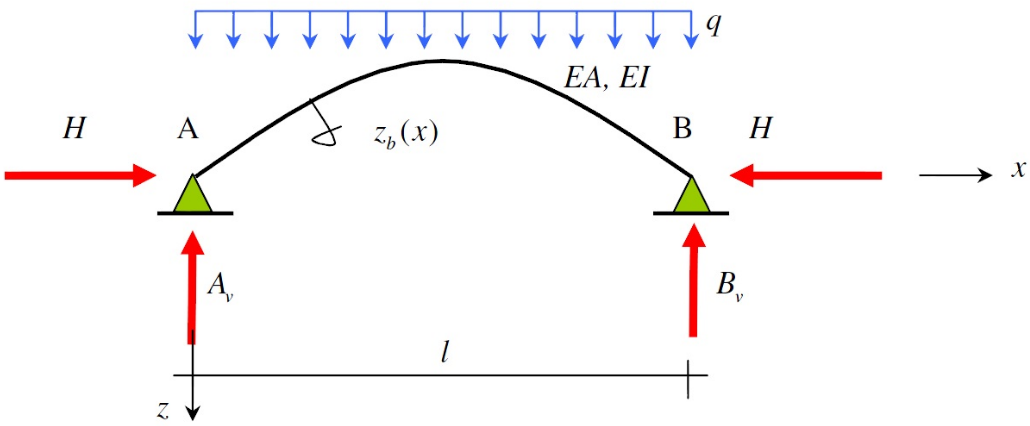
In (4) ziet men dat *-H/q* een uniforme verschaling uitvoert op de hyperbolische cosinus, en algemeen bekend is dat ook alle parabolen gelijkvormig zijn, dus parabolen en kettinglijnen verhouden zich altijd als volgt tot elkaar:



Afbeelding 4: Verschil tussen kettinglijn en parabool

Men ziet meteen dat het verschil tussen een kettinglijn en een parabool bij gelijke overspanning en hoogte gering is, vooral bij flauwe bogen.

2.5 KLASSIEKE OPLOSSINGSMETHODE VOOR BOGEN



Afbeelding 5: Typische boog

Krachtenmethode. Alleen voor enkelvoudig statisch onbepaalde bogen op twee scharnieren. Gebaseerd op overeenstemming tussen horizontale vervorming door normaalkracht en buiging enerzijds, en terugvervorming door de spatkracht *H* anderzijds, met als resultaat de **klassieke boogformule** [1]:

$$H = -\frac{\int\limits_{boog} \frac{M^a z}{EI} ds}{\int\limits_{boog} \frac{z^2}{EI} ds + \frac{l}{EA}} \tag{5}$$

M^a op statisch bepaald hoofdsysteem ten gevolge van q

$$M = M^a + H\, z \tag{6}$$

2.6 DIFFERENTIAALVERGELIJKING VOOR BOGEN

In het algemene geval kan men gebruik maken van de differentiaalvergelijking voor bogen, die gebaseerd is op de werking als twee parallelle veren door de twee draagsystemen buiging en boogwerking [1]:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + H \frac{d^2 w}{dx^2} = q - H \frac{d^2 z}{dx^2} \tag{7}$$

3 ONZE VAKWERKBOOG

Er moet besloten worden hoe onze boog eruit gaat zien. Uit een veelvoorkomende toepassing zoals gegeven in hoofdstuk 1, het dak van een hal, lijkt het volkomen logisch een boog te maken op opleggingen op gelijke hoogte, en dat zal dus ook gebeuren:

EERSTE VASTSTELLING: Opleggingen op gelijke hoogte.

Betreffende de vorm van de boog heeft men eigenlijk maar twee redelijke keuzes. De boog wordt enerzijds belast door zijn eigen gewicht en dat van een dak, welke ongeveer constant verdeeld zijn per eenheid van booglengte. In dat geval levert de kettinglijn (2.3) voor een lijnboog de druklijn. Anderzijds heeft men in werkelijkheid ook te maken met bijvoorbeeld wind, die een aanzienlijke belasting kan veroorzaken met een grillig patroon.

In dit onderzoek zullen omwille van de eenvoud alleen parabolische bogen beschouwd worden. Hoe dan ook zijn bij niet te hoge bogen de verschillen tussen een parabool en een kettinglijn gering (2.4).

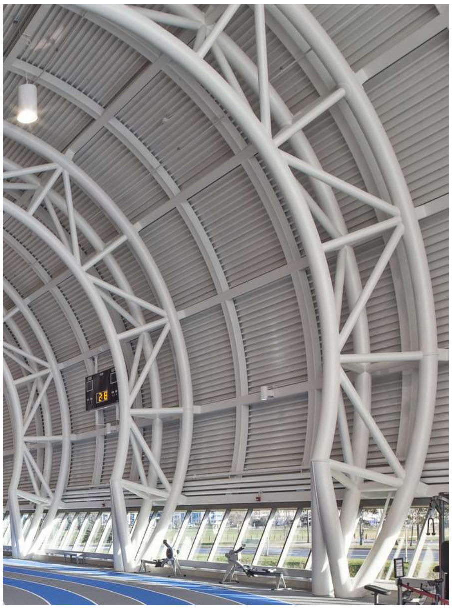
TWEEDE VASTSTELLING: Uitgangspunt voor boogvorm is parabool.

In werkelijkheid hebben bogen ruimtelijke afmetingen. Men met dus bedenken hoe men van een boog uit een lijnelement tot een reëele vakwerkboog kan komen.

3.1 BASISVORM VAN DE BOOG

Laat men eerst bepalen in welk patroon men de vakwerkstaven wil aanbrengen. Er zijn oneindig veel mogelijkheden, waarvan voorbeelden in onderstaande figuren:

Afbeelding 6 IJsselbrug bij Zwolle



Afbeelding 7

Afbeelding 8: Leiden Centraal Station

Afbeelding 9: New River Gorge Brug, Fayetteville, VS

Afbeelding 10 Station Zwolle

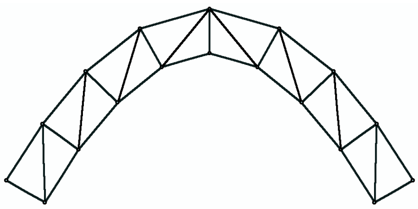
Aangezien de boog in dit onderzoek met slechts scharnierende knooppunten zal worden gemodelleerd, vallen de bogen in afbeelding 6 en 9 af omdat die in dat geval niet vormvast zijn. Men wil in dit onderzoek een driedimensionale vakwerkboog, dus niet één of twee platte zoals bij de IJsselbrug in afbeelding 6. De boog in afbeelding 7 is ook niet vormvast, maar wordt vormvast indien diagonalen in het bovenvlak worden aangebracht. Een simpele doch elegante vorm lijkt de in de breedte (loodrecht op vlak van tekening in afbeelding 11) **symmetrische driehoekige doorsnede**, zoals in afbeeldingen 7, 8 en 10, met een zijde boven zodat men meer ruimte heeft voor opleggingen ten behoeve van het dak. Symmetrisch omdat men bij een in de breedte symmetrische belasting geen torsie wil.

In het geval van een rechte ligger zou men normaliter zeker kiezen voor een zijde boven, zoals in afbeelding 7, dus twee staven daar, in verband met de knikgevoeligheid van staven onder druk. Immers, de bovenrand staat in dat geval dikwijls onder druk, en men heeft dan in ieder geval twee staven om die op te nemen. Echter, bij een boog is het zeker niet gezegd dat perse bovenin de grootste drukkrachten optreden, dus deze overweging geldt hier veel minder.

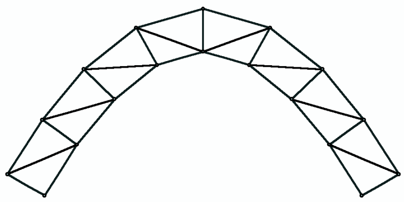
Hoe dan ook, laat men bij gebrek aan redenen die hiertegen pleiten deze driehoeksvorm hier kiezen, dus:

DERDE VASTSTELLING: Driehoekige elementen met een zijde boven.

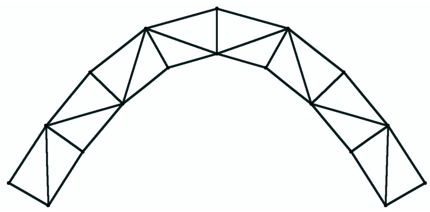
Dan heeft men nog een keuze uit de configuratie van de diagonalen in de schuine zijvlakken, met op het eerste gezicht als meest logische opties stijgend, dalend en afwisselend stijgend/dalend.



Afbeelding 11: Stijgende diagonalen



Afbeelding 12: Dalende diagonalen



Afbeelding 13: Stijgende/dalende diagonalen

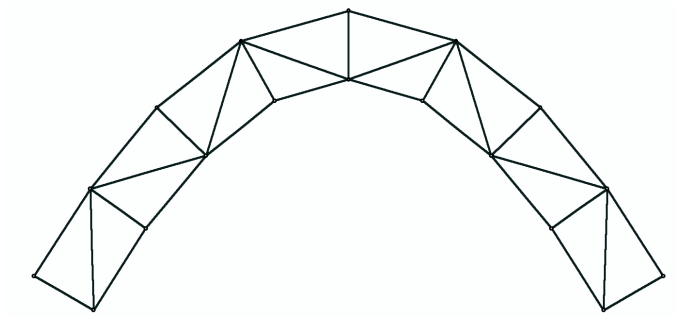
In het algemeen past men dalende diagonalen toe bij rechte vakwerkliggers die voornamelijk hun eigen gewicht dan wel een gelijkmatig verdeelde belasting dragen, zodat de diagonalen in het algemeen onder trekspanning staan, in welk geval men niet hoeft te vrezen voor knik. Stijgende diagonalen ziet men in dat geval wel bij houten vakwerken, vanwege eenvoudiger te maken verbindingen onder druk. In het geval van onze boog echter, die geacht is weinig dwarskracht over te moeten brengen onder belasting door eigen gewicht, en die bovendien belast zal worden door windbelastingen, gaan deze overwegingen veel minder op, en laat men hier dus kiezen voor om en om stijgende en dalende diagonalen:

VIERDE VASTSTELLING: Om en om stijgende en dalende zijdiagonalen.

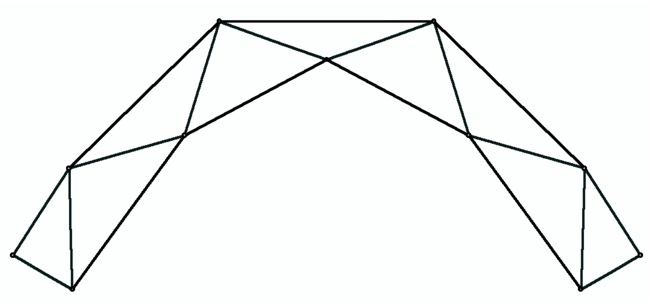
In principe kan men nu met diagonalen en dwarsstaven in het dak een vormvaste boog maken:

Men kan echter ook nog verticalen in de schuine zijvlakken aanbrengen. Betreffende de keuze van wel of geen verticalen in de schuine zijvlakken is op voorhand wel iets te zeggen:

1. Bij de aanwezigheid van verticalen zijn de onderrand en bovenrand altijd ongeveer parallel, hetgeen de analyse vergemakkelijk, zoals te zien in afbeelding 14 en 15.



Afbeelding 14: Boog met verticalen



Afbeelding 15: Dezelfde boog zonder verticalen

Bij afbeelding 15 dient opgemerkt te worden dat de vervorming van onderrand t.o.v. bovenrand aanzienlijk is vanwege het kleine aantal diagonalen.

2. De aanwezigheid van verticalen zorgt voor meer hoekpunten. De aanwezigheid van meer hoekpunten zorgt voor meer oplegpunten voor de puntlasten, die immers alleen in de hoekpunten aangrijpen. Dit maakt de belasting meer continu, en laat het vakwerk de boogvorm meer benaderen.
3. Verticalen verminderen de kniklengte van zowel onderrand als bovenrand.

Verticalen verhogen waarschijnlijk wel het materiaalverbruik, en zorgen hoe dan ook voor een flinke verhoging van aantal benodigde verbindingen bij gelijk aantal diagonalen.

Maar met inachtneming van de punten 1 t/m 3 en vooral de wens om onderrandstaven en bovenrandstaven zoveel mogelijk parallel te hebben wordt hier gekozen voor wel verticalen, per zijvlak zoals in afbeelding 14. Laat men verder voor het dakvlak eenzelfde configuratie kiezen.

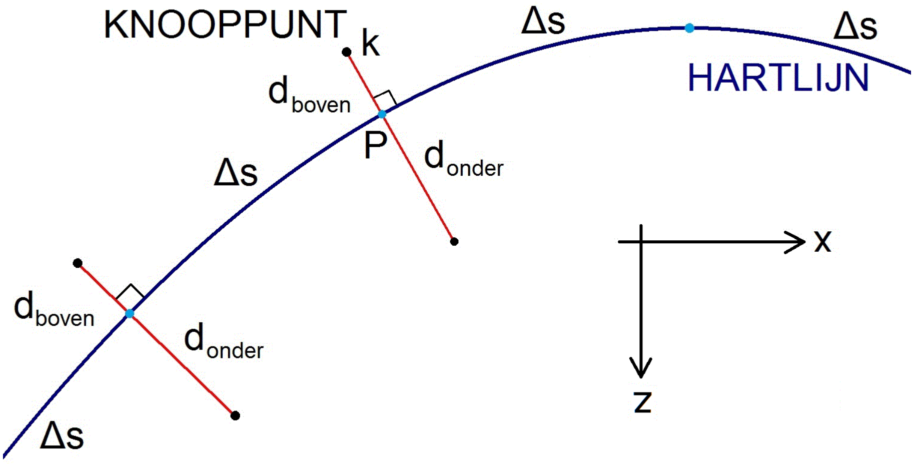
VIJFDE VASTSTELLING: Verticalen in schuine zijvlakken zoals in afbeelding 14.

ZESDE VASTSTELLING: Diagonalen in dakvlak.

3.2 RUIMTELIJK PLAATS VAN DE KNOOPPUNTEN

Nu bekend is op welke manier de boog uit staven wordt samengesteld is de volgende vraag waar men de knooppunten aanbrengt. Laat men van de volgende redelijk lijkende methode uitgaan:

1. De boog uit een lijnelement die men wil benaderen is de hartlijn van onze vakwerkboog, in ons geval is die hartlijn een parabool, zoals bepaald in 3.1.
2. De hartlijn wordt onderverdeeld in stukken van gelijke lengte Δs.
3. Aan de uiteinden van elk zo'n stuk legt men loodrecht op de hartlijn op vaste afstanden de onderrand- en bovenrandknooppunten.



Afbeelding 16: Locaties van onderrand en bovenrandknooppunten t.o.v. hartlijn

De lengtes d_{boven} en d_{onder} stelt men van te voren vast, en de uitdrukkingen voor de coördinaten voor een knooppunt k met coördinaten (x_{boven}, z_{boven}) als dit knooppunt boven de hartlijn ligt, en anders (x_{onder}, z_{onder}) verkrijgt men uit de uitdrukkingen voor parallelle krommen:

Met $x(t)$, $z(t)$ een parametervergelijking voor de hartlijn, voor de bovenrand:

$$x_{\text{boven}} = x_P + \frac{z'}{\sqrt{(x')^2+(z')^2}} d_2 \tag{8}$$

$$z_{\text{onder}} = z_P - \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(z')^2}} d_2 \tag{9}$$

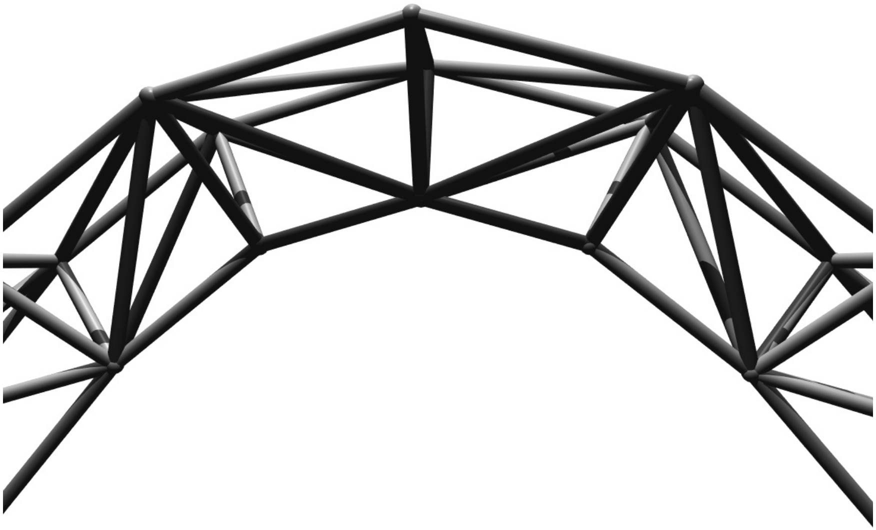
en voor de onderrand:

$$x_{\text{onder}} = x_P - \frac{z'}{\sqrt{(x')^2+(z')^2}} d_1 \tag{10}$$

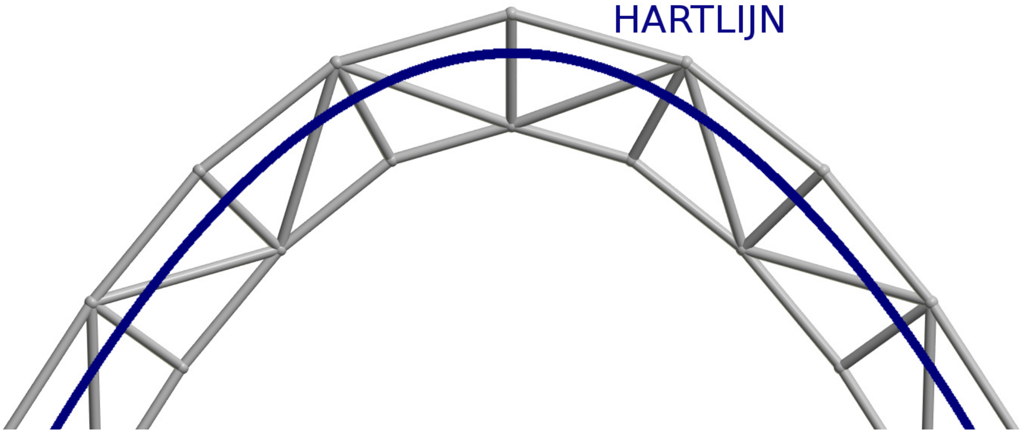
$$z_{\text{onder}} = z_P + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(z')^2}} d_1 \tag{11}$$

Met (x_P, z_P) de coördinaten van een eindpunt van een lijnstuk Δs. Deze berekeningen kunnen goed met een computer gedaan worden, en daartoe is een werkblad gemaakt dat deze berekeningen kan uitvoeren. Voor details hierover zie de bijlage achterin.

Men heeft nu dus een vakwerkboog van de volgende vorm:



Afbeelding 17 Vorm van onze boog



Afbeelding 18 Boog en hartlijn

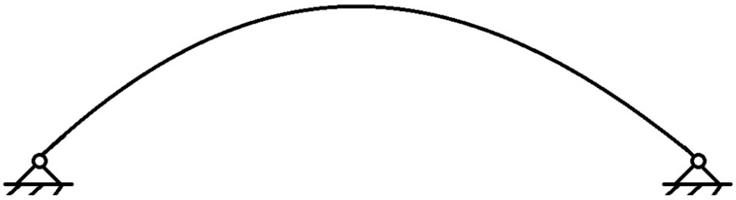
Voorts wordt vastgesteld dat de bogen die in dit onderzoek zullen worden beschouwd zullen voldoen aan de volgende eigenschappen betreffende de doorsnede-oppervlakken en materialen:

ZEVENDE VASTSTELLING: Alle staven zijn uit hetzelfde materiaal

ACHTSTE VASTSTELLING: De buitenste drie randstaven hebben elk een doorsnede-oppervlak $A_{\mathrm{randstaaf}}$, alle andere staven hebben elk een doorsnede-oppervlak $A_{\mathrm{wandstaaf}}$.

3.3 OPLEGGINGEN EN KINEMATISCHE/STATISCHE BEPAALDHEID

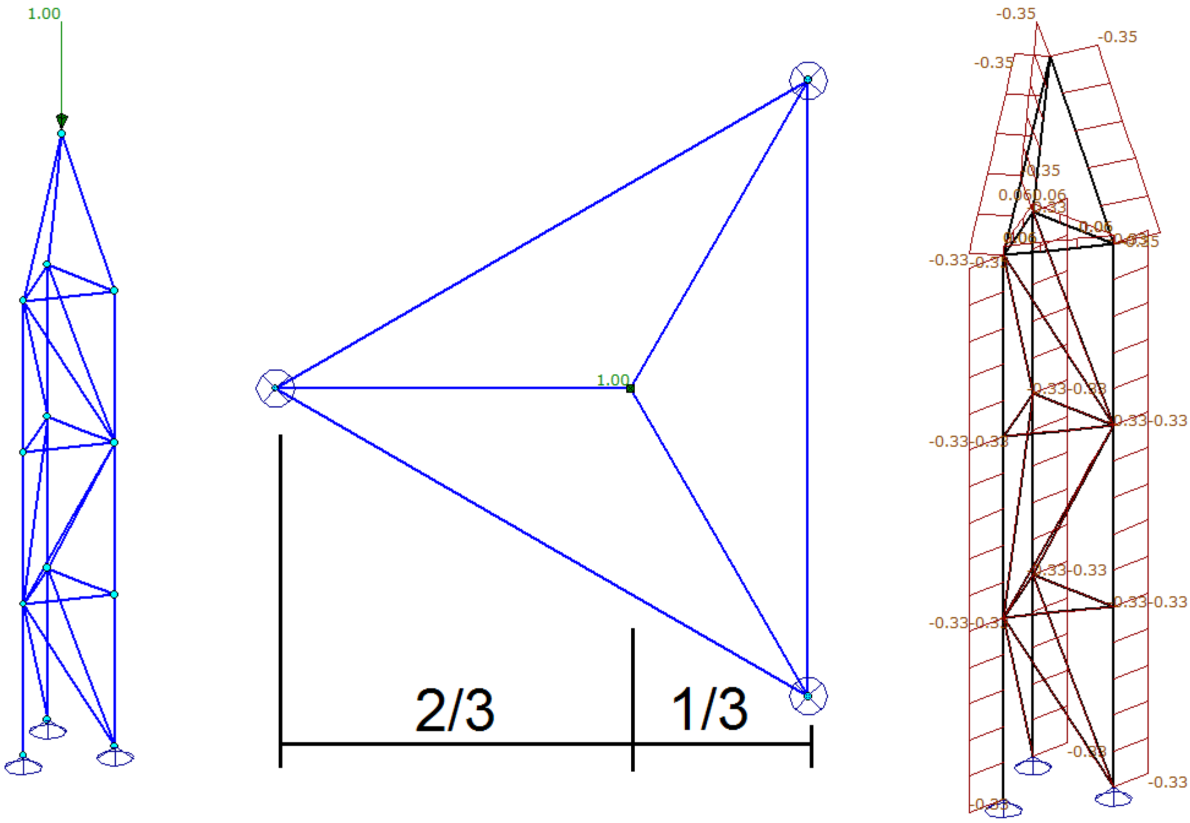
Omwille van de eenvoud tracht men onze boog scharnierend op te leggen aan de uiteinden, een zogenaamde tweescharnierenboog:



Afbeelding 19: Tweescharnierenboog

Bij een lijnelement is het simpel: de opleggingen kunnen slechts op twee plaatsen worden aangebracht en dat is in de hartlijn van het element, en aan de uiteinden. Daar zitten ze dus ook. Men vraagt zich nu af waar, en hoe, men deze oplegging bij onze driedimensionale vakwerkboog gaat realiseren. Laat men eerst nadenken over de plaats van de oplegging. Bij een prismatische drukstaaf realiseert men deze oplegging normaliter zodanig dat deze geen kromming in de staaf veroorzaakt, met andere woorden zodanig dat het moment door de oplegreactie om het normaalkrachtencentrum van de staaf nul is, en dan ligt het oplegscharnier dus in het verlengde van de as van de doorsnede. Als men nu een recht stuk uit de vakwerkboog beschouwt zoals in afbeelding 20, dan kan men erachter komen waar men in dat geval de scharnieroplegging zou moeten plaatsen.

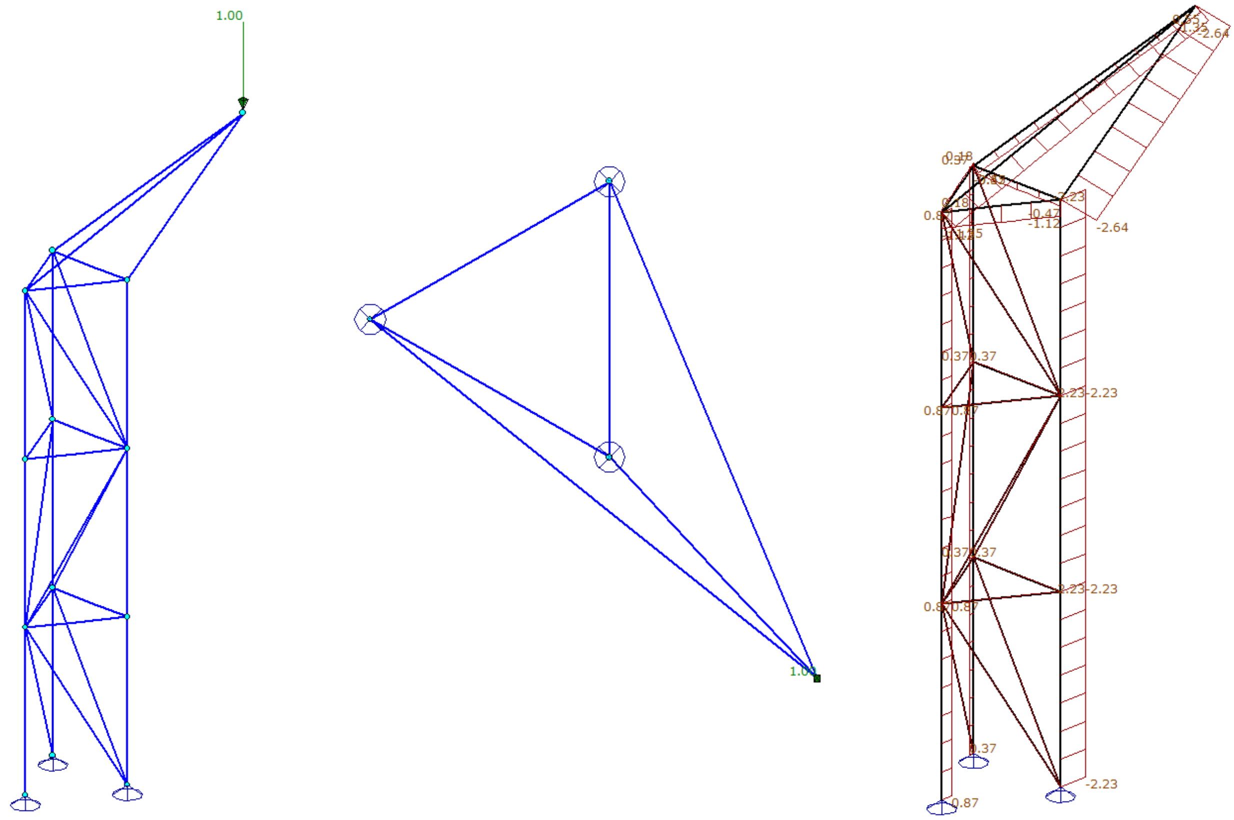
Een goede eerste poging lijkt het zwaartepunt van de drie randstaafdoorsnedes, dat is dus het zwaartepunt van de gelijkbenige driehoek die de doorsnede is. Laat men dit proberen in het computer-raamwerkprogramma MatrixFrame (Matrix Software, www.matrix-software.com): *EA* van alle staven is gesteld op 1 kN, $F = 1$ kN, zijden $2/\sqrt{3}$ m. Aangezien alle staven de zelfde *EA* hebben maakt het voor de krachtsverdeling niet uit welke waarde van EA men kiest, maar voor de volledigheid wordt het hier vermeld. De constructie is ingevoerd als vakwerk met scharnierende verbindingen:



Afbeelding 20: MatrixFrame-uitkomst

Een oplegging in het verlengde van het normaalkrachtencentrum van de drie randstaven levert inderdaad een kracht ter grootte van $1/3F$ in alle drie de staven, en bovendien een kracht van nul in alle diagonalen.

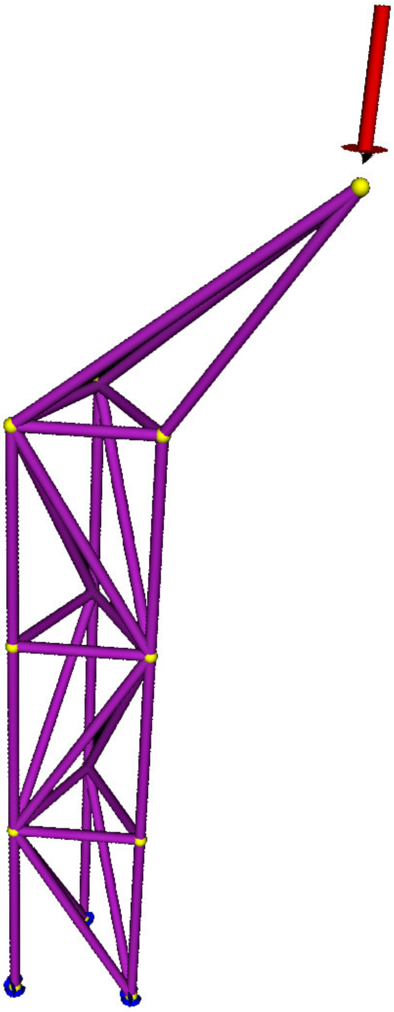
Laat men nu eens onderzoeken wat er gebeurt als de belasting op een vreemde plek wordt aangebracht:



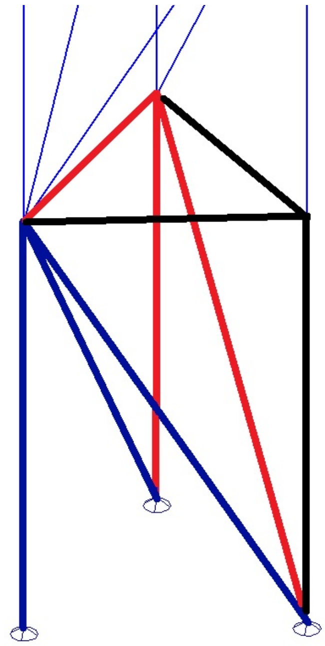
Afbeelding 21: MatrixFrame-uitkomst voor uitkraging

Wederom is er normaalkracht in alle drie de randstaven, maar nul in de diagonalen. Het is het waard dit verder te onderzoeken.

Opmerking: De berekening voor dit vakwerk is ook uitgevoerd in het discrete-elementenprogramma 3D Truss (ir. J.W. Welleman, http://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/software/truss3D), en interessant hierbij is dat alle berekende krachten exact overeenkomen met die uit MatrixFrame. Voor details zie de bijlage.



Afbeelding 22: 3D model gegenereerd door 3D Truss



Afbeelding 23: Vormvaste piramiden

Laat men eerst kijken naar de al dan niet statische bepaaldheid van deze constructie. Reeds door het feit dat raamwerkprogrammas uitkomsten geven krijgt men het vermoeden dat dat deze constructie kinematisch bepaald is, men kan het ook door inspectie inzien door naar vormvaste piramiden te zoeken vanaf de opleggingen: zie afbeelding 23.

Alternatief kan men gebruik maken van de welbekende formule voor de kinematische bepaaldheid, ofwel vormvastheid, van driedimensionale vakwerken:

$$s \geqslant 3k - 6 \tag{12}$$

Met s het aantal staven, k het aantal knooppunten. De staven moeten wel doelmatig zijn aangebracht, dus dit is een minimale voorwaarde. Verder moet men opletten dat deze formule geldt voor vormvaste vakwerken op zich, dus zonder opleggingen. Men ziet gelijk de dat constructie los van haar opleggingen niet vormvast kan zijn, en het probleem zit onderin. Als men denkbeeldig drie staven aanbrengt tussen alle opleggingen, waarvan men weet dat zij nooit belast zullen worden, krijgt men hetzelfde resultaat. Dan heeft men s = 33, k = 13, en inderdaad: $33 = 3 \times 13 - 6$.

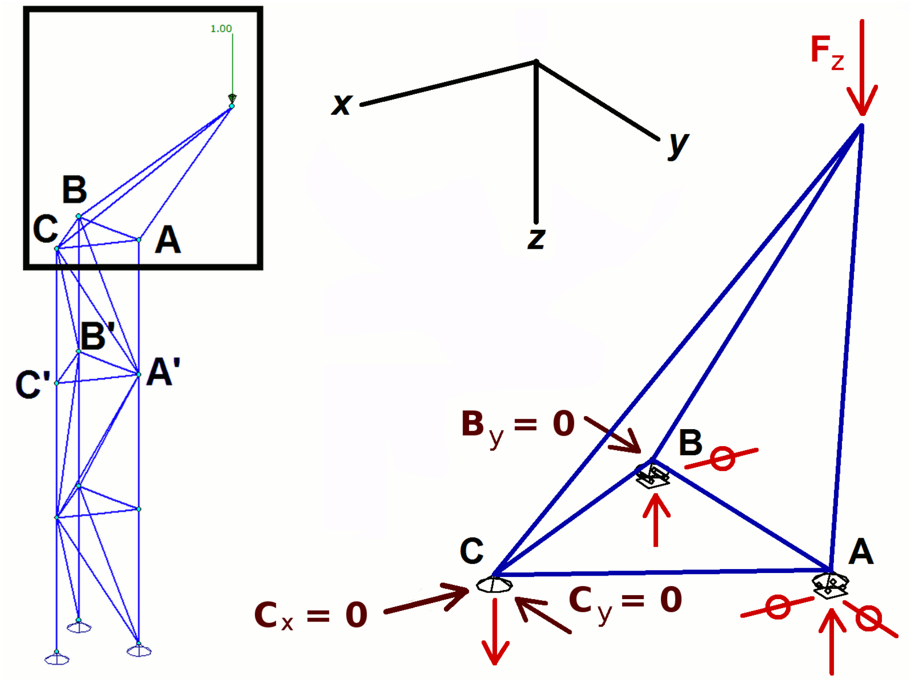
Nu men weet dat de constructie kinematisch bepaald is kan men met de volgende welbekende formule de graad van statisch onbepaaldheid n bepalen:

$$n = r + s - 3k \tag{13}$$

Met r het aantal oplegreacties. Deze analyse kan men weer voor de constructie zoals die is uitvoeren, en $r = 9$, $s = 30$ en $k = 13$, ofwel: $n = 9 + 30 - 3 \times 13 = 0$. De constructie blijkt dus statisch bepaald te zijn.

Opmerking: natuurlijk weet men dat onderin één pendelstaaf zit, waardoor men kan zeggen dat die werkt als roloplegging in twee dimensies op de rest van de constructie. Ook in dat geval: $n = 7 + 29 - 3 \times 12 = 0$.

Laat men nu eens kijken naar de bovenste piramide, voor het gemak met kleinere excentriciteit getekend. Deze kan men als volgt modelleren:



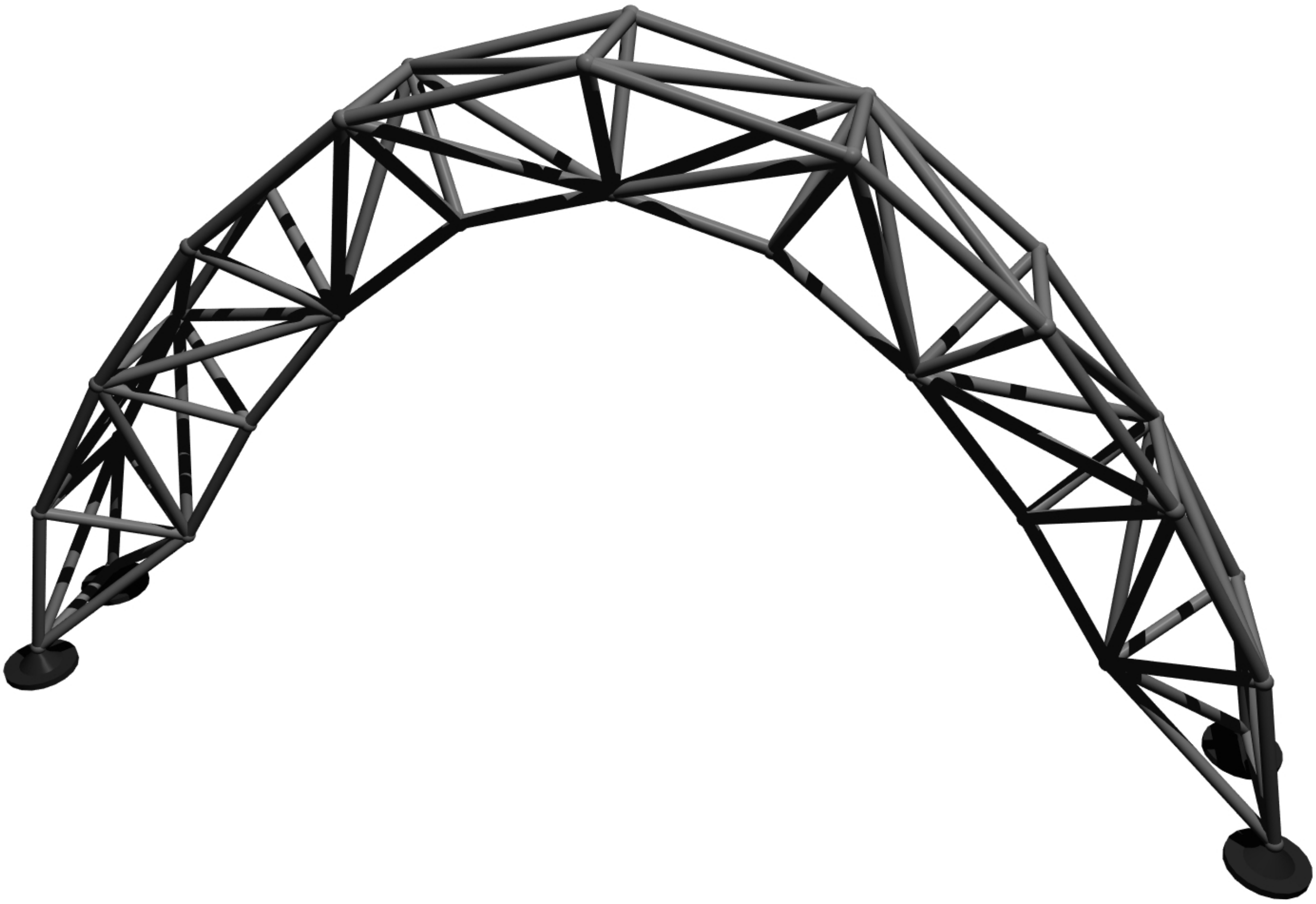
Afbeelding 24

Voor alleen een kracht in de top in y-richting geldt: A is een roloplegging vrij alle richtingen, dus oplegreacties A_x en A_z zijn nul, B is een roloplegging vrij in x-richting, dus $B_x = 0$. Uit evenwicht in x-richting volgt dat $C_x = 0$, en uit momentenevenwicht om de y-as volgt dat ook B_z en C_z nul moeten zijn. Hieruit volgt dat de normaalkracht in de diagonalen tussen ABC en $A'B'C'$ wel nul moet zijn, want anders resulteert altijd een kracht in een andere richting op driehoek ABC. Driehoek $A'B'C$ wordt van boven dus ook alleen door een kracht in y-richting belast, en eenzelfde analyse leert dat ook de normaalkracht in de diagonalen daaronder nul moet zijn. Conclusie: De diagonalen worden alleen belast als de doorsnede wordt belast op dwarskracht (V_x, V_z) of torsie (T_y). Deze conclusie kan men ook trekken uit het feit dat de constructie statisch bepaald is, de randstaven alleen zijn in staat evenwicht te maken met F_y, dus dat moet wel de enige juiste krachtsverdeling zijn.

3.4 ANDERE OPLEGGINGEN EN HUN INVLOED OP DE KRACHTSVERDELING

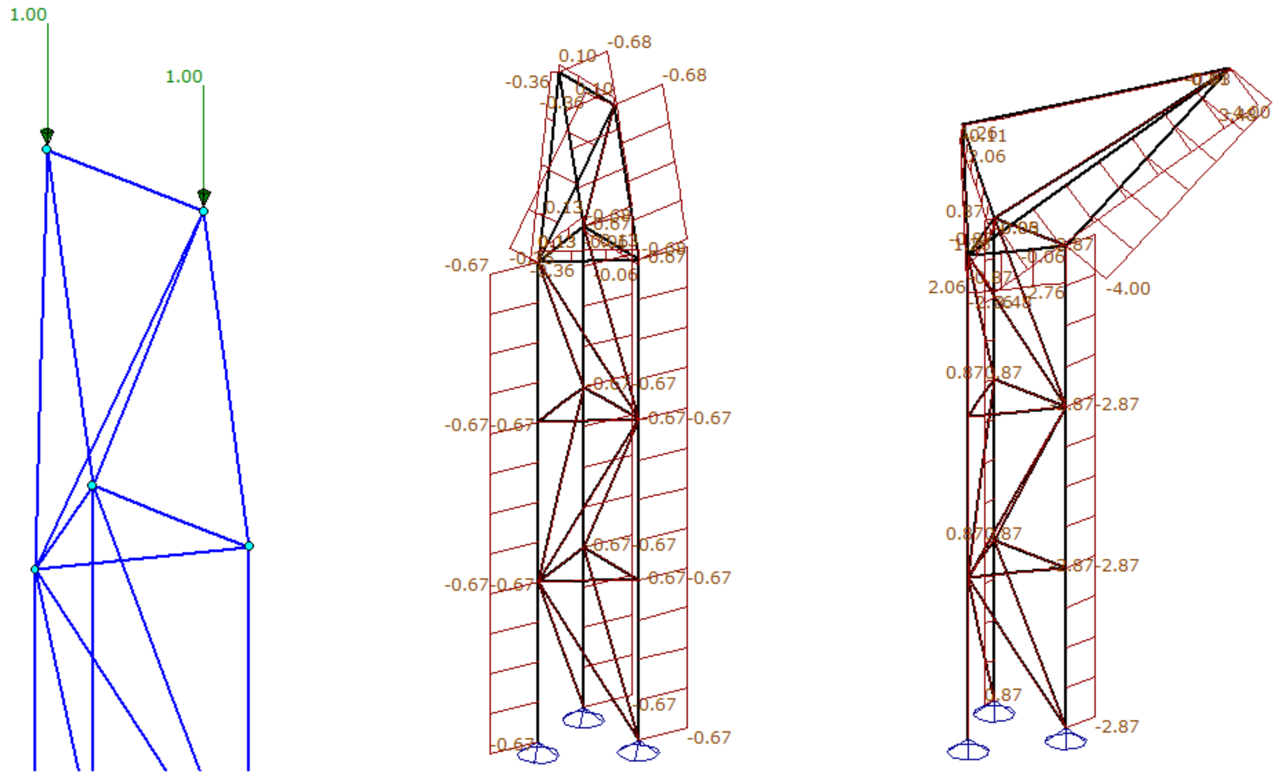
3.4.1 BOOG OP VIER SCHARNIEREN

Men kan ook een boog maken die uit zichzelf stabiel staat, met twee scharnieren aan elk uiteinde:



Afbeelding 25: Boog met twee scharnieren aan elk uiteinde, overspanning *L* = 10 m, *Hoogte* = 5 m, 10 vakken

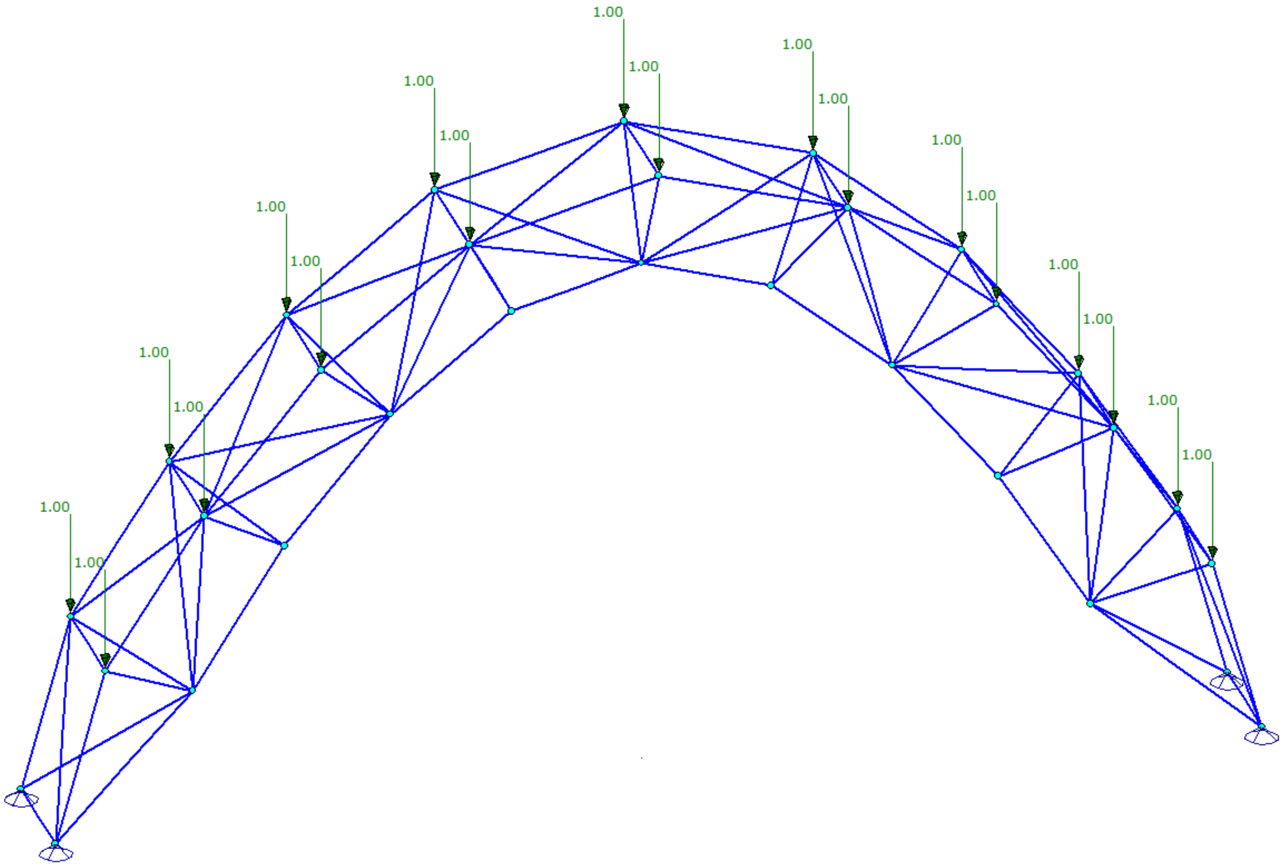
De testopstelling horend bij deze oplegging:



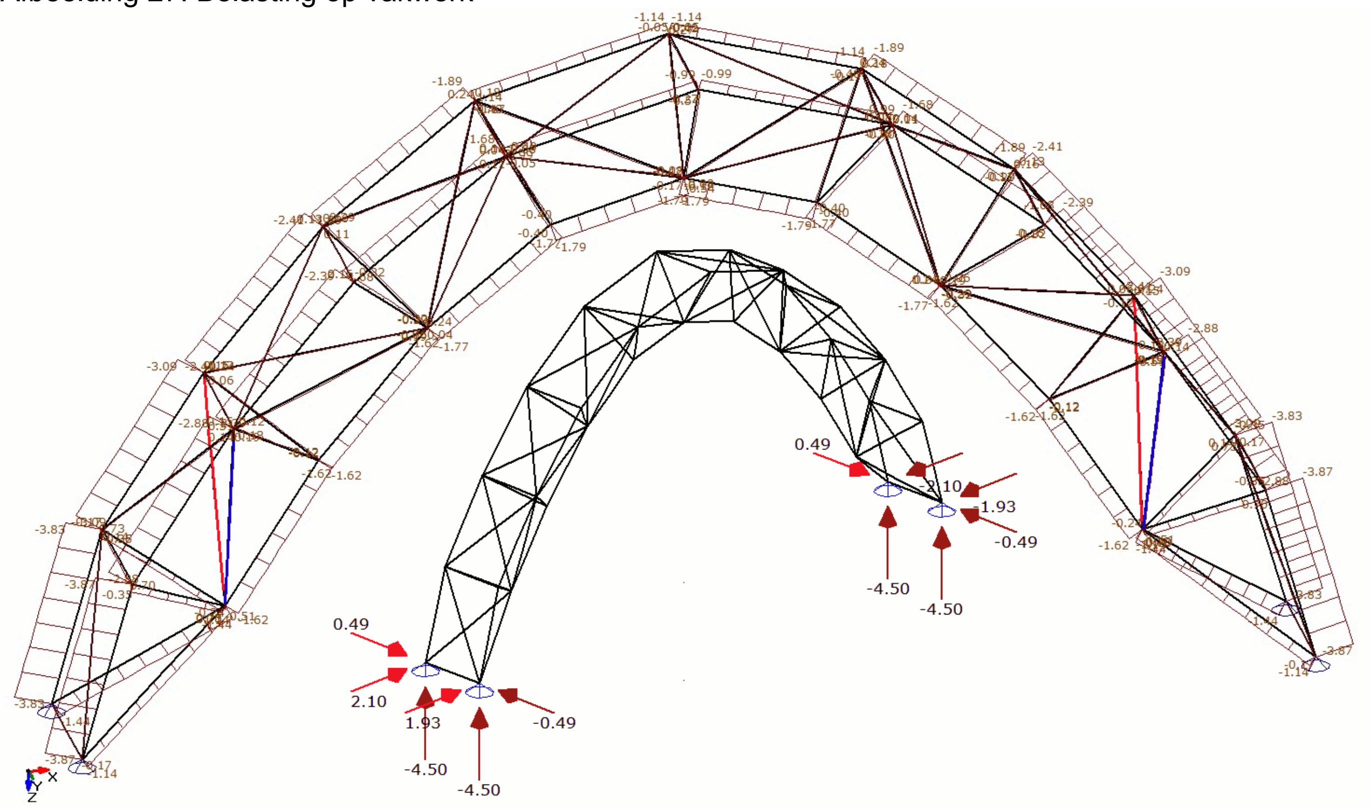
Afbeelding 26: Dubbele oplegging, belasting in zwaartepunt, belasting op willekeurige plekken

Ook voor deze situatie geldt met eenzelfde analyse als voor de enkele belasting dat de diagonalen alleen belast worden in het geval van torsie of dwarskracht.

Laat men de boog (afbeelding 25) doorrekenen in MatrixFrame en kijken wat de resultaten zijn. Met EA = 1 kN, en puntlasten F = 1 kN zoals hieronder weergegeven:



Afbeelding 27: Belasting op vakwerk



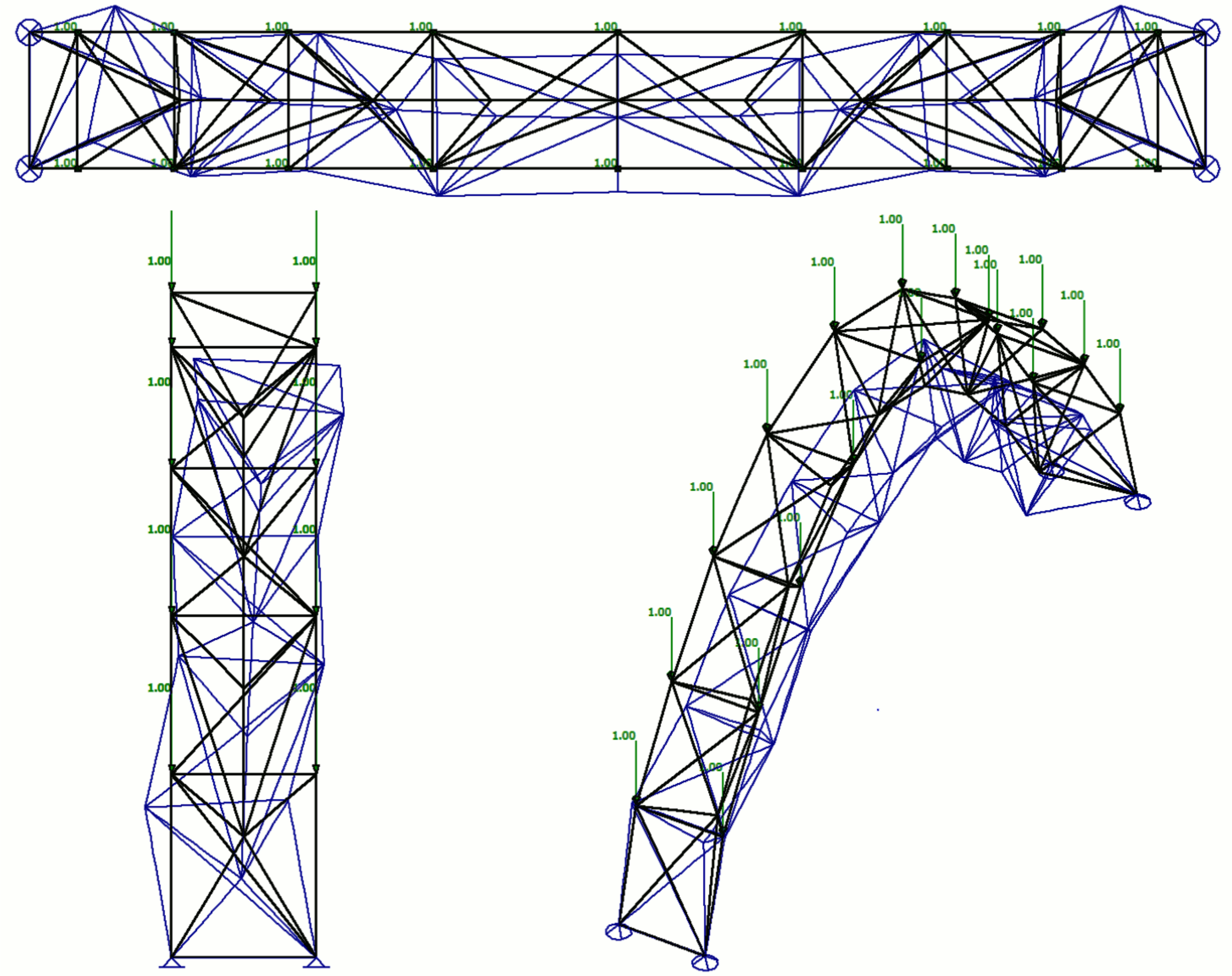
Afbeelding 28: Resultaten van MatrixFrame-berekening

Bij deze resultaten valt een aantal dingen op:

1. Alle diagonalen worden zeer weinig belast. Maximum kracht in zijdiagonalen van -0,51 (blauw) en -0,24 (rood).

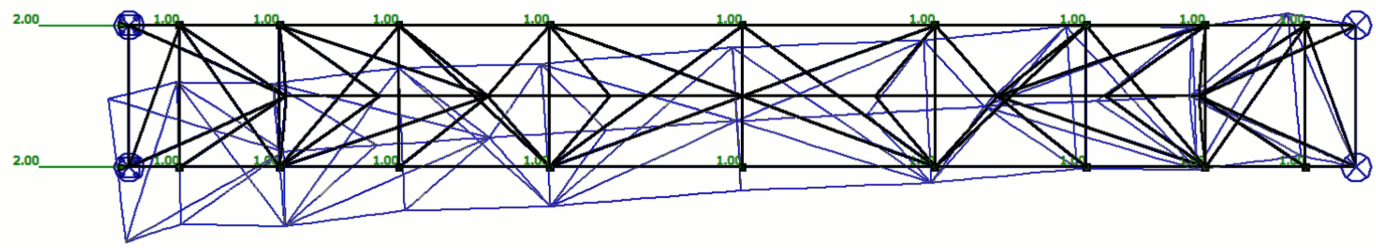
2. Maar er is helaas een asymmetrische krachtsverdeling in de boog waarbij de achterkant zwaarder wordt belast dan de voorkant.

Inzicht in waarom dit gebeurt kan men krijgen door naar de vervorming te kijken:



Afbeelding 29: Vervorming van vakwerkboog op twee scharnieren aan elke uiteinde

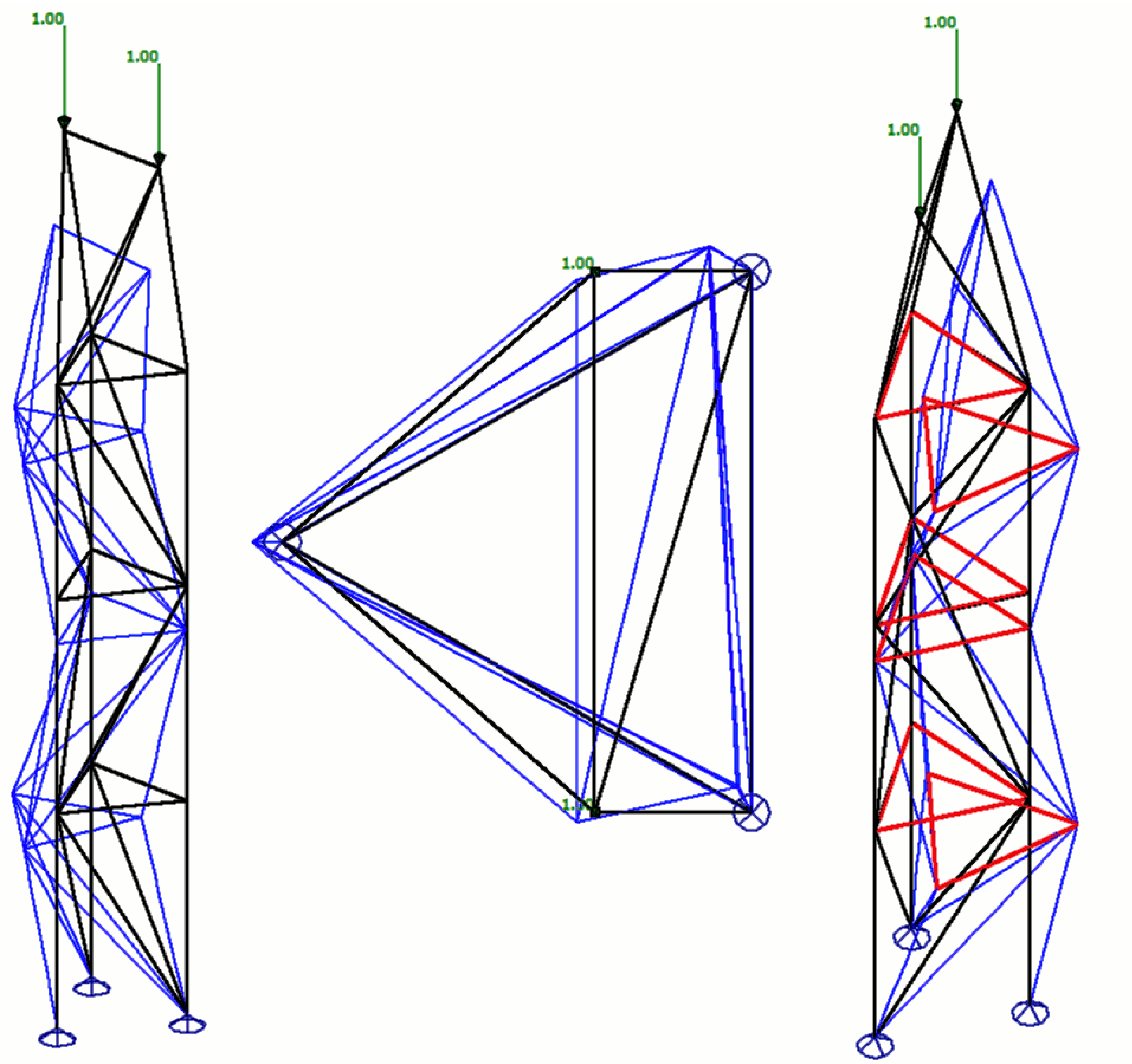
Een ander inzicht geeft hetzelfde vakwerk, maar dan aan een kant opgelegd op glijopleggingen met de spatkracht handmatig aangebracht, krachtsverdeling is te vinden in de bijlage:



Afbeelding 30: Hetzelfde vakwerk op glijopleggingen, en handmatig aangebrachte spatkracht

De krachtsverdeling in deze situatie is overigens vrijwel symmetrisch, dat is met verschillen maximaal rond orde 0,001 kN, waarschijnlijk veroorzaakt door de voorwaarde dat alle vier oplegpunten in het vlak moeten blijven. Men ziet duidelijk dat onder invloed van de diagonalen in het dakvlak het vakwerk wil verbuigen. Met de opleggingen op de vier scharnieren kan dat natuurlijk niet, en aldus worden buigende momenten en torsiemomenten in de constructie opgewekt, met als gevolg de asymmetrische krachtsverdeling.

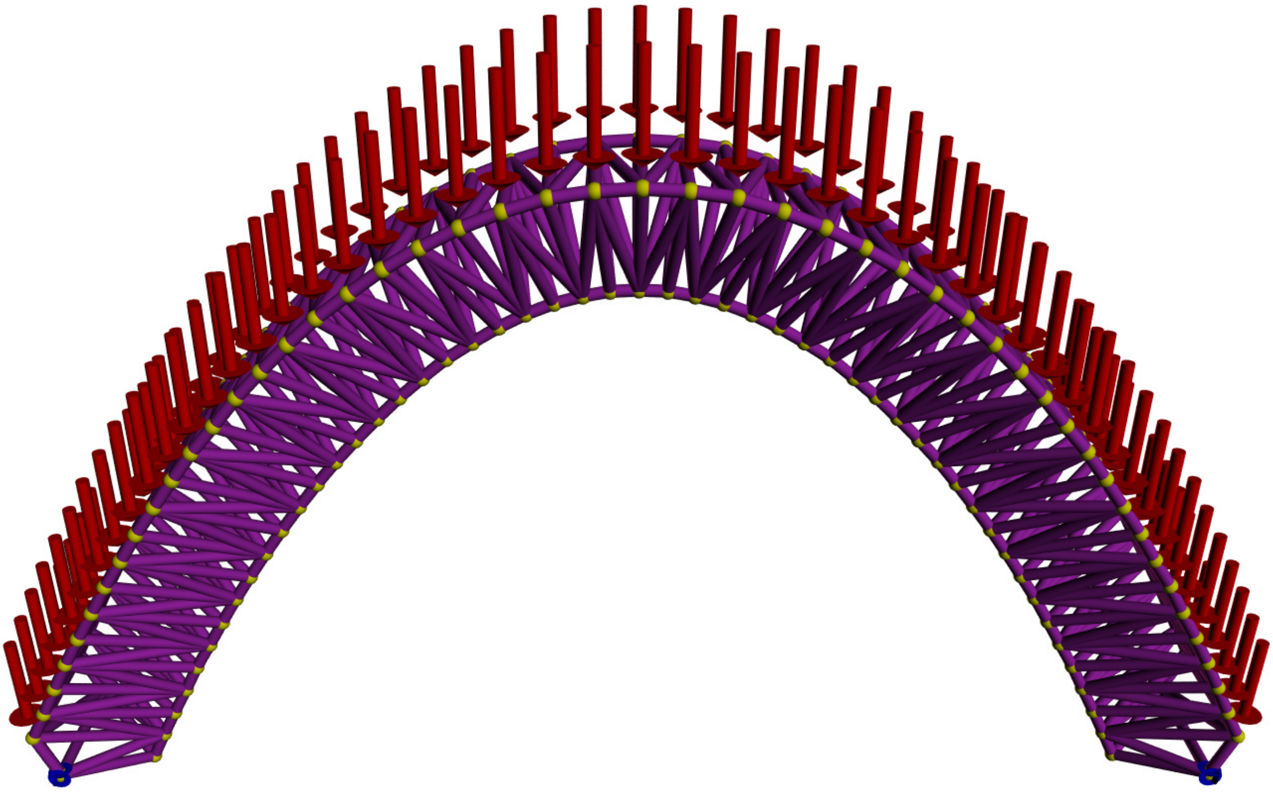
Het precies onderzoeken van het mechanisme dat hieraan ten grondslag ligt valt buiten het kader van dit onderzoek. Desalniettemin kan men misschien enigszins inzicht krijgen door het volgende: Als men naar de vervorming kijkt van de testopstelling:



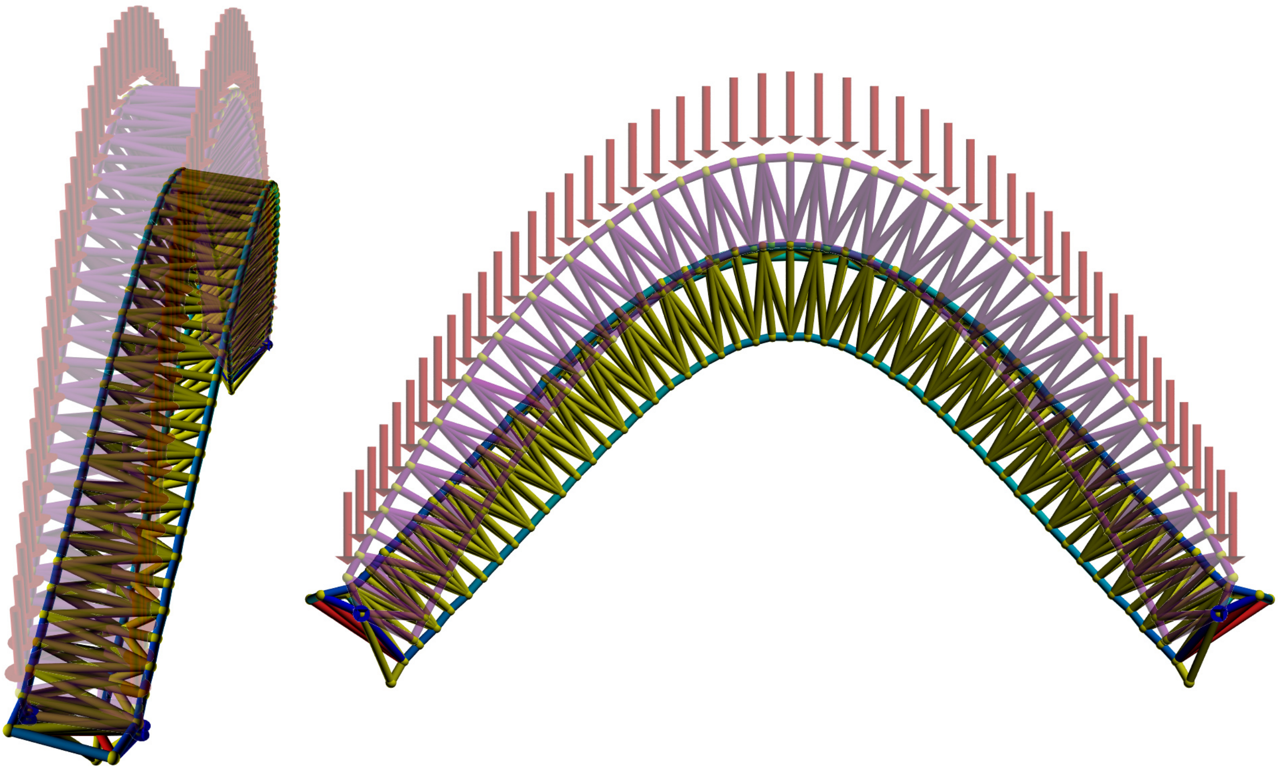
Afbeelding 31: Vervorming van testopstelling

dan ziet men dat, onder invloed van de om en om van richting wisselende diagonalen de horizontale vlakken driehoekige vlakken (rood), steeds in omkerende richting willen verdraaien. Men kan zich voorstellen dat in onze boog de totale normaalkracht niet constant is, waardoor de verdraaiingen niet constant zijn. Verder werken er in de boog momenten waardoor de driehoekige vlakken niet recht blijven. Men ziet in afbeelding 29 in het zij-aanzicht dat de driehoekige vlakken in de boog verdraaid zijn net als in de testopstelling.

Het is wellicht interessant om te zien hoe deze vervorming zich ontwikkelt bij een boog met veel meer vakken dan 10. Als men dezelfde boog genereert, maar dan met 50 vakken, en deze invoert in het programma 3D Truss krijgt men het volgende resultaat:



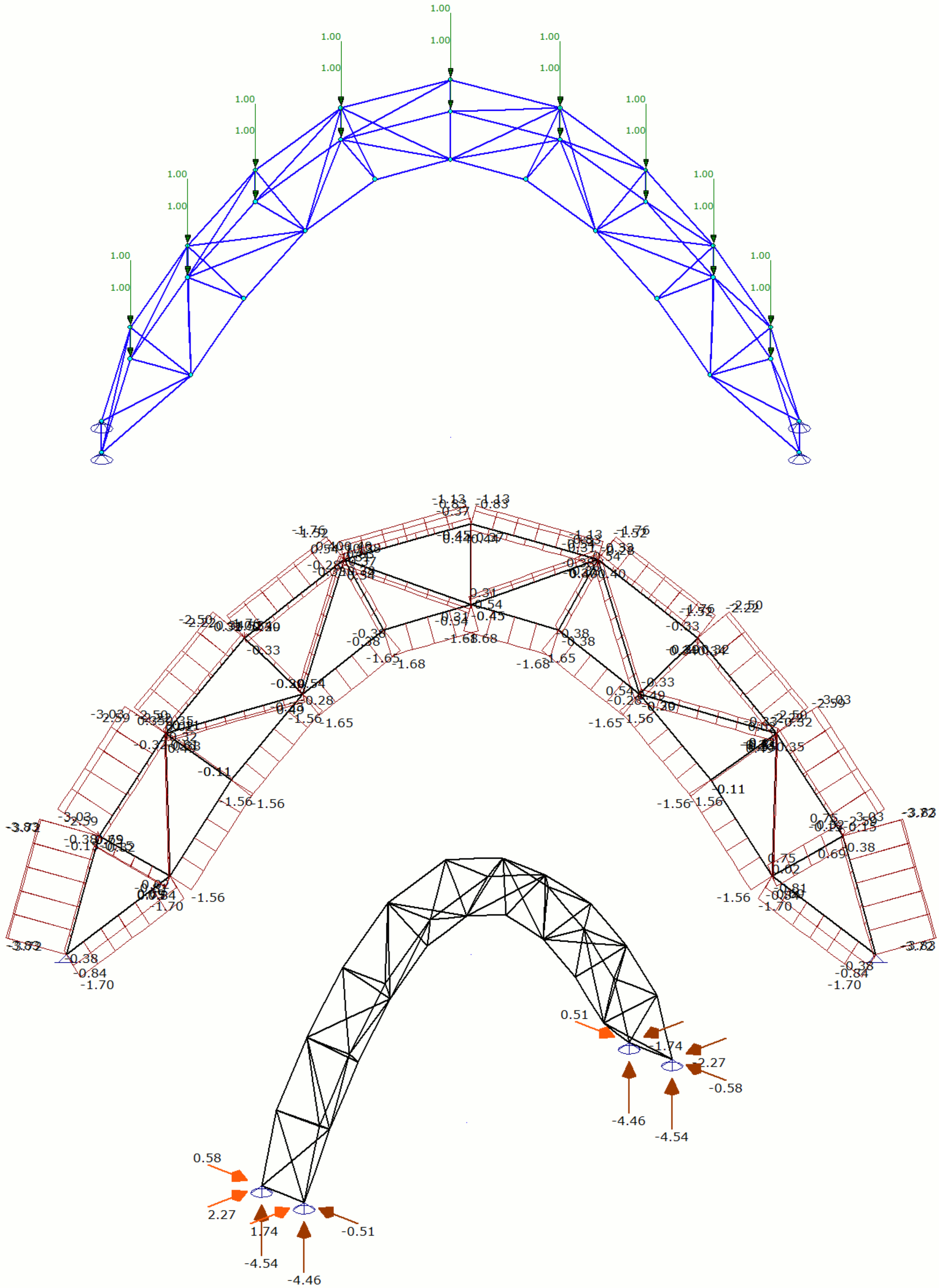
Afbeelding 32: Truss 3D geometrie en belasting



Afbeelding 33: Vervorming van hoge-resolutie-vakwerk

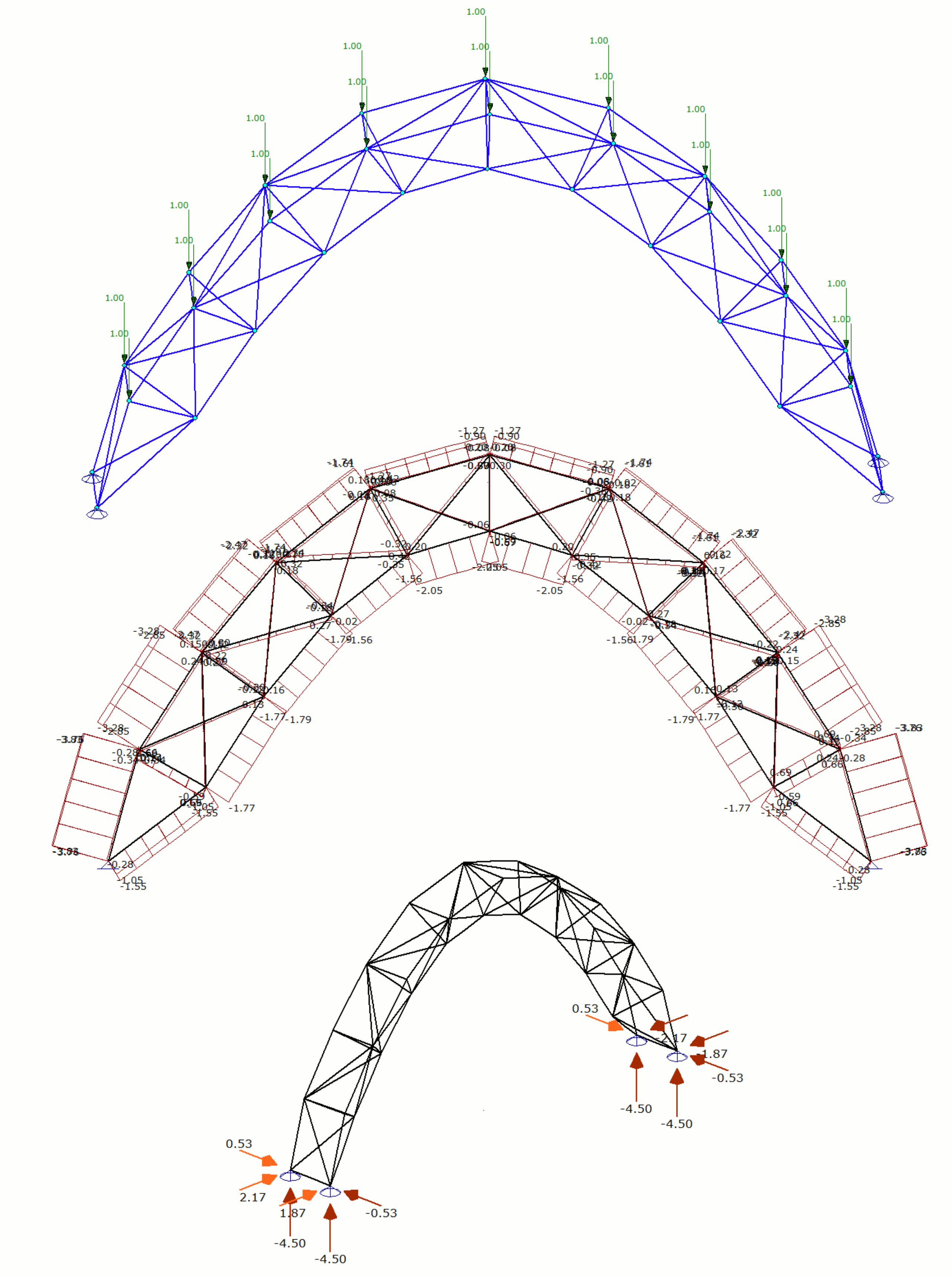
3.4.2 ANDERE DIAGONAALCONFIGURATIES BIJ DE BOOG OP VIER SCHARNIEREN

ALLE BOVENDIAGONALEN IN ÉÉN RICHTING



Afbeelding 34: Alle bovendiagonalen één kant op

STIJGENDE ZIJDIAGONAAL TEGENOVER DALENDE ZIJDIAGONAAL



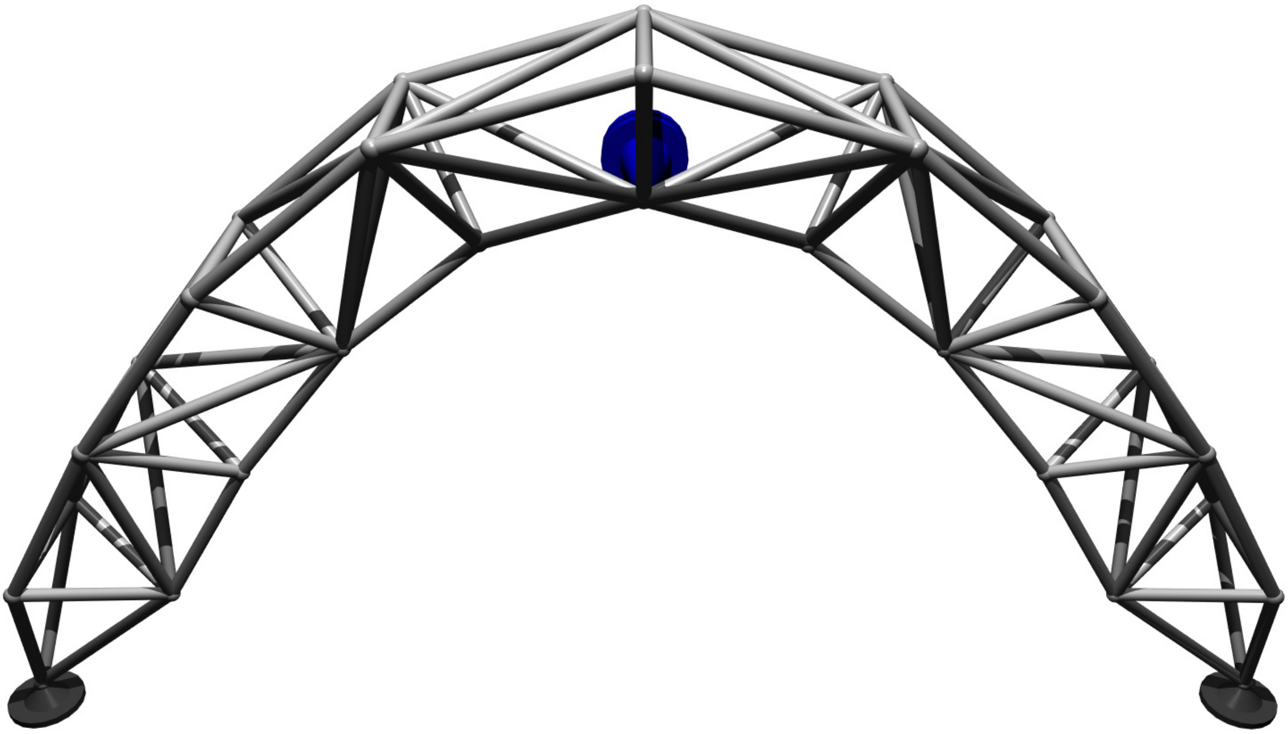
Afbeelding 35: Stijgende diagonaal tegenover dalende diagonaal

Men ziet dat de andere diagonaalconfiguraties de asymmetrische krachtsverdeling nauwelijks verminderen.

3.5 ONZE VAKWERKBOOG

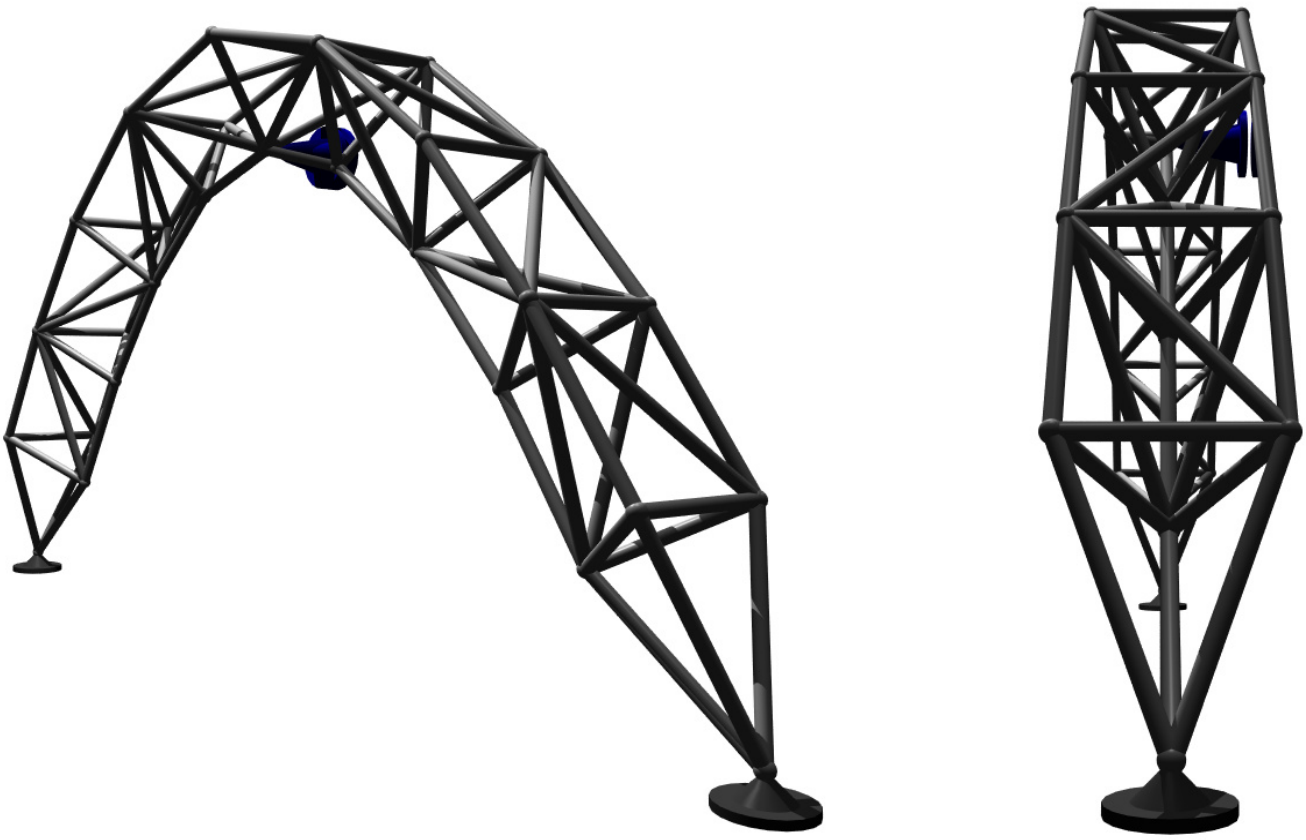
Na de inzichten opgedaan in de vorige paragrafen, laat men nu als uitgangspunt nemen dat de boog aan beide uiteinden wordt opgelegd op één scharnierende verbinding. Als men dat doet kan de boog natuurlijk nog kantelen, dus wordt de boog in het onderste middenscharnier beperkt tot beweging in zijn vlak.

Laat men als voorbeeld eens een boog maken met een overspanning van L = 10 m, hoogte *Hoogte* = 5 m, en 10 vakken, hartlijn op 2/3 (d_{boven} = 1/3 h) van doorsnede-hoogte van h = 1 m:



Afbeelding 36: Impressie van de boog

In donkergrijs de oplegscharnieren, en in blauw de beperking die het onderste scharnier in het midden verhindert te bewegen uit het vlak van de boog.



Afbeelding 37: Andere aanzichten

Voor onze voorbeeldboog geldt (zie ook MAPLE-blad, bijlage):

PLAATSFUNCTIE $z=\frac{(x-L/2)(x+L/2)}{(L/2)^2}Hoogte=\frac{(x-5)(x+5)}{5}$ m

AFGELEIDE VAN PLAATSFUNCTIE $\frac{dz}{dx}=\frac{2}{5}x$

LENGTE VAN HARTLIJN $L_H=\int_{-L/2}^{L/2}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx=\int_{-5}^{5}\sqrt{1+\left(\frac{2}{5}x\right)^2}dx=14{,}789$ m

LENGTE VAN VAK $l=L_H/(\#\text{ vakken})=14{,}789/10=1{,}4789$ m

VAKWERKHOOGTE $h=1$ m

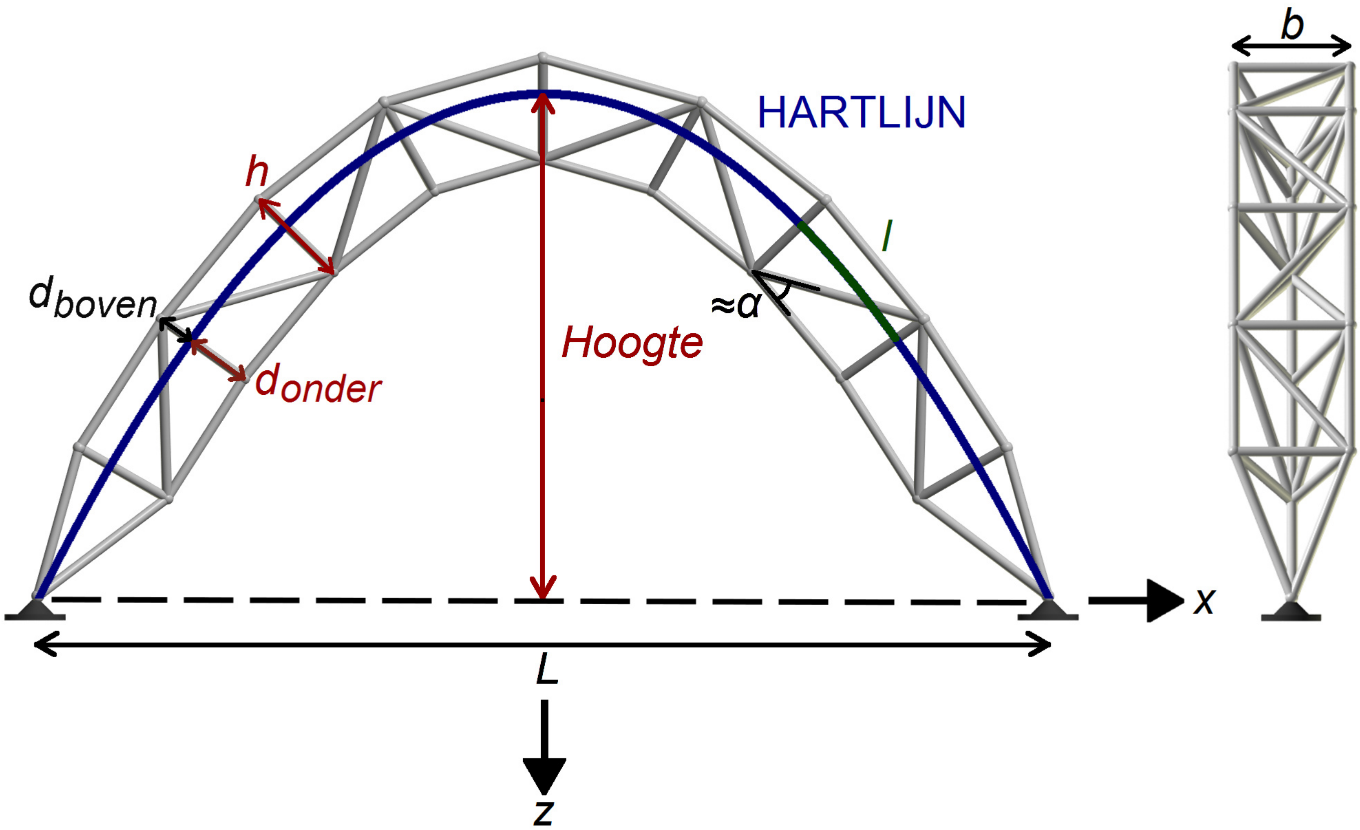
POSITIE VAN HARTLIJN $d_{\text{boven}}=\frac{1}{3}h=0{,}33$ m

$d_{\text{onder}}=\frac{2}{3}h=0{,}66$ m

HOEK VAN DIAGONALEN $\alpha\approx\arctan(h/l)=\arctan(1/1.4789)=34{,}07^{o}$

Het is noodzakelijk inzicht te krijgen in het gedrag van deze boog. Dat zal behandeld worden in het volgende hoofdstuk.

3.6 OVERZICHT VAN BELANGRIJKSTE GEBRUIKTE SYMBOLEN BIJ ONZE BOOG



Afbeelding 38 Overzicht symbolen bij boog

α is feitelijk niet constant, wel ongeveer. De definitie wordt gehanteerd dat:

$$\alpha \approx \arctan\left(\frac{h}{l}\right) \tag{14}$$

Deze hoek α is altijd positief, en houdt dus geen rekening met het stijgend of dalend zijn van een diagonaal. Dit is om de formules continu te houden.

Overal maakt de hartlijn van de boog en hoek met de horizontaal:

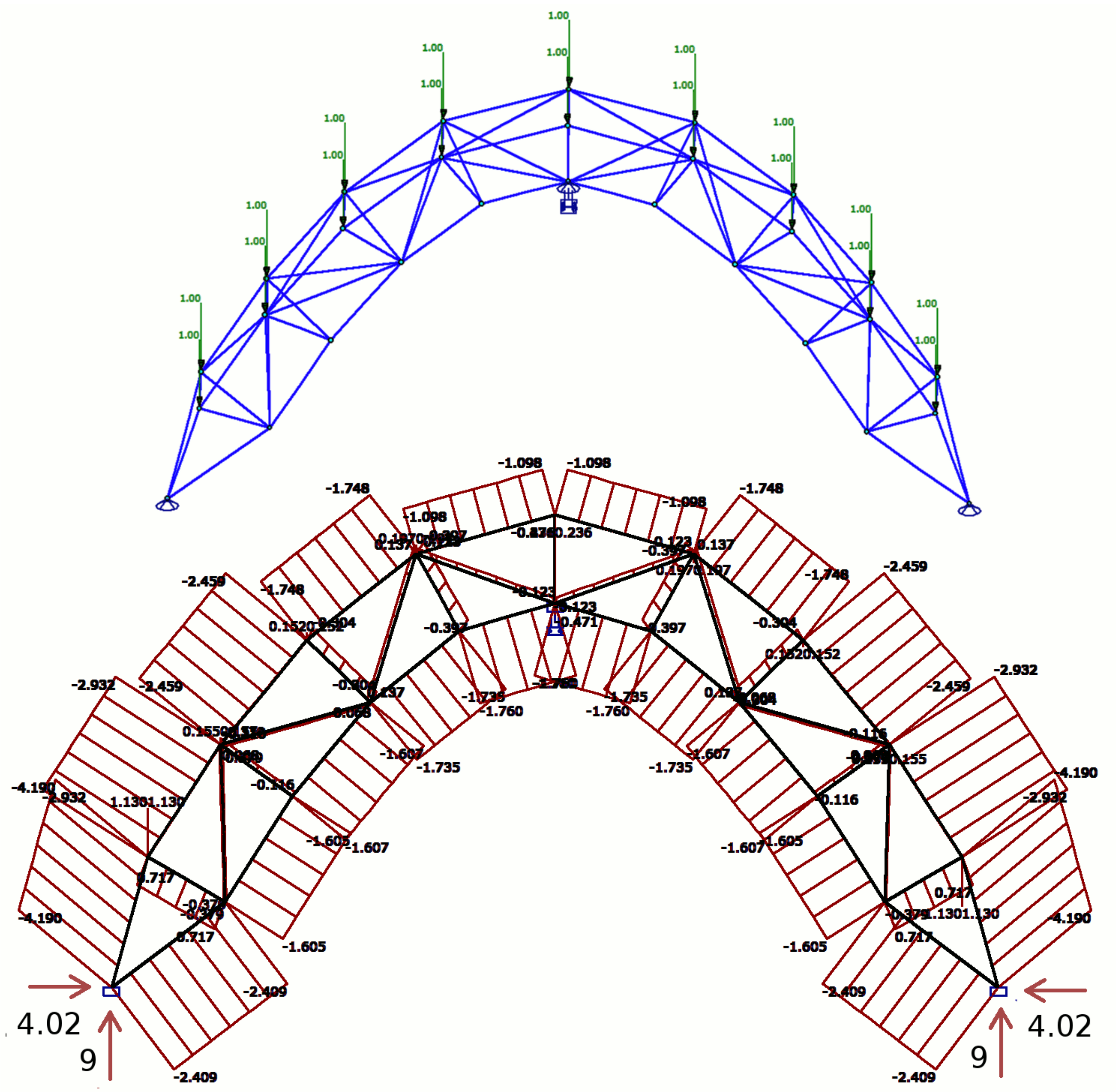
$$\theta = \arctan(dz/dx)$$

4 KRACHTEN IN ONZE VAKWERKBOOG

Nu onze vakwerkboog definitief is vastgesteld wil men weten hoe deze functioneert onder belasting. Men begint met een paar eindige-elementenberekeningen van de boog, in het eerste geval belast door constante puntlasten op de bovenknooppunten en in het tweede geval door een in horizontale richting constant verdeelde belasting op elke bovenrand, om een eerste indruk op te doen.

4.1 EERSTE INDRUK

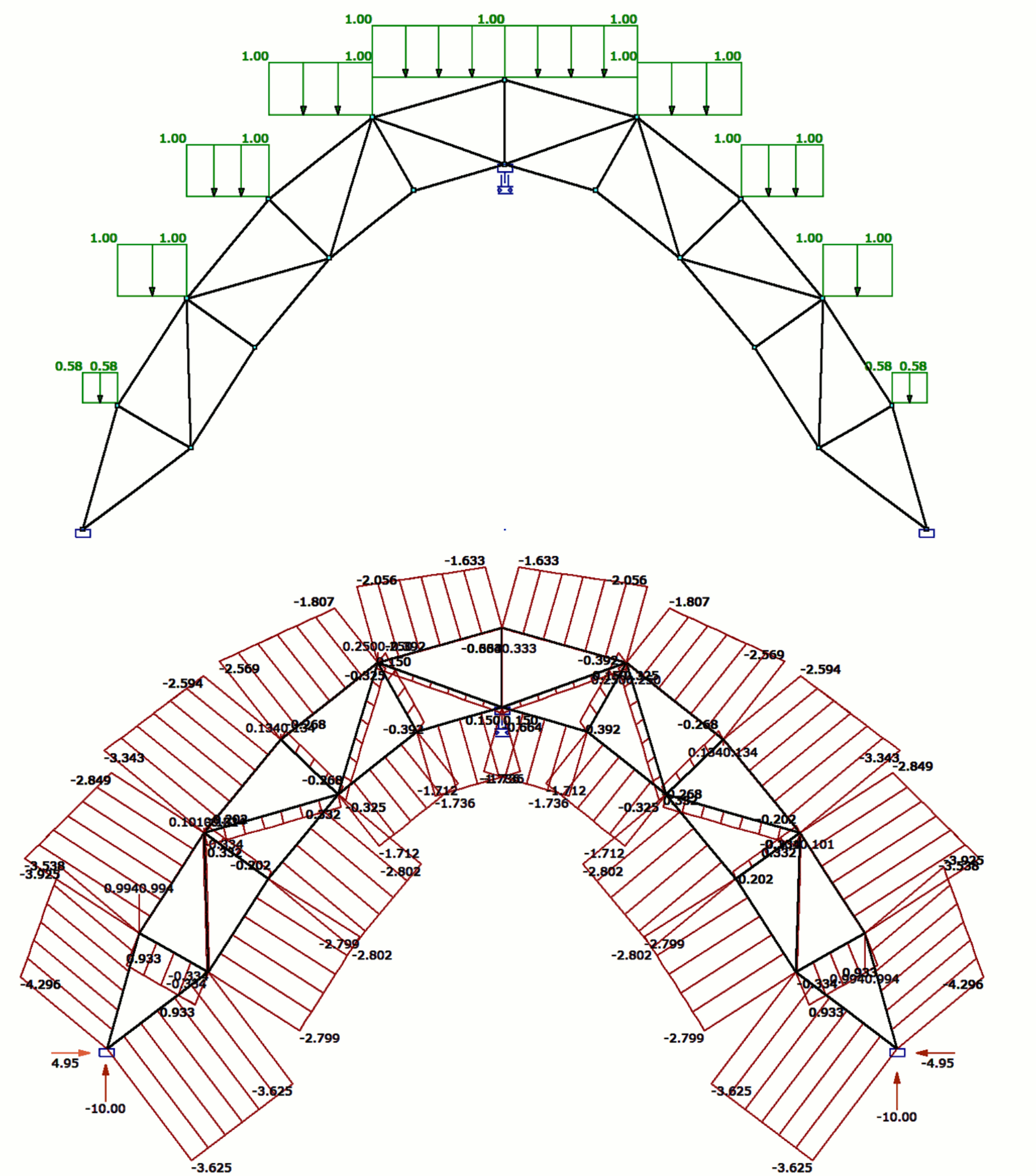
Laat men eens kijken hoe de krachtsverdeling is onder een belasting zoals het dak van een hal op de boog ongeveer zou uitoefenen, met gelijke krachten in alle bovenste scharnieren. De MatrixFrame-berekening:



Afbeelding 39: MatrixFrame-berekening van de boog

De resultaten van deze berekening zien er gunstig uit: De normaalkracht in de zijdiagonalen blijft laag zoals gehoopt, met een maximum van -0,38 kN voor de uiterste diagonalen links en rechts. De normaalkracht in alle bovendiagonalen is nul. Dit is altijd zo bij slechts verticale belasting. In het algemeen is de gehele krachtsverdeling symmetrisch. Bovendien is deze boog enkelvoudig statisch onbepaald, met als enige statisch onbepaalde is de horizontale spatkracht (4,02 kN). Er is wel een aanzienlijk verschil in belasting de onderrandstaaf en de twee bovenrandstaven, hetgeen duidt op aanzienlijke momenten in de boog. Dat is niet verwonderlijk aangezien onze parabolische boogvorm de druklijn volgt bij een belasting per eenheid van horizontale lengte, wat hier zeker niet het geval is.

Natuurlijk zou men verwachten dat onze boog met zijn parabolische hartlijn geoptimaliseerd is voor een gelijkmatig langs horizontale lengte verdeelde belasting. Laat men dus eens de krachtsverdeling bekijken bij een verdeelde belasting van q_{rand} = 1 kN/m op elke bovenrand, in totaal per horizontale lengte dus q = 2 kN/m:



Afbeelding 40

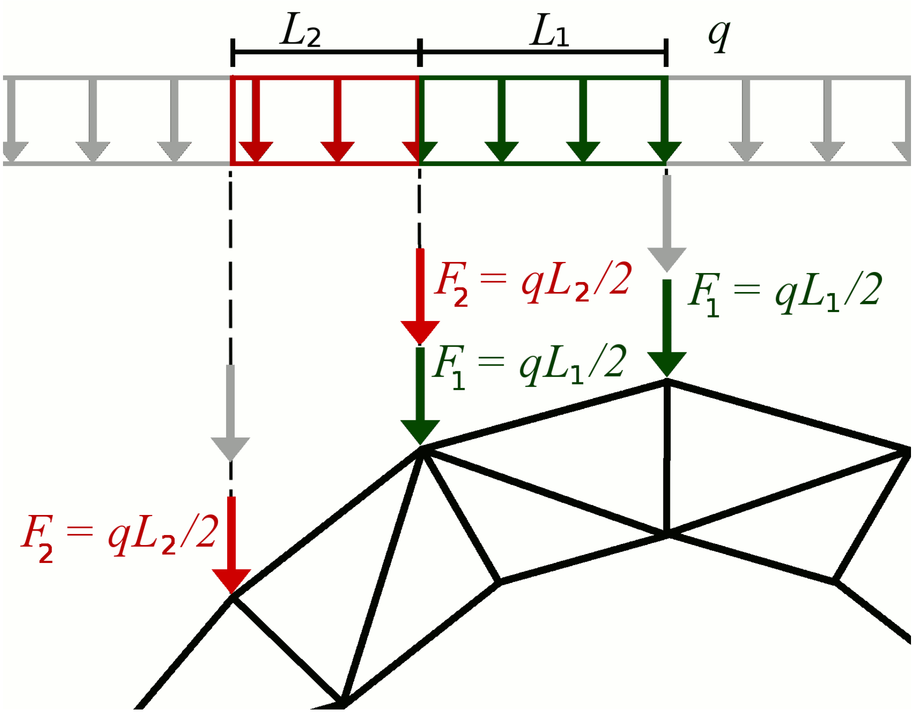
Opmerking 1: De totale belasting in het geval hiervoor met discrete belastingen is 18 kN, en hier 20 kN. Men dient daar rekening mee te houden bij het interpreteren van de diagrammen.

Opmerking 2: De verdeelde belasting van 0,58 kN aan de randen is om te corrigeren voor de *z*-component (in de tekening) van de staven waar deze op rust.

Het eerste dat opvalt is dat de normaalkrachten in de diagonalen relatief zeker niet lager zijn dan in het geval met losse eenheidslasten, terwijl men dat misschien wel zou verwachten. Ze blijven echter wel laag ten opzichte van de krachten in de randstaven, wat hetgeen was dat men wilde bereiken. Op de belasting in deze zijdiagonalen wordt in 5.4.1 en 5.4.2 teruggekomen.

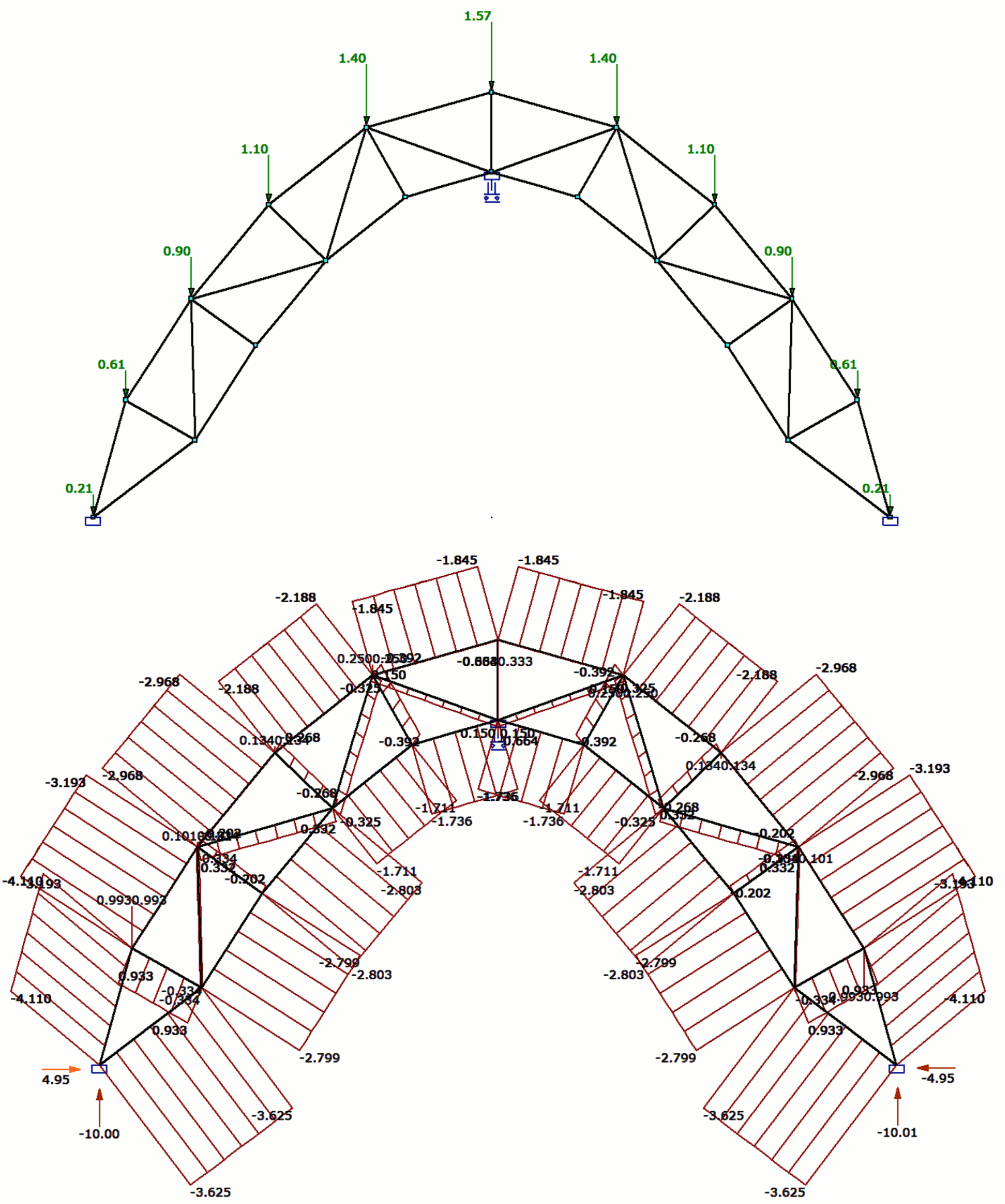
De belasting is nu veel meer gelijkmatig verdeeld over alle randstaven, wat ook hetgeen was dat men verwachtte.

Verder vallen de abrupte sprongen in belasting van de onderrand op, terwijl de bovenrand vrij continu oplopend wordt belast, de lineaire toenamen in de bovenrandstaven ten gevolge van de verdeelde belasting die op die staven werkt nog daargelaten, want dit effect blijft wanneer men een gelijkwaardige belasting in losse lasten aanbrengt op de volgende manier:



Afbeelding 41 Verhouding van continue belasting tot losse lasten

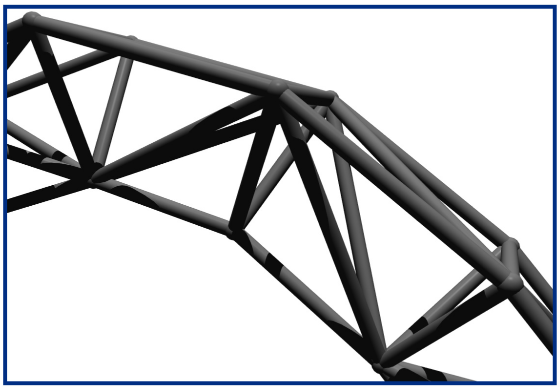
Dan heeft men met de losse lasten F_i de situatie die gegeven deze q werkelijk bij ons vakwerk hoort omdat ons vakwerk alleen wordt belast door puntlasten in knooppunten. Ten opzichte van elk knooppunt zijn de situatie met losse krachten F_i en de toestand met verdeelde belasting q statisch equivalent aan elkaar. Op dit principe wordt meer uitgebreid teruggekomen in 4.2.1.

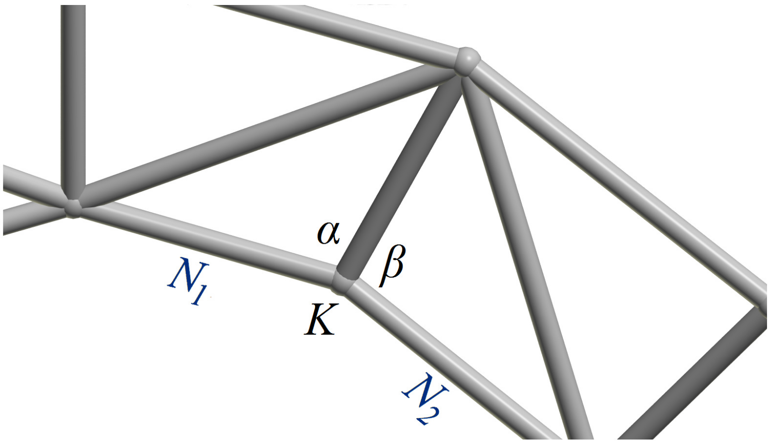


Afbeelding 42

Opmerking: afgezien van de bovenrandstaven zijn er hier en daar zeer kleine verschillen in berekende krachten vanwege het beperkt aantal beschikbare decimalen in MatrixFrame bij de definitie van de belastingen.

Als men bedenkt dat de onderrand extern onbelast is, want de reacties door de beperking in het midden zijn altijd nul bij afwezigheid van zijwaartse (in de tekening, y-richting) belasting, realiseert men zich dat de enige manier waarop de belasting in de onderrand aanzienlijk kan toenemen altijd per twee vakken is. Daar waar zich tussen twee onderrandstaven slechts twee verticalen bevinden blijken de krachten in deze twee onderrandstaven N_1 en N_2 altijd ongeveer gelijk. Hieruit doet men de aanname dat de hoeken α en β bij benadering gelijk zijn, overal in de boog. Hierop wordt in 5.6.1 teruggekomen. Bij onbelaste bovenrandstaven zou zich daar een vergelijkbare situatie voordoen. Van dit inzicht zal dankbaar gebruik worden gemaakt in 5.5 bij de schatting van de normaalkracht in de randstaven.

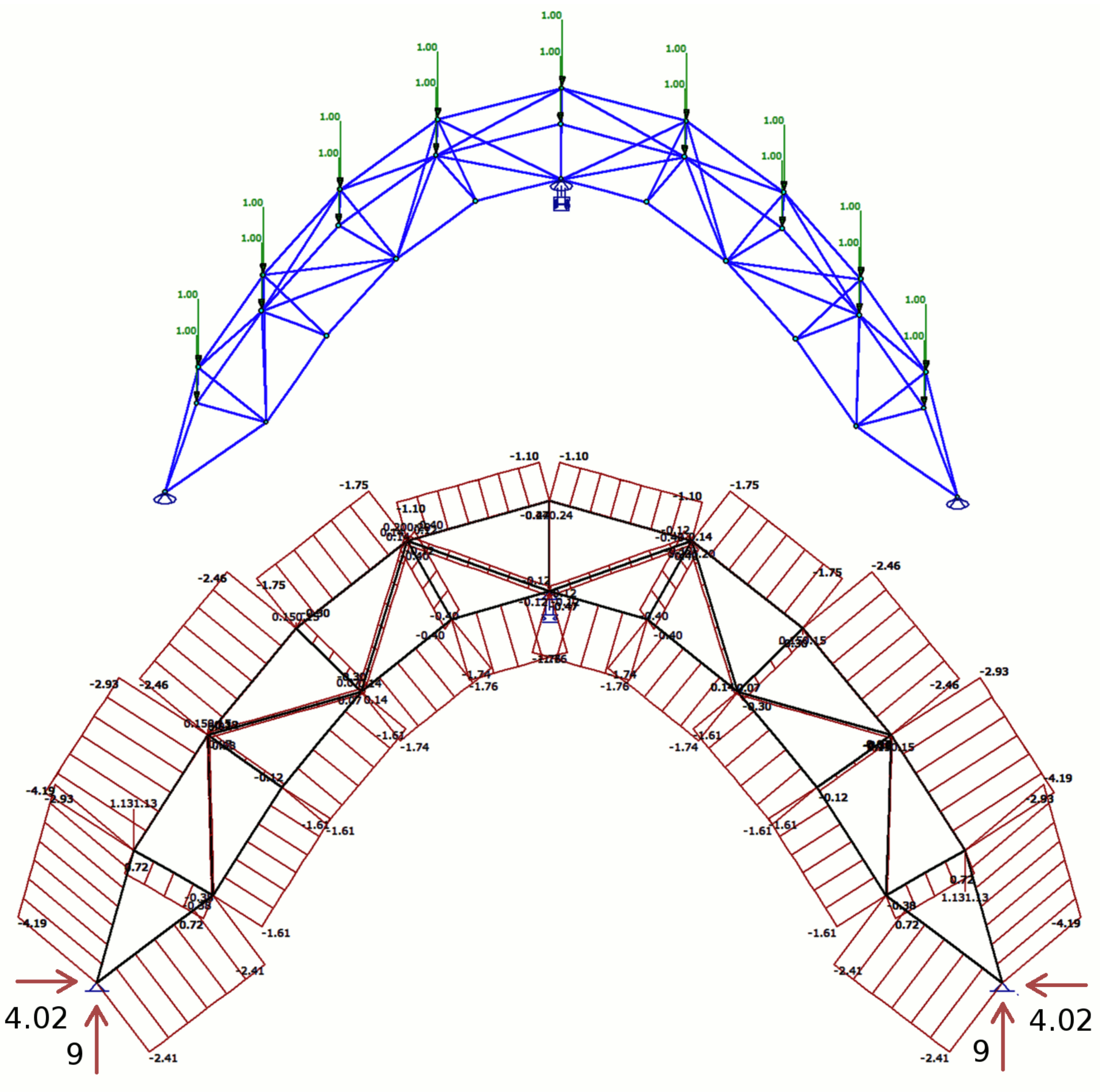




Afbeelding 43

4.2 RELATIE TUSSEN DE KRACHTEN IN ONZE VAKWERKBOOG EN DIE IN EEN MASSIEVE BOOG

Er moet meer inzicht verkregen worden in de krachtswerking in onze vakwerkboog. Afbeelding 39 uit 3.5 herhaald:



Afbeelding 44: Krachtsverdeling in onze vakwerkboog t.g.v. gelijke puntlasten in bovenste knopen

Men ziet dat de horizontale spatkracht $H = 4{,}02$ kN. Deze wil men ongeveer kunnen berekenen. Voor een boog met een EA en een EI op scharnierende opleggingen kan dat met **klassieke boogformule** [1]:

$$H = -\frac{\int_{boog} \frac{M^a z}{EI} ds}{\int_{boog} \frac{z^2}{EI} ds + \frac{l}{EA}} \tag{15}$$

M^a op statisch bepaald hoofdsysteem ten gevolge van q

$$M = M^a + H z \tag{16}$$

Stelt men zich de boog vrij opgelegd voor, dan bestaat de horizontale uitrekking van de boog bij de opleggingen uit:

$\int_{boog} \frac{M^a z}{EI} ds$ door alleen M^a,

$H \int_{boog} \frac{z^2}{EI} ds$ door het moment t.g.v. H,

$\frac{H l}{EA}$ door alleen N

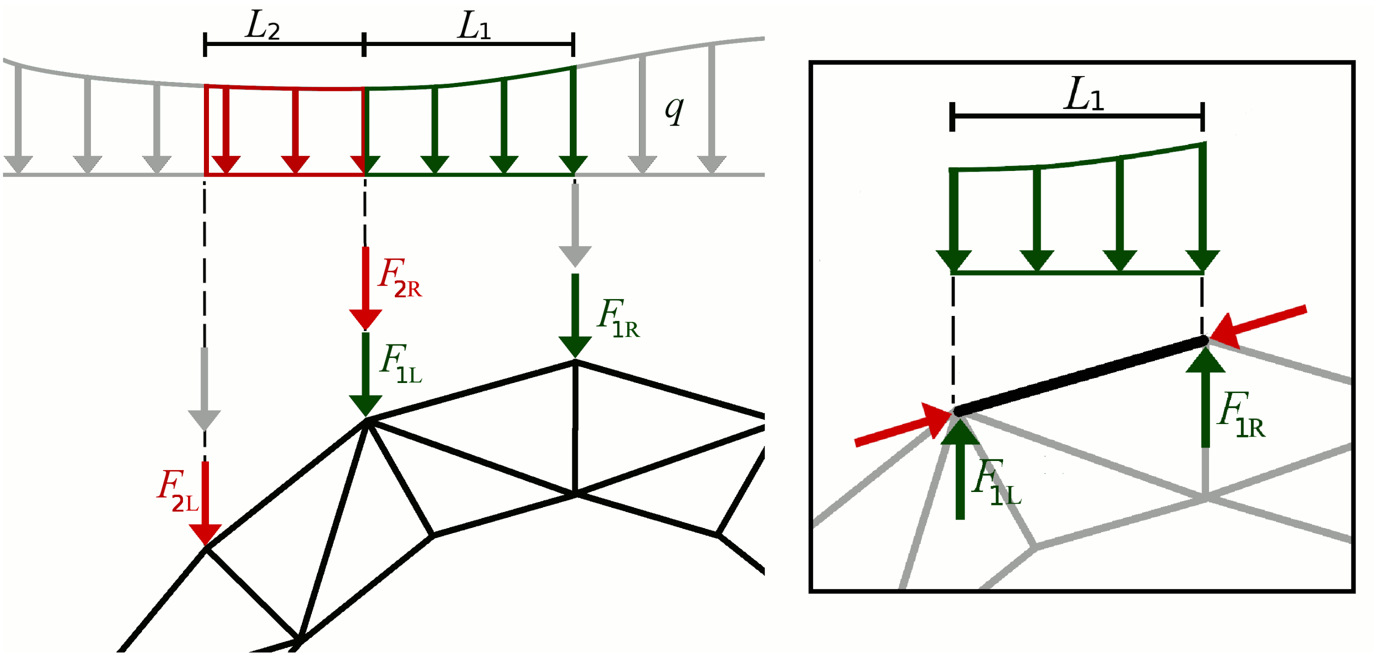
In (15) ziet men de grootheden *EI,* de buigstijfheid en *EA,* de rekstijfheid. Deze zijn gedefinieerd voor doorsneden van staven onder de hypothese van Bernoulli [2], maar niet meteen duidelijk is wat dat voor onze boog betekent. Wat men hier eigenlijk wil is onze boog modelleren als een lijnelement met een *EI* en een *EA*, en dan is de vraag wat die *EI* en *EA* moeten zijn voor een zo goed mogelijk overeenkomende vervorming. Laat men aannemen dat *EI* en *EA* voor onze boog constant zijn, wat niet onredelijk lijkt vanwege het grote aantal herhalende elementen. Dan kan men (15) herschrijven door teller en noemer te vermenigvuldigen met *EI*:

$$H = -\frac{\int_{\text{boog}} M^a z \, ds}{\int_{\text{boog}} z^2 ds + l \frac{EI}{EA}} \tag{17}$$

Men ziet dat men ten behoeve van de invloed door axiale vervorming nu één grootheid voor onze boog moet bepalen, namelijk $\frac{EI}{EA}$. Dit zal worden behandeld in 4.2.5 en 4.2.6. Laat men eerst eens kijken naar de bovenste integraal $\int_{boog} M^a z \, ds$: Hier komt het moment ten gevolge van alleen de belasting in voor, maar onze belasting bestaat hier uit puntlasten, ongeveer op gelijke afstand langs de boog. Naarmate men een boog heeft met meer vakken zal deze belasting steeds meer gaan lijken op een continue belasting langs booglengte, zoals een eigen gewicht. Laat men voor het gemak deze discrete belastingen dus continu maken.

4.2.1 CONTINU MAKEN VAN BELASTING

Ons vakwerk wordt in werkelijkheid alleen door puntlasten in de knooppunten belast, terwijl bij voorkeur modellen worden gebruikt waarin de belasting als continu verdeelde belasting over de staven is aangebracht, zodat men simpelere continue functies krijgt. Men moet dus goed weten hoe men een verdeelde belasting vertaalt naar een belasting met puntlasten.



Afbeelding 45

Als men een losse staaf beschouwt (afbeelding 45), en men ontbindt de krachten in beide uiteinden in een kracht in het verlengde van de staaf (rood), en een kracht in dezelfde richting als de belasting (groen), dan ziet men dat vanwege momentenevenwicht F_{1R} en F_{1L} gelijk moeten zijn aan de oplegreacties zoals die er zouden zijn bij een balk onder dezelfde belasting. Dit is tevens de effectieve belasting die de verdeelde belasting over de staaf uitoefent op de knooppunten links en rechts van de staaf (links in afbeelding 45).

Dus: per staaf is er een aan de belasting op die staaf statisch equivalent paar puntlasten, één in elk knooppunt.

4.2.2 LOSSE LASTEN VAN 1 kN ALS CONTINUE BELASTING

Men wil weten met welke continue belasting de puntlasten overeenkomen. Als men elke puntlast beschouwt als de resultante van een continue langs de booglengte verdeelde belasting, dan geldt ongeveer:

$$q_{\text{langs, totaal}} \approx \frac{2F}{l}$$

met l de lengte van een boogvak. Dat de belasting op de boog niet in de hartlijn werkt maar op de bovenrand, en dat de bovenrandstaven iets langer zijn, vooral bij de top, wordt verwaarloosd.

Er zijn 10 vakken, onze boog wordt beschreven door de parabool:

$$z = \frac{(x-L/2)(x+L/2)}{(L/2)^2}\, Hoogte = \frac{(x-5)(x+5)}{25}\, 5$$

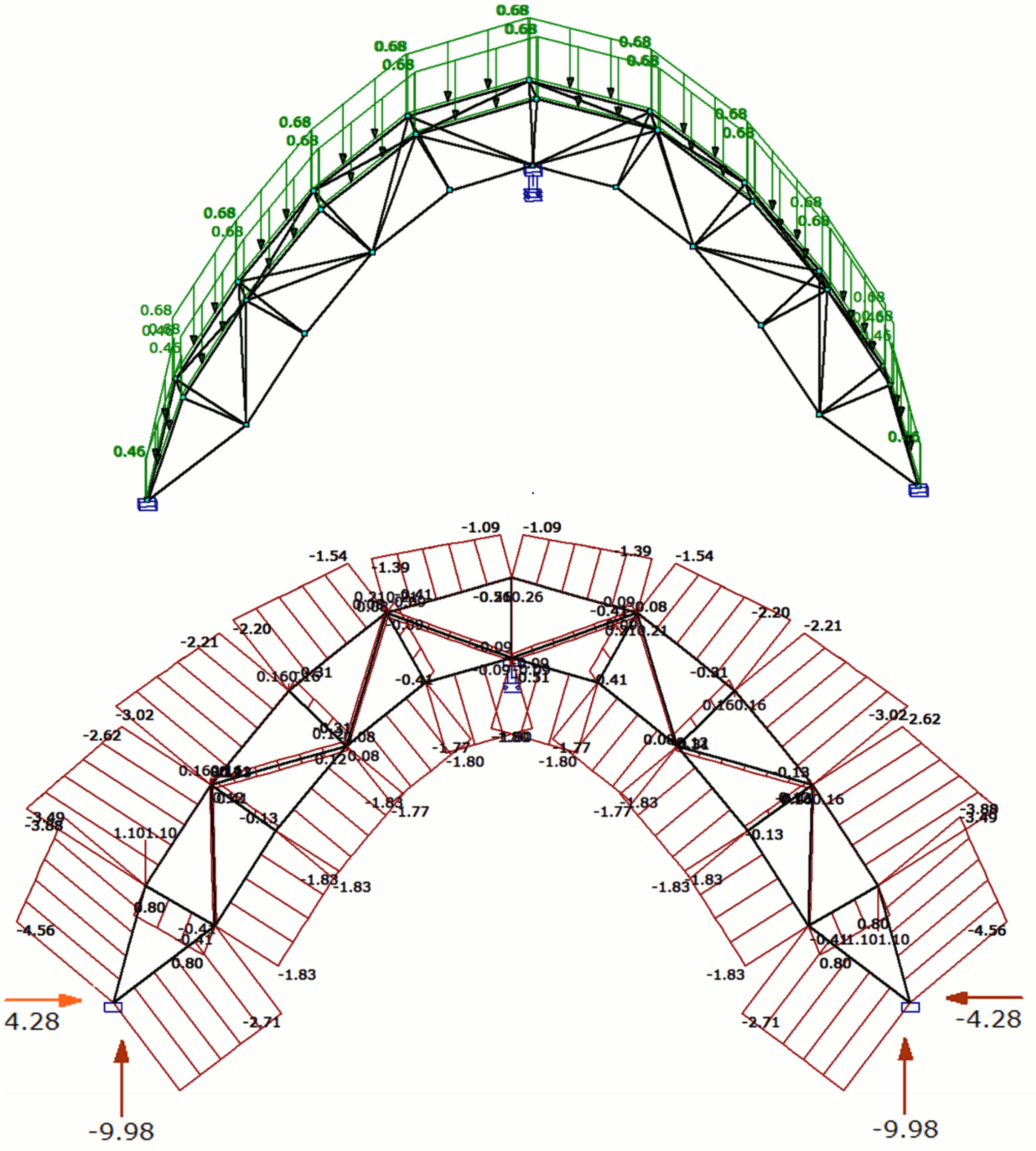
De lengte van de hartlijn is:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \sqrt{1+(z'(x))^2}\, dx = 14{,}789$$

De lengte van een vak is dus 1/10 daarvan, ofwel: lengte vak = 1,4789, en dus:

$$q_{\text{langs}} = \frac{1}{1{,}4789} = 0{,}68$$

Dit is voor elk van de de twee rechte bovenranden. Laat men deze continue belasting eens in MatrixFrame aanbrengen op onze boog, en vergelijken met de krachtsverdeling in het geval van puntlasten van F = 1 kN.



Afbeelding 46: Krachtsverdeling onder continue belasting p.e.v. booglengte langs bovenrand

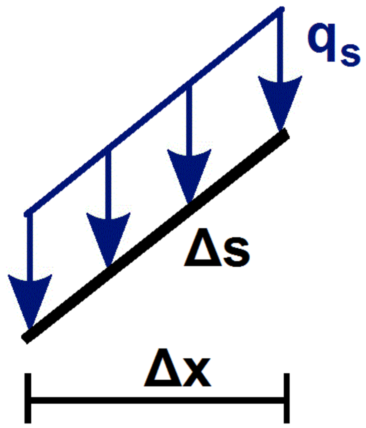
De belasting op de 3 staven naar de oplegging op elk uiteinde (0,46 kN/m) is zodanig gekozen dat de verticale oplegreactie ongeveer gelijk is aan 10 kN.

De belasting van de staven is in dit geval iets hoger dan bij de discrete belastingen (afbeelding 44), lokaal oplopend tot ongeveer 15%. Het is ook niet exact de juiste schematisatie van de losse lasten van 1 kN, zoals reeds opgemerkt.

4.2.3 OMZETTING VAN BELASTING PER EENHEID VAN BOOGLENGTE NAAR BELASTING PER EENHEID VAN HORIZONTALE LENGTE

Het is wenselijk een belasting per eenheid van booglengte q_s, om te kunnen omzetten naar een belasting per eenheid van horizontale lengte q_z.

Als men de boog opdeelt in rechte elementen Δs, dan werkt daarop een belasting q_s = constant:



Afbeelding 47: Boogelement

Per zo'n element moet gelden:

$$q_z = \frac{q_s \Delta s}{\Delta x}$$

Ofwel in de limiet als $\Delta\sigma \rightarrow 0$:

$$q_z = q_s \frac{ds}{dx}$$

Men kent de formule voor de lengte van krommen:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (z'(x))^2}\, dx$$

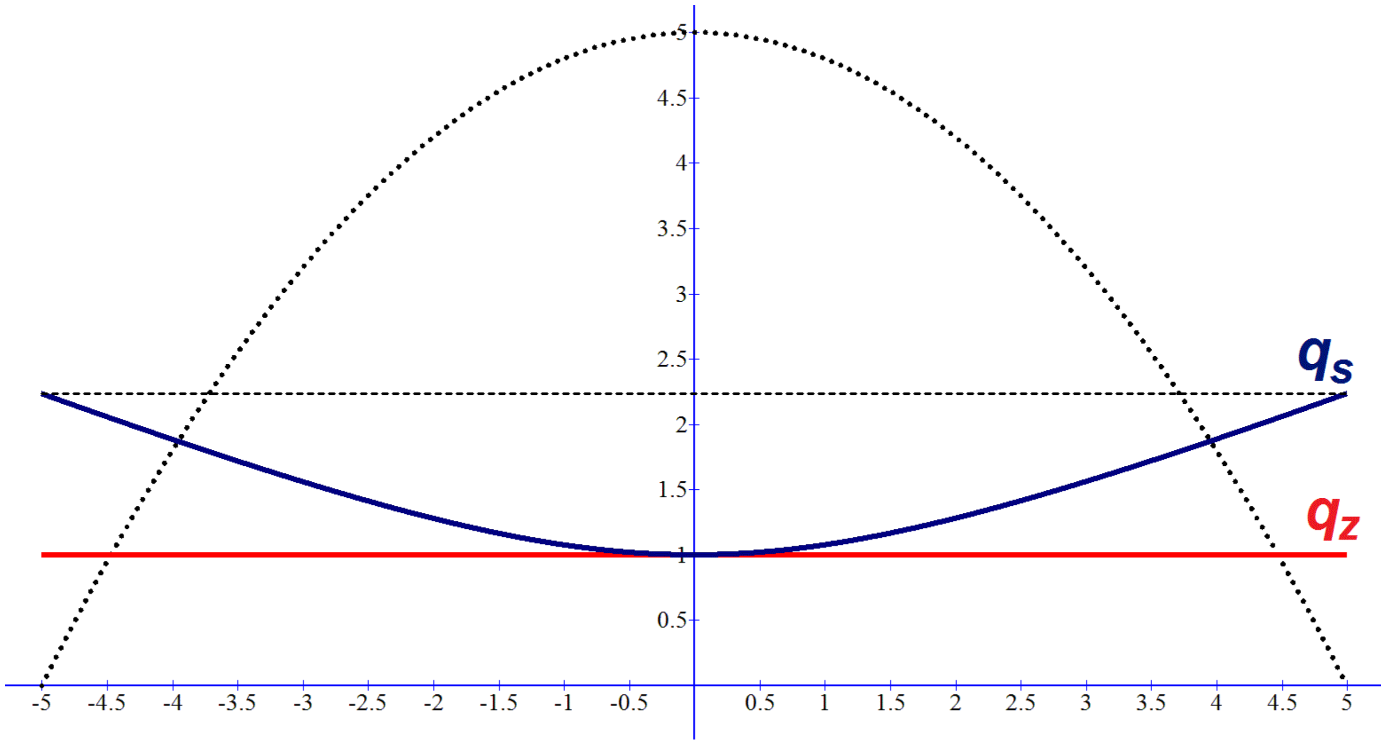
Dus:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (z'(x))^2}$$

Ofwel:

$$q_z = \sqrt{1 + (z'(x))^2}\, q_s \qquad (18)$$

Als men dat resultaat voor deze boog uitzet dan vindt men:



Afbeelding 48: Constante belasting per booglengte uitgezet tegen gelijkwaardige belasting langs horizontale lengte voor een parabolische boog met hoogte 5 m en overspanning 10 m

Men ziet dat voor een niet flauwe boog de belasting per booglengte uitgedrukt als per eenheid van horizontale lengte aan de uiteinden al gauw meer dan het dubbele kan zijn dan die in de top.

4.2.4 SCHATTING VAN DE SPATKRACHT ZONDER AXIALE VERVORMING

Laat onze voorbeeldboog (3.5, afbeelding 36) nu als controle dienen voor een methode om H te schatten.

Laat men eerst kijken wat er gebeurt als men een boog uit een lijnelement onder eigen gewicht neemt die niet axiaal rekt, met andere woorden een oneindige EA. Middels formule (17) krijgt men dan:

$$H=-\frac{\int_{boog} M^a z\,ds}{\int_{boog} z^2\,ds}$$

Uit de statische betrekking voor buiging:

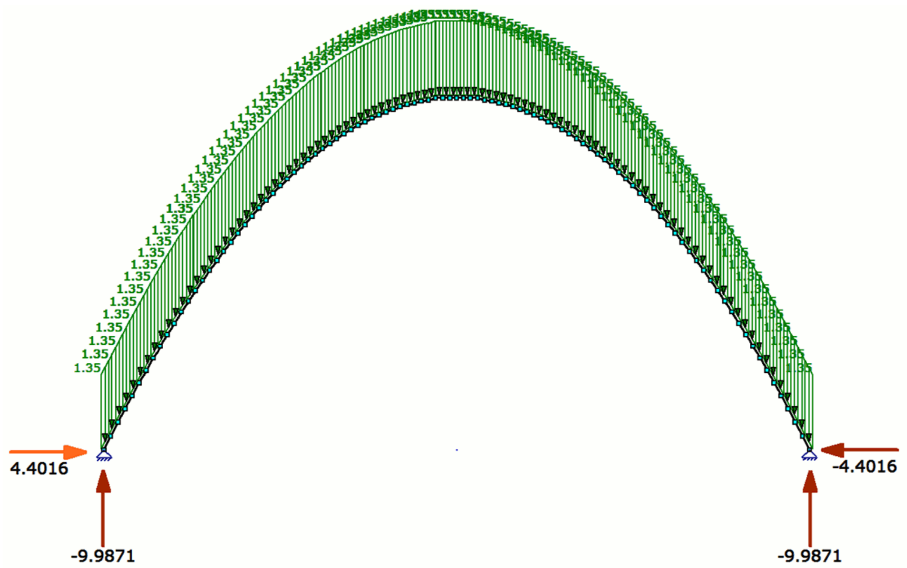
$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2}=-q_z(x)$$

Krijgt men een algemene oplossing voor $M^a(x)$ met twee constanten. Die constanten kan men bepalen uit de randvoorwaarden dat $M^a(-L/2) = 0$ en $M^a(L/2) = 0$ vanwege de scharnierende opleggingen. De resulterende uitdrukking voor M is bij een q_z als (18) ingewikkeld. Er is een MAPLE-blad dat deze berekening kan uitvoeren (Bijlage).

Het resultaat van deze berekening zonder axiale vervorming is:

$$H=4{,}41$$

Men kan dit natuurlijk nog controleren in MatrixFrame voor een lijnboog uit 100 elementen:



Afbeelding 49

Dat komt dus in grote mate overeen met elkaar.

In herinnering wordt gebracht dat de echte H behorend bij afbeelding 46 is 4,28. Dit duidt erop dat een berekening met inachtneming van axiale vervorming een grotere nauwkeurigheid zou kunnen geven, immers door axiale vervorming neemt H af.

4.2.5 BEPALING VAN DE EFFECTIEVE *EI* VAN EEN VAKWERKBOOG

Zoals beschreven in 4.2, blz. 36 heeft men in de integraal (17)

$$H = -\frac{\int\limits_{boog} M^a \, z \, ds}{\int\limits_{boog} z^2 \, ds + l \dfrac{EI}{EA}}$$

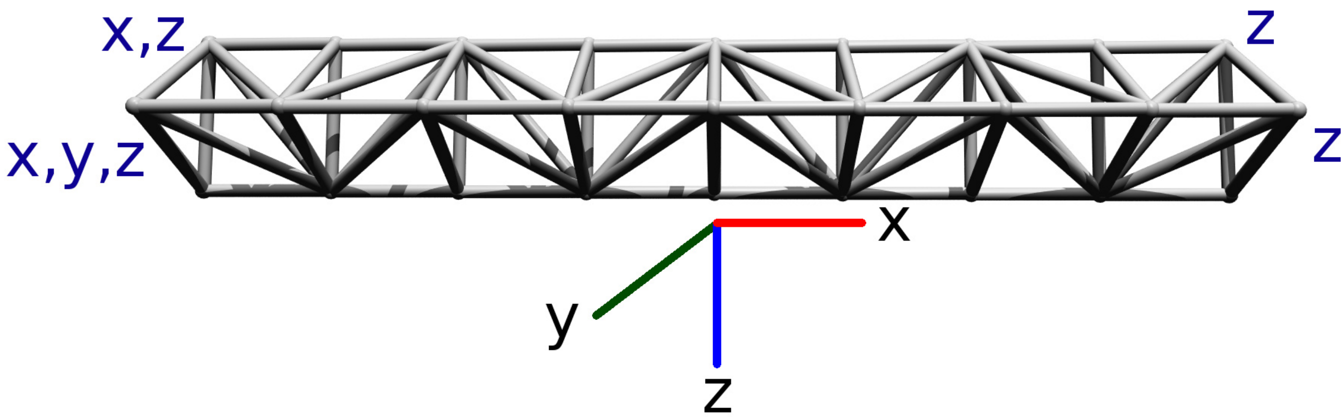
een *EI*-term, ofwel een buigstijfheidsterm. Voor een prismatische boog of lijnboog is het simpel: daar is de *EI* altijd bekend, en die volgt weer uit de definitie:

$$I_{zz} = \int\limits_{A} (z - z_{NC})^2 \, dA \tag{19}$$

Deze definitie (19) volgt weer uit de aanname dat het materiaal in de doorsnede A van zo'n staaf overal lineair elastisch is met elasticiteitsmodulus E, en dat rechte doorsneden altijd recht blijven: de Hypothese van Bernoulli [2]. Hieruit volgt dat het rekverloop over een doorsnede altijd lineair is, en samen met de definitie $M = EI\,\kappa = \frac{EI}{R} \approx -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ volgt daaruit de definitie van I. Het is duidelijk dat men dit voor onze boog niet kan doen: deze bestaat immers uit een vakwerk waarvan de staven alle kanten op gaan, er is dus zeker geen sprake van een prismatische staaf met een duidelijk gedefinieerde doorsnede. Bovendien beschrijft de EI de stijfheid onder buiging, waaruit men normaal gesproken voor staven direct de totale vervorming berekent omdat de afschuifvervorming in die gevallen meestal verwaarloosbaar is ten opzichte van de vervorming door buiging. Ook dit laatste geldt in het algemeen niet voor vakwerkliggers, waarvan onze boog een soort gekromde versie is.

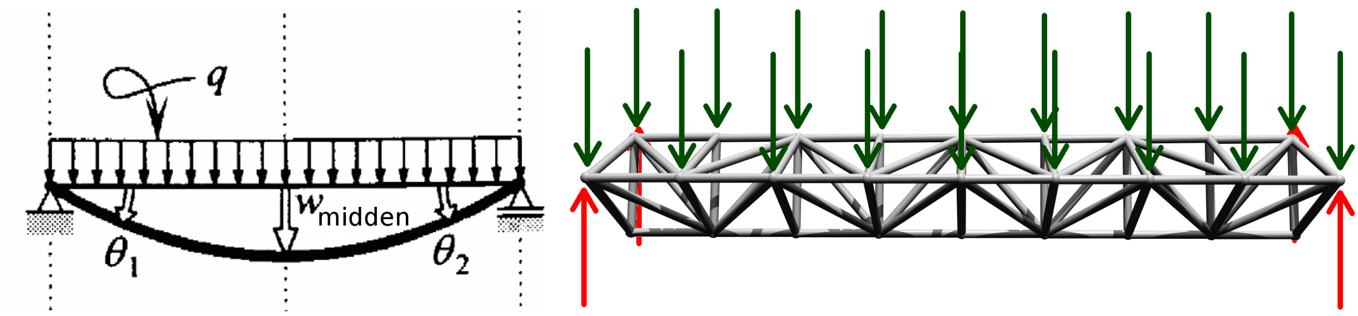
Er is voor een specifieke vakwerkligger wel een zogenaamde effectieve *EI* te bepalen. Deze effectieve *EI* heeft verder weinig betekenis anders dan dat deze de totale vervorming beschrijft onder invloed van een zekere belasting. Ondanks dat deze vervorming bij een vakwerkligger grofweg behalve uit een buigingscomponent ook bestaat uit een dwarskrachtvervormingscomponent mag men dit in een eerste-orde-berekening doen omdat beide daarin gelineariseerd zijn met belasting.

Laat men deze effectieve *EI* dus maar proefondervindelijk bepalen. Als men daartoe de vervorming van het volgende vakwerk beschouwt:



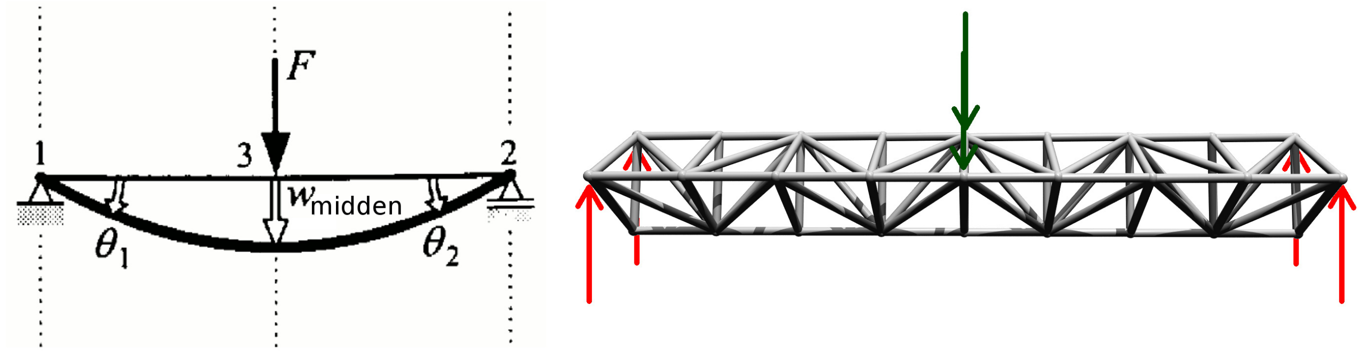
Afbeelding 50: Rechte ligger

Dit is dezelfde vakwerkconstructie als onze boog maar dan als rechte ligger. l=h en $b=\frac{2h}{\sqrt{3}}$ Beperkingen zijn in blauw aangegeven. Aangenomen dat deze volgens een buigligger vervormt probeert men nu een gelijkwaardige *EI* te verkrijgen op de volgende manier:



Afbeelding 51: Verdeelde belasting

$$w_{\text{midden}}=\frac{5\,q\,L^4}{384\,EI} \tag{20}$$



Afbeelding 52: Belasting in midden

$$w_{\text{midden}} = \frac{F\,L^3}{48\,EI} \tag{21}$$

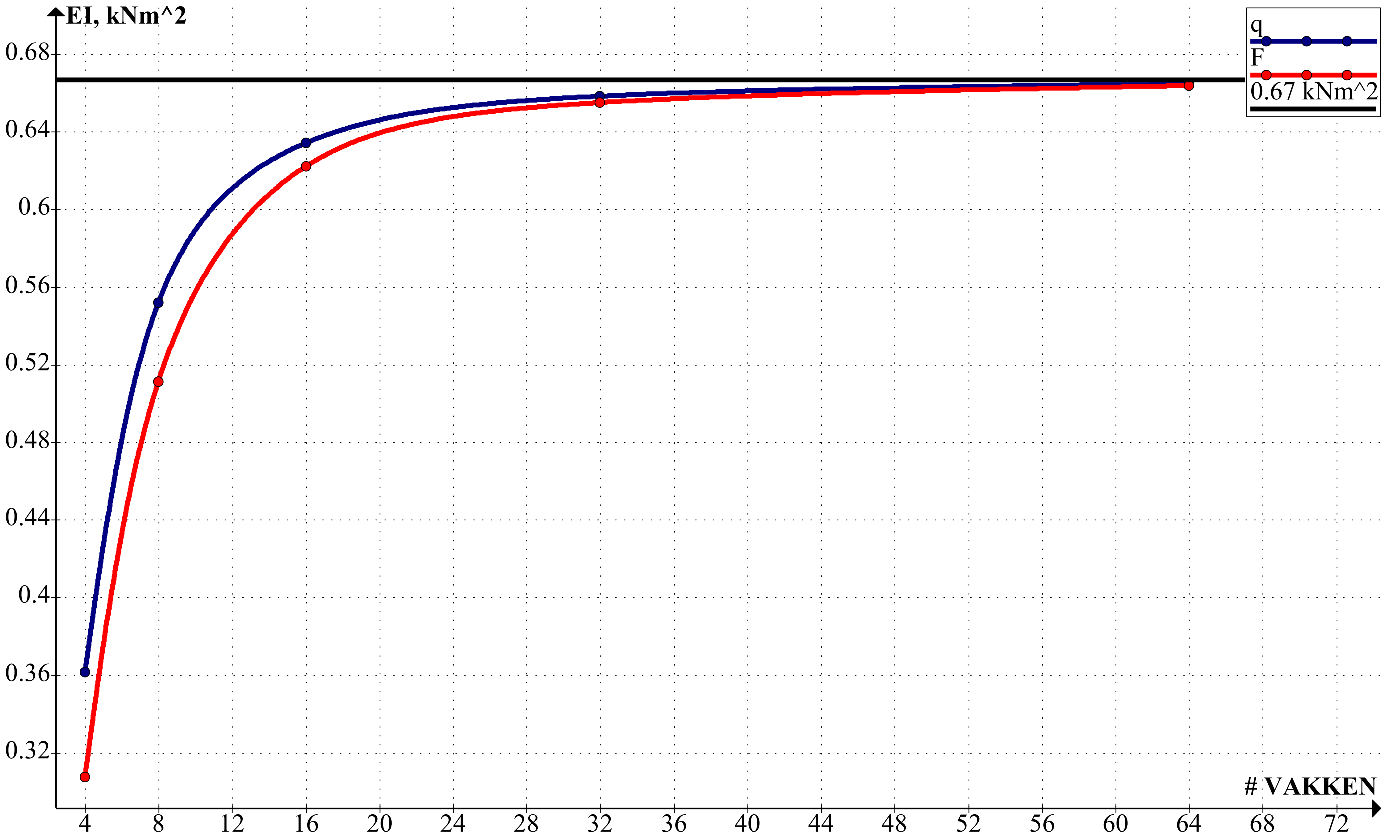
Uit deze twee formules kan men een schatting maken van de effectieve *EI* aan de hand van de geobserveerde uitwijking. Twee gevallen (20) en (21) worden bekeken om te kijken of die allebei ongeveer hetzelfde resultaat geven. De doorbuiging in het midden w_{midden} wordt genomen als die van het onderste scharnier in het midden van de constructie, bij gebrek aan meer inzicht. Alles zal uitgevoerd worden voor vakwerken van toenemende lengte/slankheid te beginnen bij 4 vierkante ($l = h$) vakken, en steeds te verdubbelen tot en met 64 vakken. De berekeningen zijn uitgevoerd met 3D Truss:

	VERDEELDE BELASTING		PUNTBELASTING IN MIDDEN	
# VAKKEN	**UITWIJKING IN MIDDEN**	**RESULTERENDE *EI***	**UITWIJKING IN MIDDEN**	**RESULTERENDE *EI***
4	18.435177	**0.3616274835**	8.6688105	**0.3076162141**
8	193.25293	**0.551953684**	41.727845	**0.5112493428**
16	2691.7435	**0.634037629**	274.38257	**0.6220025808**
32	41484.145	**0.6582434486**	2084.6676	**0.6549405446**
64	657450.63	**0.6645467306**	16457.283	**0.6636980519**

Tabel 1: Resultaten van berekening van effectieve *EI* per type belasting en per aantal vakken in de ligger

In grafiek uitgezet:

BEREKENDE EFFECTIEVE *EI* ALS FUNCTIE VAN AANTAL VAKKEN



Afbeelding 53: Effectieve *EI* in grafiek

Hieruit lijkt er een convergentie van *EI* naar ongeveer 0,66 kNm² te zijn. Dat resultaat lijkt bij nadere beschouwing niet onlogisch. De vervorming van een vakwerk bestaat immers grofweg uit een doorbuigingscomponent door kromming κ en een dwarskrachtvervormingscomponent door afschuifvervorming θ.

Gelineariseerd rond de onvervormde toestand geldt:

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{dw}{dx}$$

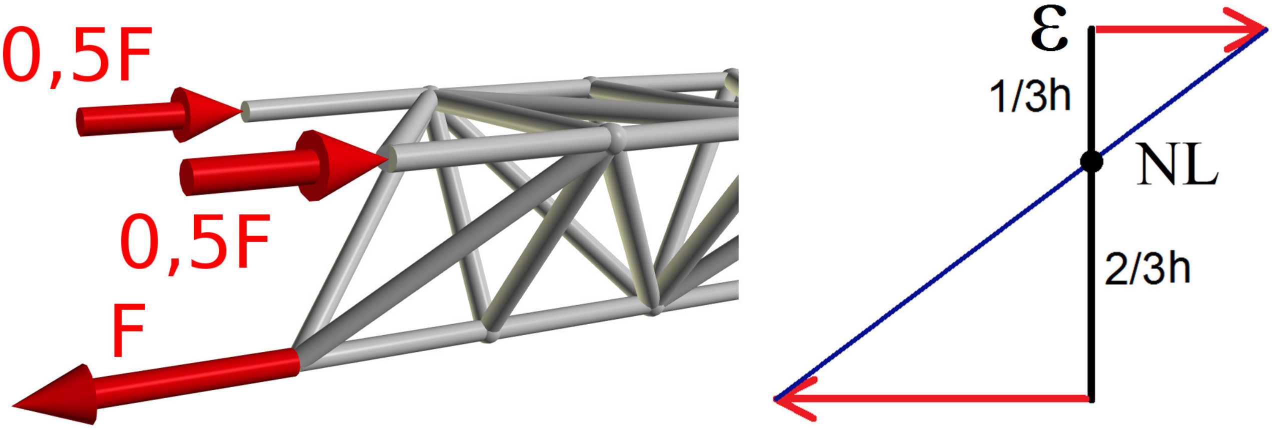
geïntegreerd heeft men dus:

$$w_{\text{kromming}} = -\frac{1}{2}\kappa x^2 + C_1 x + C_2 = O(x^2) \quad \text{en} \quad w_{afschuiving} = \theta x + C_3 = O(x)$$

Voor de kromming in het midden geldt dus:

$$w_{\text{kromming}} = O(L^2) \quad \text{en} \quad w_{\text{afschuiving}} = O(L)$$

Bij toenemende lengte krijgt de vervorming door kromming dus de overhand. Als men vervolgens kijkt hoe een moment dat ten grondslag ligt aan deze kromming wordt opgenomen bij afwezigheid van dwarskracht:



Afbeelding 54: Opname van moment zonder dwarskracht

ziet men dat de neutrale lijn (NL) door het normaalkrachtencentrum gaat zoals verwacht, en als men het traagheidsmoment hierom berekent, waarbij men de eigen traagheidsmomenten van de staven niet meeneemt omdat deze geacht zijn niet te buigen vanwege de scharnierende verbindingen in de boog, heeft men:

$$I_{\max}=\left(\frac{1}{3}h\right)^2(2\,A_{\text{randstaaf}})+\left(\frac{2}{3}h\right)^2(A_{\text{randstaaf}})=\frac{2}{3}h^2 A_{\text{randstaaf}}$$

En met onze waarden van h = 1 m, A = 1 m², heeft men dus precies $I=2/3\,\text{m}^4\approx 0{,}67\,\text{m}^4$. Met E = 1 kN/m² krijgt men dan dus $EI=0{,}67$ kNm² , zo goed als gelijk aan de waarde waarheen de effectieve *EI*'s uit tabel 1 lijken te convergeren.

Onze voorbeeldboog (afbeelding 36, blz. 25) heeft 10 vakken, die niet vierkant zijn zoals bij deze rechte ligger, maar rechthoekig met hoogte h = 1 en lengte l = 1,4789 m (zie 3.5). Als men aanneemt dat de slankheid in hoofdzaak bepalend is voor de effectieve *EI* zou men voor onze voorbeeldboog hier 14 tot 15 vakken moeten rekenen, en uit de grafiek in afbeelding 53 zou men dan een effectieve EI vinden van ongeveer 0,62 kNm². Onze voorbeeldboog is nog vrij grof, en zelfs daar vindt men dus al een waarde zeer dicht bij de begrenzende 0,66 kNm².

4.2.6 SCHATTING VAN DE SPATKRACHT MET AXIALE VERVORMING

In 4.2.5, grafiek uit afbeelding 53 is vastgesteld dat men al vrij snel de begrenzende waarde van $I_{\max}=\frac{2}{3}h^2 A_{\text{randstaaf}}$ nadert. Laat men voor onze doeleinden dus gewoon de *EI* vaststellen op die begrenzende waarde.

Voor de *EA* is reeds in 3.3 geconcludeerd dat die $3EA_{\text{randstaaf}}$ is, met $A_{\text{randstaaf}}$ het doorsnede-oppervlak van elk van de randstaven, en men krijgt dus voor onze algemene schatting voor de *EI/EA* van onze boog:

$$\frac{EI}{EA}=\frac{2/3\,h^2 A_{\text{randstaaf}}}{3\,A_{\text{randstaaf}}}=\frac{2}{9}h^2 \qquad (22)$$

Dan wordt de klassieke boogformule voor ons geval dus:

$$H=+\frac{\int\limits_{boog} M^a\, z\, ds}{\int\limits_{boog} z^2\, ds+\frac{2\, l\, h^2}{9}} \tag{23}$$

Laat men nu dus eens een nieuwe schatting geven voor *H*. In herinnering wordt gebracht dat in afbeelding 46 een waarde gevonden is voor onze voorbeeldboog van, in drie decimalen, *H* = - 4,276 kN. Met MAPLE is middels onze nieuwe methode (23) een waarde gevonden van:

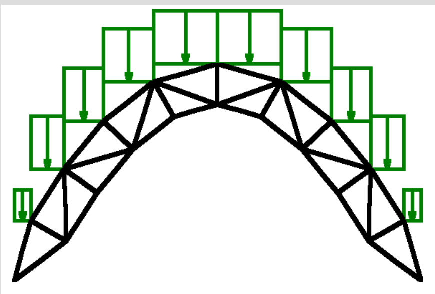
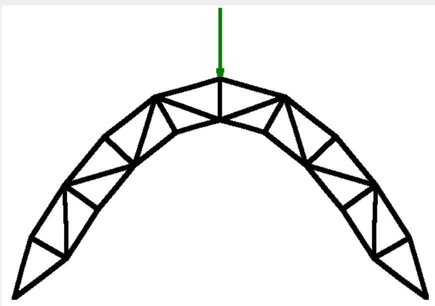
$$H=-4{,}347\ \text{kN}$$

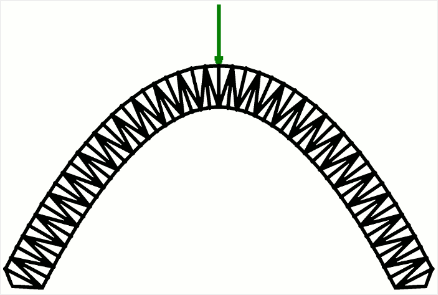
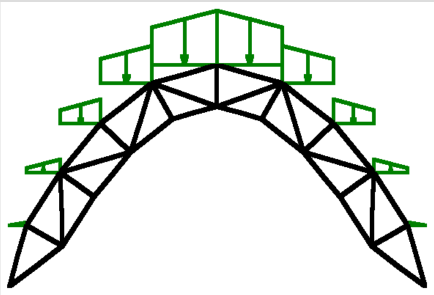
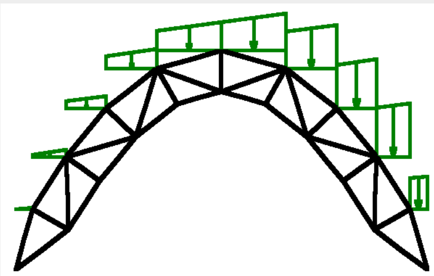
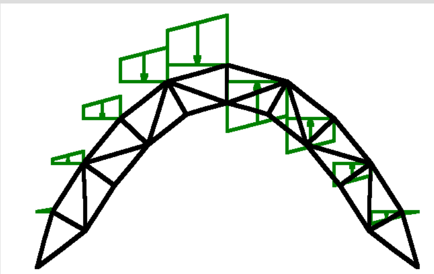
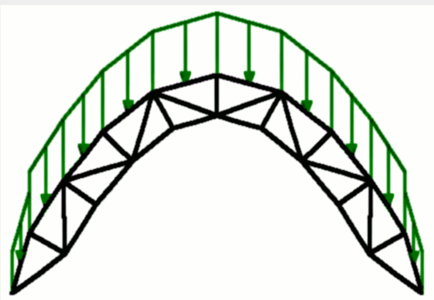
Dat is in ieder geval een betere schatting. Men moet er wel rekening mee houden dat de belasting per booglengte bij afbeelding 46 niet volledig overeenkomt met een belasting in de hartlijn zoals hier aangenomen. Het is niet makkelijk een simpel model voor q_s te maken omdat deze belasting mede afhangt van de vorm van de bovenrand, terwijl de andere belastingen, per horizontale lengte, daarvan onafhankelijk zijn. Men mag dus verwachten dat de benadering voor *H* slechter is voor belasting langs booglengte.

In het geval van een constante continue belasting per horizontale lengte is een waarde gevonden van H = - 4,954 kNm, zie afbeelding 40, blz. 31. (23) levert hier:

$$H=-4{,}933\ \text{kN}$$

Wat nu opvalt is dat in het eerste geval nog een overschatting van de spatkracht *H* wordt gevonden, en in het tweede een onderschatting. Voor een aantal andere belastingsgevallen de met (23) gevonden *H*:

BELASTING	ECHTE *H* (kN)	MET (23) BEREKENDE *H* (kN)	AFWIJKING
 ***q* = 2 kN/m**	**-4,954**	-4,933	-0,42%
 ***F* = 2*δ*(*x*) kN/m**	**-0,743**	-0,749	+0,81%

 **50 VAKKEN, $F = 2\delta(x)$ kN/m**	**-0,749239**	-.749271	0,00%
 **$q=2(-\lvert(x)\rvert+5)$ kN/m**	**-15,519**	-15,512	-0,01%
 **$q = 2(x+5)$ kN/m**	**-24.768**	-24.666	-0,41%
 **$q=2[x+5-10\,\mathrm{H}(x)]$ kN/m**	**0,000**	0,000	0,00%
 **$q_s=2(0{,}68)$ kN/m**	**-4,276**	-4,347	+1,66%

Deze benaderingen voor de spatkracht H blijken vrij nauwkeurig.

4.2.7 INVLOED VAN STIJFHEIDSVERSCHILLEN OP DE SPATKRACHT

Tenslotte kan men zich nog afvragen of de H aanzienlijk verandert wanneer de stijheidsverhoudingen in onze boog veranderen. Immers, zoals besloten in 3.2 kunnen bij onze boog rand- en wandstaven een verschillend oppervlak hebben, $A_{randstaaf}$ en $A_{wandstaaf}$:

	H							
$EA_{randstaaf}/EA_{wandstaaf}$	**0.01**	**0.1**	**1**	**2**	**10**	**100**	**1000**	**10000**
Losse lasten F = 1 kN	-4.033	-4.032	**-4.025**	-4.017	-3.983	-3.938	-3.929	-3.928
q = 2 kN/m	-4.952	-4.952	**-4.954**	-4.955	-4.960	-4.968	-4.969	-4.969
$F = \delta(x)$ kN/m	-0.742	-0.742	**-0.743**	-0.744	-0.747	-0.751	-0.751	-0.751
q = 2(-abs(x)+5) kN/m	-15.472	-15.476	**-15.519**	-15.559	-15.744	-15.986	-16.037	-16.042
q = 2(x+5) kN/m	-24.761	-24.761	**-24.768**	-24.773	-24.800	-24.836	-24.843	-24.844
q_s = 2/1.4789 kN/m	-4.282	-4.282	**-4.276**	-4.270	-4.244	-4.209	-4.202	-4.201

Tabel 2

Opvallend is dat voor belastinggevallen die min of meer een belasting langs booglengte voorstellen, namelijk de losse lasten F en q_s, de spatkracht H daalt met toenemende $EA_{randstaaf}/EA_{wandstaaf}$, terwijl die in alle andere gevallen stijgt.

Maar in ieder geval blijkt uit de tabel dat H eigenlijk nauwelijks verandert onder invloed van de hier toegepaste stijfheidsverschillen, zeker niet wanneer men tussen normale waarden van $EA_{randstaaf}/EA_{wandstaaf}$ blijft.

5 MODEL

Men wil de krachten in alle boogstaven redelijk kunnen schatten op basis van alleen de overspanning *L*, overspanningshoogte *Hoogte*, vakwerkhoogte h en de belasting q(*x*). Laat men eerst nog eens de basisbeginselen waaraan de vakwerkboog moet voldoen voor de toepassing van dit model opsommen:

5.1 GELDIGHEID: BASISBEGINSELEN VAN DE VAKWERKBOOG

1. Vakwerkboog op twee scharnierende verbindingen aan de beide uiteinden (3.5).
2. Beide oplegscharnieren op gelijke hoogte (hoofdstuk 3).
3. Alleen scharnierende verbindingen (hoofdstuk 3).
4. Parabolische hartlijn (3.2).
5. Coördinaten van knooppunten gegenereerd zoals in 3.2: loodrecht op hartlijn na intervallen van gelijke lengte, opleggingen op hartlijn.
6. Staven bij opleggingen vormgegeven als driezijdige pyramide. (3.5).
7. Doorsnede-vorm van vakwerk is omgekeerde gelijkbenige driehoek (3.1).
8. Alleen verticale belastingen, in principe zijn alle verticale belastingen toegestaan, maar model berekent staafkrachten alsof een statische equivalente belasting per staaf in de knooppunten werkt (4.2.1).
9. Om en om stijgende en dalende diagonalen (3.1).
10. Zijverticalen tussen alle diagonalen (3.1).
11. Om en om stijgende verticalen en diagonalen in dakvlak. (3.1).
12. Dwarsstaven tussen alle diagonalen in dakvlak, maken driehoeken met zijverticalen (3.1).
13. Hoek van diagonalen met onderrand en bovenrand ongeveer constant (3.6).

Laat men vervolgens de belangrijke formules en principes in acht nemen:

5.2 BASISBEGINSELEN UIT DE MECHANICA

In herinnering gebracht: de algemene formule voor de hartlijn van onze boog:

$$z=\frac{(x-L/2)(x+L/2)}{(L/2)^2}Hoogte \tag{24}$$

De statische betrekking:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=-q_z(x) \tag{25}$$

(25) heeft een algemene oplossing:

$$M^a = \int\int -q(x)\,dx\,dx \tag{26}$$

welke in het algemeen twee integratieconstanten C_1 en C_2 bevat. Deze twee constanten kan men oplossen uit de randvoorwaarden behorende bij de scharnierende opleggingen, namelijk:

$$M(-L/2)=0 \;\; en \;\; M(+L/2)=0 \tag{27}$$

Dit levert een lineair stelsel waaruit C_1 en C_2 volgen. Voor het moment in de boog geldt:

$$M = M^a - H\,z \tag{28}$$

Uit de statische betrekking:

$$dM\frac{(x)}{dx} = V(x) \tag{29}$$

volgt dan ook direct de verticale component van de kracht in de boog, dit is niet de dwarskracht. Hieruit volgen de verticale oplegreacties links en rechts:

$$V_{links} = -V(-L/2) \;\; en \;\; V_{rechts} = +V(+L/2) \tag{30}$$

Zoals in Fout: Bron van verwijzing niet gevonden besproken, en daar formule (23), kan men vervolgens H schatten met:

$$H = +\frac{\int_{boog} M^a\,z\,ds}{\int_{boog} z^2\,ds + \frac{2\,l\,h^2}{9}} \tag{31}$$

De hoek θ die doorsnede-as maakt met de horizontaal is gedefinieerd als met de klok mee volgens:

$$\theta = \arctan\left(\frac{dz}{dx}\right) \tag{32}$$

Voor de hoek α wil men de hoek hebben die een diagonaal maakt met de normaalkrachtrichting in het punt waar men V bepaalt. Daarvoor geldt bij goede benadering:

$$\alpha \approx \arctan\left(\frac{h}{l}\right) \tag{33}$$

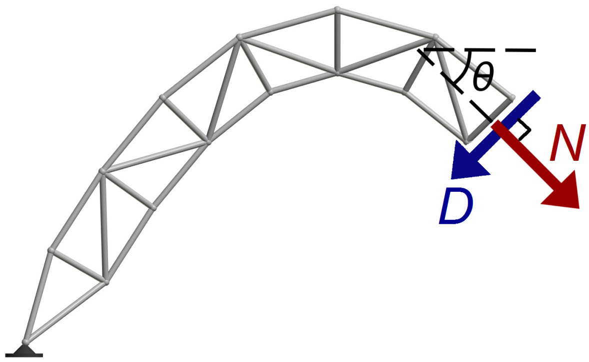
Deze hoek is altijd positief, en houdt dus geen rekening met het stijgend of dalend zijn van een diagonaal. Dit is om de formules continu te houden.

5.3 NORMAALKRACHT IN DE BOVENDIAGONALEN

In 4.1 is vastgesteld dat onze boog bij alleen verticale belasting een in *y*-richting symmetrische krachtsverdeling heeft. Er is per vak dus per definitie krachtenevenwicht in *y*-richting, dus de normaalkracht in de bovendiagonalen is in dat geval te allen tijde **nul**.

5.4 NORMAALKRACHT IN ZIJDIAGONALEN

Beschouw de volgende methode om de dwarskracht in de zijdiagonalen te schatten: In de boog zelf werken een dwarskracht *D* en een normaalkracht *N:*



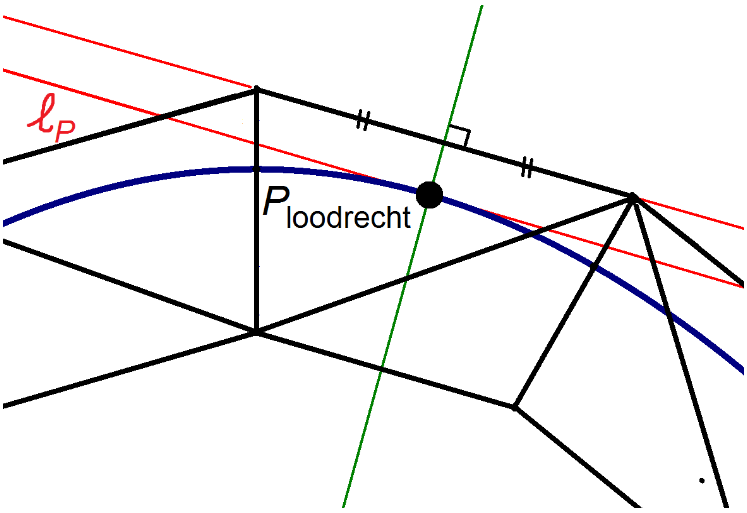
Afbeelding 55

die men kan berekenen volgens de transformatie:

$$\begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \tag{34}$$

Maak vervolgens de volgende waarnemingen:

1. De bovenrand en onderrand van onze boog zijn overal bij zeer goede benadering parallel.
2. Volgens de tussenwaardestelling is de hoek die onderrand en bovenrand maken met de horizontaal gelijk aan de hoek die de hartlijn ergens in het betreffende vak maakt met de horizontaal. Die plek wordt hier benaderd door $P_{\text{loodrecht}}$: het snijpunt van de middelloodlijn van de bovenrand en de hartlijn.



Afbeelding 56

l_P is de raaklijn aan de hartlijn ter plekke van $P_{loodrecht}$. Men ziet dat deze zo goed als parallel is aan de bovenstaaf. In het geval van afbeelding 56 dat overeenkomt met ons voorbeeldvakwerk is de afgeleide van l_P -0,2899 en die van de staaf -0,2803.

Op grond van deze waarnemingen moet de dwarskracht die aanwezig is in een vak bij goede benadering volledig worden opgenomen door de diagonaal aldaar, aangezien die als enige een lengtecomponent heeft in de richting van de dwarskracht D.

5.4.1 EEN EERSTE METHODE OM DE NORMAALKRACHT IN DE ZIJDIAGONALEN TE SCHATTEN

Een simpele methode lijkt dus om in $P_{loodrecht}$ de dwarskracht te bepalen zoals die zou werken in een lijnelement volgens de hartlijn. Dan heeft men dus:

$$|N_{diagonaal}| \approx \left|\frac{D}{\sin(\alpha)}\right| \frac{\sqrt{l^2+h^2+(b/2)^2}}{2\sqrt{l^2+h^2}} = |D| \frac{\sqrt{l^2+h^2+(b/2)^2}}{2h} \qquad (35)$$

Aangezien er twee gelijk belaste diagonalen zijn die beide de dwarskracht opnemen, en elke diagonaal een component in de breedte heeft. Of deze kracht een trekkracht of een drukkracht is hangt af van het stijgend of dalend zijn van een diagonaal in combinatie met de richting van de dwarskracht D. Laat men deze methode nu beproeven aan de praktijk: Een simpele gelijkmatige belasting q = 2 kN/m over het voorbeeldvakwerk.

Voor de duidelijkheid een voorbeeldberekening:

In dit geval geldt:

$$V = -2x$$

Als men bijvoorbeeld volgens deze methode de kracht in de diagonalen in het vak net rechts van het midden wil bepalen:

Middelloodlijn van staaf de bovenstaaf zoals in afbeelding 56, met (x_1, z_1) en (x_2, z_2) de coördinaten van de twee bovenscharnieren:

$$z_{\text{middelloodlijn}} = -\left(\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}\right)\left(x - \left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right]\right) + \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{36}$$

Met $(x_1, z_1) = (0{,}00,\ -5{,}33)$ en $(x_2, z_2) = (1{,}57,\ -4{,}89)$ vindt men voor het snijpunt met de hartlijn:

$$z = \frac{(x - L/2)(x + L/2)}{(L/2)^2}\,Hoogte$$

Snijpunt: $(0{,}7247,\ 4{,}8950)$

Alleen de *x*-coördinaat 0,72 is nodig, en daarmee vindt men verticale component:

V = -1,45 kN

Met diezelfde *x*-coördinaat vindt men:

$$\theta = \arctan(dz/dx) = +0{,}282$$

Verder is $\alpha = \arctan(1/1{,}4789) = 34{,}07\,^o$. Vervolgens transformeert men naar *D*:

$$D = -\sin(\theta)\,H + \cos(\theta)\,V = -\sin(0{,}282)(-4.933) + \cos(0{,}282)(-1{,}45) = -0{,}0185$$

En daarmee:

$$|N_{\text{diagonaal}}| \approx |-0{,}01998| \frac{\sqrt{1.4789^2 + 0.58^2 + 1^2}}{2(1)} = 0{,}0175$$

Deze moet met een negatieve dwarskracht *D* en twee stijgende diagonalen positief zijn.

De resultaten voor alle zijdiagonalen:

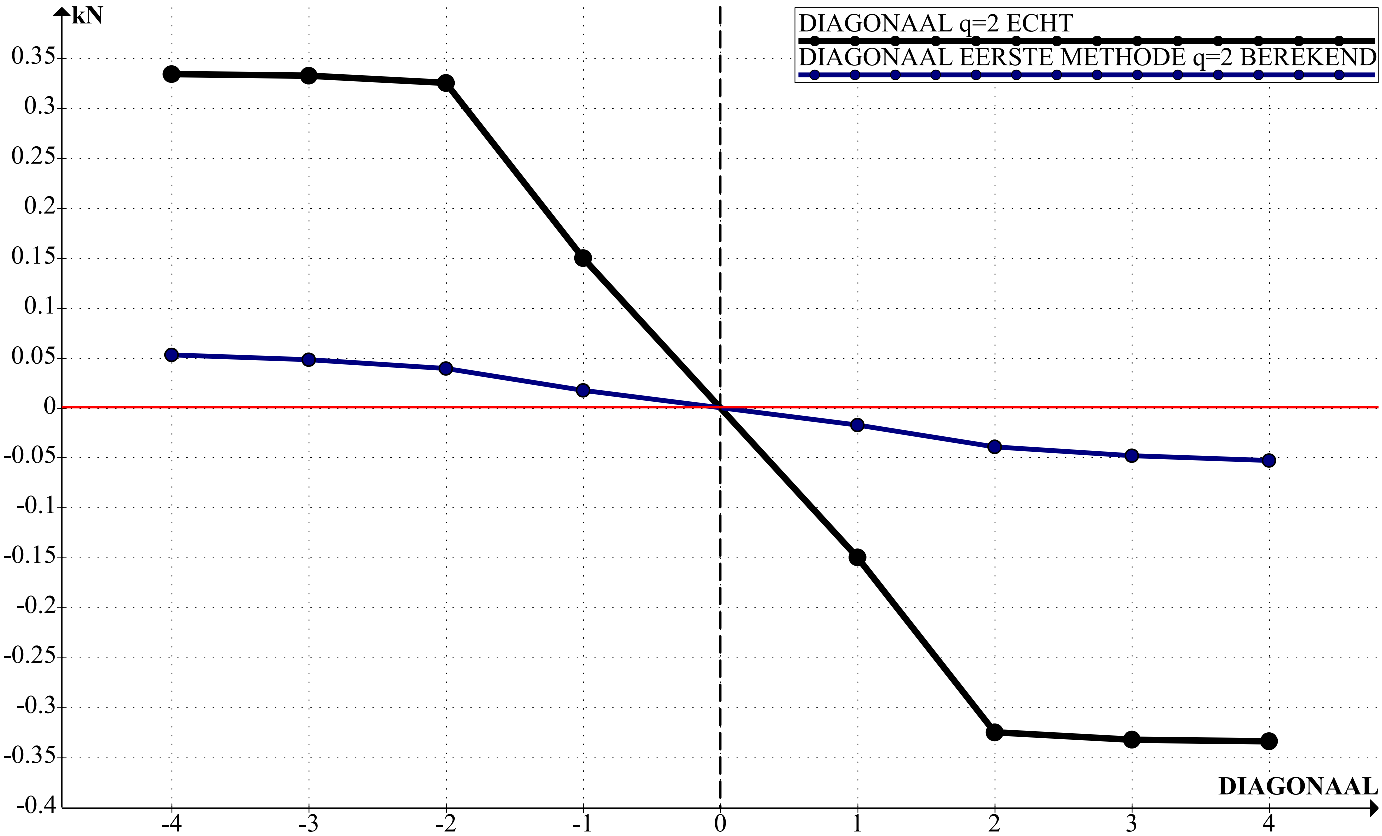
BEREKENDE NORMAALKRACHT PER ZIJDIAGONAAL BIJ GELIJKMATIG VERDEELDE BELASTING, EERSTE METHODE

		NORMAALKRACHT		
DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.92	**-0.334**	-0.053	-84%
-3	-3.05	**0.332**	0.048	-86%
-2	-2.01	**-0.325**	-0.039	-88%
-1	-0.72	**0.150**	0.017	-89%
1	0.72	**0.150**	0.017	-89%
2	2.01	**-0.325**	-0.039	-88%
3	3.05	**0.332**	0.048	-86%
4	3.92	**-0.334**	-0.053	-84%

	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
H	**-4.954**	-4.933	-0.4%
V_{links}	**-10.000**	-10.004	0.0%
V_{links}	**-10.000**	-10.004	0.0%

Tabel 3

In grafiek, het teken van de dwarskracht *D* wordt aangehouden:

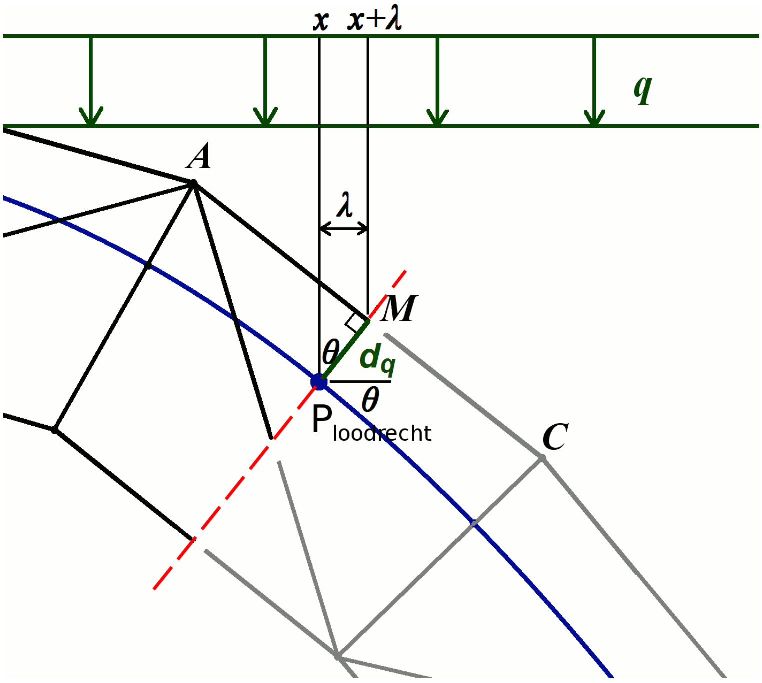


Afbeelding 57

Men kan kort zijn: deze methode geeft geen goede resultaten, de uitkomsten verschillen bijna een factor 10 van de werkelijke waarden. *H* wordt hier zeer goed benaderd (-4,933 kN), binnen enkele procenten van de werkelijke (-4,954 kN), dus daar kan het niet aan liggen. Wel valt op dat de afwijking van de werkelijke waarden vrij constant is rond de 80-90%. Er lijkt iets te missen in deze methode.

5.4.2 EEN TWEEDE METHODE OM DE NORMAALKRACHT IN DE ZIJDIAGONALEN TE SCHATTEN

Stel men zou de exacte resultaten van de MatrixFrame berekening nooit gezien hebben. Dan lijken de resultaten uit de eerste methode niet eens zo slecht omdat men immers weet dat in een lijnboog die de druklijn bij gegeven belasting volgt, wat bij de voorgaande proef het geval was voor de hartlijn, geen dwarskracht aanwezig is. Dat er dan toch enigszins dwarskracht ontstaat door de iets lagere *H* ten gevolge van de axiale vervorming komt bovendien gewoon in de resultaten tot uiting. Er moet dus een verschijnsel zijn dat inherent is aan onze boog, dan wel de wijze van belasten dat de veel hogere dwarskracht veroorzaakt. Laat men de situatie rond het punt $P_{\text{loodrecht}}$ waaromheen de berekeningen worden uitgevoerd nader bekijken:



Afbeelding 58

In de vorige methode werd V berekend zoals die aanwezig is in $P_{\text{loodrecht}}$ in een lijnboog door dat punt (blauw), maar als men van dat punt uitgaat voor onze echte boog dan moet men ook de dwarskracht in de bovenrandstaven meenemen, die daar ten gevolge van de verdeelde belasting in het algemeen niet nul is. Bij langs x-richting gelijkmatig verdeelde belastingen is de dwarskracht exact nul in het midden van de staaf, en bij verdeelde constante belastingen langs booglengte, en ook driehoeksbelastingen is de dwarskracht in zo'n bovenrandstaaf AC nul in de buurt van het midden M. Als men een vrij lichaam beschouwt dat doorgesneden is loodrecht op de bovenrandstaven door M, dan gaat die snede tevens door punt $P_{\text{loodrecht}}$ (zie 5.4, blz 53), maar moet men ten behoeve van de berekening van V ook nog de resultante van de verdeelde belasting q over een afstand λ rechts van $P_{\text{loodrecht}}$ meenemen, zie afbeelding 58 met:

$$\lambda = d_q \sin\theta \tag{37}$$

Ten gevolge van de kromming van de hartlijn geldt:

$$d_q \leqslant d_{boven} \tag{38}$$

Maar voor kleine krommingen, of korte vakken:

$$d_q \approx d_{boven} \tag{39}$$

Laat men deze benadering toepassen. De resultante van de verdeelde belasting over λ is, met x_P de x-coördinaat van $P_{\text{loodrecht}}$:

$$\int_{x_P}^{x_P+\lambda} q(x)\,dx \tag{40}$$

Dit resulteert in een bijkomende bijdrage V_+ aan V:

$$V_+ = -\int_{x_P}^{x_P+\lambda} q(x)\,dx \tag{41}$$

De hopelijk verbeterde uitdrukkingen voor de dwarskracht zijn nu:

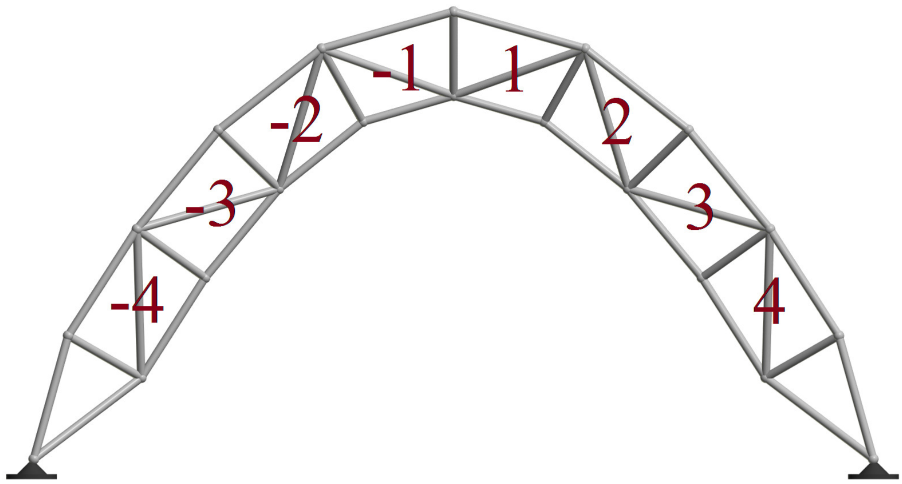
$$D_+ = -\sin(\theta) H + \cos(\theta)(V + V_+) \tag{42}$$

Verder blijft de uitdrukking voor de normaalkracht in de zijdiagonalen hetzelfde:

$$|N_{diagonaal}| \approx \left|\frac{D_+}{\sin(\alpha)}\right| \frac{\sqrt{l^2+h^2+(b/2)^2}}{2\sqrt{l^2+h^2}} = |D_+| \frac{\sqrt{l^2+h^2+(b/2)^2}}{2h} \tag{43}$$

Laat men deze nieuwe methode nu uittesten op hetzelfde vakwerk als in 5.4.1, dus met $q = 2$ kN/m:

Beschouw de volgende nummering:



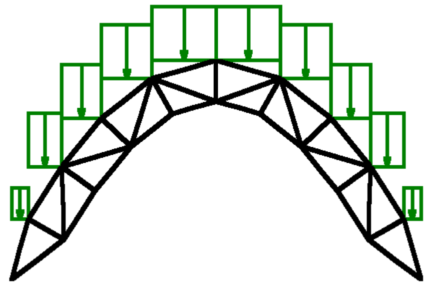
Afbeelding 59 Nummering van vakken

Elke staaf in een vak wordt aangegeven met het desbetreffende nummer, verticalen met de nummers van de twee vakken waartussen deze zich bevindt.

5.4.3 RESULTATEN VAN PROEFBEREKENINGEN VOOR DE ZIJDIAGONALEN

ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (43)

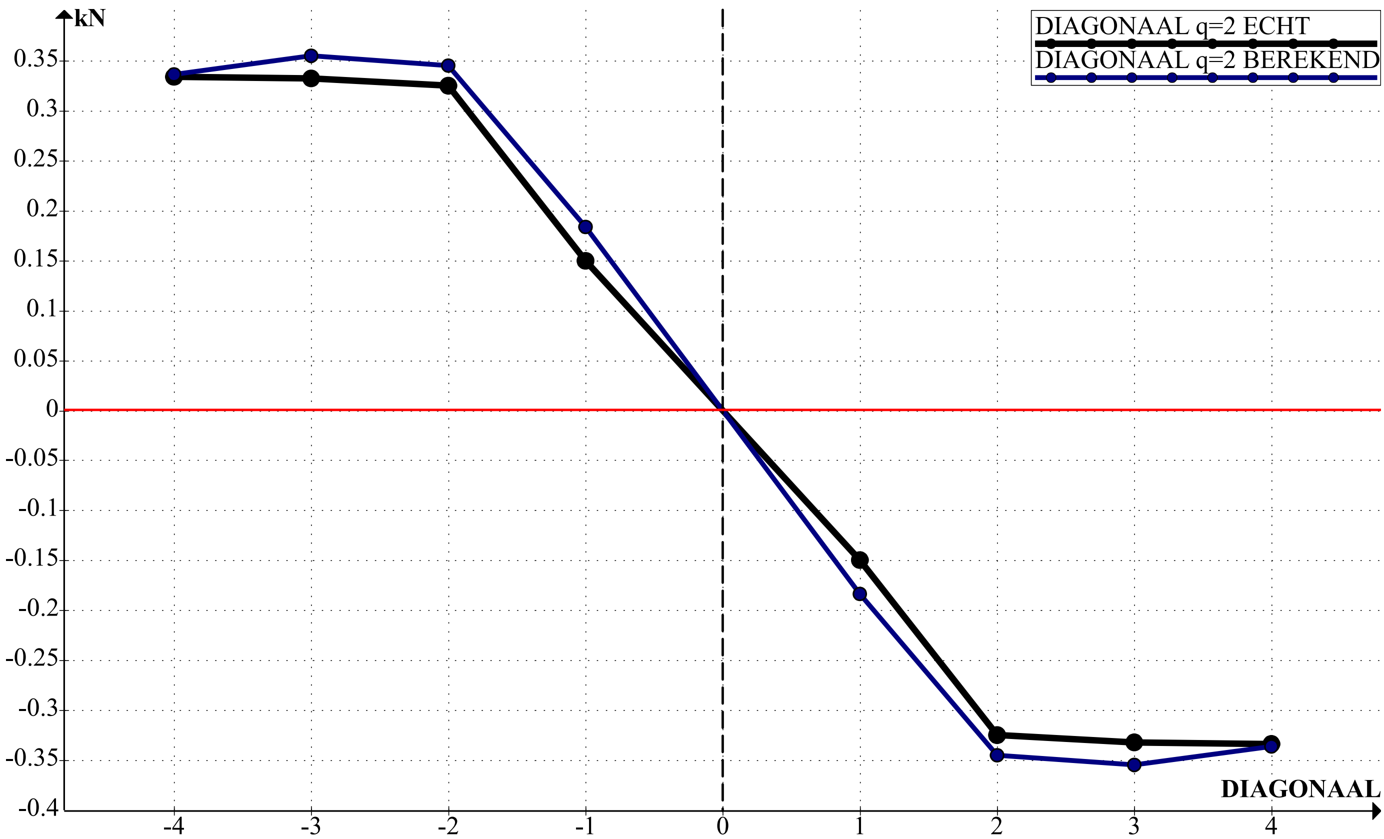
BIJ **BELASTING** $q = 2$ **kN/m**



DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	NORMAALKRACHT ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.92	**-0.334**	-0.336	0.6%
-3	-3.05	**0.332**	0.355	6.9%
-2	-2.01	**-0.325**	-0.345	6.2%
-1	-0.72	**0.150**	0.184	22.7%
1	0.72	**0.150**	0.184	22.7%
2	2.01	**-0.325**	-0.345	6.2%
3	3.05	**0.332**	0.355	6.9%
4	3.92	**-0.334**	-0.336	0.6%

	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
H	**-4.954**	-4.933	-0.4%
V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%
V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%

Tabel 4

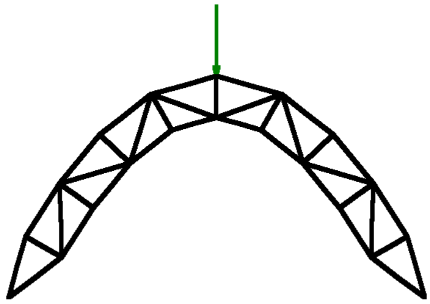


Afbeelding 60
Teken van de dwarskracht D_+ aangehouden in grafiek

Deze tweede methode geeft zeker betere resultaten, hoewel de relatieve afwijking rond $x = 0$ nog steeds 23% is. De resultaten voor de andere belastingsgevallen:

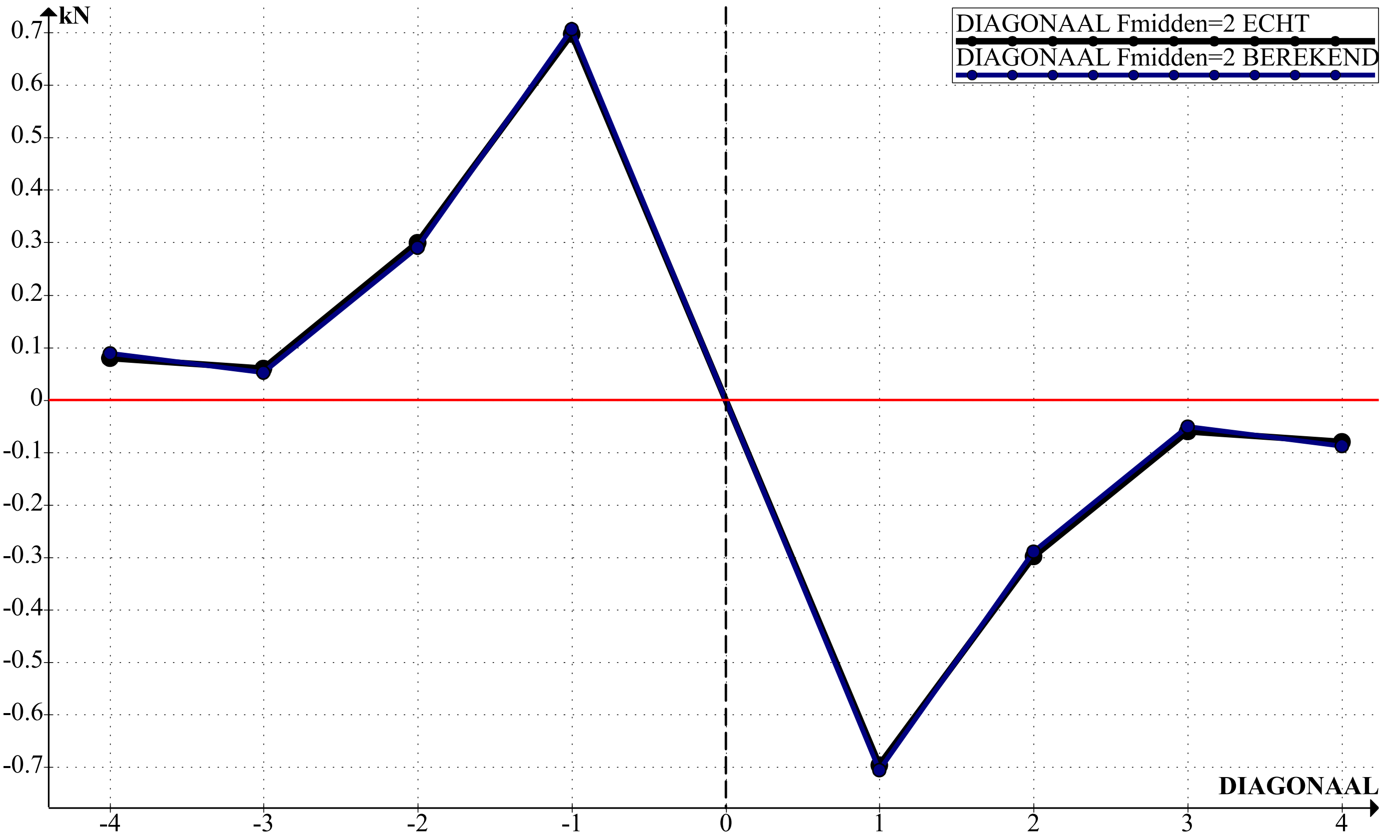
ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (43)

BIJ **BELASTING** $q=2\delta(x)$ **kN/m**



		NORMAALKRACHT						
DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**		**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-3.92	**-0.080**	-0.088	10.0%	**H**	**-0.743**	-0.749	0.8%
-3	-3.05	**0.060**	0.051	-15.0%	V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%
-2	-2.01	**-0.299**	-0.290	-3.0%	V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%
-1	-0.72	**0.698**	0.707	1.3%				
1	0.72	**0.698**	0.707	1.3%				
2	2.01	**-0.299**	-0.290	-3.0%				
3	3.05	**0.060**	0.051	-15.0%				
4	3.92	**-0.080**	-0.088	10.0%				

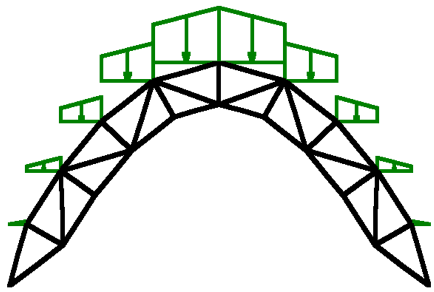
Tabel 5



Afbeelding 61
Teken van de dwarskracht D_+ aangehouden in grafiek

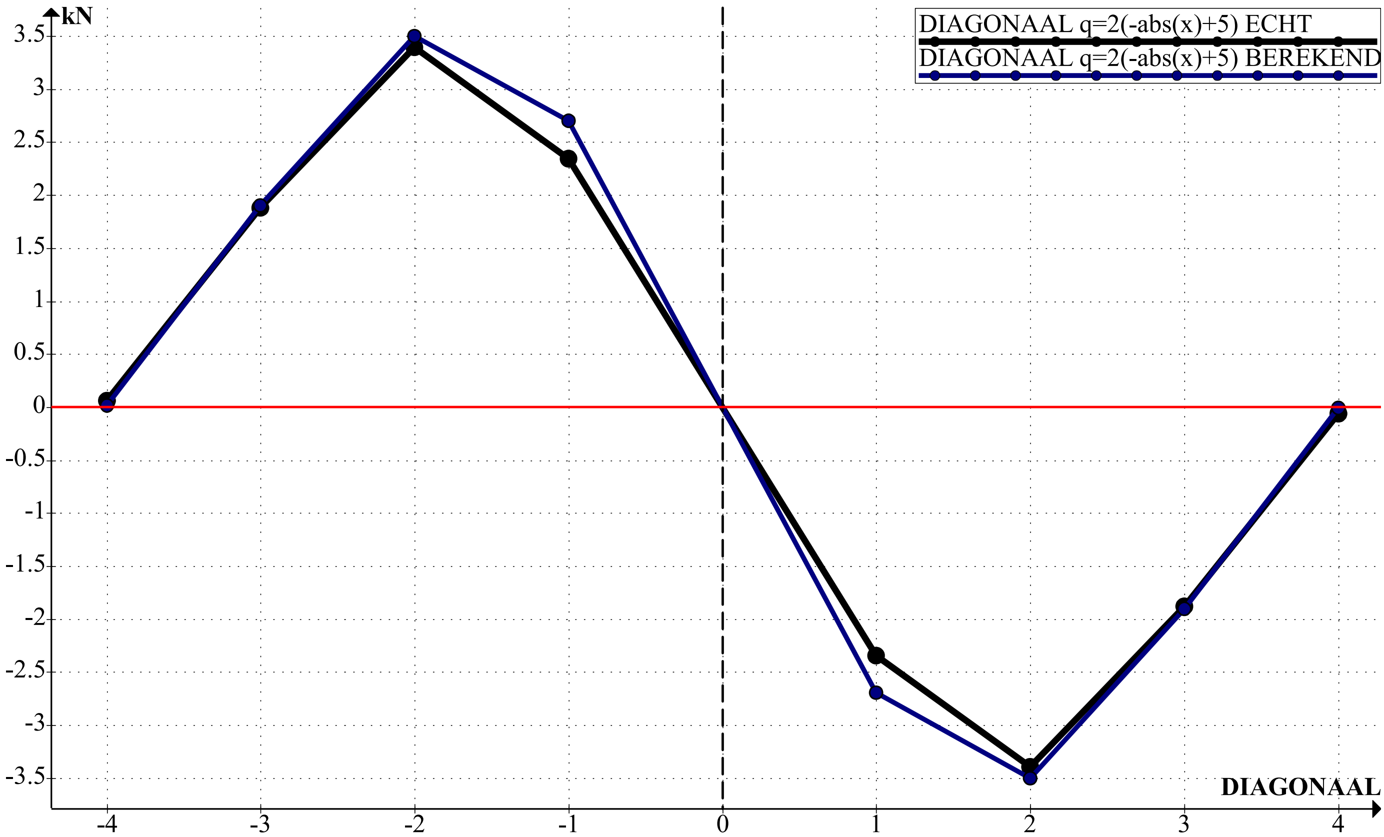
ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (43)

BIJ **BELASTING** $q=2(-|(x)|+5)$ **kN/m**



		NORMAALKRACHT						
DIAGONALEN	**$P_{loodrecht}$**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**		**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-3.92	**-0.062**	-0.012	-80.6%	**H**	**-15.519**	-15.521	0.0%
-3	-3.05	**1.877**	1.903	1.4%	V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%
-2	-2.01	**-3.395**	-3.499	3.1%	V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%
-1	-0.72	**2.343**	2.698	15.2%				
1	0.72	**2.343**	2.698	15.2%				
2	2.01	**-3.395**	-3.499	3.1%				
3	3.05	**1.877**	1.903	1.4%				
4	3.92	**-0.062**	-0.012	-80.6%				

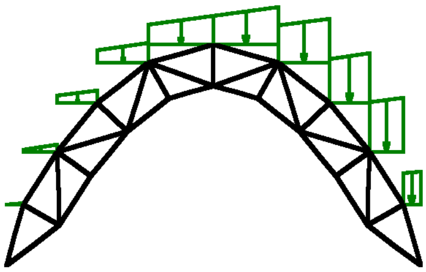
Tabel 6



Afbeelding 62
Teken van de dwarskracht D_{+} aangehouden in grafiek

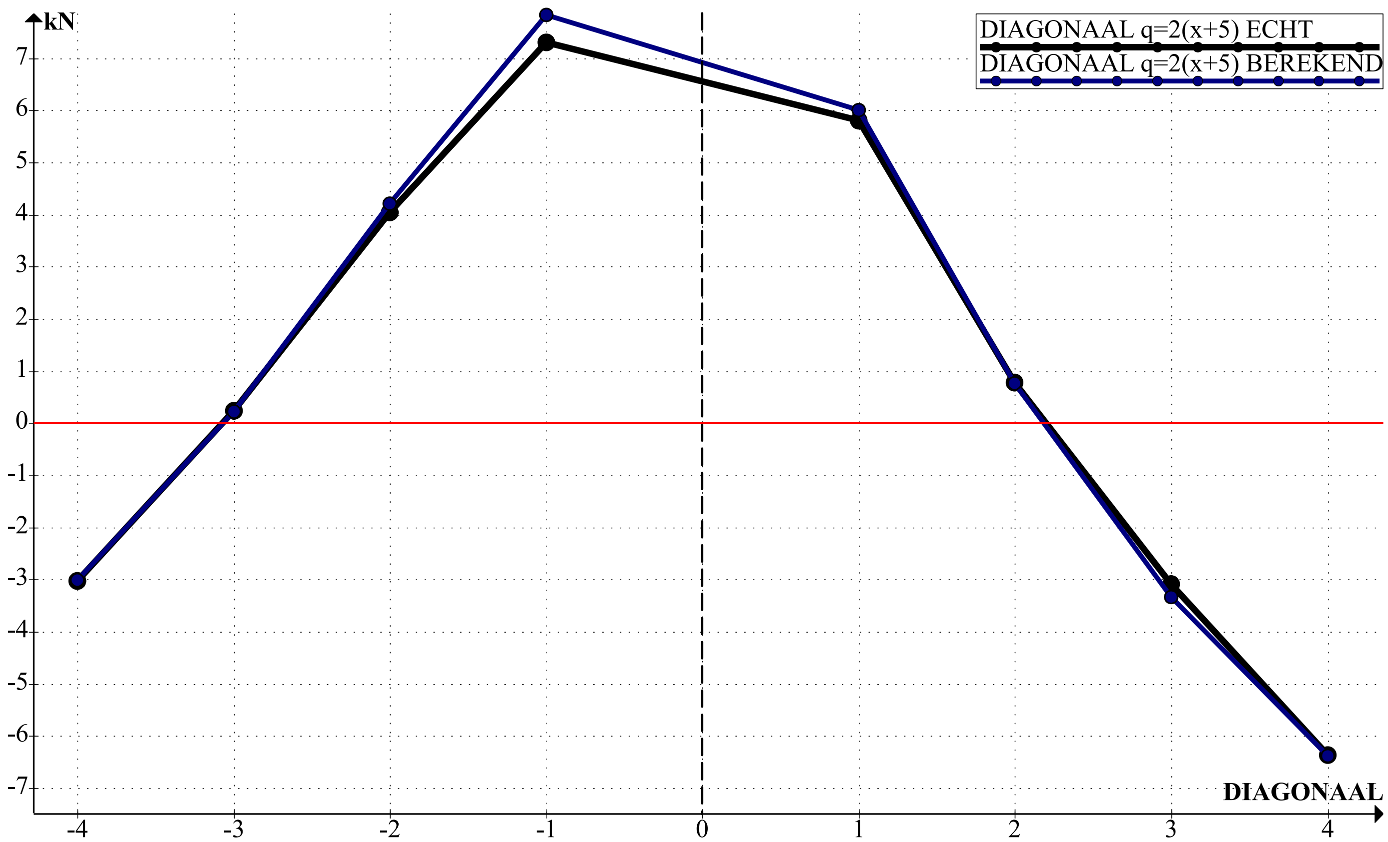
ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS (43)

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5)$ **kN/m**



		NORMAALKRACHT						
DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**		**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-3.92	**3.029**	3.017	-0.4%	**H**	**-24.768**	-24.666	-0.4%
-3	-3.05	**0.232**	0.224	-3.4%	V_{links}	**-33.336**	-33.333	0.0%
-2	-2.01	**-4.041**	-4.217	4.4%	V_{links}	**-66.703**	-66.667	-0.1%
-1	-0.72	**7.311**	7.836	7.2%				
1	0.72	**-5.807**	-6.000	3.3%				
2	2.01	**0.778**	0.770	-1.0%				
3	3.05	**3.087**	3.327	7.8%				
4	3.92	**-6.370**	-6.381	0.2%				

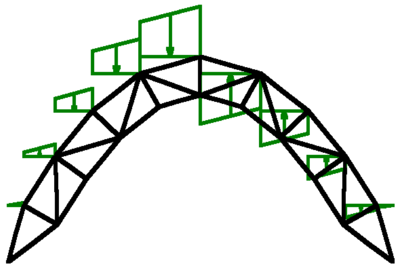
Tabel 7



Afbeelding 63
Teken van de dwarskracht D_+ aangehouden in grafiek

ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (43)

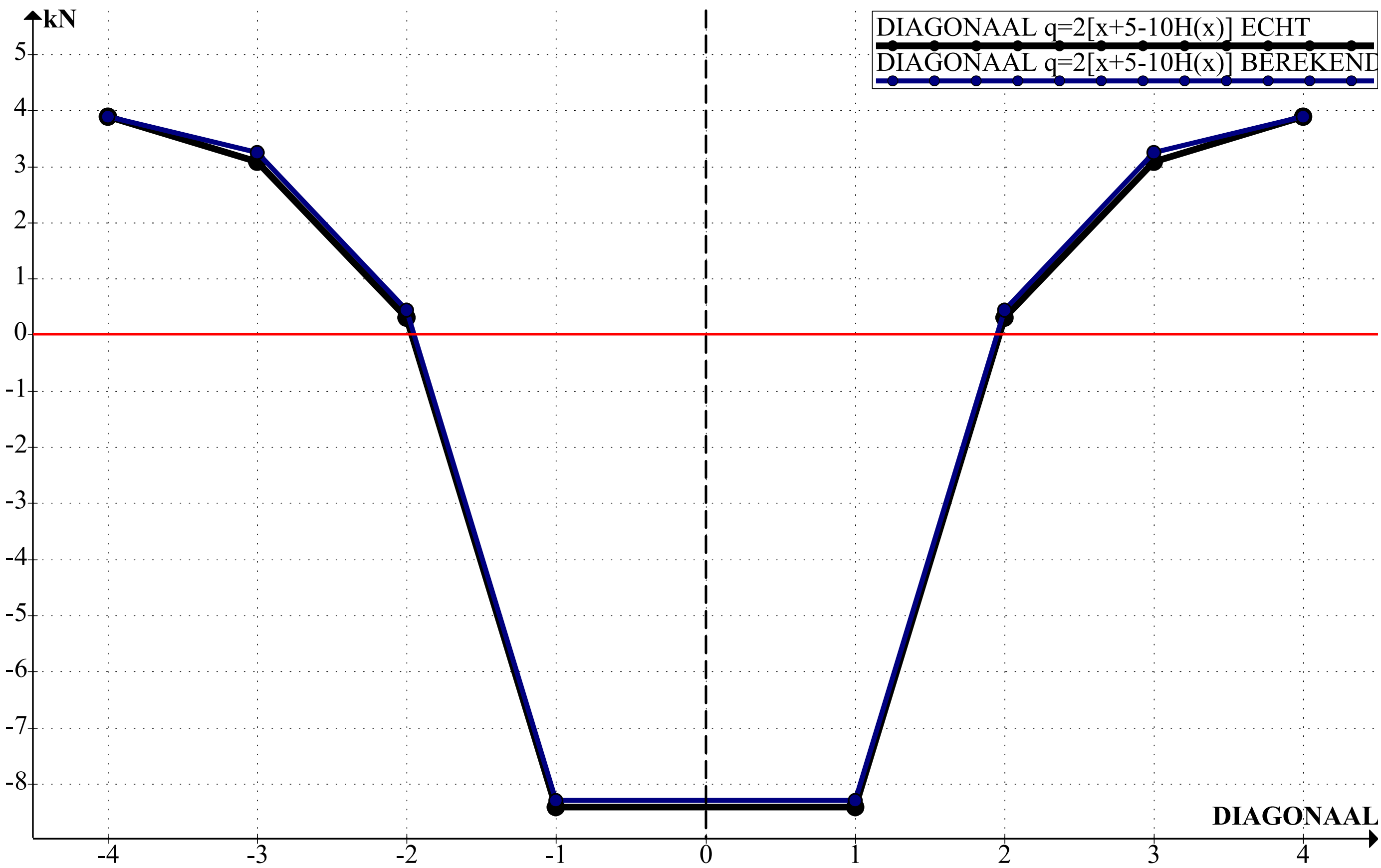
BIJ **BELASTING** $q=2(x+5-10\,\mathrm{H}(x))$ **kN/m**



		NORMAALKRACHT		
DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.92	**-3.880**	-3.882	0.1%
-3	-3.05	**3.076**	3.253	5.8%
-2	-2.01	**-0.304**	-0.438	44.1%
-1	-0.72	**-8.416**	-8.297	-1.4%
1	0.72	**8.416**	8.297	-1.4%
2	2.01	**0.304**	0.438	44.1%
3	3.05	**-3.076**	-3.253	5.8%
4	3.92	**3.880**	3.882	0.1%

	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
H	**0.000**	0.000	0.0%
V_{links}	**-8.336**	-8.333	0.0%
V_{links}	**8.336**	8.333	0.0%

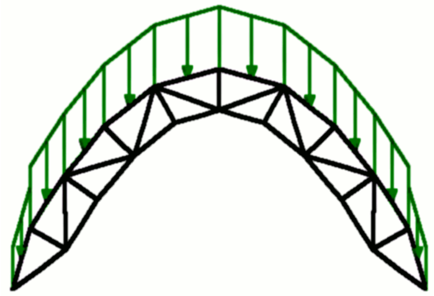
Tabel 8



Afbeelding 64
Teken van de dwarskracht D_+ aangehouden in grafiek

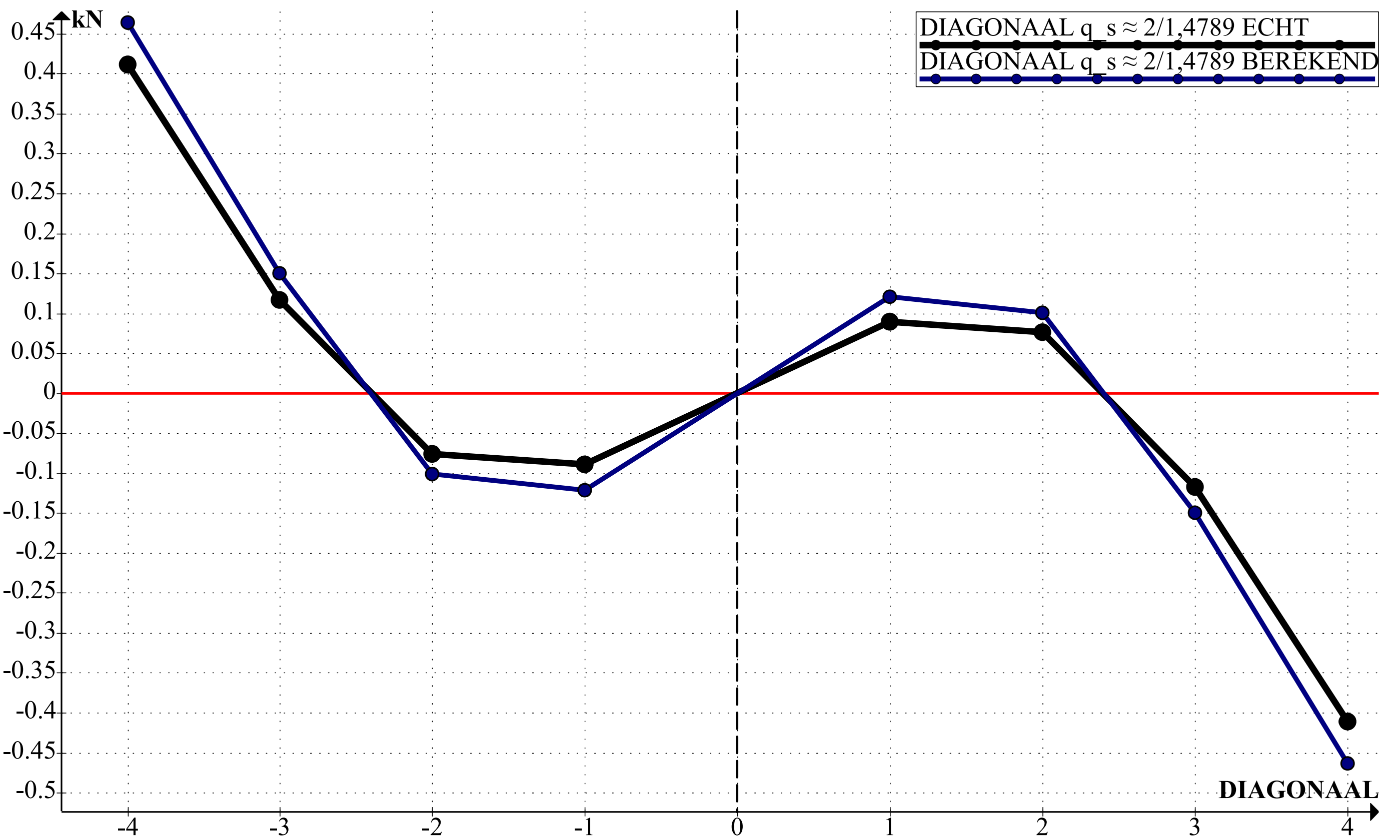
ZIJDIAGONALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (43)

BIJ **BELASTING** $q_s \approx \dfrac{2}{1{,}4789}$ **kN/m**



		NORMAALKRACHT						
DIAGONALEN	$P_{loodrecht}$	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING		ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.92	**-0.411**	-0.464	12.9%	H	**-4.276**	-4.347	1.7%
-3	-3.05	**0.117**	0.150	28.2%	V_{links}	**-9.983**	-10.000	0.2%
-2	-2.01	**0.076**	0.101	32.9%	V_{rechts}	**-9.983**	-10.000	0.2%
-1	-0.72	**-0.089**	-0.121	36.0%				
1	0.72	**-0.089**	-0.121	36.0%				
2	2.01	**0.076**	0.101	32.9%				
3	3.05	**0.117**	0.150	28.2%				
4	3.92	**-0.411**	-0.464	12.9%				

Tabel 9



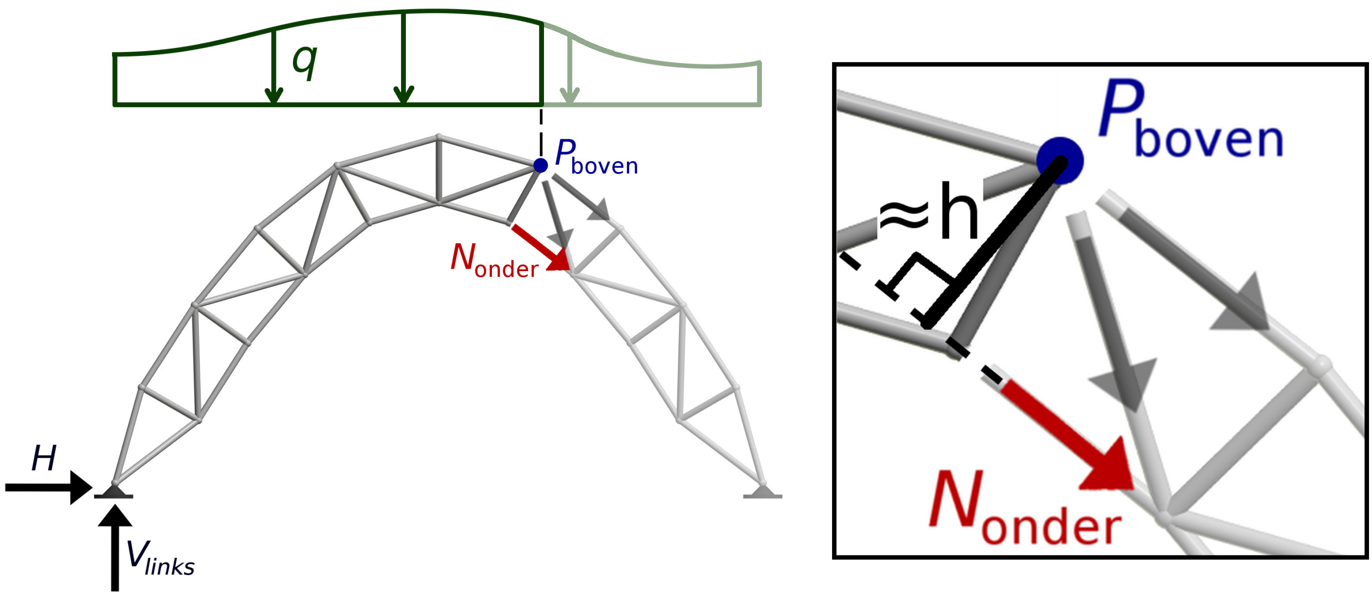
Afbeelding 65
Teken van de dwarskracht D_+ aangehouden in grafiek

Hoewel de echte waarden in alle gevallen redelijk worden gevolgd, is er zeker verbetering mogelijk. Men ziet dat steeds, met uitzondering van de puntlast, rond de top van de boog, dat is rond de vakken 1 en -1, dat de waardes ten opzichte van de rest flinke afwijkingen krijgen. Dit komt door de grotere kromming van de hartlijn aldaar, waardoor de benadering $d_q \approx d_{\text{boven}}$ slechter wordt. d_q is rond de top redelijk groter dan d_{boven}, namelijk op x = 0,72 voor de berekening van de diagonaalkracht in diagonaal 1 is d_q = 0,224 m, vgl. d_{boven} = 0,333 m waardoor dus teveel kracht door q wordt meegenomen in de berekening. Naarmate de dwarskracht sowieso al hoog is, zoals bij de keersymmetrische belasting, is de invloed van deze fout kleiner. De puntlast $2\delta(x)$ heeft van dit alles geen last omdat daar afgezien van de top nergens verdeelde belasting werkt. Kortom, de benadering zou rond de top van de boog nog iets beter kunnen worden door de kromming van de boog bij de benadering voor d_q te betrekken, maar helaas moet dat hier in verband met de beschikbare tijd achterwege gelaten worden.

5.5 NORMAALKRACHT IN DE RANDSTAVEN

5.5.1 NORMAALKRACHT IN DE ONDERRANDSTAVEN

Beschouw de volgende situatie:



Afbeelding 66 Normaalkracht in onderrandstaaf

Voor de normaalkracht N_{onder} in een onderrandstaaf rechts van twee verticalen, beschouw een punt P_{boven} met coördinaten (x_{boven}, z_{boven}).

Volgens (8) tot en met (11) geldt:

$$x_{boven} = x_P + \frac{dz/dx}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} d_1$$

$$z_{boven} = z_P - \frac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} d_1$$

Men heeft al een uitdrukking voor het moment (28):

$$M = M^a - H\,z$$

En x_{boven} en z_{boven} hierin ingevuld:

$$M(x_{boven}) = M^a(x_{boven}) - H\,z_{boven} \tag{44}$$

Dit moment moet worden tegengewerkt door een moment $M_{doorsnede}$ ten gevolge van N_{onder} over de afstand van ongeveer h, zie afbeelding 66:

$$M_{\text{doorsnede}} \approx -h\,N_{\text{onder}} \tag{45}$$

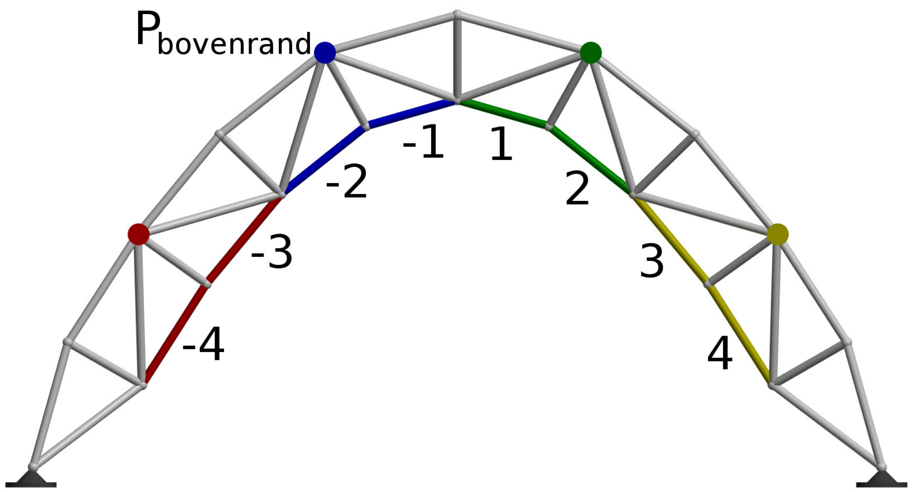
Er moet gelden:

$$\Sigma M | P_{boven} \approx M(x_{boven}) - h\,N_{onder} = 0 \tag{46}$$

Dus:

$$N_{onder} \approx \frac{M(x_{boven})}{h} \tag{47}$$

De normaalkracht in de onderrandstaaf links van de twee verticalen is bij zeer goede benadering gelijk aan die in de onderrandstaaf rechts daarvan (afbeelding 43, blz. 34). Men zou dus per $P_{bovenrand}$ bij benadering de kracht in een tweetal onderrandstaven moeten krijgen op de volgende manier:



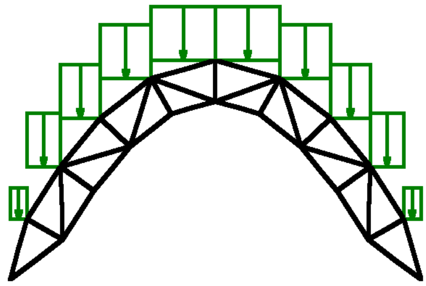
Afbeelding 67 Nummering van onderrandstaven

Laat men eens kijken hoe dit werkt. Weer voor dezelfde belastingsgevallen als bij de zijdiagonalen.

5.5.2 RESULTATEN VAN PROEFBEREKENINGEN VOOR DE ONDERRANDSTAVEN

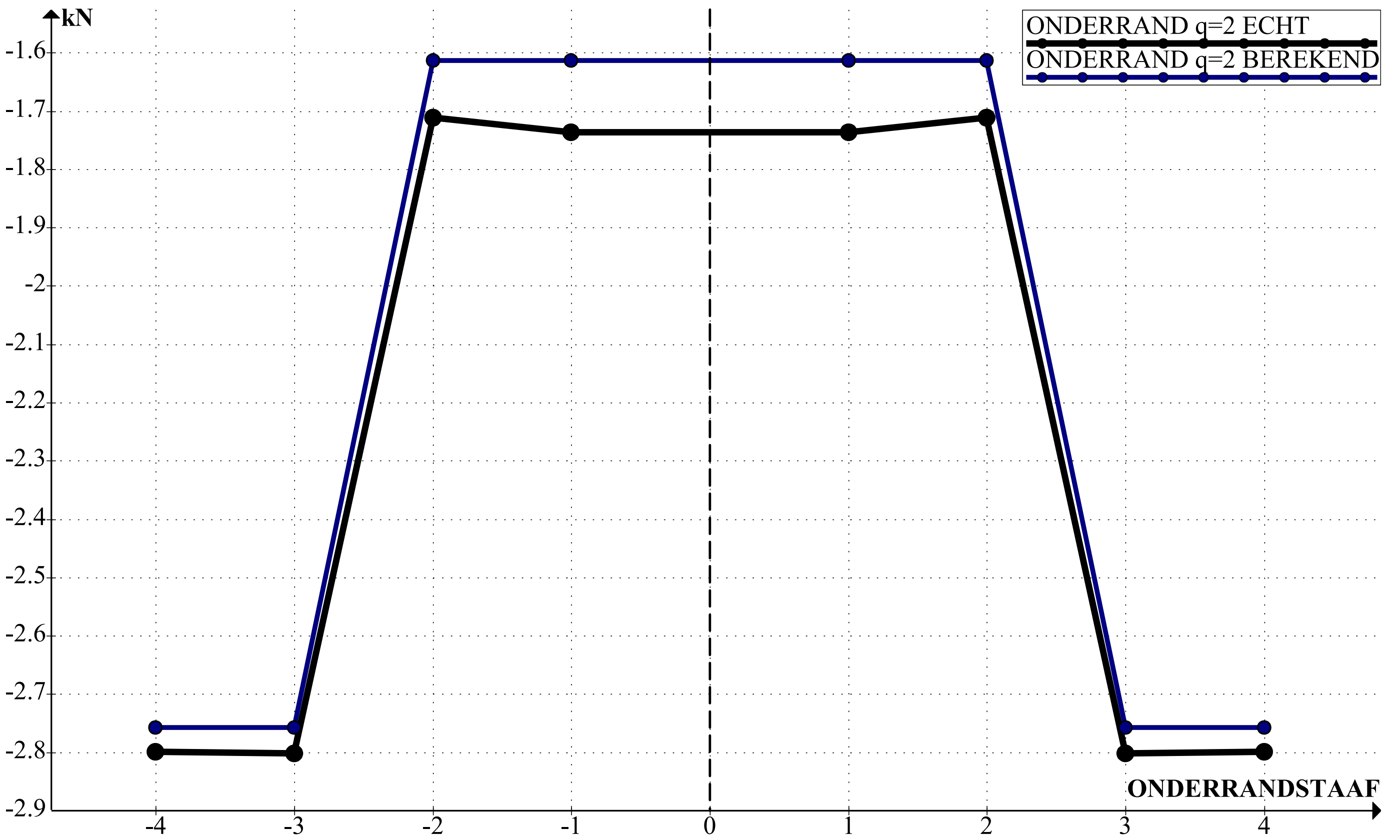
ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** q **= 2 kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**-2.799**	-2.758	-1.5%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**-2.802**	-2.758	-1.6%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**-1.712**	-1.613	-5.8%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**-1.736**	-1.613	-7.1%
1	1.41	1.57	-4.89	**-1.736**	-1.613	-7.1%
2	1.41	1.57	-4.89	**-1.712**	-1.613	-5.8%
3	3.50	3.77	-2.74	**-2.802**	-2.758	-1.6%
4	3.50	3.77	-2.74	**-2.799**	-2.758	-1.5%
			H	**-4.954**	-4.933	-0.4%
			V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%
			V_{rechts}	**-10.004**	-10.000	0.0%

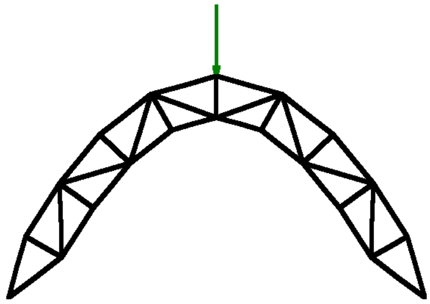
Tabel 10



Afbeelding 68

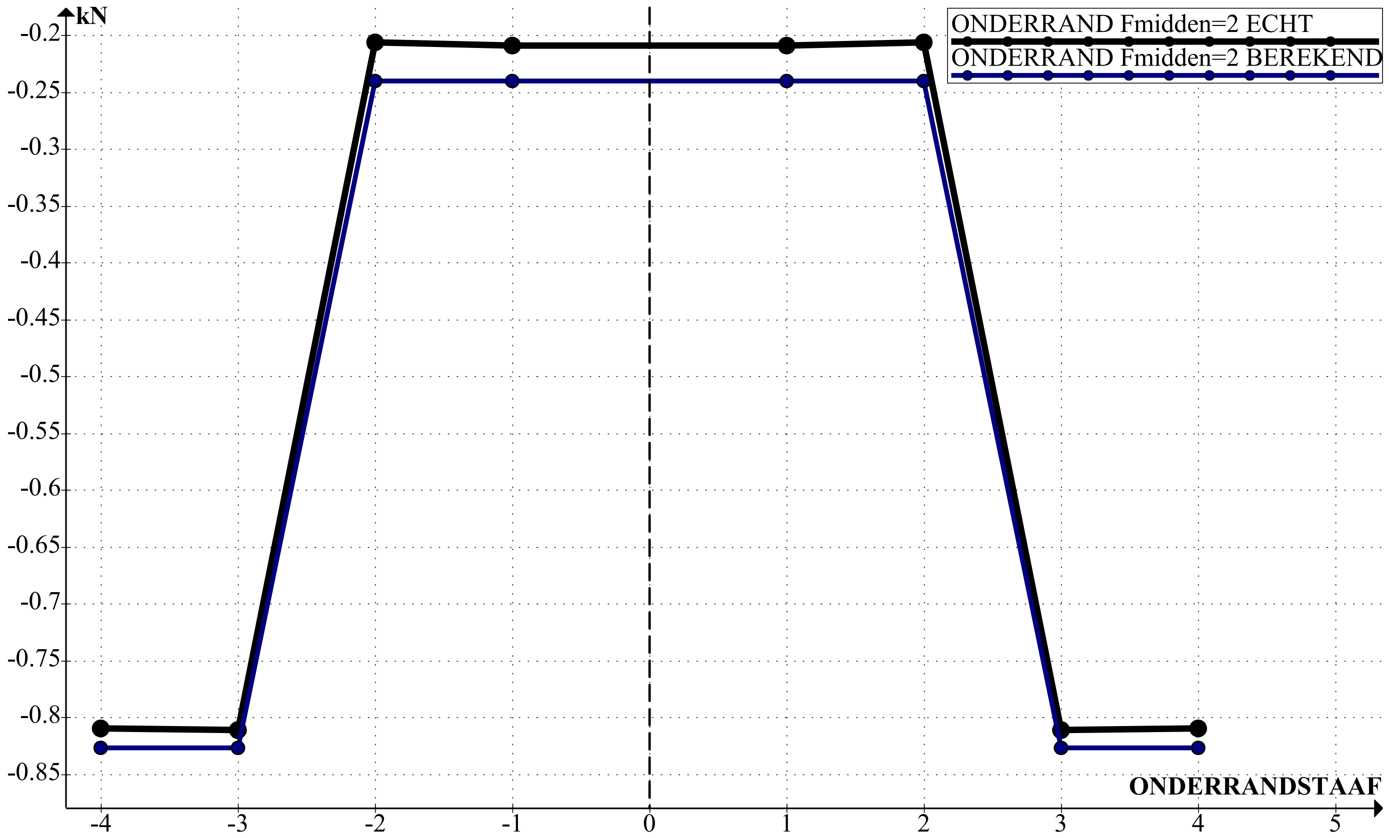
ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** F **= 2 kN**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**-0.810**	-0.827	2.1%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**-0.811**	-0.827	2.0%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**-0.206**	-0.240	16.5%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**-0.209**	-0.240	14.8%
1	1.41	1.57	-4.89	**-0.209**	-0.240	14.8%
2	1.41	1.57	-4.89	**-0.206**	-0.240	16.5%
3	3.50	3.77	-2.74	**-0.811**	-0.827	2.0%
4	3.50	3.77	-2.74	**-0.810**	-0.827	2.1%
			H	**-0.743**	-0.749	0.8%
			V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%
			V_{rechts}	**-1.000**	-1.000	0.0%

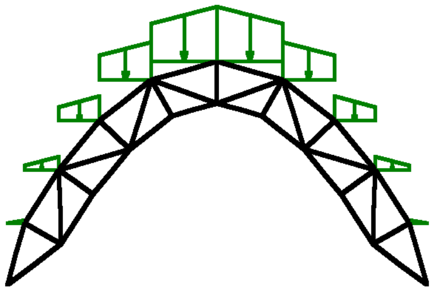
Tabel 11



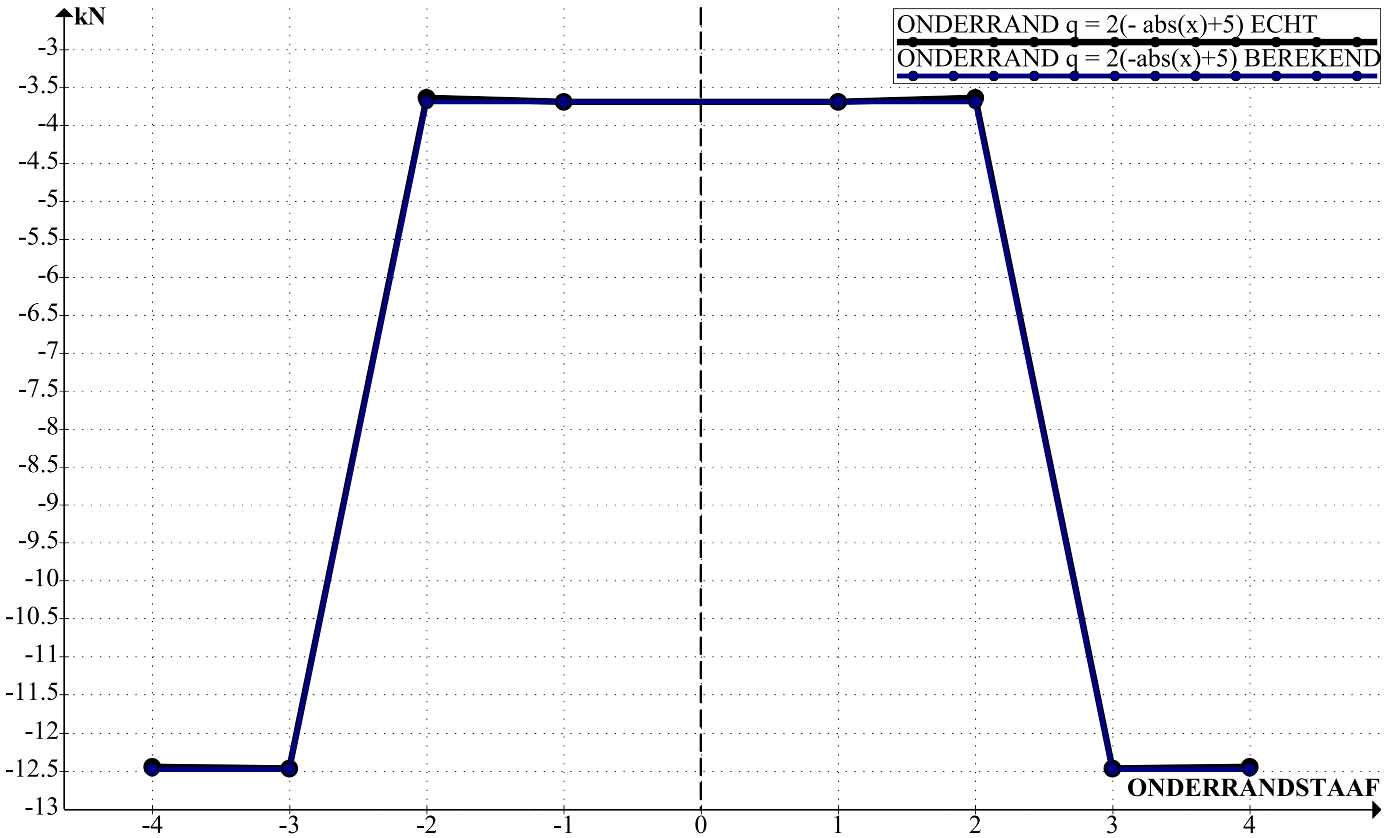
Afbeelding 69

ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** $q = 2(-|(x)| + 5)$ **kN/m**



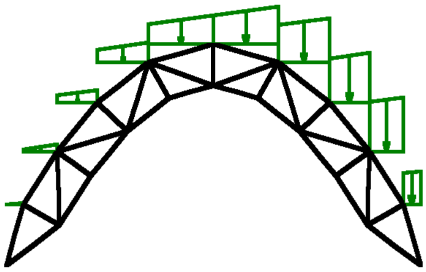
	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**-12.455**	-12.486	0.2%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**-12.470**	-12.486	0.1%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**-3.640**	-3.692	1.4%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**-3.693**	-3.692	0.0%
1	1.41	1.57	-4.89	**-3.693**	-3.692	0.0%
2	1.41	1.57	-4.89	**-3.640**	-3.692	1.4%
3	3.50	3.77	-2.74	**-12.470**	-12.486	0.1%
4	3.50	3.77	-2.74	**-12.455**	-12.486	0.2%
			H	**-15.519**	-15.521	0.0%
			V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%
			V_{rechts}	**-25.002**	-25.000	0.0%



Afbeelding 70

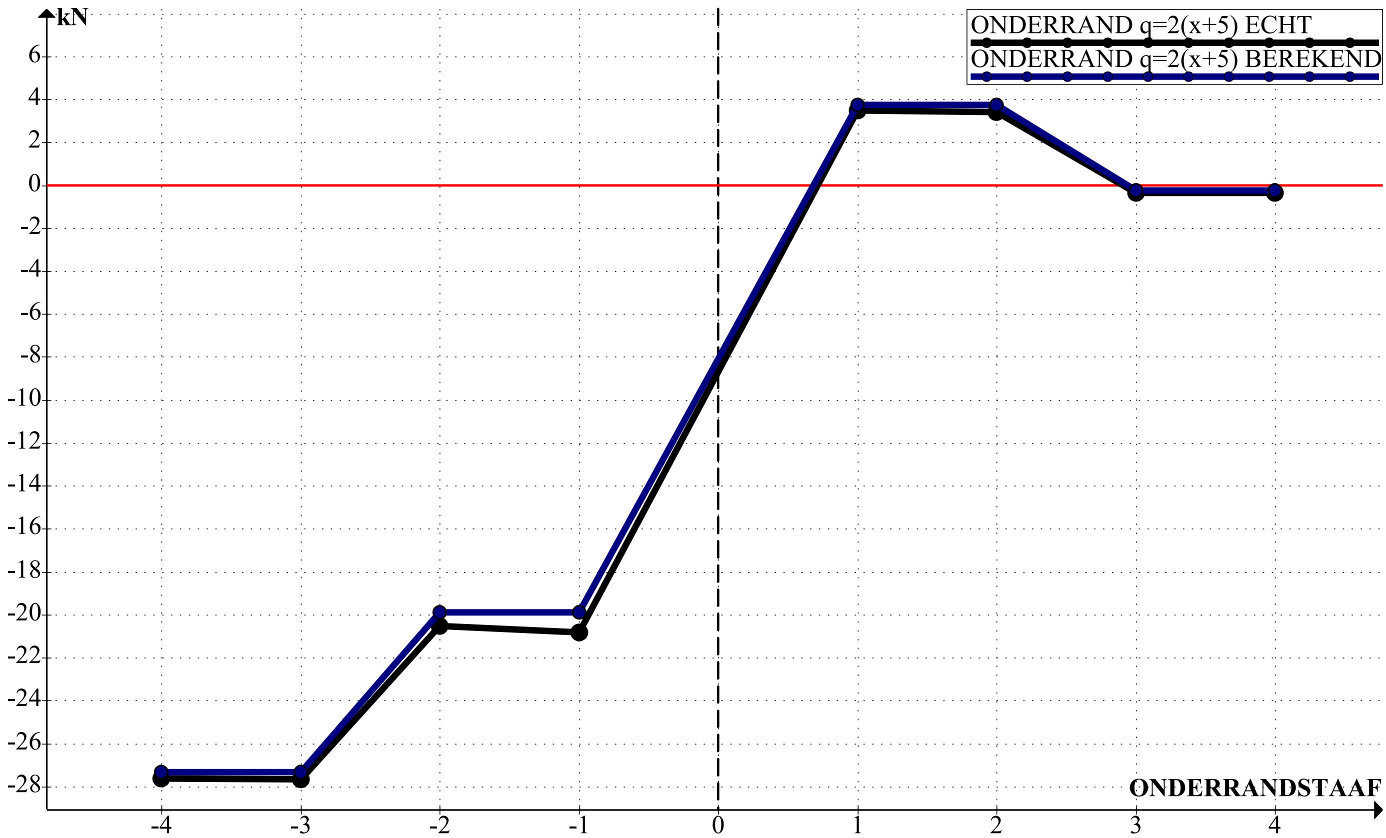
ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** $q = 2(x+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**-27.624**	-27.337	-1.0%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**-27.656**	-27.337	-1.2%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**-20.527**	-19.882	-3.1%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**-20.823**	-19.882	-4.5%
1	1.41	1.57	-4.89	**3.460**	3.748	8.3%
2	1.41	1.57	-4.89	**3.410**	3.748	9.9%
3	3.50	3.77	-2.74	**-0.367**	-0.240	-34.6%
4	3.50	3.77	-2.74	**-0.367**	-0.240	-34.6%
			H	**-24.768**	-24.666	-0.4%
			V_{links}	**-33.336**	-33.333	0.0%
			V_{rechts}	**-66.703**	-66.667	-0.1%

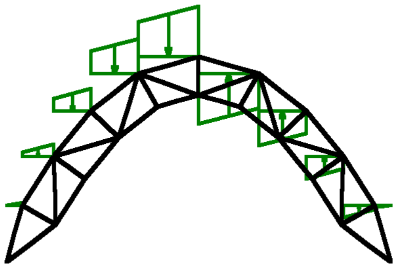
Tabel 12



Afbeelding 71

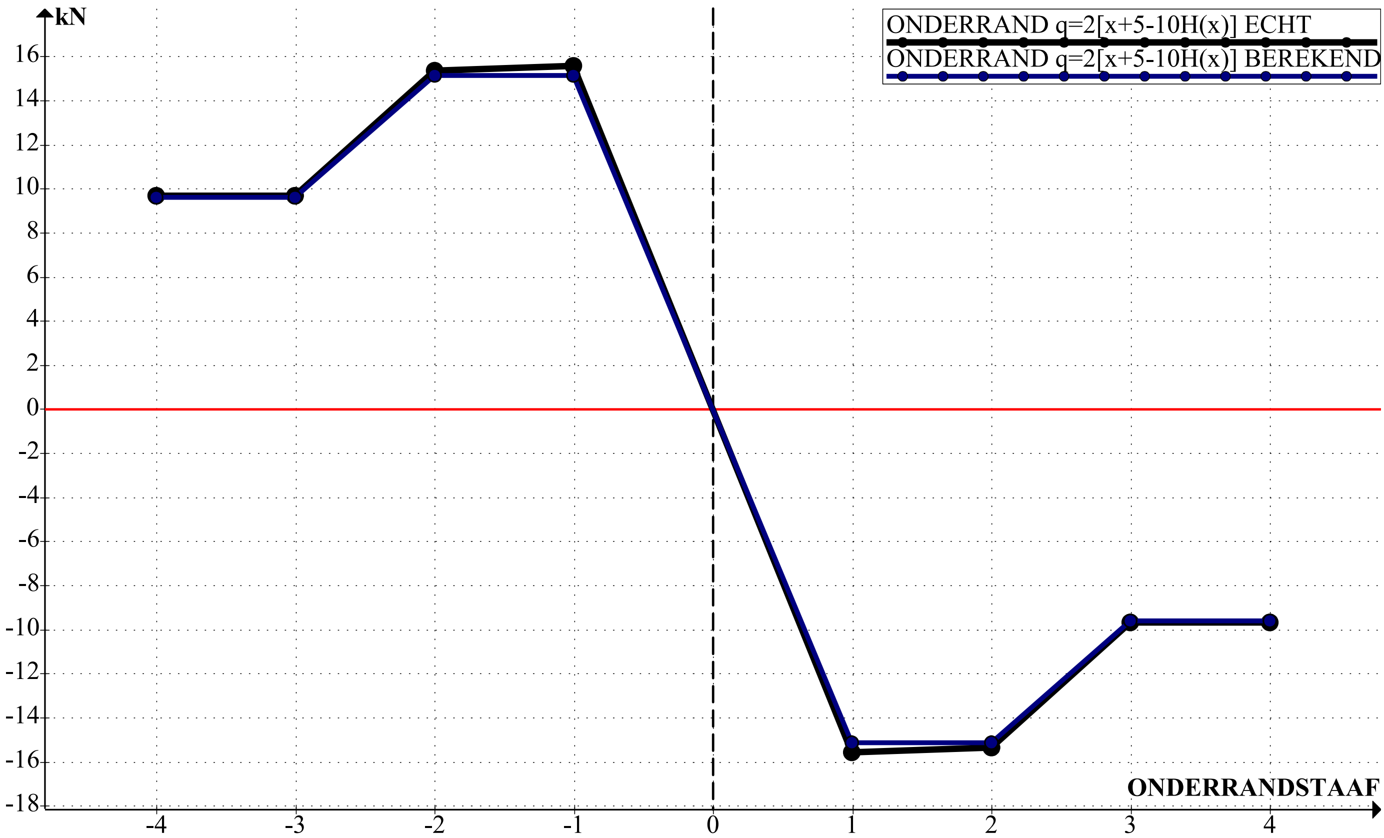
ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** $q = 2[(x+5) - 10\,H(x)]$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**9.680**	9.621	-0.6%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**9.691**	9.621	-0.7%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**15.356**	15.145	-1.4%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**15.578**	15.145	-2.8%
1	1.41	1.57	-4.89	**-15.578**	-15.145	-2.8%
2	1.41	1.57	-4.89	**-15.356**	-15.145	-1.4%
3	3.50	3.77	-2.74	**-9.691**	-9.621	-0.7%
4	3.50	3.77	-2.74	**-9.680**	-9.621	-0.6%
			H	**0.000**	0.000	0.0%
			V_{links}	**-8.336**	-8.333	0.0%
			V_{rechts}	**8.336**	8.333	0.0%

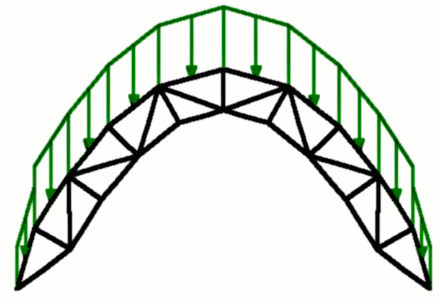
Tabel 13



Afbeelding 72

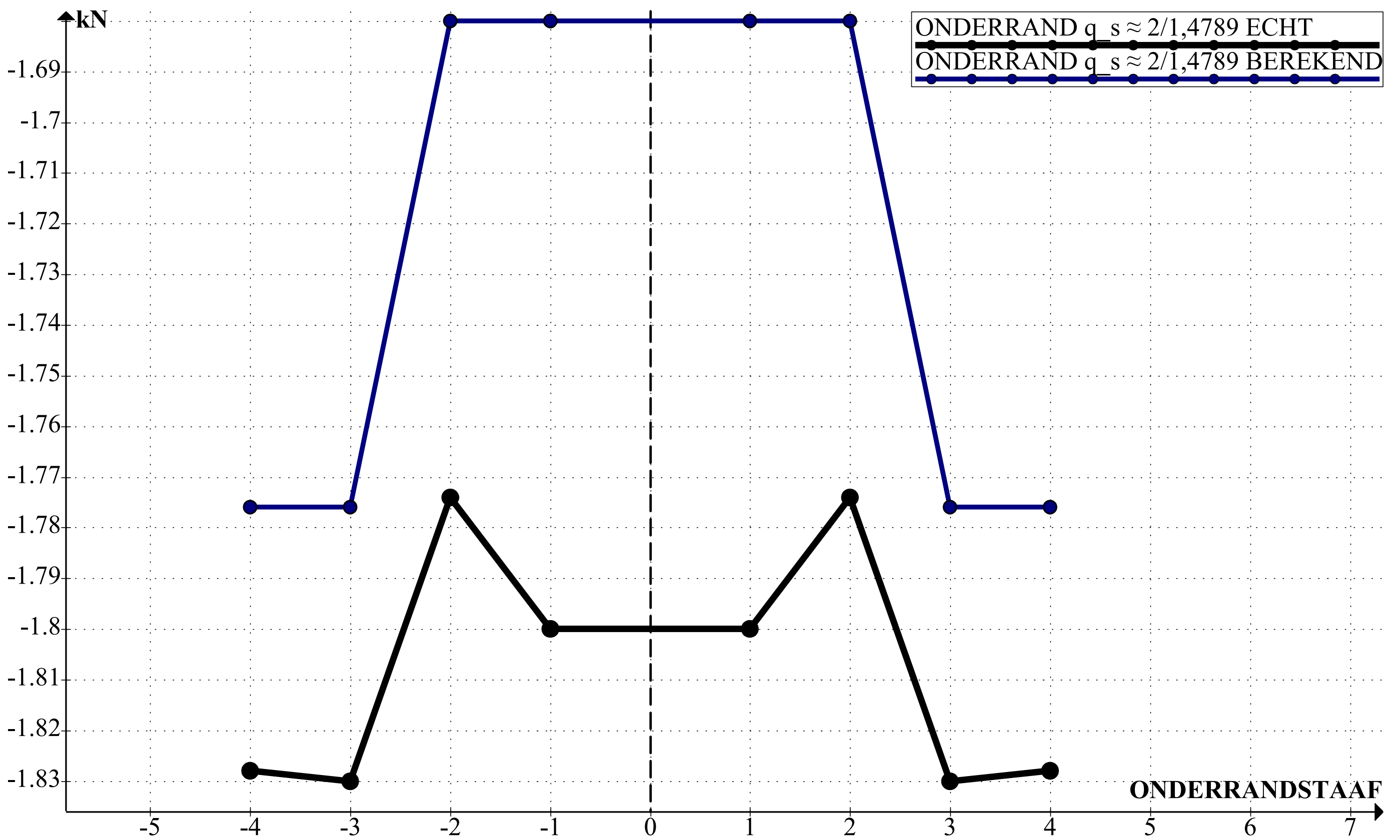
ONDERRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (47)

BIJ **BELASTING** $q \approx \frac{2}{1,4789}$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
ONDERRANDSTAAF	x_P	x_{boven}	z_{boven}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-3.50	-3.77	-2.74	**-1.828**	-1.776	-2.8%
-3	-3.50	-3.77	-2.74	**-1.830**	-1.776	-3.0%
-2	-1.41	-1.57	-4.89	**-1.774**	-1.680	-5.3%
-1	-1.41	-1.57	-4.89	**-1.800**	-1.680	-6.7%
1	1.41	1.57	-4.89	**-1.800**	-1.680	-6.7%
2	1.41	1.57	-4.89	**-1.774**	-1.680	-5.3%
3	3.50	3.77	-2.74	**-1.830**	-1.776	-3.0%
4	3.50	3.77	-2.74	**-1.828**	-1.776	-2.8%
			H	**-4.276**	-4.347	1.7%
			V_{links}	**-9.983**	-10.000	0.2%
			V_{rechts}	**-9.983**	-10.000	0.2%

Tabel 14



Afbeelding 73

5.5.3 NORMAALKRACHT IN BOVENRANDSTAVEN

Voor de normaalkracht N_{boven} in bovenrandstaven S_{boven} gaat men op overeenkomstige wijze te werk met behulp van x_{onder} en z_{onder}. Wederom volgens (8) tot en met (11):

$$x_{boven} = x - \frac{dz/dx}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} d_1$$

$$z_{boven} = z + \frac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} d_1$$

Men moet hierbij nu wel opletten dat men, net als in de vorige paragraaf over de normaalkracht in de zijdiagonalen, de complete belasting op de vrijgemaakte boog meeneemt. Dat levert:

$$M(x_{boven}) = M^a(x_{\text{boven}}) - H\, z_{\text{boven}} + \int_{x_{\text{onder}}}^{x_{\text{boven}}} (a - x_{onder})\, q(a)\, da \tag{48}$$

En met dezelfde overwegingen als bij N_{onder}, maar gedeeld door twee omdat men twee bovenrandstaven heeft:

$$N_{\text{boven}} \approx \frac{M(x_{\text{boven}})}{2h} \tag{49}$$

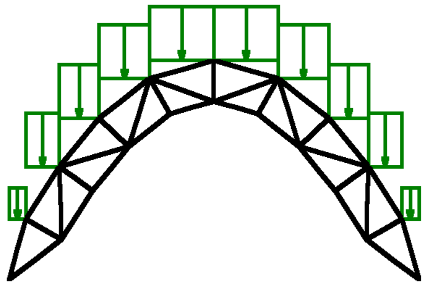
Er treedt hier helaas wel een moeilijkheid op: De bovenrand is niet zoals de onderrand onbelast, en hier vindt dus per paar van verticalen wel een verspringing in staafbelasting op. Wat met dit model benaderd wordt is de spanning in de bovenrandstaven ter plekke van het berekenpunt x_P bij een werkelijk aanwezige belasting q. Met deze spanning wordt in de proefberekeningen hierna dus ook vergeleken. Deze is in het algemeen niet gelijk aan de staafkracht zoals die zou zijn bij de statisch equivalente belasting in losse lasten, maar zit er in het algemeen wel in de buurt.

Ook bij deze rekenresultaten ziet men in het algemeen, net zoals bij de diagonalen (5.4.2), een toename in de afwijking in de buurt van de top van de boog. Dit komt weer door de grotere kromming, waardoor horizontale-zij-projectie de hoek van de bovenrandstaven met de verticalen steeds verder gaat afwijken van 90º, waardoor de benadering slechter wordt.

5.5.4 RESULTATEN VAN PROEFBEREKENINGEN VOOR DE BOVENRANDSTAVEN

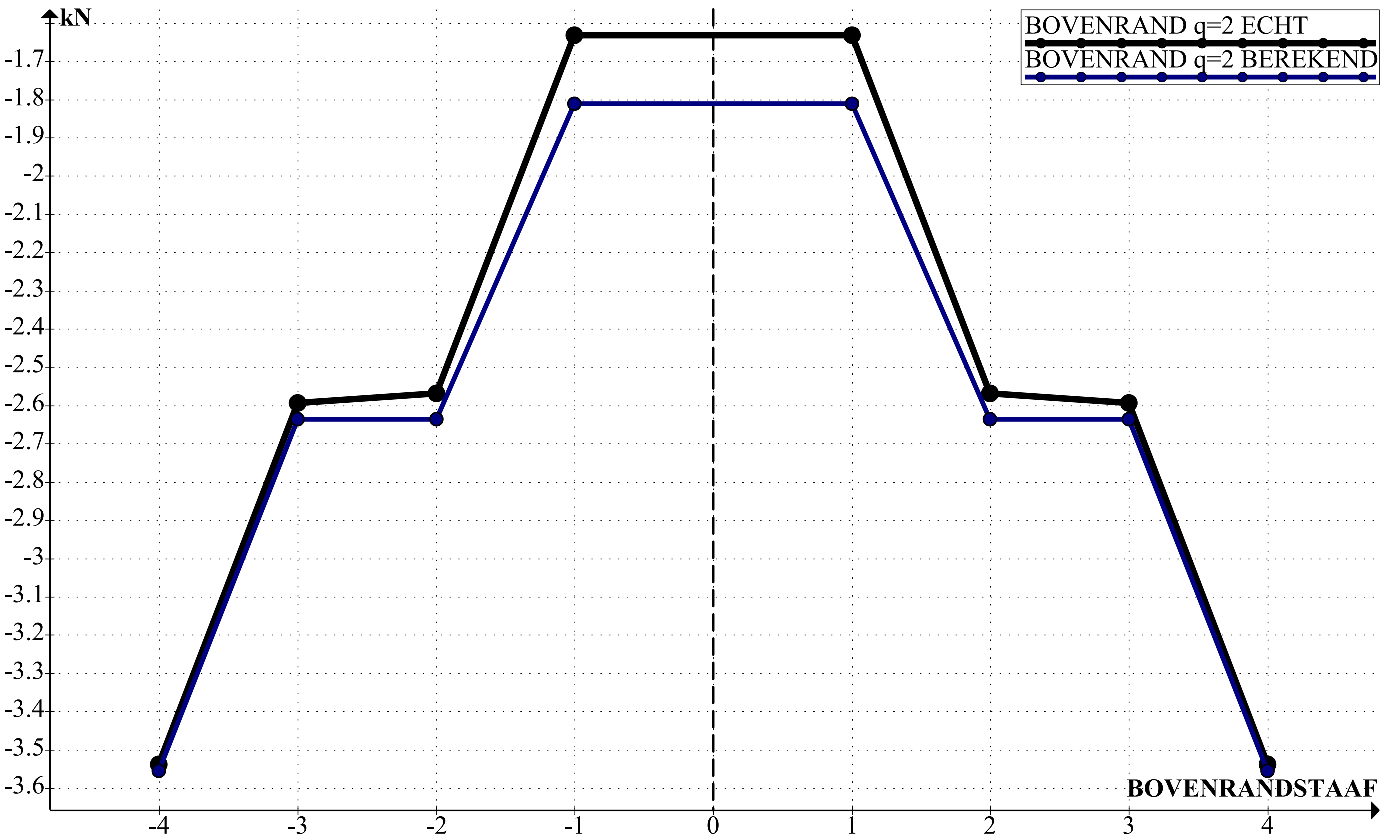
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING** q **= 2 kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-3.538**	-3.556	0.5%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-2.594**	-2.635	1.6%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-2.569**	-2.635	2.6%
-1	0.00	0.00	-4.33	**-1.633**	-1.811	10.9%
1	0.00	0.00	-4.33	**-1.633**	-1.811	10.9%
2	2.56	2.08	-3.22	**-2.569**	-2.635	2.6%
3	2.56	2.08	-3.22	**-2.594**	-2.635	1.6%
4	4.30	3.72	-0.97	**-3.538**	-3.556	0.5%
			H	**-4.954**	-4.933	-0.4%
			V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%
			V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%

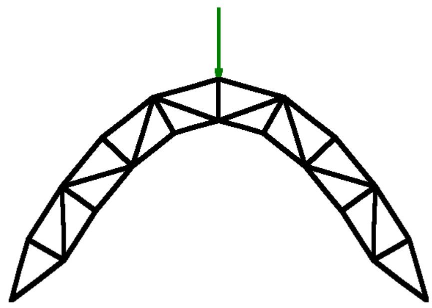
Tabel 15



Afbeelding 74

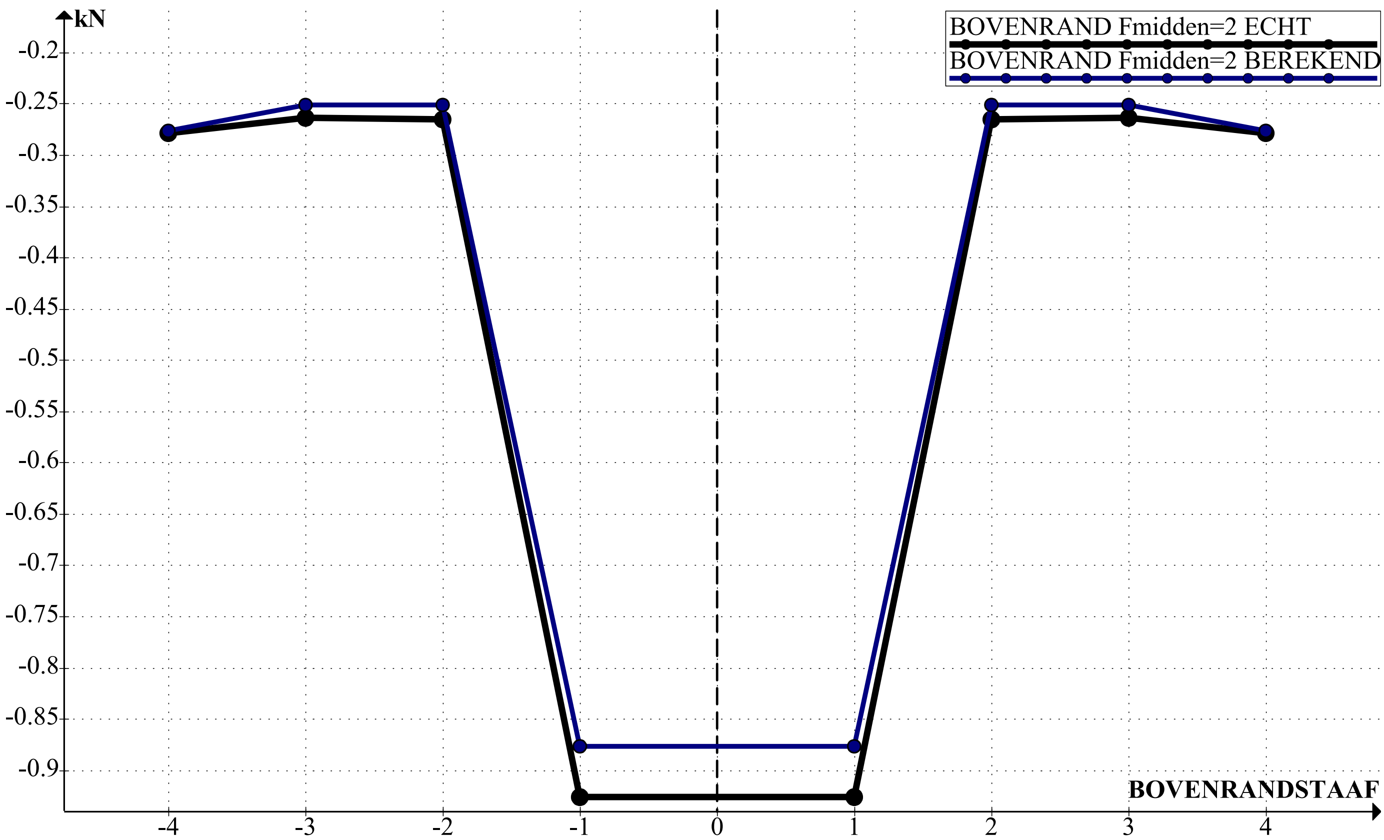
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING *F* = 2 kN**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-0.279**	-0.276	-1.1%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-0.264**	-0.251	-4.9%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-0.265**	-0.251	-5.3%
-1	0.00	0.00	-4.33	**-0.926**	-0.877	-5.3%
1	0.00	0.00	-4.33	**-0.926**	-0.877	-5.3%
2	2.56	2.08	-3.22	**-0.265**	-0.251	-5.3%
3	2.56	2.08	-3.22	**-0.264**	-0.251	-4.9%
4	4.30	3.72	-0.97	**-0.279**	-0.276	-1.1%
			H	**-0.743**	-0.749	0.8%
			V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%
			V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%

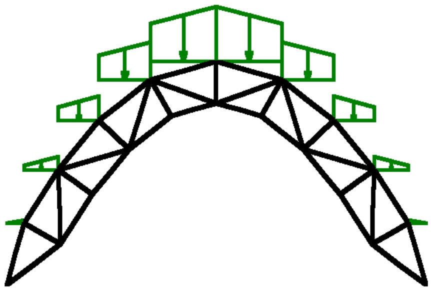
Tabel 16



Afbeelding 75

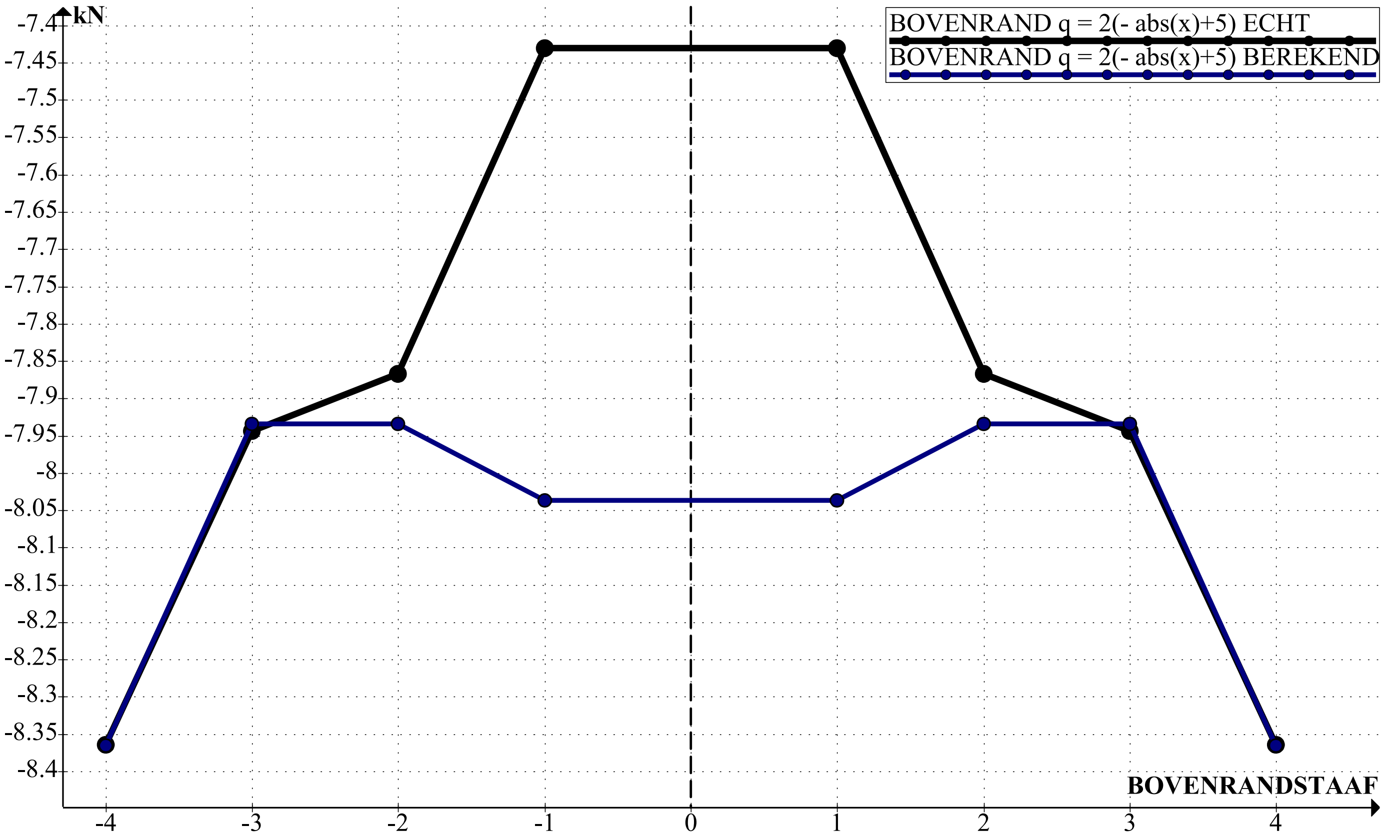
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING** $q=2(-|(x)|+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-8.364**	-8.365	0.0%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-7.944**	-7.934	-0.1%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-7.867**	-7.934	0.9%
-1	0.00	0.00	-4.33	**-7.431**	-8.037	8.2%
1	0.00	0.00	-4.33	**-7.431**	-8.037	8.2%
2	2.56	2.08	-3.22	**-7.867**	-7.934	0.9%
3	2.56	2.08	-3.22	**-7.944**	-7.934	-0.1%
4	4.30	3.72	-0.97	**-8.364**	-8.365	0.0%
			H	**-15.519**	-15.521	0.0%
			V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%
			V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%

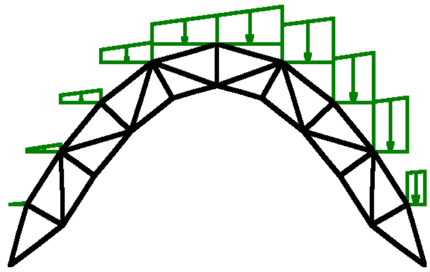
Tabel 17



Afbeelding 76

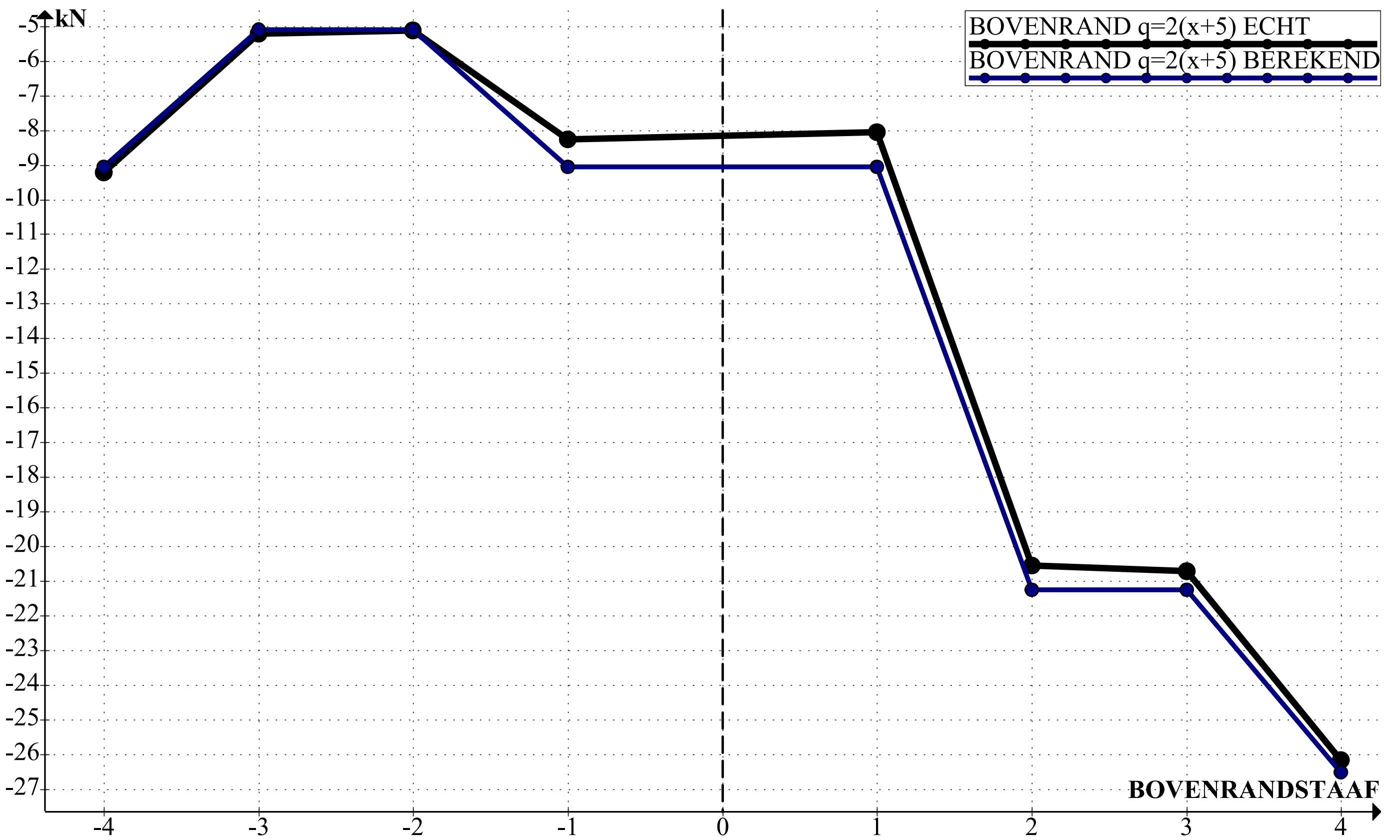
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-9.210**	-9.048	-1.8%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-5.223**	-5.102	-2.3%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-5.132**	-5.102	-0.6%
-1	0.00	0.00	-4.33	**-8.274**	-9.057	9.5%
1	0.00	0.00	-4.33	**-8.052**	-9.057	12.5%
2	2.56	2.08	-3.22	**-20.559**	-21.251	3.4%
3	2.56	2.08	-3.22	**-20.714**	-21.251	2.6%
4	4.30	3.72	-0.97	**-26.172**	-26.510	1.3%
			H	**-24.768**	-24.666	-0.4%
			V_{links}	**-33.336**	-33.333	0.0%
			V_{links}	**-66.703**	-66.667	-0.1%

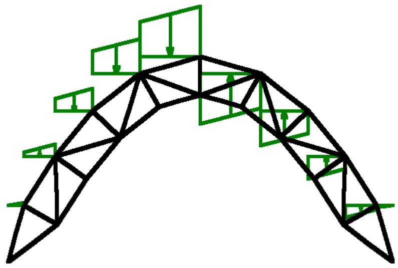
Tabel 18



Afbeelding 77

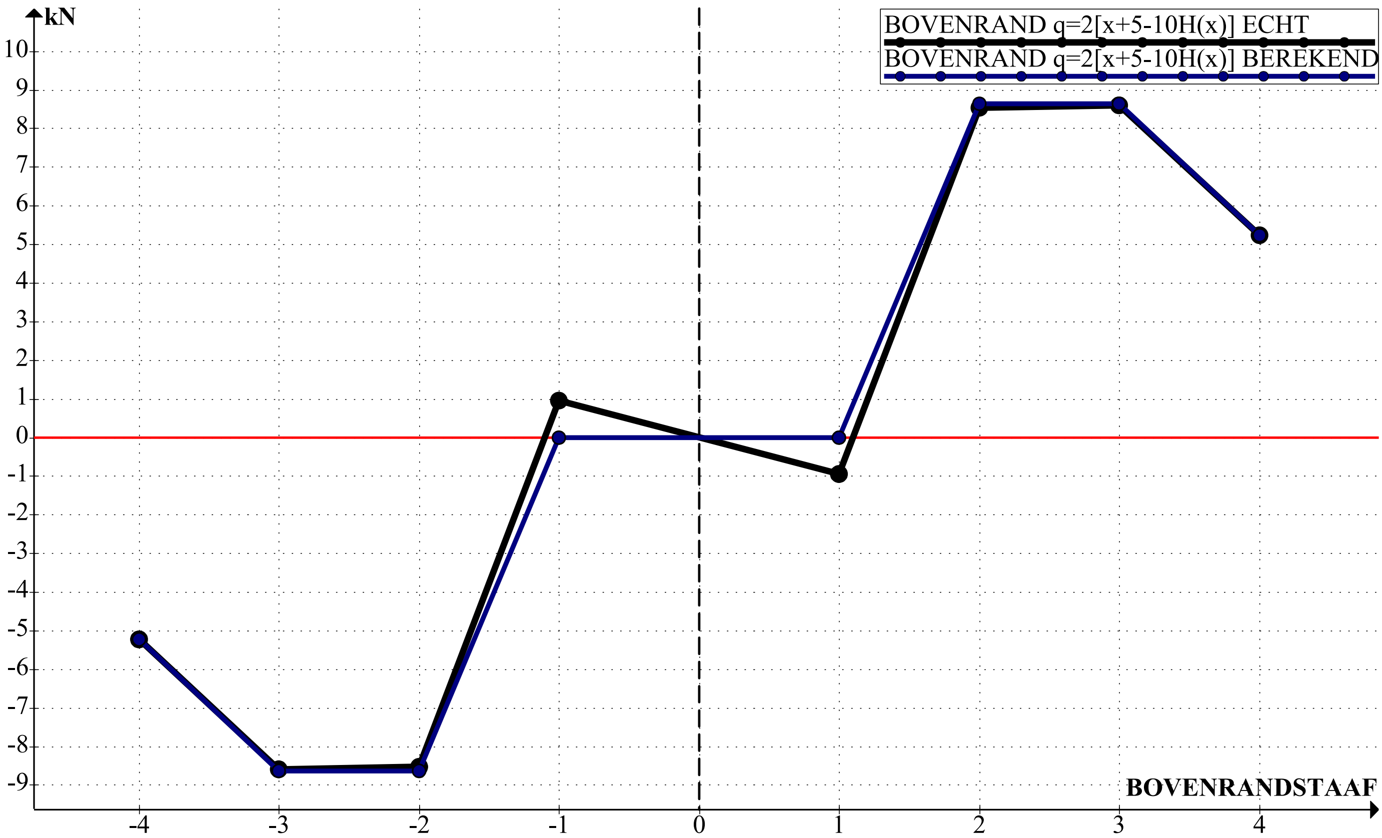
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING** $q=2[(x+5)-10\,H(x)]$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-5.230**	-5.233	0.1%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-8.595**	-8.642	0.5%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-8.522**	-8.642	1.4%
-1	0.00	0.00	-4.33	**0.948**	0.000	-100.0%
1	0.00	0.00	-4.33	**-0.948**	0.000	-100.0%
2	2.56	2.08	-3.22	**8.522**	8.642	1.4%
3	2.56	2.08	-3.22	**8.595**	8.642	0.5%
4	4.30	3.72	-0.97	**5.230**	5.233	0.1%
			H	**0.000**	0.000	0.0%
			V_{links}	**-8.336**	-8.333	0.0%
			V_{links}	**8.336**	8.333	0.0%

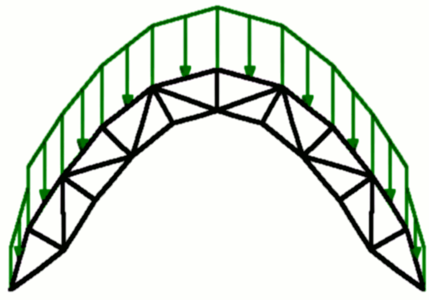
Tabel 19



Afbeelding 78

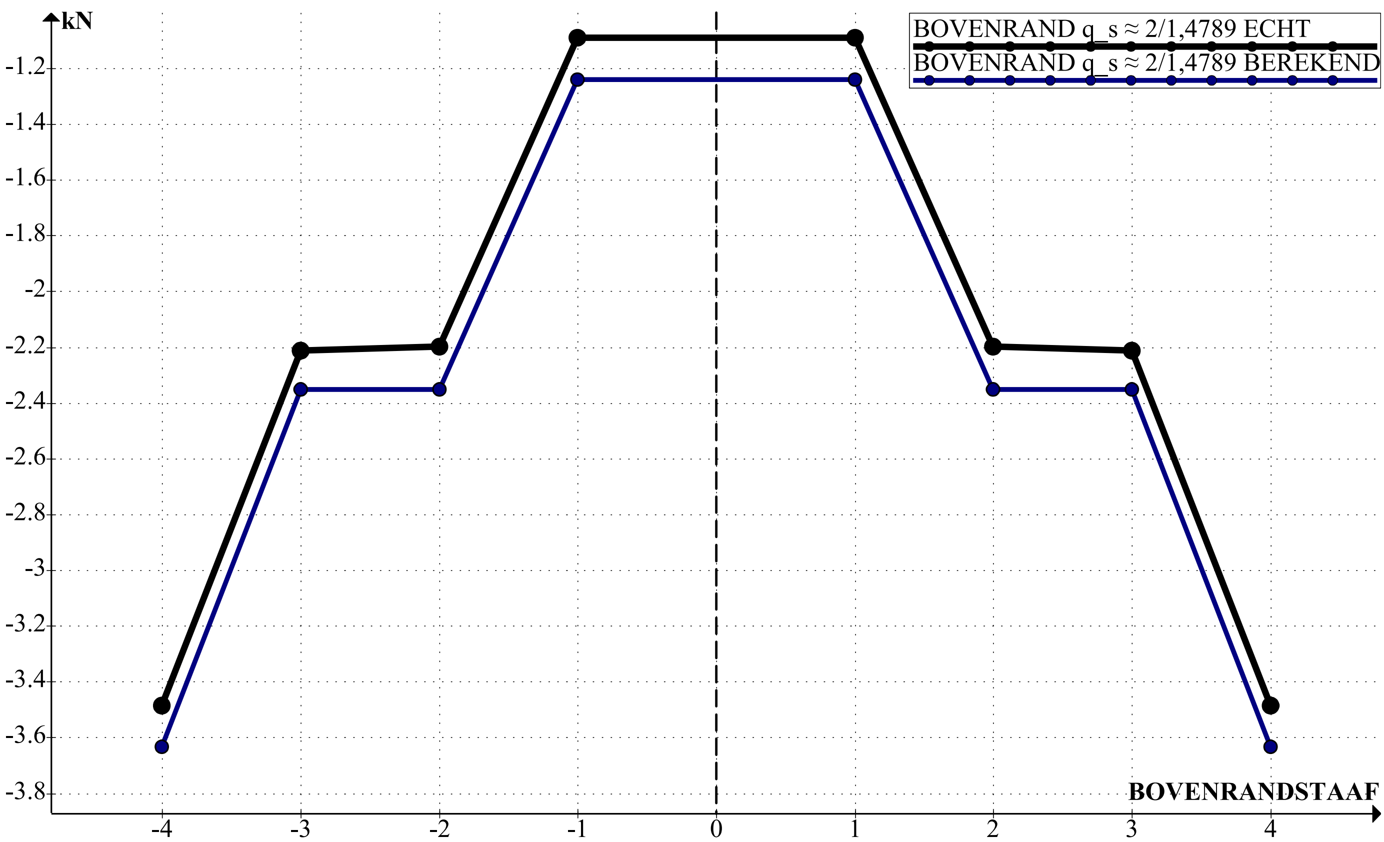
BOVENRANDSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS (49)

BIJ **BELASTING** $q_s \approx \dfrac{2}{1{,}4789}$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)		
BOVENRANDSTAAF	x_P	x_{onder}	z_{onder}	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING
-4	-4.30	-3.72	-0.97	**-3.486**	-3.634	4.2%
-3	-2.56	-2.08	-3.22	**-2.213**	-2.353	6.3%
-2	-2.56	-2.08	-3.22	**-2.197**	-2.353	7.1%
-1	0.00	0.00	-4.33	**-1.090**	-1.240	13.8%
1	0.00	0.00	-4.33	**-1.090**	-1.240	13.8%
2	2.56	2.08	-3.22	**-2.197**	-2.353	7.1%
3	2.56	2.08	-3.22	**-2.213**	-2.353	6.3%
4	4.30	3.72	-0.97	**-3.486**	-3.634	4.2%
			H	**-4.276**	-4.347	1.7%
			V_{links}	**-9.983**	-10.000	0.2%
			V_{rechts}	**-9.983**	-10.000	0.2%

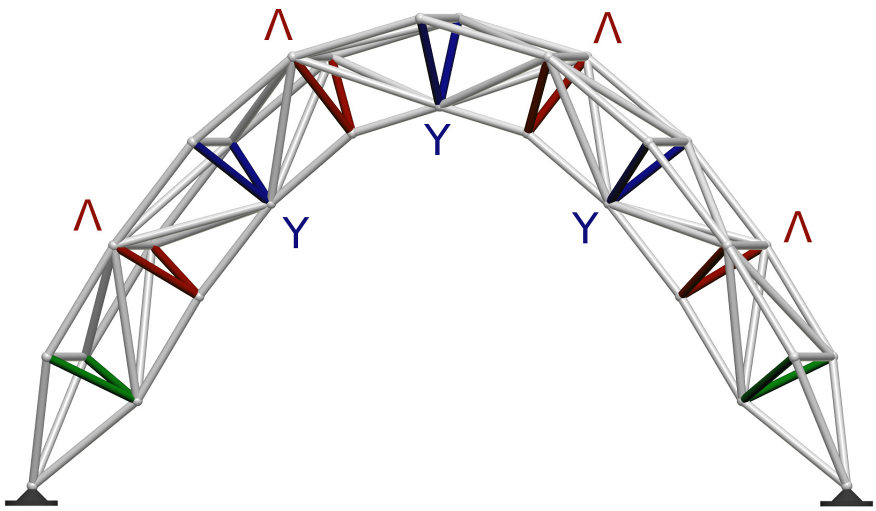
Tabel 20



Afbeelding 79

5.6 NORMAALKRACHT IN DE VERTICALEN

Betreffende verticalen worden twee gevallen Y en Λ onderscheiden:

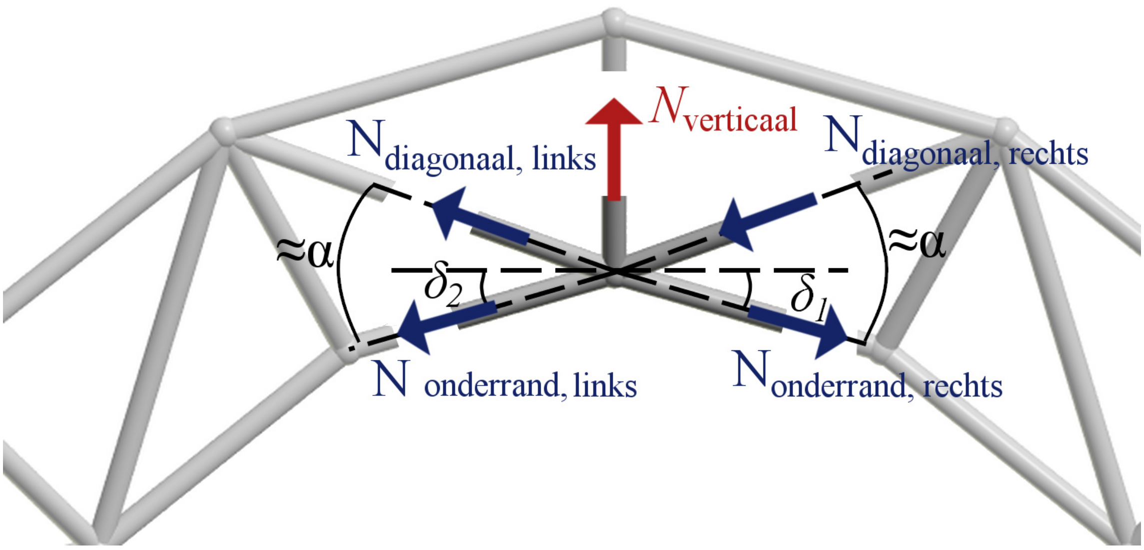


Afbeelding 80 Λ- en Y-verticalen

Λ: Verticalen waarbij de diagonalen bovenin samenkomen
Y: Verticalen waarbij de diagonalen onderin samenkomen

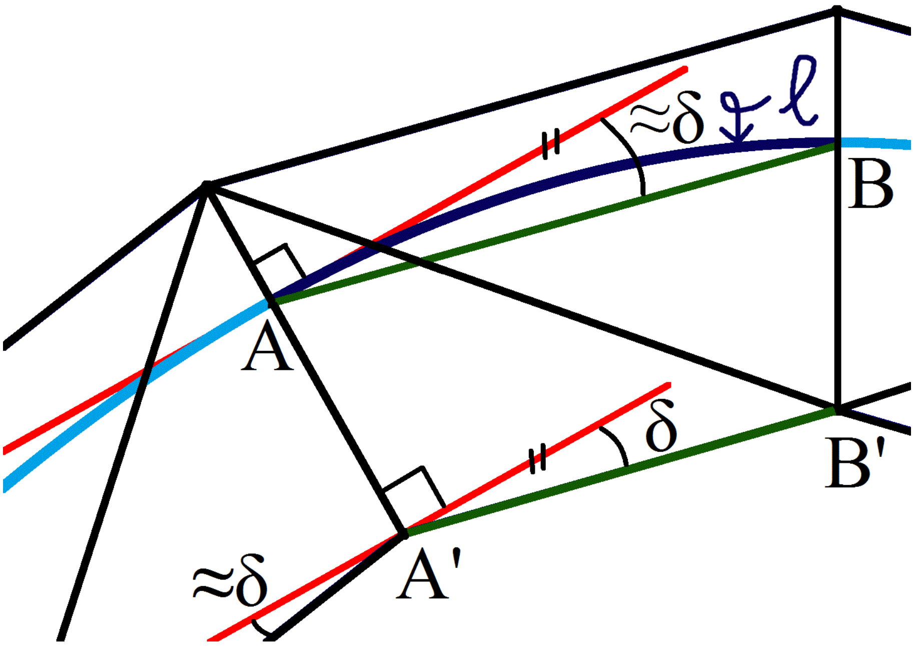
5.6.1 NORMAALKRACHT IN VERTICALEN WAARBIJ ONDERIN DIAGONALEN SAMENKOMEN *(GEVAL Y)*

Beschouw:



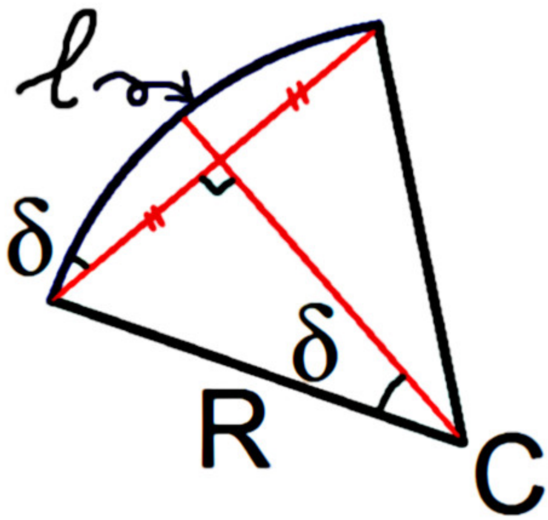
Afbeelding 81 Evenwicht van knooppunt met $N_{verticaal}$

De diagonaalkrachten $N_{diagonaal}$ werken bij een positieve dwarskracht D in de aangegeven richting. $N_{verticaal}$ volgt uit de voorwaarde van evenwicht voor het weergegeven vrijgemaakte deel. α is de diagonaalhoek zoals eerder gedefinieerd in Fout: Bron van verwijzing niet gevonden en men neemt aan dat $\delta_1 \approx \delta_2$ en hier wordt gewerkt met $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Alle krachten met uitzondering van $N_{\text{verticaal}}$ zijn inmiddels te benaderen, men heeft alleen nog per verticaal de hoek δ nodig. Natuurlijk volgt deze voor onze voorbeeldboog direct overal exact uit de geometrie, maar in het algemene geval is die onbekend. Beschouw voor het schatten van δ als functie van de plaats op de hartlijn de volgende loodrechte projectie:



Afbeelding 82 Benadering van δ

Rechte AB is ongeveer parallel aan $A'B'$, dus δ is ongeveer gelijk aan de hoek tussen rechte AB en de loodlijn op AA'. Als men vervolgens het deel van de hartlijn AB met lengte l benadert door een cirkelboog:



Afbeelding 83: Cirkelsector

Men ziet dus dat δ in onze vereenvoudiging gelijk is aan de halve sectorhoek:

$$\delta = \frac{l}{2R} \qquad (50)$$

Men moet alleen nog een geschikte kromtestraal R bepalen. Laat men deze gelijk nemen aan de kromtestraal terplekke van A, volgens:

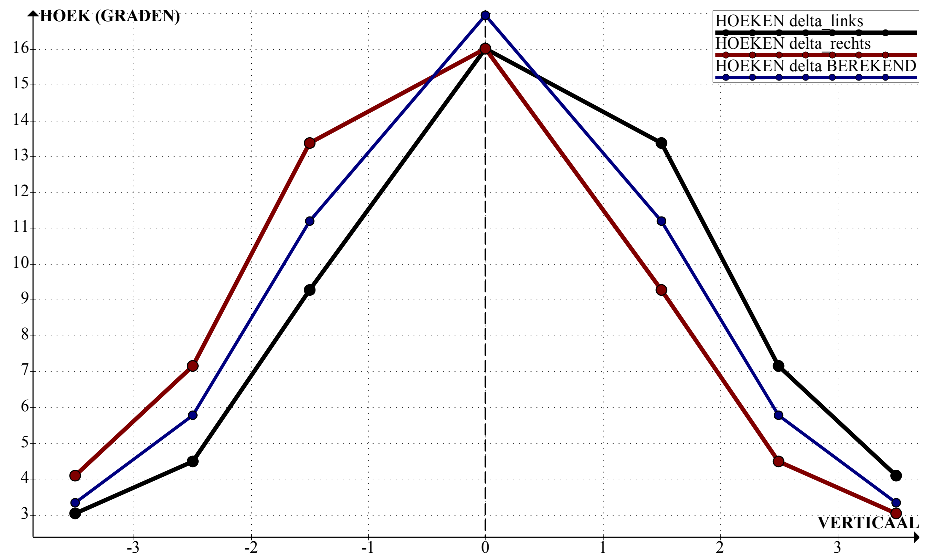
$$|R|=\left|\frac{(1+(dz/dx)^2)^{3/2}}{(d^2z/dx^2)}\right| \tag{51}$$

Laat men de resultaten van deze benaderende methode nu vergelijken met de werkelijke waarden van onze boog:

VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND
-4/-3	-3.50	**3.04**	**4.09**	3.328
-3/-2	-2.56	**4.49**	**7.15**	5.78
-2/-1	-1.41	**9.27**	**13.37**	11.199
-1/1	0.00	**16.02**	**16.02**	16.947
1/2	1.41	**13.37**	**9.27**	11.199
2/3	2.56	**7.15**	**4.49**	5.78
3/4	3.50	**4.09**	**3.04**	3.328

Tabel 21

Men ziet gelijk dat de aanname dat δ_{links} en δ_{rechts} ongeveer in grootte gelijk zijn helaas twijfelachtig is. Wel ligt de berekende δ meestal tussen beide in. In grafiek:

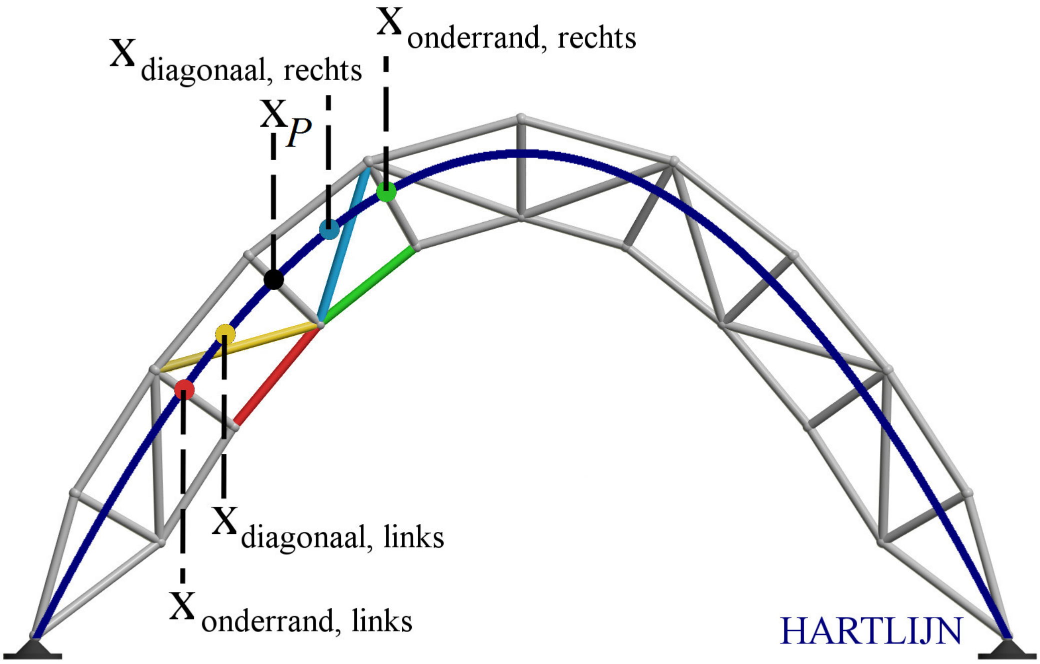


Afbeelding 84

Terugverwijzend aan afbeelding 81 ziet men dat moet gelden in vectornotatie:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_{\text{verticaal}} + \boldsymbol{N}_{\text{onderrand, rechts}} + \boldsymbol{N}_{\text{onderrand, links}} + \boldsymbol{N}_{\text{diagonaal, rechts}} + \boldsymbol{N}_{\text{diagonaal\_links}} = \boldsymbol{0} \tag{52}$$

Alle krachten moeten in verticale richting evenwicht maken met $N_{verticaal}$. Men heeft al een benadering voor al deze krachten $N_{onderrand}$ (5.5.1) en $N_{diagonaal}$ (5.4.2), een lastigheid is dat deze staafkrachten worden benaderd met een hulpcoördinaat x, op verschillende plekken:



Afbeelding 85 Hulpcoördinaten

In beginsel wil men uitgaan van de x_P-coördinaat, horend bij de beschouwde vertikaal. Men wil dus nu alle andere coördinaten in afbeelding 85 uitdrukken in x_P.

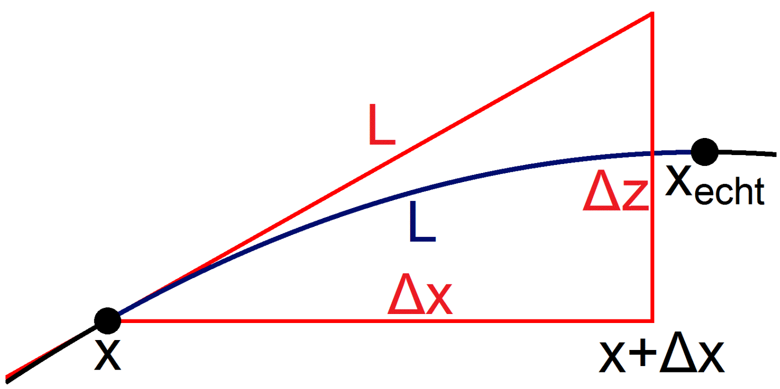
Nu is de plek van deze coördinaten gedefinieerd op basis van een langs de boog gemeten lengte, waarvoor de algemene formule geldt:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(dz/dx)^2}\,dx \tag{53}$$

Men zou dan dus een differentiaalvergelijking moeten oplossen:

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}}$$

Dit is niet eenvoudig. Laat men daarom de punten maar benaderen met een linearisatie:



Afbeelding 86 Benadering van x_{echt} met linearisatie

Hier is L de afstand langs de hartlijn die men wenst te benaderen. De verhouding $\Delta y/\Delta x$ ligt vast in de vorm van de afgeleide op x:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = z'(x)$$

Dus:

$$\Delta x = \frac{L}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}}$$

Ten behoeve van het model neemt men de algemenere vorm:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} = \left(1+(dz/dx)^2\right)^{-1/2} \tag{54}$$

Men vindt aldus op deze manier:

$$x_{\text{diagonaal, rechts}} = x_P + \frac{l/2}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_P}\right)^2}} \tag{55}$$

$$x_{\text{diagonaal, links}} = x_P - \frac{l/2}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_P}\right)^2}} \tag{56}$$

$$x_{\text{onderrand, rechts}} = x_P + \frac{l}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_P}\right)^2}} \tag{57}$$

$$x_{\text{onderrand, rechts}} = x_P - \frac{l}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_P}\right)^2}} \tag{58}$$

Voor de verticale component (in de richting van de verticalen) ten gevolge van de diagonaalkrachten krijgt men:

$$F_{\text{vert, diagonalen}} \approx 2\left(N_{diagonaal}(x_{\text{diagonaal, rechts}}) - N_{diagonaal}(x_{\text{diagonaal, links}})\right) \frac{\sqrt{(l^2+h^2)}}{\sqrt{(h^2+l^2+(b/2)^2)}} \sin(\alpha-\delta) \tag{59}$$

En evenzo voor de onderrandstaven:

$$F_{\text{vert, onderrand}} \approx \left(N_{\text{onder}}(x_{\text{onderrand, rechts}}) + N_{\text{onder}}(x_{\text{onderrand, links}})\right) \sin\delta \tag{60}$$

Nu heeft men dus een totale verticale component die door de verticalen moet worden opgenomen:

$$F_{\text{vert}} = F_{\text{vert, diagonalen}} + F_{\text{vert, onderrand}} \tag{61}$$

Waarvan het teken zodanig was gekozen dat geldt volgens afbeelding 81, rekening houdend men met de component in y-richting van de verticalen, en het feit dat er twee verticalen zijn:

$$N_{verticaal}^{Y} \approx F_{\text{vert}} \frac{\sqrt{h^2 + (b/2)^2}}{2h} \tag{62}$$

5.6.2 NORMAALKRACHT IN VERTICALEN WAARBIJ BOVENIN DIAGONALEN SAMENKOMEN *(GEVAL Λ)*

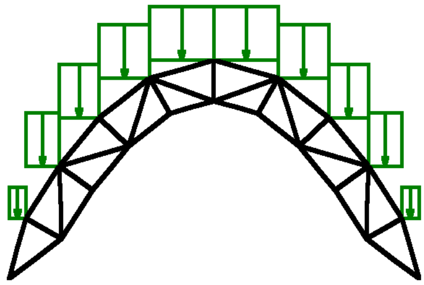
Hier wordt tevens evenwicht van het onderste knooppunt beschouwd, maar de verticalen zijn hier afwezig, dus houdt men slechts de verticale component van de onderrandstaven over. In dit geval wordt bovendien de kracht in de betreffende onderrandstaven met dezelfde coördinaat berekend als de verticaal zelf, dus de benaderingen zijn evenmin nodig, en houdt men over:

$$N_{\text{verticaal}}^{\Lambda} \approx 2 N_{onder}(x) \sin(\delta) \frac{\sqrt{h^2 + (b/2)^2}}{2h} \tag{63}$$

5.6.3 RESULTATEN VAN PROEFBEREKENINGEN VOOR DE VERTICALEN

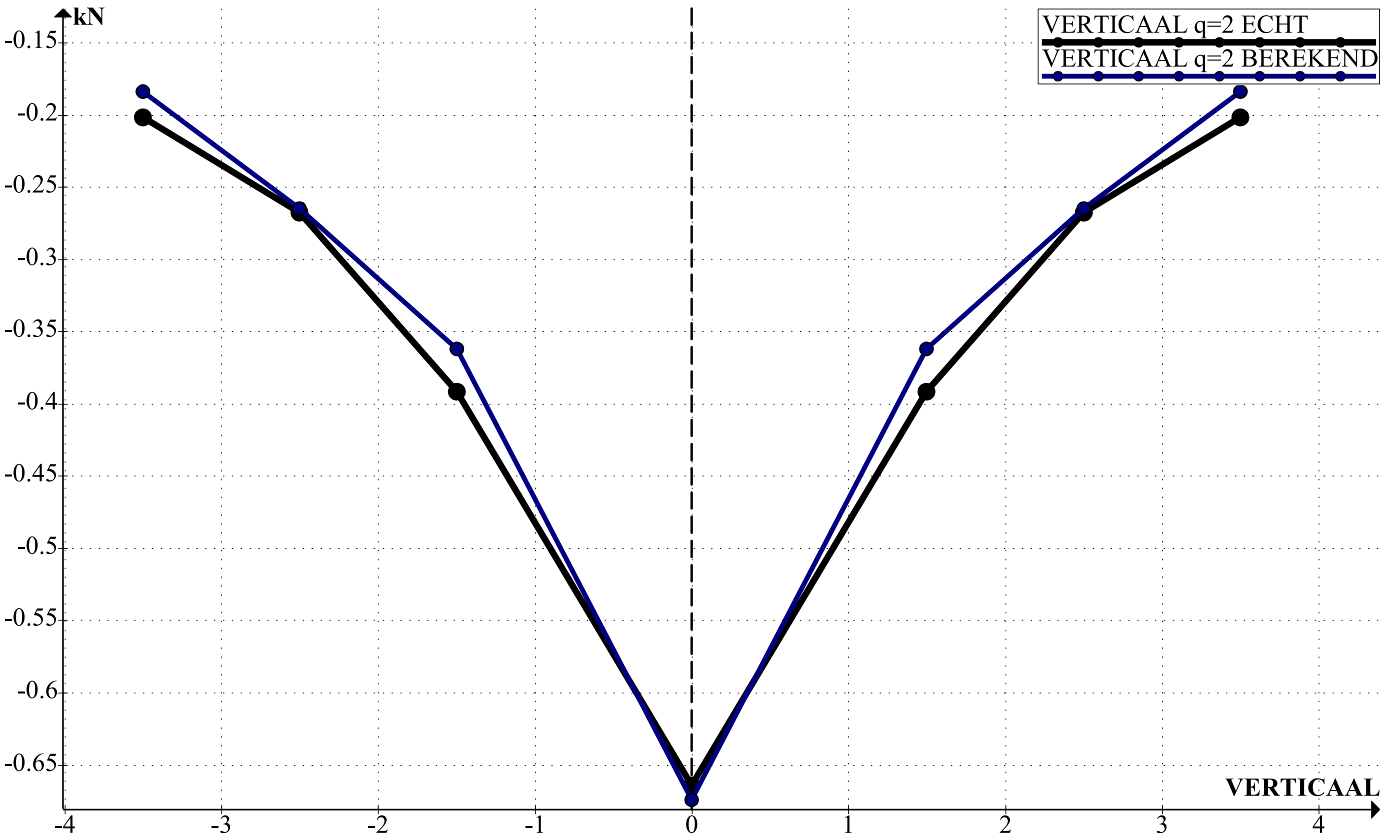
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q = 2$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)				
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.202**	-0.184	-8.9%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.268**	-0.265	-1.1%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-0.392**	-0.362	-7.7%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**-0.664**	-0.674	1.5%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-0.392**	-0.362	-7.7%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-0.268**	-0.265	-1.1%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.202**	-0.184	-8.9%	Λ
				H	**-4.954**	-4.933	-0.4%	
				V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%	
				V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%	

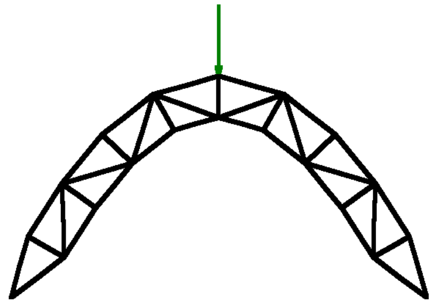
Tabel 22



Afbeelding 87

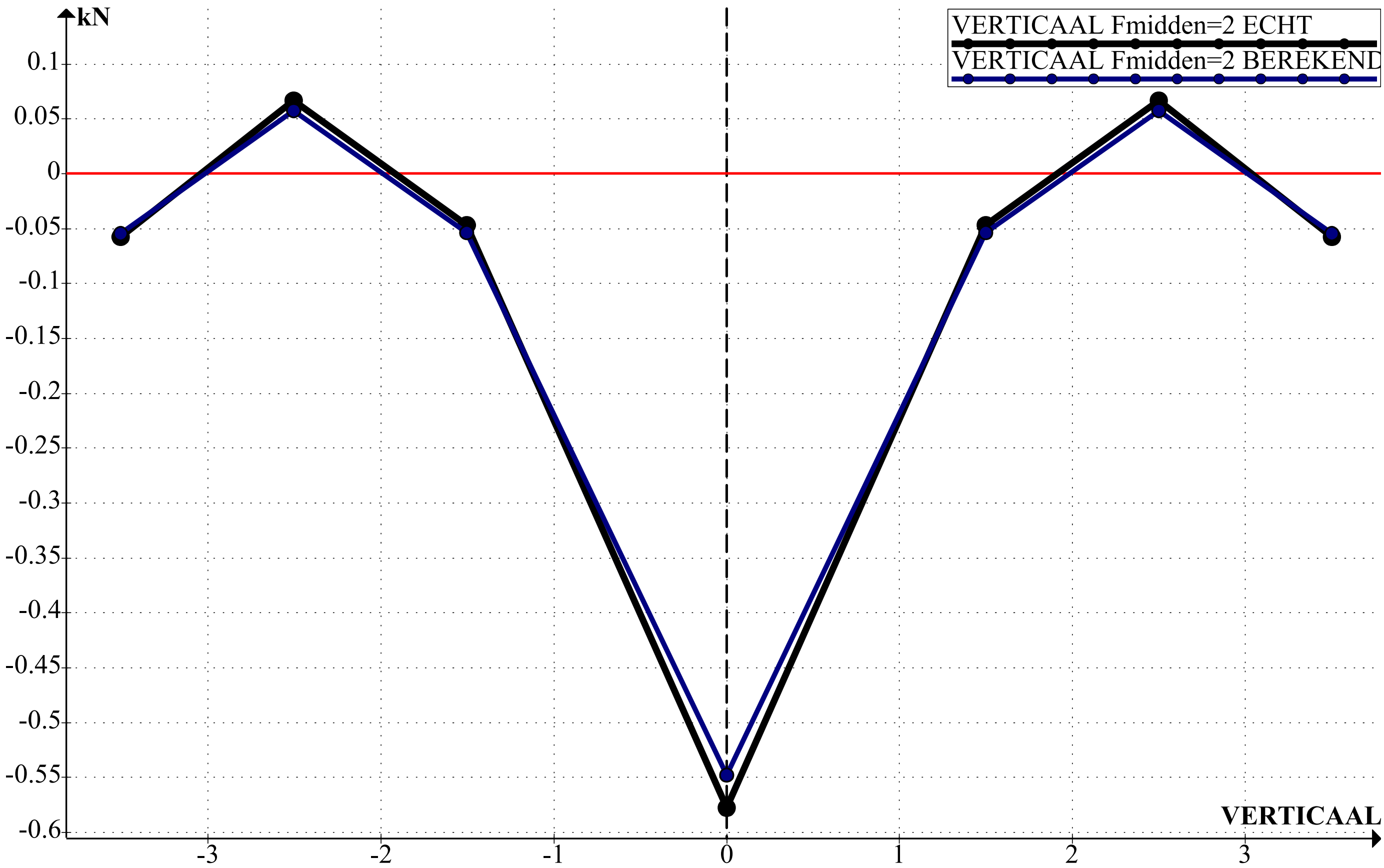
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q = 2\delta(x)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.058**	-0.055	-5.2%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.066**	0.057	-13.6%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-0.047**	-0.054	14.9%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**-0.578**	-0.548	-5.2%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-0.047**	-0.054	14.9%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.066**	0.057	-13.6%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.058**	-0.055	-5.2%	Λ
				H	**-0.743**	-0.749	0.8%	
				V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%	
				V_{rechts}	**-1.000**	-1.000	0.0%	

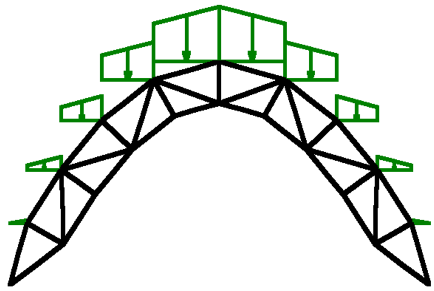
Tabel 23



Afbeelding 88

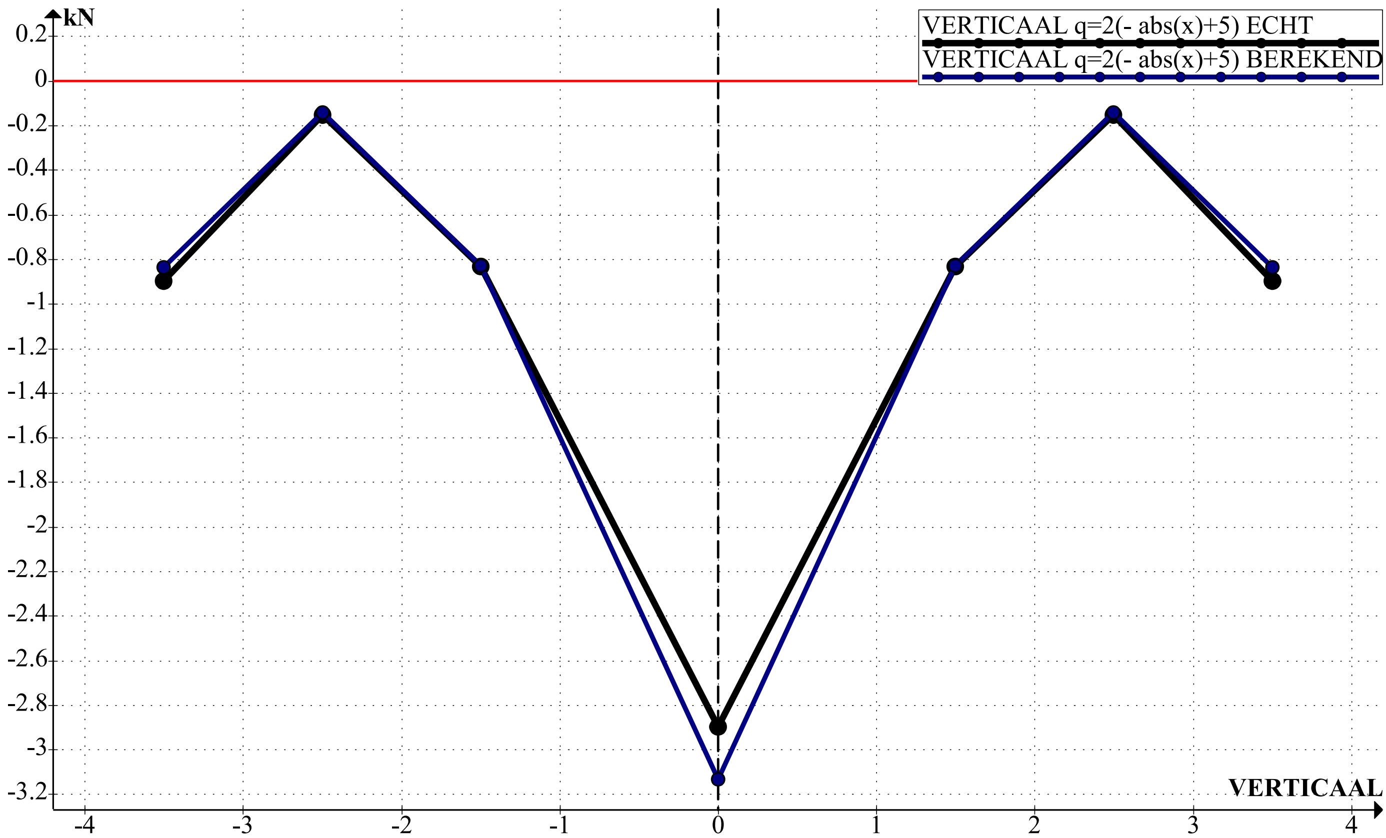
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q=2(-|(x)|+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.897**	-0.837	-6.7%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.152**	-0.141	-7.2%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-0.833**	-0.828	-0.6%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**-2.897**	-3.134	8.2%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-0.833**	-0.828	-0.6%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-0.152**	-0.141	-7.2%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.897**	-0.837	-6.7%	Λ
				H	**-15.519**	-15.521	0.0%	
				V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%	
				V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%	

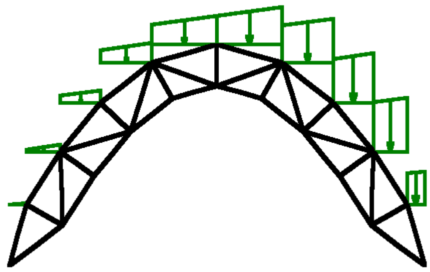
Tabel 24



Afbeelding 89

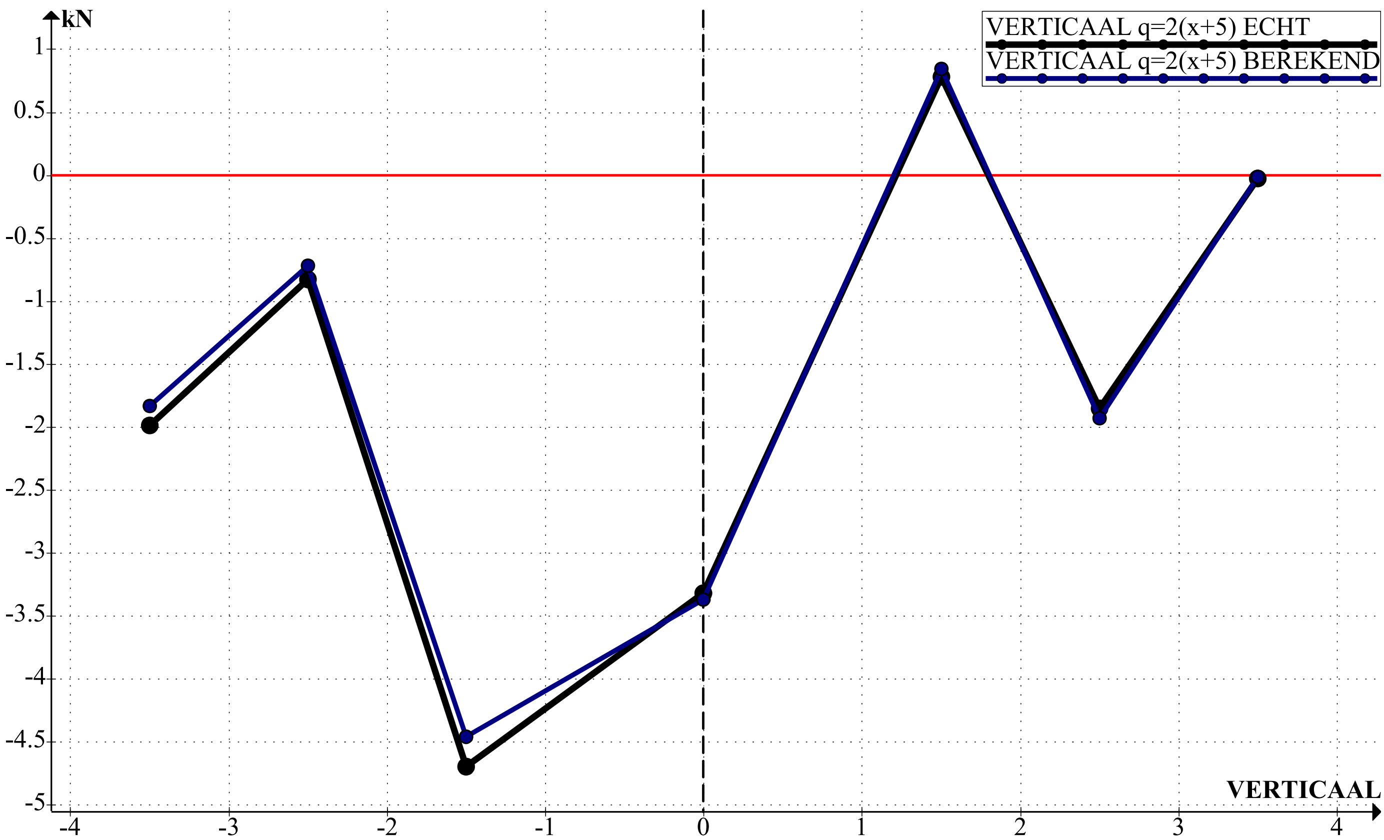
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)				
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-1.990**	-1.832	-7.9%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.828**	-0.717	-13.4%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-4.697**	-4.459	-5.1%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**-3.321**	-3.370	1.5%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**0.780**	0.841	7.8%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-1.856**	-1.933	4.1%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.026**	-0.016	-38.5%	Λ
				H	**-24.768**	-24.666	-0.4%	
				V_{links}	**-33.336**	-33.333	0.0%	
				V_{links}	**-66.703**	-66.667	-0.1%	

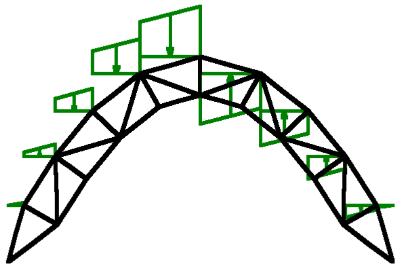
Tabel 25



Afbeelding 90

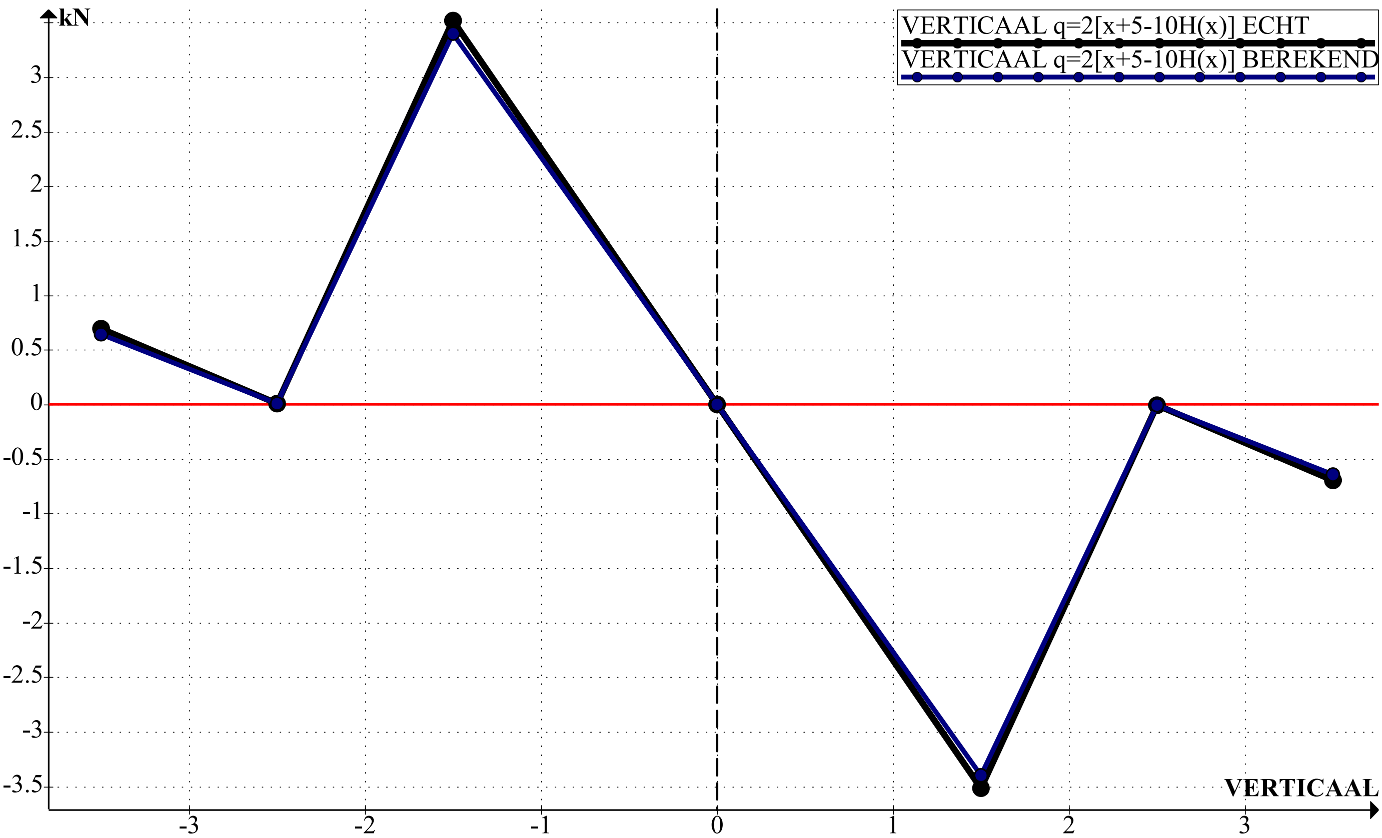
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5-10\,H(x))$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**0.697**	0.645	-7.5%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.010**	0.011	10.0%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**3.514**	3.396	-3.4%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**0.000**	0.000	0.0%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-3.514**	-3.396	-3.4%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-0.010**	-0.011	10.0%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.697**	-0.645	-7.5%	Λ
				H	**0.000**	0.000	0.0%	
				V_{links}	**-8.336**	-8.333	0.0%	
				V_{links}	**8.336**	8.333	0.0%	

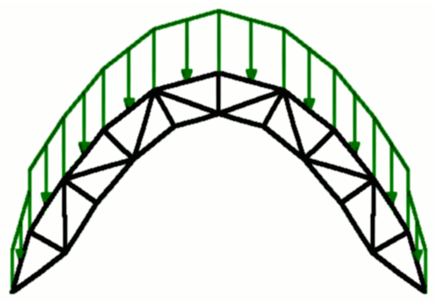
Tabel 26



Afbeelding 91

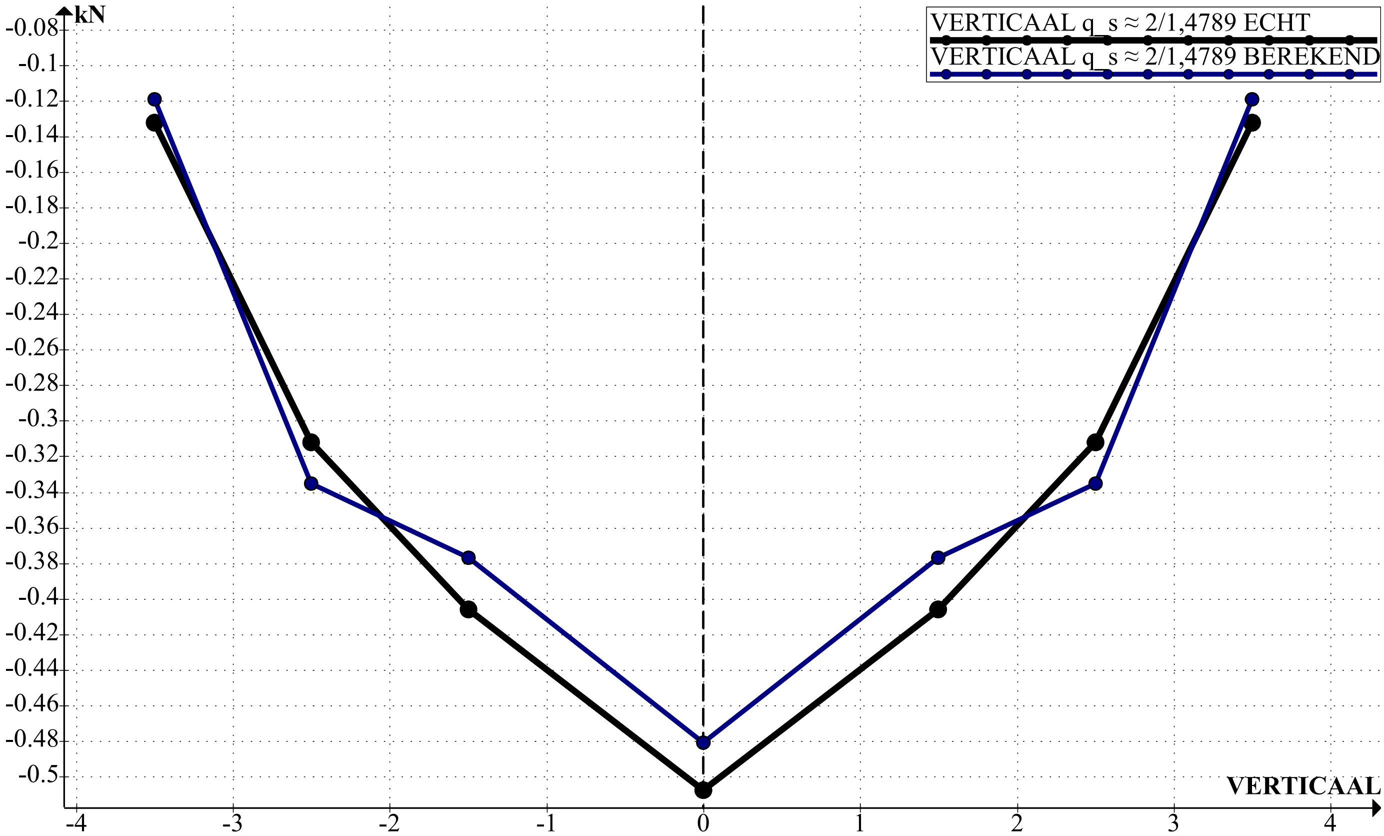
VERTICALEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT VOLGENS:
GEVAL Y: (62)
GEVAL Λ: (63)

BIJ **BELASTING** $q_s \approx \frac{2}{1,4789}$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
VERTICAAL	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.132**	-0.119	-9.8%	Λ
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.312**	-0.335	7.4%	Y
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-0.406**	-0.377	-7.1%	Λ
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**-0.508**	-0.481	-5.3%	Y
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-0.406**	-0.377	-7.1%	Λ
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-0.312**	-0.335	7.4%	Y
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.132**	-0.119	-9.8%	Λ
				H	**-4.276**	-4.347	1.7%	
				V_{links}	**-9.983**	-10.000	0.2%	
				V_{rechts}	**-9.983**	-10.000	0.2%	

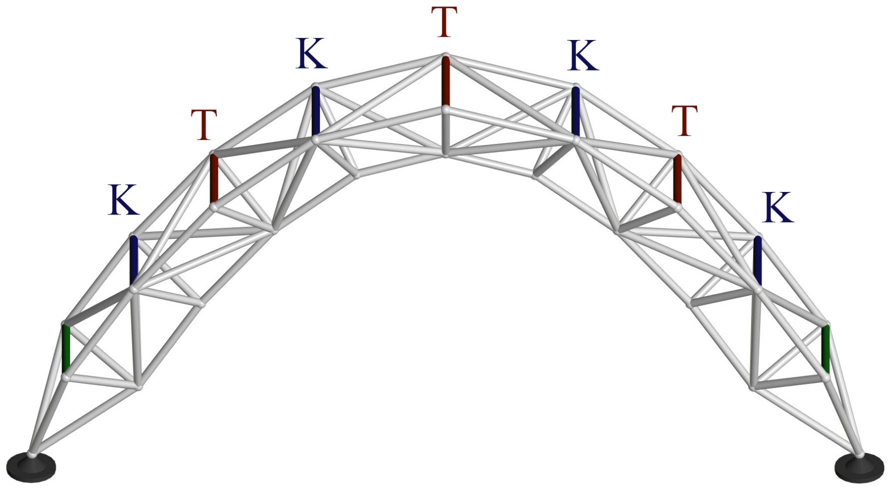
Tabel 27



Afbeelding 92

5.7 NORMAALKRACHT IN DWARSSTAVEN

Weer beschouwt men twee gevallen:

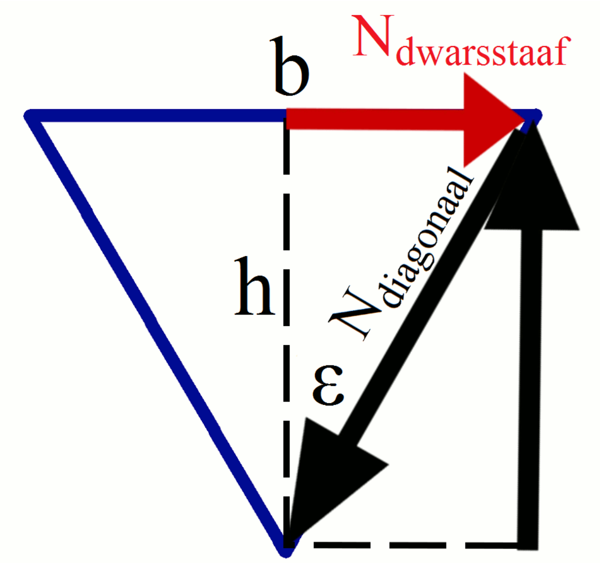


Afbeelding 93 T- en K-dwarsstaven

K: Dwarsstaven waarbij verticalen samenkomen
T: Dwarsstaven waarbij geen verticalen samenkomen

5.7.1 NORMAALKRACHT IN DWARSSTAVEN WAARBIJ GEEN DIAGONALEN SAMENKOMEN *(GEVAL T)*

Hier is vanwege krachtenevenwicht in het *yz*-vlak de kracht in een dwarsstaaf altijd:

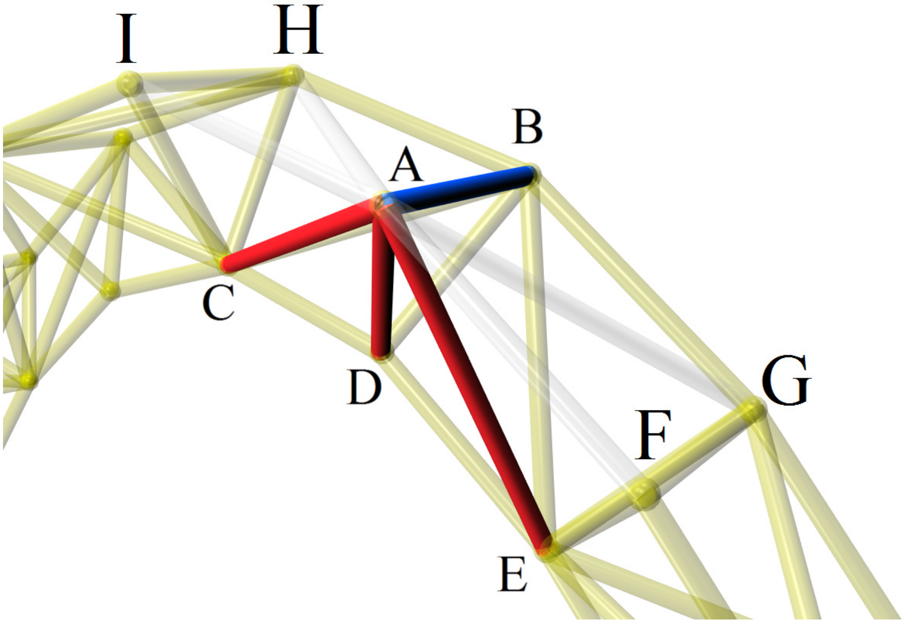


Afbeelding 94

$$N^{T}_{\text{dwarsstaaf}} = -N_{\text{verticaal}} \sin(\varepsilon) = -\frac{b}{2} \frac{N_{\text{verticaal}}}{\sqrt{h^2 + (b/2)^2}} = -\frac{b}{\sqrt{4h^2 + b^2}} N_{\text{verticaal}} \qquad (64)$$

5.7.2 NORMAALKRACHT IN DWARSSTAVEN WAARBIJ DIAGONALEN SAMENKOMEN *(GEVAL K)*

Men beschouwt hiervoor het evenwicht in y-richting van een knoop A:



Afbeelding 95 Krachtenevenwicht van knooppunt *A*

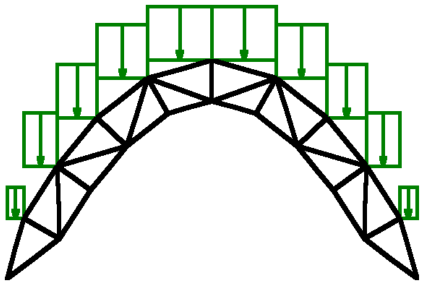
Alleen diagonalen *CA*, *AE* en verticaal *DA* hebben een component in y-richting, bovendiagonalen *HA* en *AG* zijn onbelast, bovenrandstaven *IA* en *AF* staan loodrecht op *AB* en de boog wordt alleen extern belast in z-richting, dus de normaalkrachten in de drie staven *CA*, *DA* en *AE* samen bepalen volledig de belasting van dwarsstaaf *AB*. Een beschouwing van het krachtenevenwicht in y-richting, met de benadering van de hulpcoördinaten op basis van x_P zoals in 5.6.1 levert de volgende benadering voor dwarsstaven waar diagonalen samenkomen, dus geval K:

$$N^{K}_{\text{dwarsstaaf}} = -N^{L}_{\text{verticaal}}(x_P)\frac{b}{\sqrt{(4h^2+b^2)}} + \left[-N_{\text{diagonaal}}(x_{\text{diagonaal, rechts}}) + N_{\text{diagonaal}}(x_{\text{diagonaal, links}})\right]\frac{b}{2\sqrt{(l^2+h^2+(b/2)^2)}} \tag{65}$$

5.7.3 RESULTATEN VAN PROEFBEREKENINGEN VOOR DE DWARSSTAVEN

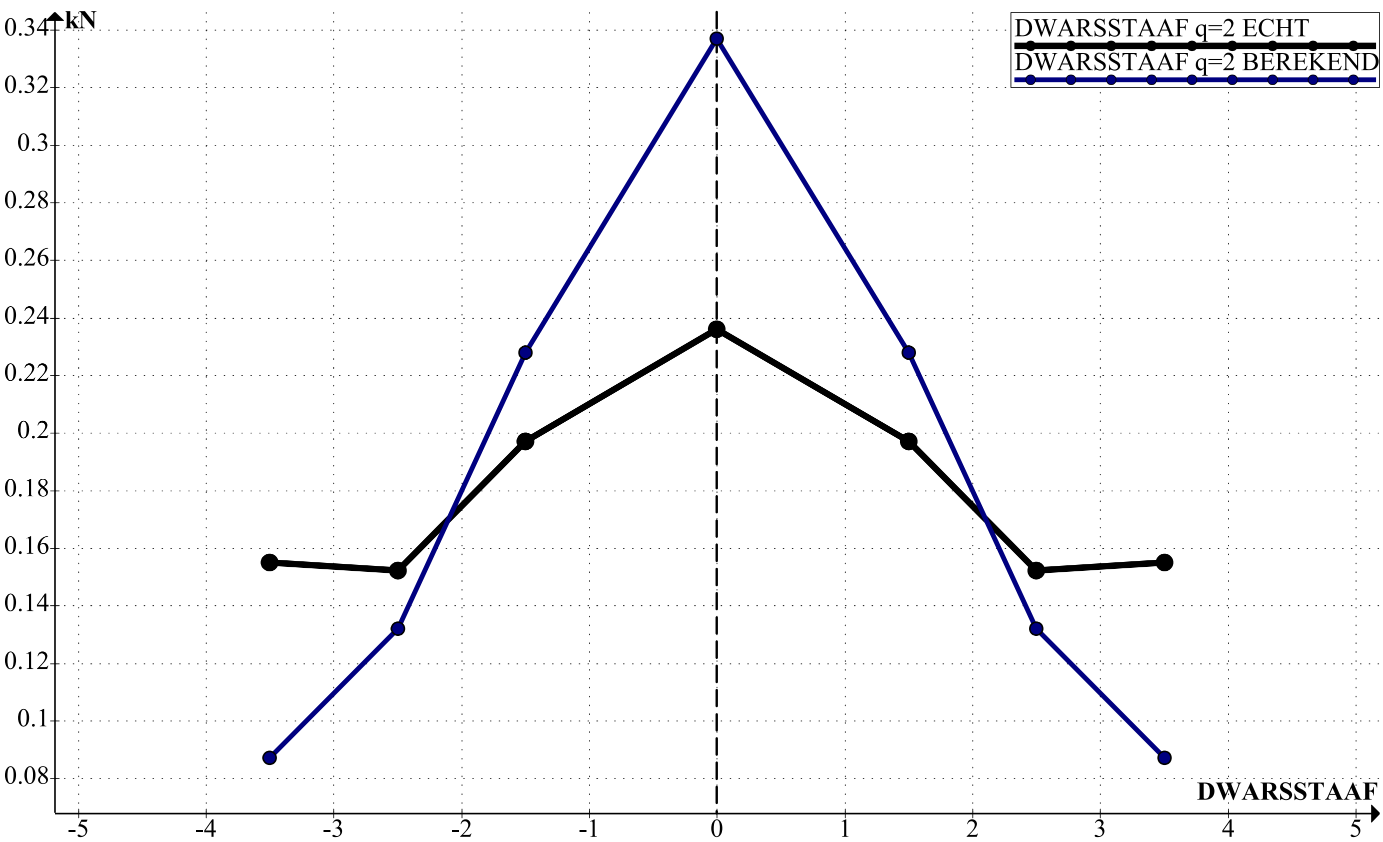
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q = 2$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**0.155**	0.087	-43.9%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.152**	0.132	-13.2%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**0.197**	0.228	15.7%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**0.236**	0.337	42.8%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**0.197**	0.228	15.7%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.152**	0.132	-13.2%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**0.155**	0.087	-43.9%	K
				H	**-4.954**	-4.933	-0.4%	
				V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%	
				V_{links}	**-10.004**	-10.000	0.0%	

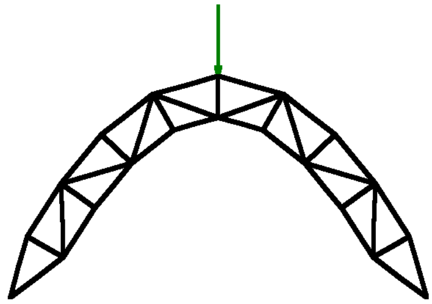
Tabel 28



Afbeelding 96

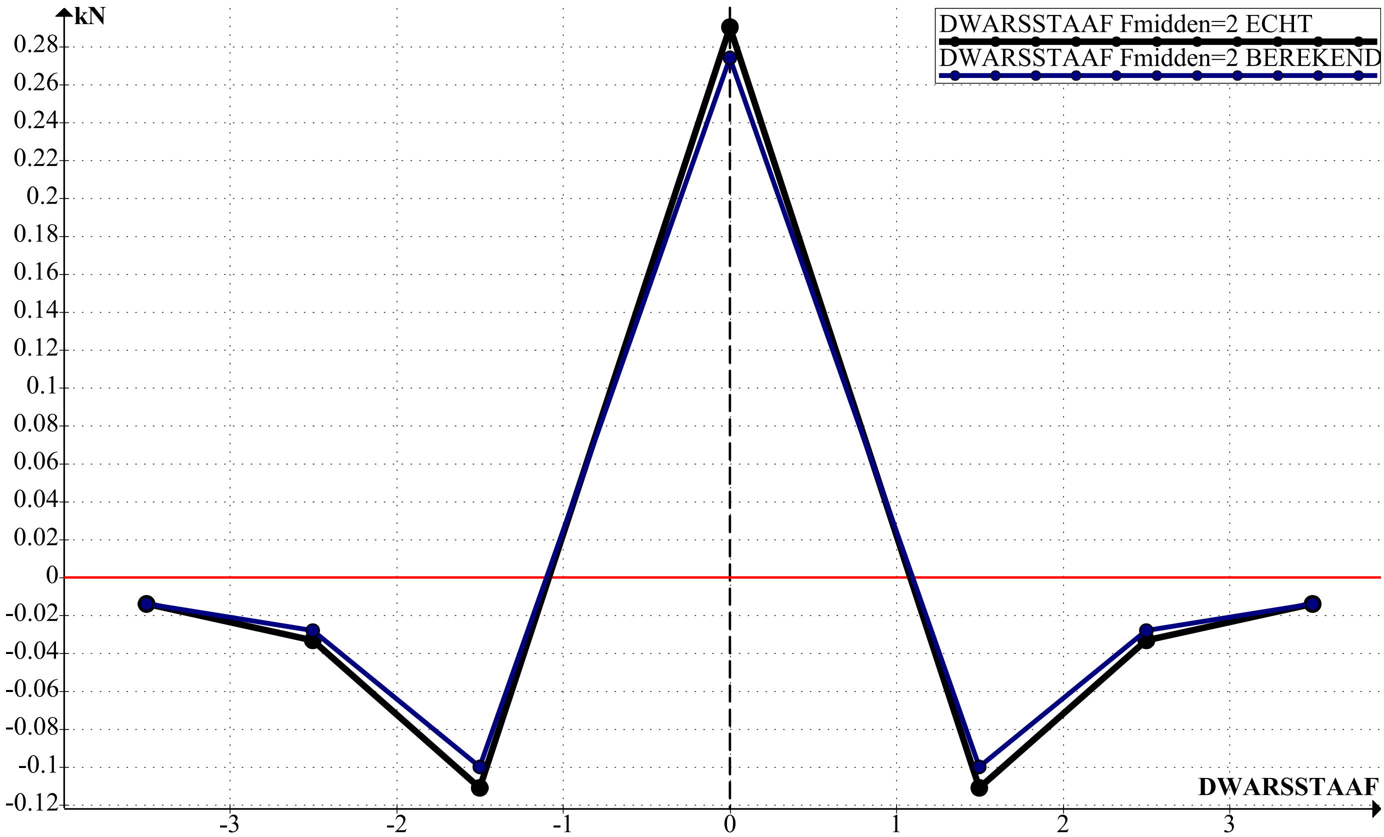
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q=2\delta(x)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)				
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.014**	-0.014	0.0%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.033**	-0.028	-15.2%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**-0.111**	-0.100	-9.9%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**0.290**	0.274	-5.5%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-0.111**	-0.100	-9.9%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**-0.033**	-0.028	-15.2%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.014**	-0.014	0.0%	K
				H	**-0.743**	-0.749	0.8%	
				V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%	
				V_{links}	**-1.000**	-1.000	0.0%	

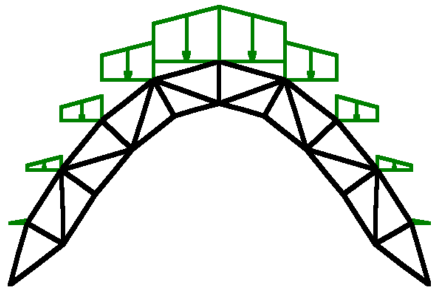
Tabel 29



Afbeelding 97

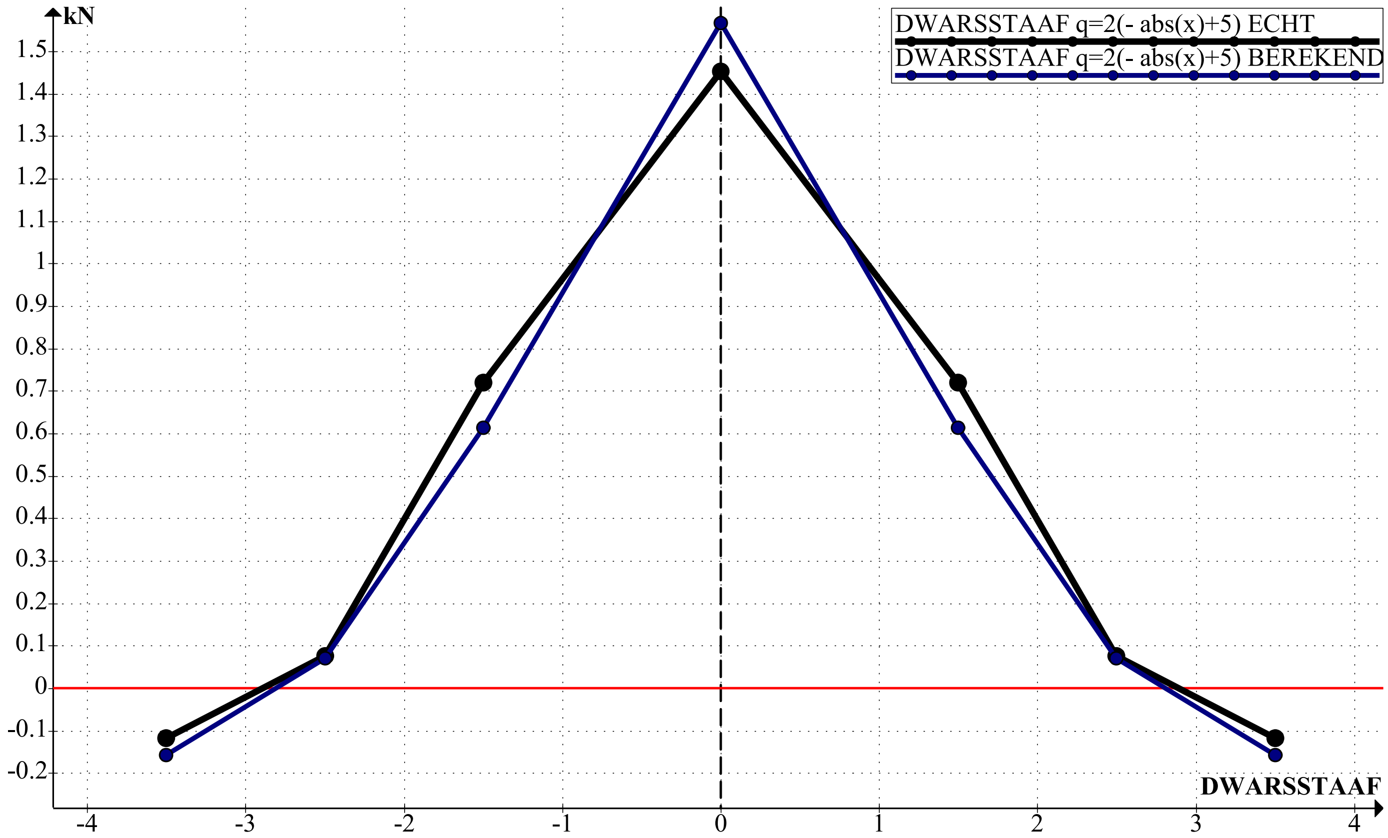
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q = 2(|(x)| + 5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)			NORMAALKRACHT (kN)				
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.118**	-0.158	33.9%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.076**	0.070	-7.9%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**0.719**	0.613	-14.7%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**1.453**	1.567	7.8%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**0.719**	0.613	-14.7%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.076**	0.070	-7.9%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**-0.118**	-0.158	33.9%	K
				H	**-15.519**	-15.521	0.0%	
				V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%	
				V_{links}	**-25.002**	-25.000	0.0%	

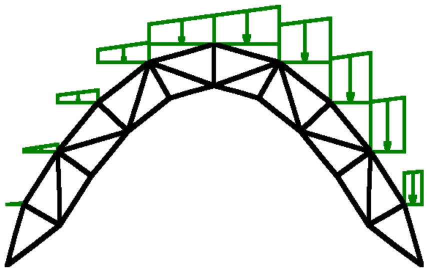
Tabel 30



Afbeelding 98

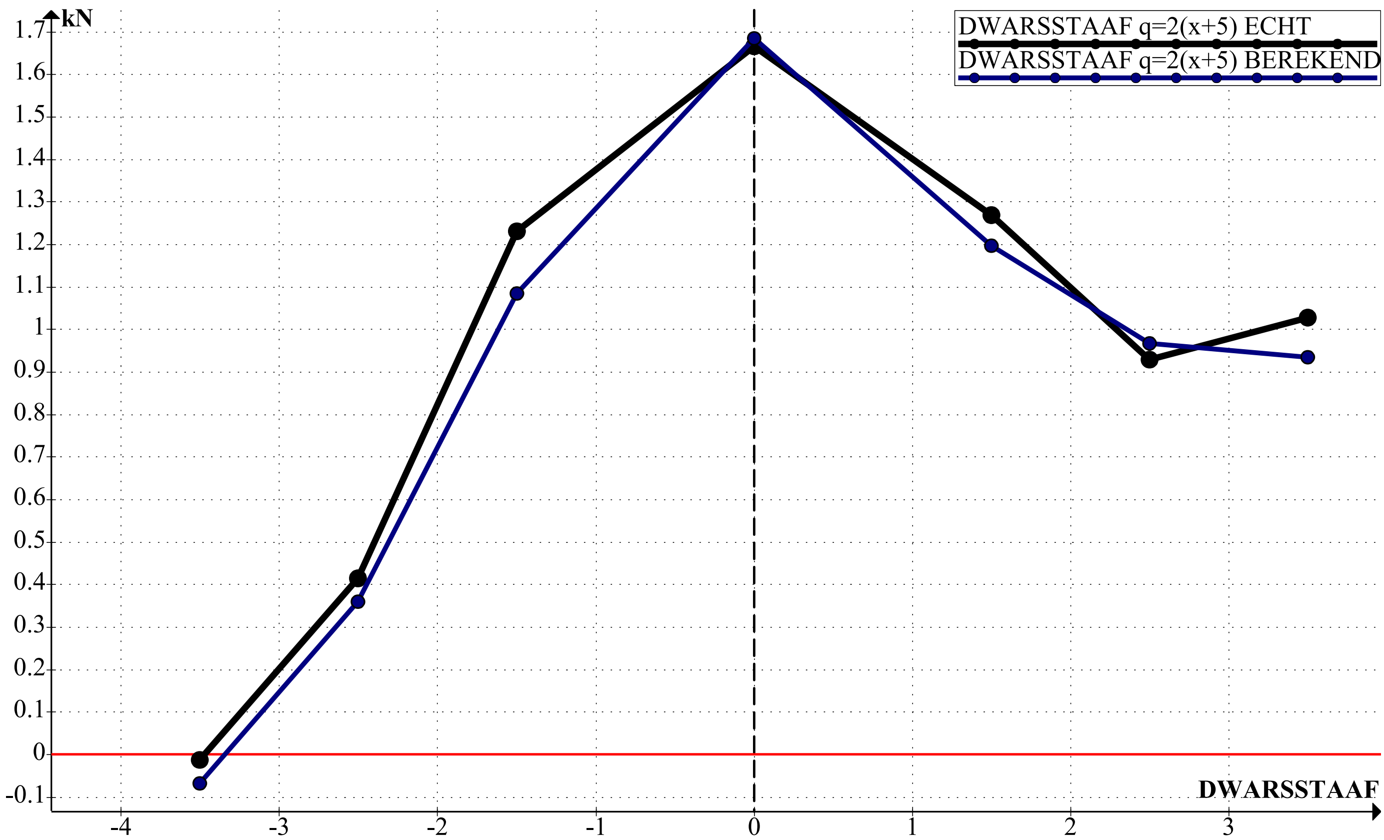
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5)$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.014**	-0.068	385.7%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.414**	0.359	-13.3%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**1.230**	1.084	-11.9%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**1.666**	1.685	1.1%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**1.268**	1.196	-5.7%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.929**	0.966	4.0%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**1.028**	0.935	-9.0%	K
				H	**-24.768**	-24.666	-0.4%	
				V_{links}	**-33.336**	-33.333	0.0%	
				V_{links}	**-66.703**	-66.667	-0.1%	

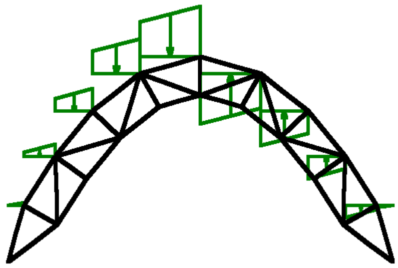
Tabel 31



Afbeelding 99

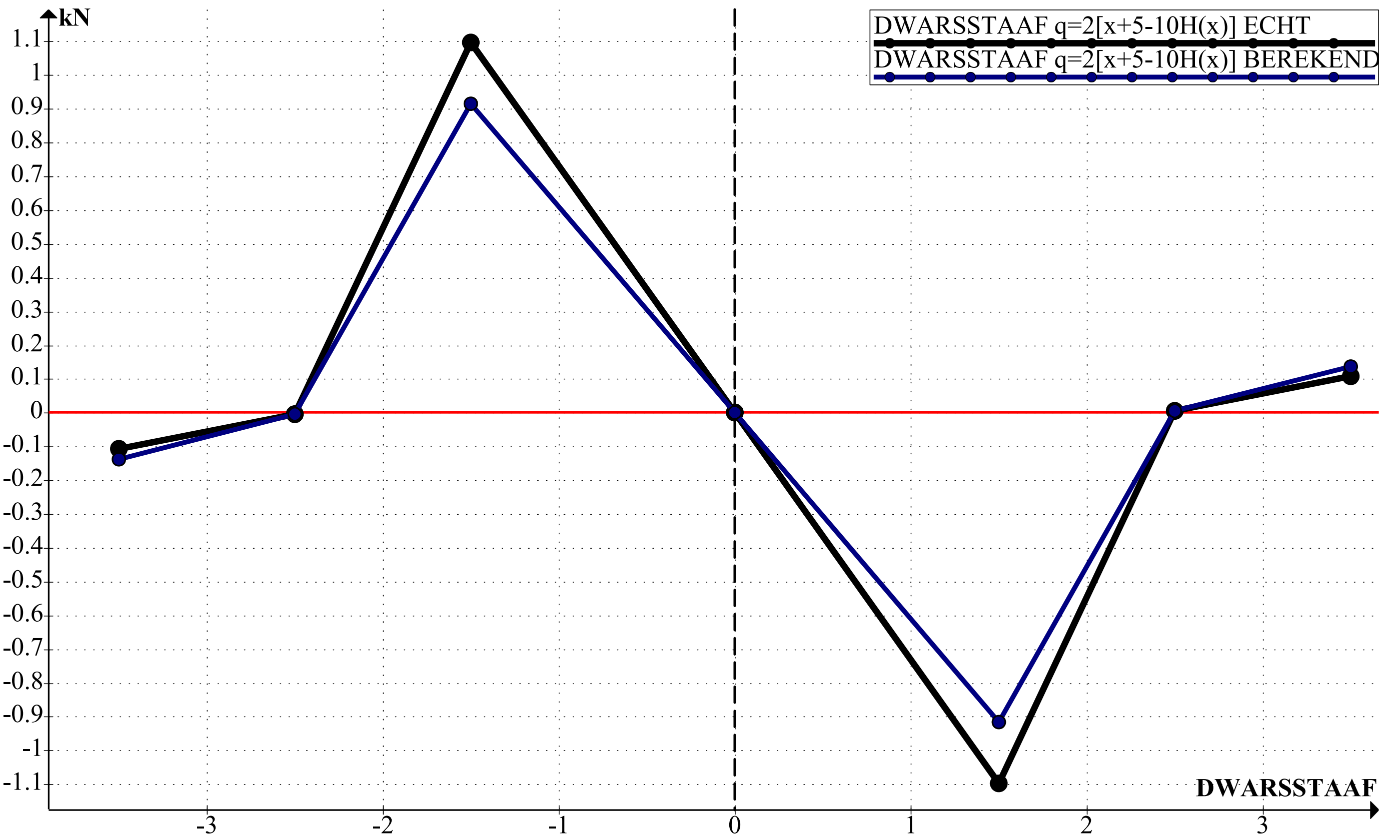
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q = 2(x + 5 - 10\,\mathrm{H}(x))$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	**δ BEREKEND**	**ECHT**	**BEREKEND**	**AFWIJKING**	**GEVAL**
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**-0.107**	-0.137	28.0%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**-0.005**	-0.005	0.0%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**1.097**	0.915	-16.6%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**0.000**	0.000	0.0%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**-1.097**	-0.915	-16.6%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.005**	0.005	0.0%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**0.107**	0.137	28.0%	K
				H	**0.000**	0.000	0.0%	
				V_{links}	**-8.336**	-8.333	0.0%	
				V_{links}	**8.336**	8.333	0.0%	

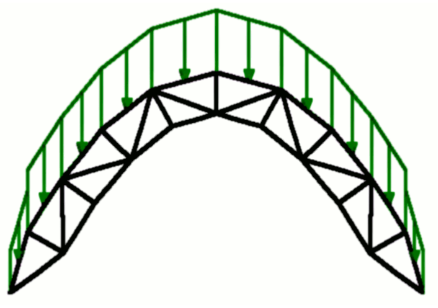
Tabel 32



Afbeelding 100

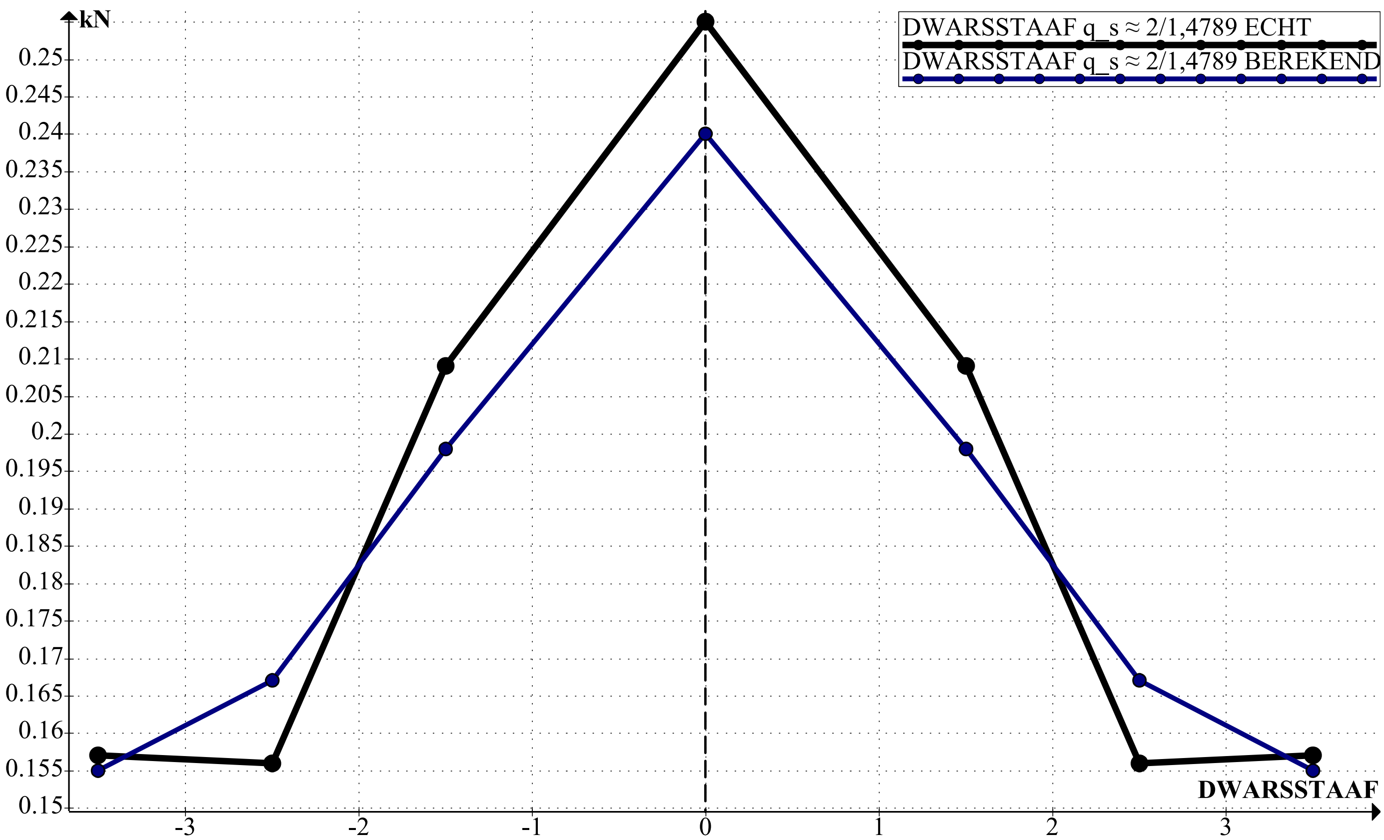
DWARSSTAVEN - BEREKENDE NORMAALKRACHT
VOLGENS:
GEVAL T (64)
GEVAL K Fout: Bron van verwijzing niet gevonden

BIJ **BELASTING** $q=2(x+5-10\,\mathrm{H}(x))$ **kN/m**



	COÖRDINATEN (m)				NORMAALKRACHT (kN)			
DWARSSTAAF	x_P	δ_{links}	δ_{rechts}	δ BEREKEND	ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	GEVAL
-4/-3	-3.50	3.04	4.09	3.328	**0.157**	0.155	-1.3%	K
-3/-2	-2.56	4.49	7.15	5.780	**0.156**	0.167	7.1%	T
-2/-1	-1.41	9.27	13.37	11.199	**0.209**	0.198	-5.3%	K
-1/1	0.00	16.02	16.02	16.947	**0.255**	0.240	-5.9%	T
1/2	1.41	13.37	9.27	11.199	**0.209**	0.198	-5.3%	K
2/3	2.56	7.15	4.49	5.780	**0.156**	0.167	7.1%	T
3/4	3.50	4.09	3.04	3.328	**0.157**	0.155	-1.3%	K
				H	**-4.276**	-4.347	1.7%	
				V_{links}	**-9.983**	-10.000	0.2%	
				V_{rechts}	**-9.983**	-10.000	0.2%	

Tabel 33

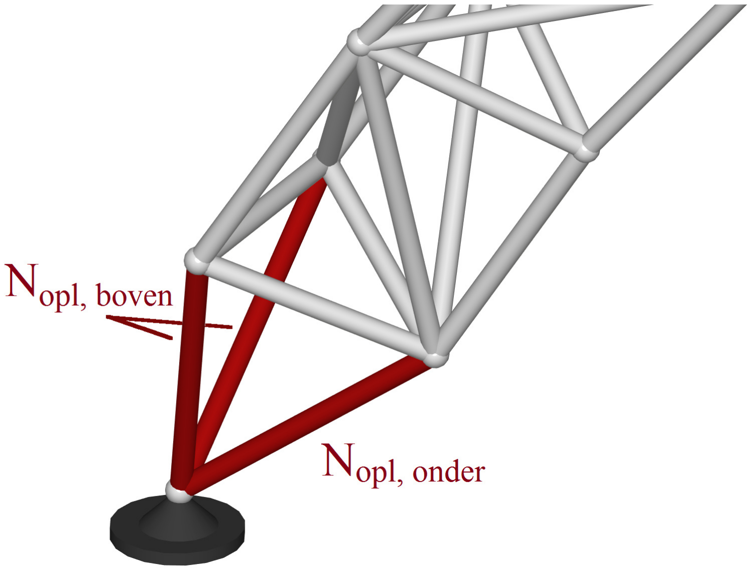


Afbeelding 101

5.8 NORMAALKRACHT IN STAVEN BIJ DE OPLEGGINGEN

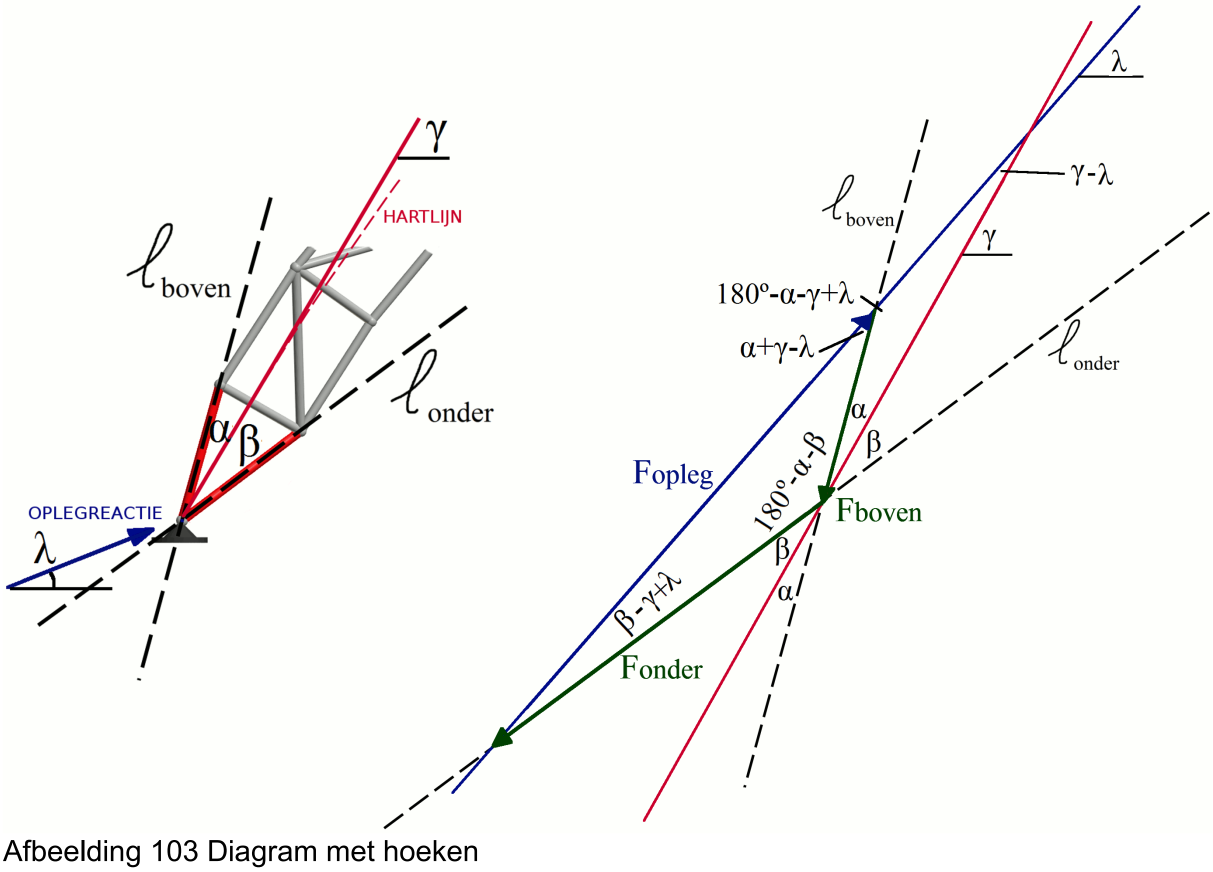
Tenslotte de berekening voor de zes staven in de driezijdige pyramide aan elk van de de opleggingen:

5.8.1 SCHUINE STAVEN



Afbeelding 102 Schuine staven bij opleggingen

Beschouw de volgende afbeelding:



Afbeelding 103 Diagram met hoeken

Opmerking: de Griekse letters zijn in afbeelding 102 en 103 zonder subscripten. Men neemt aan dat de kromming van de hartlijn tussen de drie schuine staven te verwaarlozen is. Men kan het volgende concluderen:

Met de benaderingen:

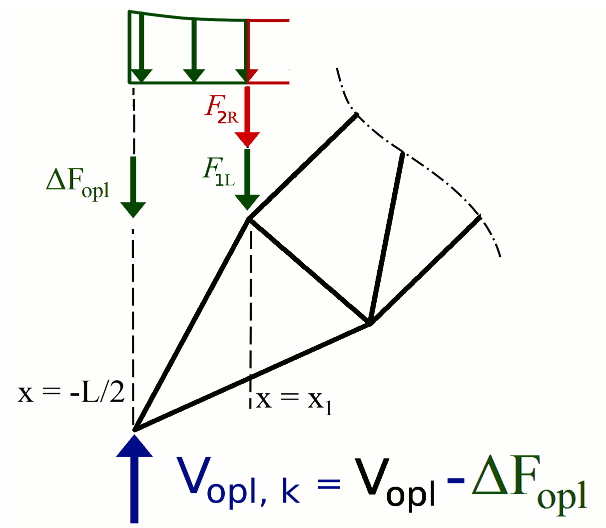
$$\alpha_{\mathrm{opl}} \approx \arctan\left(\frac{d_{\mathrm{boven}}}{l}\right) \tag{66}$$

$$\beta_{\mathrm{opl}} \approx \arctan\left(\frac{d_{\mathrm{onder}}}{l}\right) \tag{67}$$

$$\lambda_{\mathrm{opl}} \approx \arctan\left(\left|\frac{V_{\mathrm{opl,\,k}}}{H}\right|\right) \tag{68}$$

Alle hoeken gelden voor de loodrechte zij-projectie zoals in afbeelding 103.

Deze $V_{\mathrm{opl,\,k}}$ is een gecorrigeerde oplegreactie, dus niet de oplegreactie die men vindt bij de toegepaste verdeelde belasting. Voor de linkeroplegging:



Afbeelding 104 Correctie voor oplegreactie

Want zoals beschreven in 4.2.1 is de verdeelde belasting een vereenvoudiging van losse lasten op elk bovenknooppunt. ΔF_{opl} wordt direct naar door oplegging opgenomen, en komt dus niet ten laste van het vakwerk. Dus:

$$V_{opl,k} = V_{opl} - \Delta F_{\mathrm{opl}} \tag{69}$$

met V_{opl} de oplegreactie zoals men zou vinden onder invloed van de continue belasting q. ΔF_{opl} is gelijk aan de oplegreactie zoals men zou vinden voor een balk tussen $x = -L/2$ en x_1 onder invloed van de belasting erboven (groen), en is gelijk aan:

$$V_{\text{links, k}} = V_{\text{links}} + \int_{-L/2}^{x_1} q(x)\,dx - \frac{1}{x_1 + L/2} \int_{-L/2}^{x_1} (x + L/2)\,q(x)\,dx \tag{70}$$

En voor de rechterkant:

$$V_{\text{rechts, k}} = V_{\text{rechts}} + \frac{1}{L/2 - x_{1\text{R}}} \int_{x_{1\text{R}}}^{L/2} (x - x_{1\text{R}})\,q(x)\,dx\,, \qquad x_{1\text{R}} = -x_1 \tag{71}$$

x_1 wordt benaderd met de formule voor x_{boven} uit 3.2:

$$x_{\text{boven}} = x_P + \frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (z')^2}}\,d_2$$

met daar voor x_P ingevuld de benadering voor het bijbehorende punt op de hartlijn:

$$x_P = -L/2 + l\cos(\gamma_{\text{opl}}) \tag{72}$$

Zie afbeelding 103, vanwege de sinusregel geldt:

(Hier voor de duidelijkheid $\alpha = \alpha_{\text{opl}}$, $\beta = \beta_{\text{opl}}$, $\gamma = \gamma_{\text{opl}}$, $\lambda = \lambda_{\text{opl}}$)

$$F_{\text{boven}} = \frac{\sin(\beta - \gamma + \lambda)}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} F_{\text{opleg}} = \frac{\sin(\beta - \gamma + \lambda)}{\sin(\alpha + \beta)} F_{\text{opleg}} \tag{73}$$

$$F_{\text{onder}} = \frac{\sin(\alpha + \gamma - \lambda)}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} F_{\text{opleg}} = \frac{\sin(\alpha + \gamma - \lambda)}{\sin(\alpha + \beta)} F_{\text{opleg}} \tag{74}$$

In het algemeen kan men verschillende oplegreacties links en rechts hebben, dus volledig, en rekening houdend met de component in y-richting van de bovenstaven:

$$N_{\text{boven, links}} = -\frac{\sin(\beta - \gamma + \lambda_{\text{links}})}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l^2 + (b/2)^2 + d_{\text{boven}}^2}{l^2 + d_{\text{boven}}^2}}\, F_{\text{opleg, links}} \tag{75}$$

$$N_{\text{onder, links}} = -\frac{\sin(\alpha + \gamma - \lambda_{\text{links}})}{\sin(\alpha + \beta)} F_{\text{opleg, links}} \tag{76}$$

$$N_{\text{boven, rechts}} = -\frac{\sin(\beta - \gamma + \lambda_{\text{rechts}})}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l^2 + (b/2)^2 + d_{\text{boven}}^2}{l^2 + d_{\text{boven}}^2}}\, F_{\text{opleg, rechts}} \tag{77}$$

$$N_{\text{onder, rechts}} = -\frac{\sin(\alpha + \gamma - \lambda_{\text{rechts}})}{\sin(\alpha + \beta)} F_{\text{opleg, rechts}} \tag{78}$$

Met $\alpha = \alpha_{\text{opl}}$, $\beta = \beta_{\text{opl}}$, $\gamma = \gamma_{\text{opl}}$, $\lambda = \lambda_{\text{opl}}$ en met:

$$F_{\text{opleg, links}} = \sqrt{V_{\text{links, k}}^2 + H^2} \tag{79}$$

$$F_{\text{opleg, rechts}} = \sqrt{V_{\text{rechts, k}}^2 + H^2} \tag{80}$$

$$\lambda_{\text{links}} = \arctan\left(\left|\frac{V_{\text{opl, links, k}}}{H}\right|\right) \tag{81}$$

$$\lambda_{\text{links}} = \arctan\left(\left|\frac{V_{\text{opl, rechts, k}}}{H}\right|\right) \tag{82}$$

Men moet nog een geschikte γ, de hoek die men aanneemt voor de gelineariseerde hartlijn (figuur 89), bepalen. Als eerste poging de steilheid van de hartlijn bij de oplegging:

$$\gamma_{\text{opl}}^{(1)} = \arctan\left(\frac{dz}{dx}\Big|_{x=-L/2}\right) \tag{83}$$

Dit levert de volgende resultaten:

BEREKENDE NORMAALKRACHT IN SCHUINE STAVEN MET (75) - (78) en (83)

BELASTING		$N_{\text{opl,,boven}}$ ECHT	$N_{\text{opl,,boven}}$ BEREK	$N_{\text{opl,,boven}}$ AFW	$N_{\text{opl,onder}}$ ECHT	$N_{\text{opl,onder}}$ BEREK	$N_{\text{opl,onder}}$ AFW	H AFW	V AFW
q = 2 kN/m		**-4.110**	-3.868	-5.9%	**-3.625**	-4.129	**13.9%**	-0.4%	0.0%
q = 2 $\delta(x)$ kN		**-0.308**	-0.269	-12.8%	**-0.738**	-0.811	**9.9%**	0.8%	0.0%
q = 2(-|x|+5) kN/m			-8.490		**-13.621**	-15.116	**11.0%**	0.0%	0.0%
q = 2(x+5) kN/m	LINKS		-9.099		**-24.637**	-26.559	**7.8%**	-0.4%	0.0%
	RECHTS		-29.586		**-11.609**	-14.726	**26.8%**	-0.4%	-0.1%
q = 2(x + 5 - 10H(x)) kN/m	LINKS		-5.716		**3.674**	3.302	**-10.1%**	0.0%	0.0%
	RECHTS		5.716		**-3.674**	-3.302	**-10.1%**	0.0%	0.0%
q_s ≈ 2(0,68) kN/m			-4.074		**-2.706**	-3.254	**20.3%**	1.7%	0.2%

HOEK MET HORIZONTAAL	ECHT	BEREKEND	AFW
BOVEN ($\gamma + \alpha$)	74.416	76.137	2.31%
ONDER ($\gamma - \beta$)	37.155	39.170	5.42%

Tabel 34

De resultaten komen wel in orde van grootte overeen met de echte waarden, maar hebben in het algemeen een aanzienlijke afwijking. Op grond van de nauwkeurigheid van H en V zou men beter verwachten. De hoeken met de horizontaal van de projectie op het xz-vlak van de randstaven hebben een redelijke afwijking van 2,31% en 5,42%. Wellicht is de belasting in de schuine staven erg gevoelig voor veranderingen in oriëntatie. Laat men een betere γ_{opl} zoeken:

Als men voor voor γ nu de afgeleide neemt niet ter plaatse van de oplegging, maar ongeveer halverwege de oplegging en x_P, op een punt $x_{\text{opl, m}}$:

$$x_{\text{opl, m}} = -L/2 + \frac{l}{2\sqrt{1+\left(\gamma_{\text{opl}}^{(1)}\right)^2}} \tag{84}$$

Dus:

$$\gamma_{\text{opl}} = \arctan\left(\frac{dz}{dx}\bigg|_{x=x_{\text{opl, m}}}\right) \tag{85}$$

Dan krijgt men een betere benadering voor de hoeken ($\gamma + \alpha$) en ($\gamma - \beta$), en de berekening opnieuw uitgevoerd:

BEREKENDE NORMAALKRACHT IN SCHUINE STAVEN MET (75) - (78) en (85)

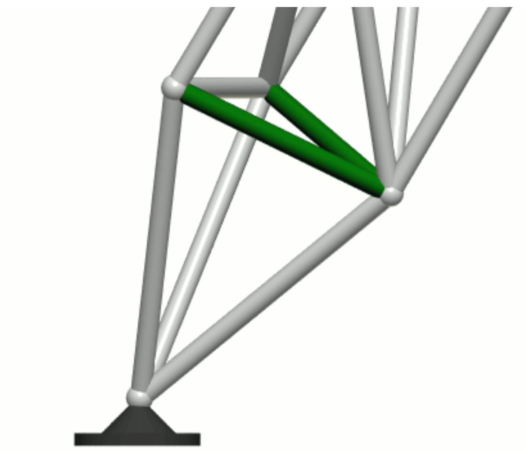
		$N_{opl,,boven}$			$N_{opl,onder}$			H	V
BELASTING		**ECHT**	**BEREK**	**AFW**	**ECHT**	**BEREK**	**AFW**	**AFW**	**AFW**
***q* = 2 kN/m**		**-4.110**	-4.087	-0.6%	**-3.625**	-3.655	**0.8%**	-0.4%	0.0%
***q* = 2 δ(x) kN**		**-0.308**	-0.299	-3.0%	**-0.738**	-0.758	**2.6%**	0.8%	0.0%
***q* = 2(-|*x*|+5) kN/m**			-9.170		**-13.621**	-13.817	**1.4%**	0.0%	0.0%
***q* = 2(*x*+5) kN/m**	**LINKS**		-10.086		**-24.637**	-24.778	**0.6%**	-0.4%	0.0%
	RECHTS		-30.781		**-11.609**	-11.767	**1.4%**	-0.4%	-0.1%
***q* = 2(x + 5 - 10*H*(*x*)) kN/m**	**LINKS**		-5.837		**3.674**	3.670	**-0.1%**	0.0%	0.0%
	RECHTS		5.748		**-3.674**	-3.670	**-0.1%**	0.0%	0.0%
q_s ≈ 2(0,68) kN/m			-4.266		**-2.706**	-2.803	**3.6%**	1.7%	0.2%

HOEK MET HORIZONTAAL			
	ECHT	**BEREKEND**	**AFW**
BOVEN (γ + α)	74.416	74.537	0.16%
ONDER (γ - β)	37.155	37.570	1.12%

Tabel 35

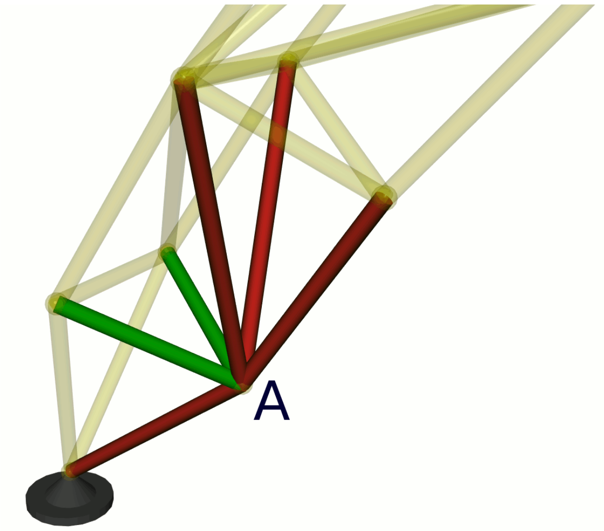
Deze resultaten zijn veel beter dan in tabel 34. Hiermee lijkt een geschikte methode voor het benaderen van de normaalkracht in de schuine staven gevonden.

5.8.2 NORMAALKRACHT IN VERTICALEN BIJ DE OPLEGGING



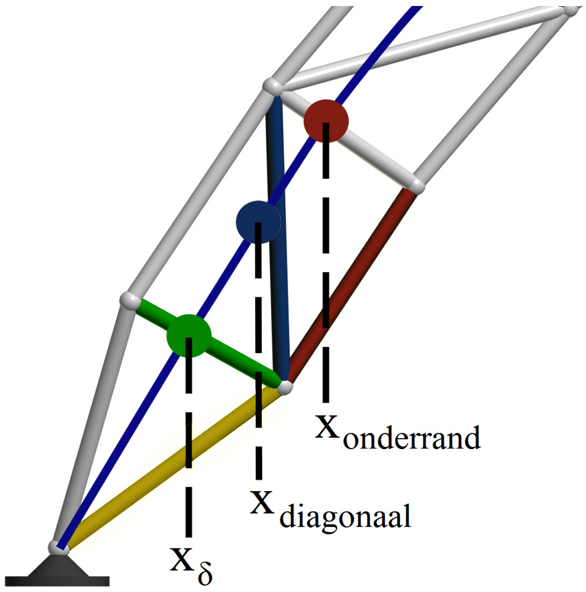
Afbeelding 105 Verticalen bij oplegging

Voor de benadering van de normaalkracht in de verticalen direct naast de opleggingen wordt gebruik gemaakt van krachtenevenwicht van knooppunt A:



Afbeelding 106 Evenwicht van knooppunt A

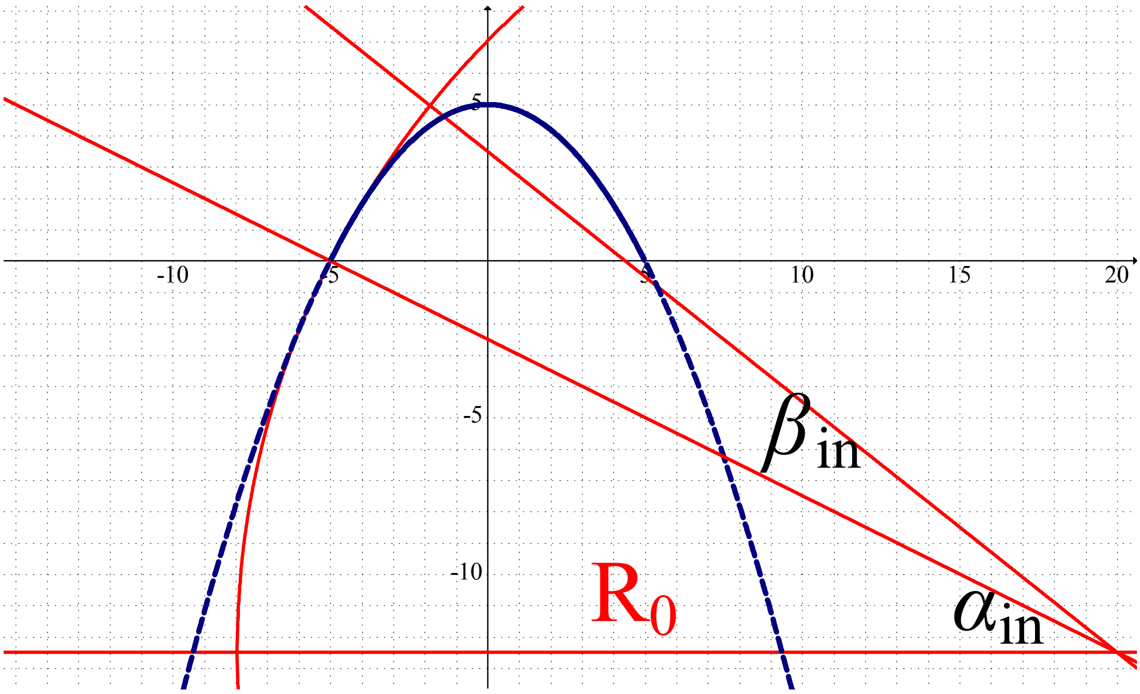
De normaalkracht in de schuine staaf is nu bekend, de krachten in de onderrandstaven en de diagonalen moeten weer benaderd worden op gelijke wijze zoals in afbeelding 83, 5.6.1. Als uitgangspositie wordt de oplegging genomen, en de benodigde grootheden worden benaderd met de hulpcoördinaten zoals hieronder:



Afbeelding 107 Hulpcoördinaten

Men ziet dus dat men vanaf de oplegging ten verste een punt moet benaderen op $2l$ langs de hartlijn. Dit is het dubbele van wat men tot nu toe heeft gehad (5.6.1), en het is wenselijk om hier een betere benaderingsmethode te gebruiken in plaats van de lineaire tot nu toe.

Beschouw:



Afbeelding 108 Benadering met cirkelboog

De lengte vanaf x = -L/2 tot aan x_{einde} noemt men $l_{segment}$. x_{einde} wil men benaderen. Er geldt:

$$x_{einde} \approx -L/2 + \left(R_0 \cos(\alpha_{in} + \beta_{in}) - R_0 \cos \beta_{in} \right) \tag{86}$$

$$\alpha_{in} = \arctan\left(\frac{dx}{dy} |_{x=-L/2} \right) \tag{87}$$

$$\beta_{in} = \frac{l_{segment}}{R_0} \tag{88}$$

En met (51):

$$R_0 = R(-L/2) \tag{89}$$

Met behulp van de somformule voor de cosinus en eigenschappen van driehoeken wordt (86):

$$x_{einde} \approx -L/2 + \frac{R_0}{\sqrt{1+(dx/dy|_{x=-L/2})^2}} \left[1 - \cos\left(\frac{l_{segment}}{R_0} \right) \right] + \frac{R_0}{\sqrt{1+(dy/dx|_{x=-L/2})^2}} \sin\left(\frac{l_{segment}}{R_0} \right) \tag{90}$$

Hiermee worden alle punten in afbeelding 107 benaderd. Deze benadering is inderdaad beter:

	ECHT	**LINEAIR**	**CIRKEL**
AFSTAND VANAF OPLEGGING VOOR *$l_{segment}$ = 2l*	**1.498**	1.323	1.460
***l* = 1.4789 m**	**AFWIJKING**	-11.7%	-2.5%

Tabel 36

Bij de punten x_δ, $x_{\text{diagonaal}}$, en $x_{\text{onderrand}}$ horen dus de benaderingen $x_{\text{einde, l}}$, $x_{\text{einde, 1.5l}}$ en $x_{\text{einde, 2l}}$. Zo heeft men voor de verticale (loodrecht op de hartlijn ter plaatse van de verticalen) component van elke bijdrage:

$$F_{\text{vert, diagonalen, opl, links}} \approx 2\,N_{\textit{diagonaal}}(-L/2+x_{\text{einde, 1.5l}})\frac{\sqrt{l^2+h^2}}{\sqrt{h^2+l^2+(b/2)^2}}\sin(\alpha-\delta(-L/2+x_{\text{einde, l}})) \tag{91}$$

$$F_{\text{vert, schuine staven, links}} := -\sin(\arctan(d_{\text{onder}}/l)-\delta(-L/2+x_{\text{einde, l}}))\,N_{\text{onder, links}} \tag{92}$$

$$F_{\text{vert, onderrand, links}} = N_{\text{onder, links}}(-L/2+x_{\text{einde, 2l}})\sin(\delta(-L/2+x_{\text{einde, l}})) \tag{93}$$

Voor de kracht in een verticaal direct naast de oplegging heeft men dan:

$$N_{\text{verticaal, links}} = (F_{\text{vert, diagonalen, opl, links}}+F_{\text{vert, schuine staven, links}}+F_{\text{vert, onderrand, links}})\frac{\sqrt{(h^2+(b/2)^2)}}{2h} \tag{94}$$

En voor de rechterkant:

$$F_{\text{vert, diagonalen, opl, rechts}} \approx 2\,N_{\textit{diagonaal}}(L/2-x_{\text{einde, 1.5l}})\frac{\sqrt{l^2+h^2}}{\sqrt{h^2+l^2+(b/2)^2}}\sin(\alpha-\delta(L/2-x_{\text{einde, l}})) \tag{95}$$

$$F_{\text{vert, schuine staven, rechts}} := -\sin(\arctan(d_{\text{onder}}/l)-\delta(L/2-x_{\text{einde, l}}))\,N_{\text{onder, rechts}} \tag{96}$$

$$F_{\text{vert, onderrand, rechts}} = N_{\text{onder, rechts}}(L/2-x_{\text{einde, 2l}})\sin(\delta(L/2-x_{\text{einde, l}})) \tag{97}$$

$$N_{\text{verticaal, rechts}} = (-F_{\text{vert, diagonalen, opl, rechts}}+F_{\text{vert, schuine staven, rechts}}+F_{\text{vert, onderrand, rechts}})\frac{\sqrt{(h^2+(b/2)^2)}}{2h} \tag{98}$$

De resultaten voor onze voorbeeldboog voor deze methode:

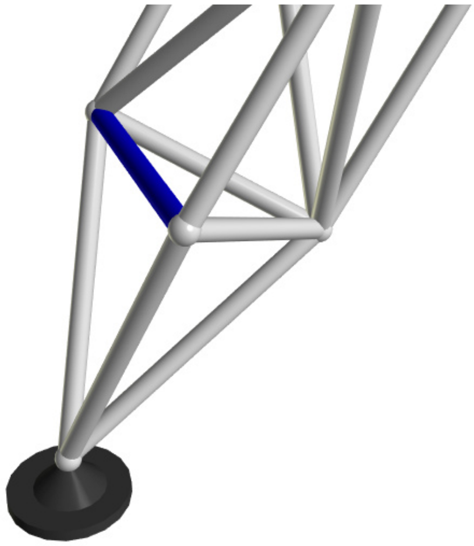
BELASTING		ECHT	$N_{verticaal,\,opl}$ BEREKEND	AFWIJKING	H AFWIJKING	V AFWIJKING
q = 2 kN/m		**0.993**	0.929	-6.4%	-0.4%	0.0%
q = 2 δ(x) kN		**0.099**	0.095	-4.0%	0.8%	0.0%
q = 2(-|x|+5) kN/m		**2.768**	2.725	-1.6%	0.0%	0.0%
q = 2(x+5) kN/m	**LINKS**	**3.067**	3.023	-1.4%	-0.4%	0.0%
	RECHTS	**6.259**	6.271	0.2%	-0.4%	-0.1%
q = 2(x + 5 - 10H(x)) kN/m	**LINKS**	**1.659**	1.660	0.1%	0.0%	0.0%
	RECHTS	**-1.659**	-1.660	0.1%	0.0%	0.0%
$q_s \approx$ 2(0,68) kN/m		**0.796**	0.842	5.8%	1.7%	0.2%

HOEK MET HORIZONTAAL	ECHT	BEREKEND	AFW
BOVEN ($\gamma + \alpha$)	74.416	74.537	0.16%
ONDER ($\gamma - \beta$)	37.155	37.570	1.12%

Tabel 37

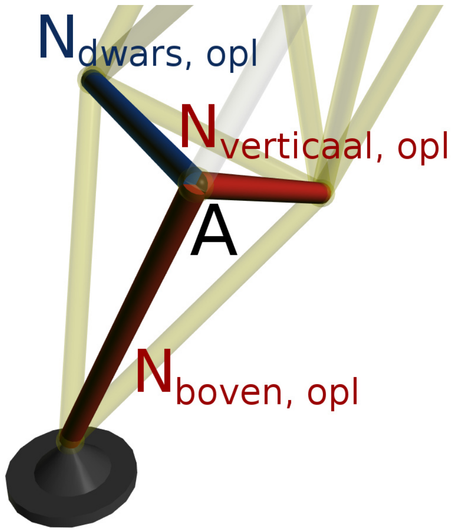
Dit lijkt voldoende nauwkeurig.

5.8.3 NORMAALKRACHT IN DWARSSTAAF BIJ DE OPLEGGING



Afbeelding 109

Tenslotte volgt de normaalkracht in een dwarsstaaf bij een oplegging uit krachtenevenwicht in y-richting voor een knooppunt A zoals in afbeelding 110.



Afbeelding 110

Dit levert:

$$N_{\text{dwars,opl,links}} = -\left(N_{\text{verticaal, links}} \frac{(b/2)}{\sqrt{h^2+(b/2)^2}} + N_{\text{boven, links}} \frac{(b/2)}{\sqrt{l^2+(b/2)^2+d_{\text{boven}}^2}} \right) \tag{99}$$

$$N_{\text{dwars,opl,rechts}} = -\left(N_{\text{verticaal, rechts}} \frac{(b/2)}{\sqrt{h^2+(b/2)^2}} + N_{\text{boven, rechts}} \frac{(b/2)}{\sqrt{l^2+(b/2)^2+d_{\text{boven}}^2}} \right) \tag{100}$$

De resultaten voor onze voorbeeldboog:

BELASTING		$N_{dwars, opl}$ ECHT	BEREKEND	AFWIJKING	H AFWIJKING	V AFWIJKING
$q = 2$ kN/m		**0.993**	0.990	-0.3%	-0.4%	0.0%
$q = 2\ \delta(x)$ kN		**0.060**	0.059	-1.7%	0.8%	0.0%
$q = 2(-\lvert x \rvert+5)$ kN/m		**1.913**	1.901	-0.6%	0.0%	0.0%
$q = 2(x+5)$ kN/m	LINKS	**2.095**	2.078	-0.8%	-0.4%	0.0%
	RECHTS	**7.842**	7.820	-0.3%	-0.4%	-0.1%
$q = 2(x + 5 - 10H(x))$ kN/m	LINKS	**1.241**	1.248	0.6%	0.0%	0.0%
	RECHTS	**-1.241**	-1.248	0.6%	0.0%	0.0%
$q_s \approx 2(0,68)$ kN/m		**1.101**	1.097	-0.4%	1.7%	0.2%

HOEK MET HORIZONTAAL	ECHT	BEREKEND	AFW
BOVEN ($\gamma + \alpha$)	74.416	74.537	0.16%
ONDER ($\gamma - \beta$)	37.155	37.570	1.12%

Tabel 38

Deze resultaten zijn ook goed genoeg. Hiermee is nu voor elke staaf in een boog zoals onze voorbeeldboog op voorhand op basis van de overspanning *L*, hoogte van overspanning *Hoogte*, hoogte van vakwerk *h*, breedte van bovenvlak *b*, en plek van de hartlijn een benadering te geven van de normaalkracht.

5.9 BESCHOUWING VAN HET MODEL

De nauwkeurigheid van dit model leunt zwaar op de nauwkeurigheid van de berekende verticale oplegreacties en de statisch onbepaalde: de spatkracht *H*. De verticale oplegreacties vormen geen probleem, en de spatkracht lijkt mits de belasting goed gedefinieerd is met een maximale afwijking van rond de procent te berekenen. Hierna is het model zuiver gebaseerd op de hoofdbeginselen van de mechanica: $\Sigma F = 0$ en $\Sigma M = 0$, de Stelling van Pythagoras en wat driehoeksmeetkunde. Dat is mooi, want dat maakt het model eenvoudig, hoewel sommige uitdrukkingen op het eerste gezicht ingewikkeld lijken. Bovendien geeft zo'n model meer inzicht.

5.9.1 BEPROEVING VAN HET MODEL

Hoewel niet verwerkt in dit rapport in verband met de beschikbare tijd, is het model behalve op onze voorbeeldboog ook steekproefsgewijs getest op bogen volgens dezelfde beginselen maar met andere parameters, waarbij resultaten zijn gevonden van vergelijkbare nauwkeurigheid als voor onze voorbeeldboog. Ondanks dat is het noodzakelijk dat het model op uitgebreidere schaal wordt getest, omdat er altijd onvoorziene verrassingen kunnen zijn. De volgende stellingen betreffende de nauwkeurigheid zijn gebaseerd op alleen de resultaten gepresenteerd in dit rapport:

5.9.2 NAUWKEURIGHEID VAN DE RESULTATEN

Berekende staafkrachten zijn in het algemeen lineair afhankelijk van eerder berekende staafkrachten, de oplegreacties en de belasting. Dus zelfs al wordt in het model één of andere relatief grote kracht ergens in de boog met een kleine afwijking benaderd, dan kan dat een grote afwijking veroorzaken in een volgende berekende kleine kracht die weer van de eerste afhangt. Daarom moet men voor de nauwkeurigheid alleen kijken naar die van de zwaarder belaste staven, omdat de relatieve afwijking in kleinere krachten in theorie tot in het oneindige kan oplopen. Het beste beeld geeft in dat geval een grafiek, zoals er vele in dit rapport aanwezig zijn.

Een snelle beschouwing leert dat voor de grotere staafkrachten per staaftype (onderrandstaaf, verticaal...)

een afwijking mag worden verwacht van ten hoogste ongeveer 10% relatief aan de werkelijke belasting van die staaf, vaak minder. Er zijn uitzonderingen, zoals de zijdiagonaalkracht in de symmetrische driehoeksbelasting (tabel 6 blz. 61) met een relatieve afwijking van +15,2%. In dit geval is wel zoals geschreven in 5.4.3, blz. 65 een verbetering van de methode mogelijk die de onnauwkeurigheid daar waarschijnlijk sterk zal doen afnemen.

5.9.3 NUT VAN DIT MODEL

Er zijn verschillende toepassingen van dit model denkbaar:

Ten eerste zou men het kunnen gebruiken om bij gegeven parameters van te voren een snelle schatting van de staafkrachten te bepalen, die men dan weer kan gebruiken voor een snelle schatting van de benodigde doorsnede-afmetingen per staaf, aangezien die, indien men de principes aanhoudt die gelden voor onze boog, weinig invloed hebben op de krachtsverdeling, zoals vastgesteld in 4.2.7, blz. 48. Wel moet natuurlijk gezegd worden dat in dat geval eigenlijk net zo goed een geparametriseerde invoer in een eindige-elementen programma kan worden gedaan: dan krijgt men de exacte staafkrachten, en het is maar zeer de vraag of dit model, zeker in MAPLE, zuiniger is in aantal rekenbewerkingen dan een eindige-elementenprogramma met een methode zoals in bijlage 9.1 blz.116.

Waar het model meer geschikt voor is is een optimalisatie: in een programma als MAPLE worden in het algemeen algebraïsche formules voortgebracht waarvan men natuurlijk prima maxima en minima kan bepalen. Als men bijvoorbeeld afhankelijk van de resultaten in het model nog uitdrukkingen aanmaakt voor minimum benodigde doorsnede afmetingen, per staaf of per maximaal belaste staaf, dan krijgt men uiteindelijk een uitdrukking voor de doorsnede-afmetingen in alle parameters, die men kan minimaliseren. Natuurlijk kunnen er nog tweede maatgevende uitdrukkingen zijn voor de doorsnede-afmetingen, bijvoorbeeld voor knik. In dat geval neemt men de maximale van de twee minima van de uitdrukkingen.

6 CONCLUSIE

Er is een wiskundig model ontwikkeld dat voor elke staaf in een vakwerk dat voldoet aan de beginselen zoals uiteengezet in 5.1 de normaalkracht benadert, zoals gevraagd in de probleemstelling. Dit model is na het bepalen van de statisch onbepaalde spatkracht geheel gebaseerd op krachtenevenwicht van de knooppunten en momentenevenwicht van vrijgemaakte constructiedelen. De afwijking, voor zwaarder belaste staven, in berekende kracht in een staaf kunnen meestal onder de 10% worden verwacht van de werkelijke kracht in die staaf.

7 LIJST VAN BOEKEN

[1] J.W. Welleman, *Notities over kabels en bogen*, De Betonvereniging, 2013
[2] C. Hartsuijker, *Toegepaste Mechanica Deel 2*, Academic Services, 2001

8 LIJST VAN AFBEELDINGEN

9 BIJLAGE

9.1 VERGELIJKING VAN RESULTATEN IN MATRIXFRAME EN 3D TRUSS, 3.3, 4.2.4

3D Truss is een simpel programma ontwikkeld door ir. J.W. Welleman voor het doorrekenen van vakwerken met scharnierende verbindingen en puntbelastingen in de knopen. Men voert de coördinaten van de knooppunten, de staven daartussen, de belastingen en de beperkingen in en het programma voert de staafkrachten, oplegreacties en knoopverplaatsingen uit. De theoretische beginselen zijn hieronder weergegeven.

3D Trusses

The element definition of a 3D truss element can be described in a discrete way. We start with a 3D-element between nodes **A** (a_x, a_y, a_z) and **B** (b_x, b_y, b_z) in a coordinate system with origin **O**.

The element *i* has six degrees of freedom located at its ends:

$$u_i^T = \left[u_x^A, u_y^A, u_z^A, u_x^B, u_y^B, u_z^B\right]$$

The bar element *i* has its local bar axis from node **A** to **B**. The vectorial direction can be denoted with the unity vector *l*:

$$l = \frac{1}{L}\begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_x \\ b_z - a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \quad \text{with:} \quad |l| = 1.0$$

In which the length *L* of the bar can be found with:

$$L = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}$$

The elongation e_i of a bar can directly be expressed in terms of the six displacements u_i of the element. The relation between the elongation and the displacements u_i is given with the kinematic relation B_i (see figure 1):

$$e_i = B_i \times u_i \qquad \text{with:}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} -l_x & -l_y & -l_z & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

Each elements *i* thus adds to the system stiffness with:

$$K_i = B_i^T \times \frac{EA_i}{L_i} \times B_i$$

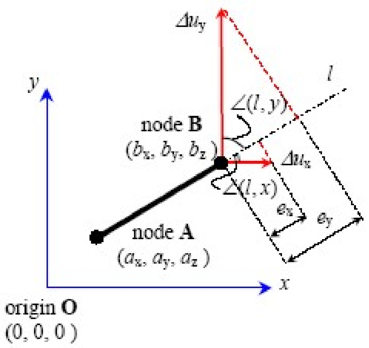


Figure 1 : *Bar elongation*

$$e_i = e_x + e_y + e_z$$

with:

$$e_x = \cos\angle(l,x) \times (u_x^B - u_x^A)$$
$$e_y = \cos\angle(l,y) \times (u_y^B - u_y^A)$$
$$e_y = \cos\angle(l,z) \times (u_z^B - u_z^A)$$

and:

$$\cos\angle(l,x) = \frac{l \bullet x}{|l| \times |x|} = \frac{\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \times 1} = l_x$$

$$\cos\angle(l,y) = l_y$$

$$\cos\angle(l,z) = l_z$$

This stiffness should be added to the total system stiffness matrix with respect to the used degrees of freedom of the element. This process is also known as *assembling elements*.

After reducing the system with the boundary conditions, the displacements of the truss can be found by solving:

$$f = K_{system} \times u \qquad \text{see footnote [1]}$$

The axial force for an individual bar element can be found with the solved displacements of the element degrees of freedom u_i :

$$N_i = B_i \times \frac{EA_i}{L_i} \times u_i$$

Close

[1] Unused degrees of freedoms (with zero stiffness) may be neglected in this system or strictly checked in case of mechanisms. The user can switch this check on or off.

Hans Welleman 2006

Afbeelding 111: Theoretische beginselen van het programma 3D Truss

Betreffende de staafkrachten kijkt men naar de testopstelling uit 3.3:

STAAFKRACHTEN

STAAFNUMMER	MATRIXFRAME	3D TRUSS
1	-2.2328	-2.2328
2	-2.2328	-2.2328
3	-0.4726	-0.4726
4	0.1834	0.1834
5	-1.1162	-1.1162
6	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.8660	0.8660
10	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000
12	0.3668	0.3668
13	0.3668	0.3668
14	0.8660	0.8660
15	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000
18	1.3508	1.3508
19	0.5522	0.5522
20	-2.6424	-2.6424
21	0.3668	0.3668
22	-2.2328	-2.2328
23	0.8660	0.8660
24	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000
26	0.0000	0.0000
27	0.0000	0.0000
28	0.0000	0.0000
29	0.0000	0.0000
30	0.0000	0.0000
31	0.0000	0.0000
32	0.0000	0.0000
33	0.0000	0.0000

OPLEGREACTIES

KNOOPPUNT		MATRIXFRAME	3D TRUSS
10	x	0.0000	0.0000
	y	0.0000	0.0000
	z	-2.2328	-2.2328
11	x	0.0000	0.0000
	y	0.0000	0.0000
	z	0.8660	0.8660
12	x	0.0000	0.0000
	y	0.0000	0.0000
	z	0.3668	0.3668

Tabel 39: Vergelijking van resultaten uit MatrixFrame en 3D Truss

Opvallend hier is dat de uitkomsten voor zover te zien numeriek exact overeenkomen. Hieruit lijkt het dat in vakwerkmodus van MatrixFrame en in 3D Truss dezelfde berekeningsmethoden worden gebruikt. Betreffende de knoopverplaatsingen kijkt men naar het rechte vakwerk met 8 vakken uit Fout: Bron van verwijzing niet gevonden:

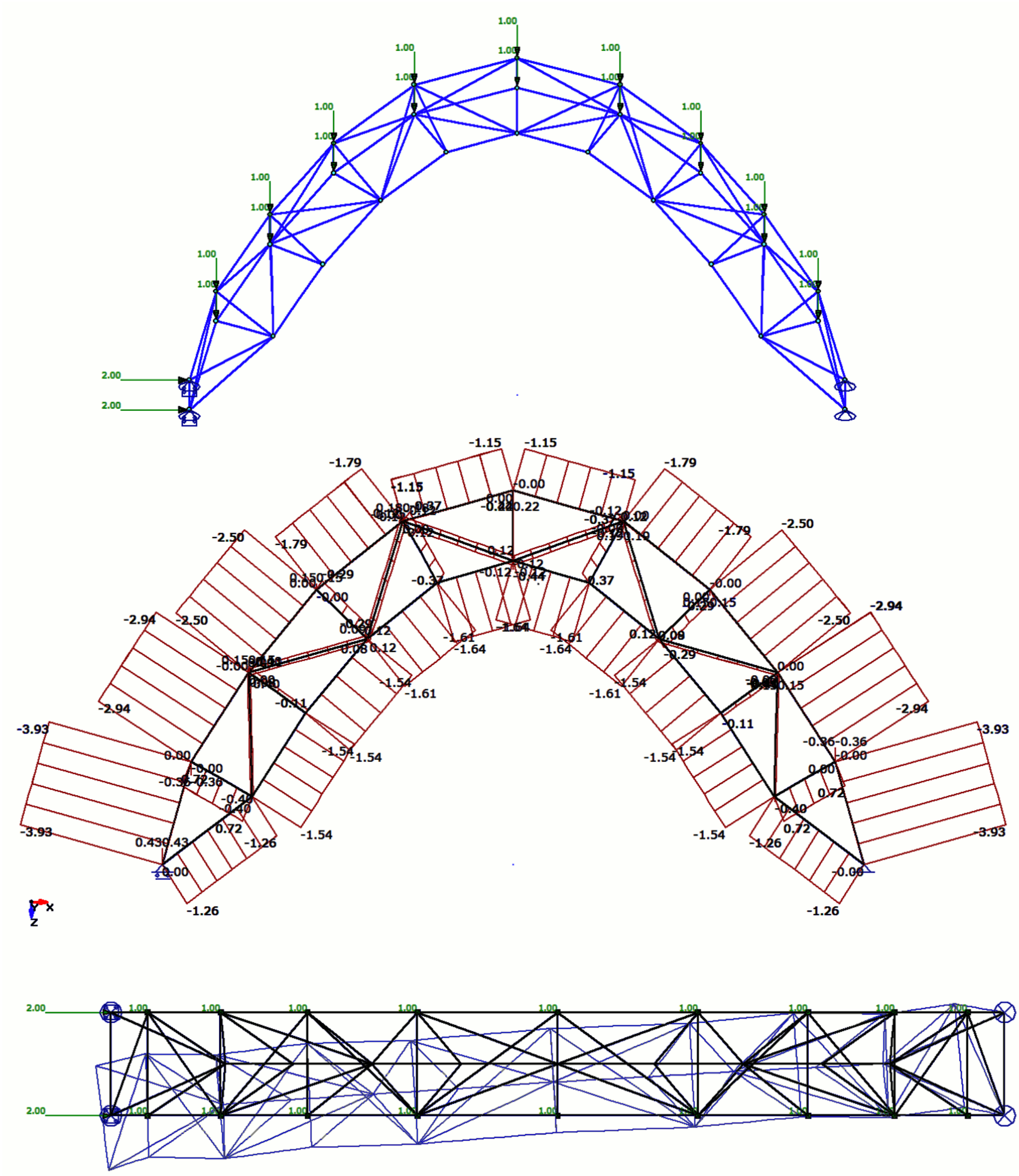
KNOOPPUNTVERPLAATSINGEN

	x		y		z	
KNOOPPUNTNUMMER	MATRIXFRAME	3D TRUSS	MATRIXFRAME	3D TRUSS	MATRIXFRAME	3D TRUSS
1	-62.0000	-62.0000	1.1774	1.1774	0.6829	0.6829
2	0.0000	0.0000	2.3548	2.3548	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	-62.0000	-62.0000	1.1774	1.1774	75.1823	75.1823
5	-3.5000	-3.5000	-3.0172	-3.0172	79.1601	79.1601
6	-3.5000	-3.5000	-2.3444	-2.3444	74.6845	74.6845
7	-50.0000	-50.0000	1.1774	1.1774	139.1104	139.1104
8	-7.0000	-7.0000	-0.6728	-0.6728	140.1835	140.1835
9	-7.0000	-7.0000	0.0000	0.0000	138.4275	138.4275
10	-38.0000	-38.0000	1.1774	1.1774	175.4673	175.4673
11	-14.5000	-14.5000	-6.4655	-6.4655	181.4451	181.4451
12	-14.5000	-14.5000	-5.7927	-5.7927	172.9695	172.9696
13	-22.0000	-22.0000	1.1774	1.1774	193.2529	193.2529
14	-22.0000	-22.0000	-0.6728	-0.6728	194.3260	194.3260
15	-22.0000	-22.0000	0.0000	0.0000	192.5700	192.5700
16	-6.0000	-6.0000	1.1774	1.1774	175.4673	175.4673
17	-29.5000	-29.5000	-6.4655	-6.4655	181.4451	181.4451
18	-29.5000	-29.5000	-5.7927	-5.7927	172.9695	172.9696
19	6.0000	6.0000	1.1774	1.1774	139.1104	139.1104
20	-37.0000	-37.0000	-0.6728	-0.6728	140.1835	140.1835
21	-37.0000	-37.0000	0.0000	0.0000	138.4275	138.4275
22	18.0000	18.0000	1.1774	1.1774	75.1823	75.1823
23	-40.5000	-40.5000	-3.0172	-3.0172	79.1601	79.1601
24	-40.5000	-40.5000	-2.3444	-2.3444	74.6845	74.6845
25	18.0000	18.0000	1.1774	1.1774	0.6829	0.6829
26	-44.0000	-44.0000	2.3548	2.3548	0.0000	0.0000
27	-44.0000	-44.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabel 40: Vergelijking van knoopverplaatsingen voor vakwerk van 8 vakken in MatrixFrame en 3D Truss

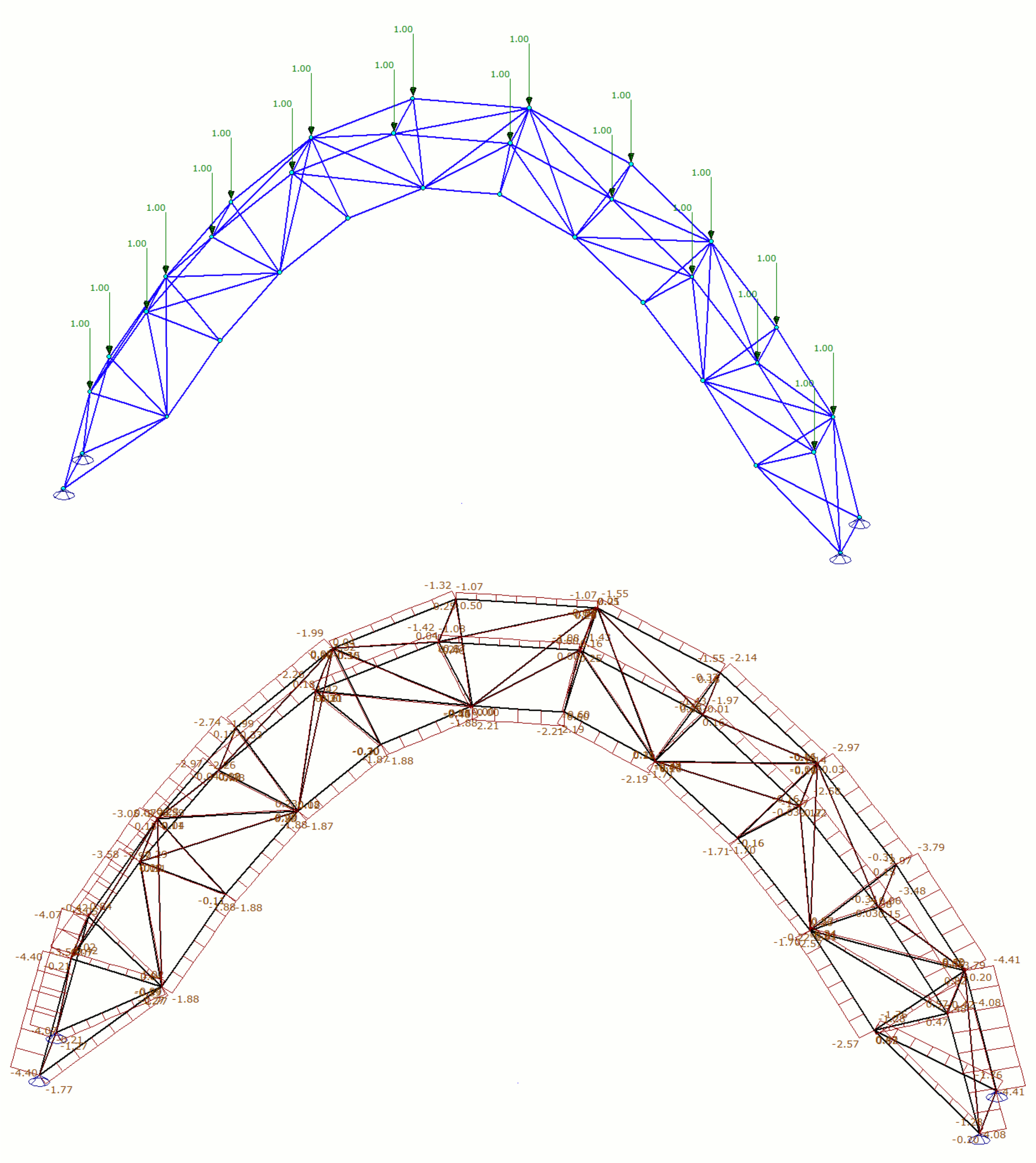
Men ziet wederom dat, afgezien van afrondfouten aangezien de waarden uit MatrixFrame zijn afgekapt en die uit 3D Truss afgerond, dat ook de knoopverplaatsingen exact overeenkomen. Dat duidt erop dat ook voor het berekenen van de knoopverplaatsingen in beide programma's dezelfde methoden worden gebruikt.

9.2 KRACHTSVERDELING VOOR VAKWERK OP VIER SCHARNIEREN MET HANDMATIG AANGEBRACHTE SPATKRACHT, 3.4



Afbeelding 112

9.3 RESULTAAT VAN MATRIXFRAME-BEREKENING VAN VAKWERK MET 11 VAKKEN



Afbeelding 113: Vakwerk met 11 vakken, MatrixFrame uitkomst

OVERSPANNING	100	OVERSP/2	50	**LENGTE VAN BOOG**	147.8942857545
HOOGTE	50			**LENGTE VAN VAK**	2.9578857151
AANTAL VAKKEN (50 MAX)	50			NULWAARDE LFUNCTIE	-73.9471428772
HOOGTE BOOG	1				**ZONDER OPLEGGINGEN MET OPLEGGINGEN**
HARTLIJN OP	0.66666666			**AANTAL KNOOPUNTEN**	153
BREEDTE BOOG	1.1547005384			**AANTAL STAVEN**	503
GELIJKB DRIEHOEK	1.1547005384				

NEWTON RAPHSON		**x1**	**f(x1)**	**x2**	**f(x2)**	**x3**	**f(x3)**
vak	lengte op einde						
0	0	-60.8058972786	-26.27816205	-34.5277352291	30.4231196461	-52.3698624668	-5.3999487511
1	2.9578857151	-59.5773686739	-26.033171694	-33.7245191933	28.824397492	-50.8899617127	-4.9620855331
2	5.9157714302	-58.3229677945	-25.778167776	-33.2375529652	26.6804272764	-49.2752871704	-4.3046503394
3	8.8736571453	-57.0409877772	-25.512295184	-32.998308183	24.1196359032	-47.5636101846	-3.5315548741
4	11.8315428604	-55.7295253958	-25.234584156	-32.9203499441	21.2907494764	-45.7966700795	-2.7468005153
5	14.7894285754	-54.3864478992	-24.943928778	-32.9178420802	18.3370103663	-44.0083217496	-2.0283032963
6	17.7473142905	-53.0093522818	-24.639060186	-32.9180630542	15.3787592916	-42.2193116079	-1.4197313127
7	20.7052000056	-51.5955147622	-24.318512811	-32.8663919595	12.5062644644	-40.4378582051	-0.9356773392
8	23.6630857207	-50.1418274281	-23.980581387	-32.7257142378	9.7804300831	-38.6630085141	-0.5717485819
9	26.6209714358	-48.6447178229	-23.623265497	-32.4730522338	7.237737683	-36.8882784231	-0.313831838
10	29.5788571509	-47.1000455023	-23.24419704	-32.0955246379	4.8964653264	-35.1044235298	-0.1444628437
11	32.536742866	-45.5029669424	-22.840543872	-31.5867279366	2.7624823406	-33.3011491814	-0.0464076929
12	35.4946285811	-43.8477560978	-22.408879539	-30.943897237	0.8339396328	-31.4679793817	-0.0042824109
13	38.4525142962	-42.1275613946	-21.945003599	-30.1658171683	-0.8952220892	-29.5945754337	-0.0050119524
14	41.4104000112	-40.3340692628	-21.44368813	-29.2513035477	-2.4327518767	-27.6707352457	-0.0376862702
15	44.3682857263	-38.4570261142	-20.898310489	-28.198043103	-3.7862779233	-25.6862231687	-0.0931380471
16	47.3261714414	-36.4835383672	-20.30030463	-27.001582082	-4.9619244104	-23.6305171382	-0.1634028225
17	50.2840571565	-34.3970098415	-19.638310641	-25.6542479077	-5.963079461	-21.4925216589	-0.2411210108
18	53.2419428716	-32.1754564891	-18.896796572	-24.1437339982	-6.7890053039	-19.260280123	-0.3188825432
19	56.1998285867	-29.788684337	-18.053698722	-22.4509179718	-7.432848561	-16.9207297384	-0.388484302
20	59.1577143018	-27.1932239496	-17.076087573	-20.5460719139	-7.8782324854	-14.4595918427	-0.4400700584
21	62.1156000169	-24.3223589115	-15.911431684	-18.3815162123	-8.0925646581	-11.8616291567	-0.461192009
22	65.073485732	-21.0637806973	-14.467537481	-15.8753476661	-8.0118999065	-9.1118845636	-0.4361273588
23	68.0313714471	-17.1985049207	-12.556313675	-12.8675126652	-7.4991979566	-6.1996926275	-0.3468922018
24	70.9892571621	-12.1611794557	-9.6671809879	-8.9500335435	-6.1798110205	-3.131830261	-0.1821168693
25	73.9471428772	0	0	0	0	0	0
26	76.9050285923	12.1611794557	9.6671809879	9.1725542348	6.4164978513	3.1487150203	0.1991343122
27	79.8629143074	17.1985049207	12.556313675	13.4474150979	8.1545198513	6.2659031704	0.4151294498
28	82.8208000225	21.0637806973	14.467537481	16.8829799619	9.2165739104	9.2449656454	0.5778941111
29	85.7786857376	24.3223589115	15.911431684	19.8702409066	9.9670961831	12.0675299881	0.6894585462
30	88.7365714527	27.1932239496	17.076087573	22.5625959742	10.5410018938	14.737280988	0.7616372805
31	91.6944571678	29.788684337	18.053698722	25.0397820258	11.0038077447	17.265103259	0.805656862
32	94.6523428829	32.1754564891	18.896796572	27.3498345059	11.3920775215	19.6637431011	0.8301905479
33	97.6102285979	34.3970098415	19.638310641	29.524506517	11.7280491504	21.9457332129	0.8414798038
34	100.568114313	36.4835383672	20.30030463	31.5861816095	12.0260659314	24.1226181757	0.8438847313
35	103.5260000281	38.4570261142	20.898310489	33.5514021826	12.2957837771	26.2047279386	0.8404121836
36	106.4838857432	40.3340692628	21.44368813	35.4328447876	12.5439188328	28.2011825284	0.8331246762
37	109.4417714583	42.1275613946	21.945003599	37.2405056943	12.7752645922	30.1199884017	0.8234338245
38	112.3996571734	43.8477560978	22.408879539	38.9824523601	12.9933147781	31.9681639511	0.8123043031
39	115.3575428885	45.5029669424	22.840543872	40.6653211821	13.2006605671	33.7518666184	0.8003937694
40	118.3154286036	47.1000455023	23.24419704	42.2946593929	13.3992524024	35.47651024	0.7881484892
41	121.2733143187	48.6447178229	23.623265497	43.8751671821	13.5905773429	37.1468687679	0.7758687471
42	124.2312000337	50.1418274281	23.980581387	45.4108736855	13.7757819945	38.7671659178	0.7637537421
43	127.1890857488	51.5955147622	24.318512811	46.9052678124	13.9557594117	40.3411517537	0.7519325435
44	130.1469714639	53.0093522818	24.639060186	48.361397428	14.1312115773	41.8721677383	0.740485542
45	133.104857179	54.3864478992	24.943928778	49.7819458536	14.3026949908	43.363201862	0.7294593857
46	136.0627428941	55.7295253958	25.234584156	51.1692917808	14.4706543627	44.8169353615	0.7188774279
47	139.0206286092	57.0409877772	25.512295184	52.5255568425	14.6354478053	46.2357823625	0.7087470597
48	141.9785143243	58.3229677945	25.778167776	53.8526438464	14.7973658562	47.6219235902	0.699064873
49	144.9364000394	59.5773686739	26.033171694	55.1522678486	14.9566459768	48.9773351132	0.6898202996
50	147.8942857545	60.8058972786	26.27816205	56.4259816589	15.1134836898	50.3038129271	0.6809981775

vak	**x4**	**f(x4)**	**x5**	**y bij laatste x**	**x_boven**	**y_boven**	**x_onder**	**y_onder**	**z_boven,1**	**z_boven,2**
0	-50.04354364	-0.097400458	-50.00001516	-3.03192E-005	-50.298157581	0.1490408461	-49.403730335	-0.2981726409	0.5773502692	-0.5773502692
1	-48.702058672	-0.085683663	-48.662929326	2.6383861886	-48.95942461	2.7907071071	-48.069938776	2.3337443606		
2	-47.327638355	-0.067470189	-47.296124843	5.2615314959	-47.590821567	5.4173036258	-46.706731413	4.9499872456		
3	-45.920524406	-0.047673078	-45.897729479	7.8679685729	-46.190455466	8.0274132721	-45.312277523	7.5490791839		
4	-44.480547481	-0.030339852	-44.465682201	10.456062128	-44.756240736	10.6194232413	-43.884565149	10.1293399099		
5	-43.006464083	-0.017421865	-42.997708481	13.023941308	-43.285873669	13.1914881372	-42.421378122	12.6888476606		
6	-41.495932931	-0.008991693	-41.49129277	15.569452486	-41.776803811	15.7414831833	-40.920270704	15.2253911014		
7	-39.945829175	-0.004113709	-39.943646788	18.090101625	-40.226200863	18.2669470669	-39.378538656	17.7364107516		
8	-38.352556294	-0.001617411	-38.351673065	20.582983462	-38.630916444	20.7650116215	-37.793186324	20.2189271533		
9	-36.712212519	-0.000512967	-36.711923791	23.044693031	-36.987440652	23.2323138587	-36.160890086	22.6694513873		
10	-35.020621848	-0.000114377	-35.020555394	25.471213999	-35.291853676	25.6648847438	-34.477958845	25.0838725199		
11	-33.273287352	-1.2415E-005	-33.273279894	27.857776902	-33.539773313	28.0580077019	-32.740293073	27.4573153128		
12	-31.465315526	-1.1112E-007	-31.465315457	30.198678464	-31.726300547	30.40603781	-30.943345293	29.7839597836		
13	-29.591341137	-1.5982E-007	-29.591341033	32.487050717	-29.845967804	32.7021700402	-29.082087508	32.0568120829		
14	-27.645470718	-9.4711E-006	-27.645464365	34.714566001	-27.892698851	34.9381419934	-27.150995409	34.2674140282		
15	-25.621262213	-6.0456E-005	-25.621219992	36.871061722	-25.859796814	37.1038539376	-25.144066362	36.4054773062		
16	-23.511767161	-0.000193562	-23.51162616	38.944068706	-23.739989444	39.1868882401	-23.054899605	38.4584296532		
17	-21.309680242	-0.000435166	-21.309349062	40.918232851	-21.525581295	41.1719152053	-20.876884608	40.4108681582		
18	-19.007670345	-0.000776738	-19.007052027	42.774639465	-19.208793896	43.039990805	-18.603568301	42.2439368002		
19	-16.599008187	-0.001155249	-16.598045761	44.490097538	-16.782417788	44.7677989452	-16.229301719	43.934694741		
20	-14.07865057	-0.0014435	-14.077392798	46.03654024	-14.240944635	46.3269914618	-13.750289133	45.4556378148		
21	-11.444958462	-0.001474146	-11.443618097	47.380872097	-11.582355556	47.6839612471	-11.166143187	46.7746938148		
22	-8.7021254686	-0.001134652	-8.7010538795	48.485833228	-8.8106214341	48.8006443878	-8.4819187768	47.8562109264		
23	-5.8629989455	-0.000536392	-5.862476722	49.312627334	-5.9385786647	49.6371571626	-5.7102728412	48.6635676953		
24	-2.9511258035	-0.000079641	-2.9510467117	49.825826466	-2.9901227036	50.156861483	-2.8728947302	49.1637564522		
25	0	0	0	50	0	50.33333334	0	49.33333334		
26	2.9511416008	9.55479E-005	2.9510467117	49.825826466	2.9901227036	50.156861483	2.8728947302	49.1637564522		
27	5.8632287913	0.0007724745	5.8624767233	49.312627333	5.9385786661	49.6371571623	5.7102728424	48.663567695		
28	8.7029452959	0.0020027306	8.7010538945	48.485833222	8.8106214494	48.8006443825	8.4819187915	47.8562109213		
29	11.446623008	0.0033048504	11.4436181519	47.380872072	11.582355612	47.6839612218	11.16614324	46.7746937903		
30	14.0811601674	0.0043237376	14.0773929056	46.03654018	14.240944744	46.3269914005	13.750289239	45.4556377551		
31	16.6021703833	0.0049511064	16.5980459093	44.49009744	16.782417937	44.767798846	16.229301865	43.9346946441		
32	19.0112139709	0.0052284322	19.0070521903	42.774639341	19.208794061	43.0399906801	18.603568462	42.2439366778		
33	21.3133426377	0.0052476839	21.3093492183	40.918232718	21.525581453	41.1719150712	20.876884763	40.4108680264		
34	23.5153404292	0.0050989956	23.5116262975	38.944068577	23.739989582	39.1868881101	23.054899741	38.4584295252		
35	25.6246089054	0.004852723	25.6212201067	36.871061605	25.85979693	37.1038538195	25.144066475	36.4054771896		
36	27.6485213746	0.004557887	27.6454644583	34.714565898	27.892698944	34.9381418902	27.150995501	34.2674139262		
37	29.5940812937	0.0042462237	29.5913411075	32.487050629	29.845967878	32.7021699523	29.082087581	32.0568119959		
38	31.4677645579	0.0039370611	31.4653155155	30.19867839	31.726300605	30.4060377362	30.943345351	29.7839597106		
39	33.2754672089	0.0036413988	33.2732799403	27.85777684	33.539773359	28.0580076405	32.740293119	27.457315252		
40	35.0225103993	0.0033648895	35.0205554296	25.471213948	35.291853712	25.6648846931	34.477958881	25.0838724696		
41	36.7136741947	0.0031098768	36.7119238188	23.04469299	36.98744068	23.2323138179	36.160890113	22.6694513468		
42	38.3532439736	0.0028767308	38.3516730808	20.582983438	38.63091646	20.7650115978	37.79318634	20.2189271297		
43	39.9450604487	0.0026647019	39.9436467635	18.090101665	40.226200838	18.2669471067	39.378538631	17.7364107911		
44	41.4925685777	0.0024724517	41.4912925938	15.569452778	41.776803635	15.7414834759	40.920270529	15.2253913923		
45	42.9988630608	0.0022983783	42.997707826	13.023942434	43.285873013	13.191489265	42.421377469	12.6888487827		
46	44.4667294784	0.0021408087	44.4656803226	10.456065469	44.756238854	10.619426588	43.884563277	10.1293432409		
47	45.8986808695	0.0019981087	45.8977251213	7.8679765738	46.190451102	8.0274212847	45.312273178	7.5490871615		
48	47.296989924	0.0018687416	47.2961166429	5.26154701	47.590813356	5.4173191609	46.706723235	4.9500027174		
49	48.6637171498	0.0017512961	48.6629168829	2.6384104089	48.959412151	2.7907313583	48.069926365	2.3337685193		
50	50.0007354362	0.0016444951	50.0000000043	-8.65377E-009	50.298142407	0.1490711928	49.403715216	-0.2981424027		

COÖRDINATEN ZONDER OPLEGGINGEN

	LINKERBOVENRAND				**RECHTERBOVENRAND**				**ONDERRAND**				**HARTLIJN**		
	x	**y**	**z**		**x**	**y**	**z**		**x**	**y**	**z**		**x**	**y**	**z**
1	-50.30	0.15	0.58	52	-50.30	0.15	-0.58	103	-49.40	-0.30	0.00	154	-50.00	0.00	0.00
2	-48.96	2.79	0.58	53	-48.96	2.79	-0.58	104	-48.07	2.33	0.00	155	-48.66	2.64	0.00
3	-47.59	5.42	0.58	54	-47.59	5.42	-0.58	105	-46.71	4.95	0.00	156	-47.30	5.26	0.00
4	-46.19	8.03	0.58	55	-46.19	8.03	-0.58	106	-45.31	7.55	0.00	157	-45.90	7.87	0.00
5	-44.76	10.62	0.58	56	-44.76	10.62	-0.58	107	-43.88	10.13	0.00	158	-44.47	10.46	0.00
6	-43.29	13.19	0.58	57	-43.29	13.19	-0.58	108	-42.42	12.69	0.00	159	-43.00	13.02	0.00
7	-41.78	15.74	0.58	58	-41.78	15.74	-0.58	109	-40.92	15.23	0.00	160	-41.49	15.57	0.00
8	-40.23	18.27	0.58	59	-40.23	18.27	-0.58	110	-39.38	17.74	0.00	161	-39.94	18.09	0.00
9	-38.63	20.77	0.58	60	-38.63	20.77	-0.58	111	-37.79	20.22	0.00	162	-38.35	20.58	0.00
10	-36.99	23.23	0.58	61	-36.99	23.23	-0.58	112	-36.16	22.67	0.00	163	-36.71	23.04	0.00
11	-35.29	25.66	0.58	62	-35.29	25.66	-0.58	113	-34.48	25.08	0.00	164	-35.02	25.47	0.00
12	-33.54	28.06	0.58	63	-33.54	28.06	-0.58	114	-32.74	27.46	0.00	165	-33.27	27.86	0.00
13	-31.73	30.41	0.58	64	-31.73	30.41	-0.58	115	-30.94	29.78	0.00	166	-31.47	30.20	0.00
14	-29.85	32.70	0.58	65	-29.85	32.70	-0.58	116	-29.08	32.06	0.00	167	-29.59	32.49	0.00
15	-27.89	34.94	0.58	66	-27.89	34.94	-0.58	117	-27.15	34.27	0.00	168	-27.65	34.71	0.00
16	-25.86	37.10	0.58	67	-25.86	37.10	-0.58	118	-25.14	36.41	0.00	169	-25.62	36.87	0.00
17	-23.74	39.19	0.58	68	-23.74	39.19	-0.58	119	-23.05	38.46	0.00	170	-23.51	38.94	0.00
18	-21.53	41.17	0.58	69	-21.53	41.17	-0.58	120	-20.88	40.41	0.00	171	-21.31	40.92	0.00
19	-19.21	43.04	0.58	70	-19.21	43.04	-0.58	121	-18.60	42.24	0.00	172	-19.01	42.77	0.00
20	-16.78	44.77	0.58	71	-16.78	44.77	-0.58	122	-16.23	43.93	0.00	173	-16.60	44.49	0.00
21	-14.24	46.33	0.58	72	-14.24	46.33	-0.58	123	-13.75	45.46	0.00	174	-14.08	46.04	0.00
22	-11.58	47.68	0.58	73	-11.58	47.68	-0.58	124	-11.17	46.77	0.00	175	-11.44	47.38	0.00
23	-8.81	48.80	0.58	74	-8.81	48.80	-0.58	125	-8.48	47.86	0.00	176	-8.70	48.49	0.00
24	-5.94	49.64	0.58	75	-5.94	49.64	-0.58	126	-5.71	48.66	0.00	177	-5.86	49.31	0.00
25	-2.99	50.16	0.58	76	-2.99	50.16	-0.58	127	-2.87	49.16	0.00	178	-2.95	49.83	0.00
26	0.00	50.33	0.58	77	0.00	50.33	-0.58	128	0.00	49.33	0.00	179	0.00	50.00	0.00
27	2.99	50.16	0.58	78	2.99	50.16	-0.58	129	2.87	49.16	0.00	180	2.95	49.83	0.00
28	5.94	49.64	0.58	79	5.94	49.64	-0.58	130	5.71	48.66	0.00	181	5.86	49.31	0.00
29	8.81	48.80	0.58	80	8.81	48.80	-0.58	131	8.48	47.86	0.00	182	8.70	48.49	0.00
30	11.58	47.68	0.58	81	11.58	47.68	-0.58	132	11.17	46.77	0.00	183	11.44	47.38	0.00
31	14.24	46.33	0.58	82	14.24	46.33	-0.58	133	13.75	45.46	0.00	184	14.08	46.04	0.00
32	16.78	44.77	0.58	83	16.78	44.77	-0.58	134	16.23	43.93	0.00	185	16.60	44.49	0.00
33	19.21	43.04	0.58	84	19.21	43.04	-0.58	135	18.60	42.24	0.00	186	19.01	42.77	0.00
34	21.53	41.17	0.58	85	21.53	41.17	-0.58	136	20.88	40.41	0.00	187	21.31	40.92	0.00
35	23.74	39.19	0.58	86	23.74	39.19	-0.58	137	23.05	38.46	0.00	188	23.51	38.94	0.00
36	25.86	37.10	0.58	87	25.86	37.10	-0.58	138	25.14	36.41	0.00	189	25.62	36.87	0.00
37	27.89	34.94	0.58	88	27.89	34.94	-0.58	139	27.15	34.27	0.00	190	27.65	34.71	0.00
38	29.85	32.70	0.58	89	29.85	32.70	-0.58	140	29.08	32.06	0.00	191	29.59	32.49	0.00
39	31.73	30.41	0.58	90	31.73	30.41	-0.58	141	30.94	29.78	0.00	192	31.47	30.20	0.00
40	33.54	28.06	0.58	91	33.54	28.06	-0.58	142	32.74	27.46	0.00	193	33.27	27.86	0.00
41	35.29	25.66	0.58	92	35.29	25.66	-0.58	143	34.48	25.08	0.00	194	35.02	25.47	0.00
42	36.99	23.23	0.58	93	36.99	23.23	-0.58	144	36.16	22.67	0.00	195	36.71	23.04	0.00
43	38.63	20.77	0.58	94	38.63	20.77	-0.58	145	37.79	20.22	0.00	196	38.35	20.58	0.00
44	40.23	18.27	0.58	95	40.23	18.27	-0.58	146	39.38	17.74	0.00	197	39.94	18.09	0.00
45	41.78	15.74	0.58	96	41.78	15.74	-0.58	147	40.92	15.23	0.00	198	41.49	15.57	0.00
46	43.29	13.19	0.58	97	43.29	13.19	-0.58	148	42.42	12.69	0.00	199	43.00	13.02	0.00
47	44.76	10.62	0.58	98	44.76	10.62	-0.58	149	43.88	10.13	0.00	200	44.47	10.46	0.00
48	46.19	8.03	0.58	99	46.19	8.03	-0.58	150	45.31	7.55	0.00	201	45.90	7.87	0.00
49	47.59	5.42	0.58	100	47.59	5.42	-0.58	151	46.71	4.95	0.00	202	47.30	5.26	0.00
50	48.96	2.79	0.58	101	48.96	2.79	-0.58	152	48.07	2.33	0.00	203	48.66	2.64	0.00
51	50.30	0.15	0.58	102	50.30	0.15	-0.58	153	49.40	-0.30	0.00	204	50.00	0.00	0.00

OPLEGGING 1		
x	**y**	**z**
-50.00	0.00	0.58
-50.00	0.00	-0.58
50.00	0.00	0.58
50.00	0.00	-0.58
KNOOPPUNTEN AFWEZIG		
1		
51		
52		
102		
103		
153		

STAVEN ZONDER OPLEGGINGEN

Om en om stijgend/dalend, te beginnen met stijgend vanaf links.

	LINKERBOVENRAND		**RECHTERBOVENRAND**		**ONDERRAND**		**BOVENDWARSSTAVEN**		**LINKERVERTICALEN**		**RECHTERVERTICALEN**		**LINKERDIAGONALEN**		**RECHTERDIAGONALEN**		**KRUISVERBAND BOVEN NAAR RECHTS**		**KRUISVERBAND BOVEN NAAR LINKS**	
	KNOOP BEGIN	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**
1	1	2	52	53	103	104	1	52	1	103	52	103	1	104	52	104	1	53	52	2
2	2	3	53	54	104	105	2	53	2	104	53	104	104	3	104	54	2	54	53	3
3	3	4	54	55	105	106	3	54	3	105	54	105	3	106	54	106	3	55	54	4
4	4	5	55	56	106	107	4	55	4	106	55	106	106	5	106	56	4	56	55	5
5	5	6	56	57	107	108	5	56	5	107	56	107	5	108	56	108	5	57	56	6
6	6	7	57	58	108	109	6	57	6	108	57	108	108	7	108	58	6	58	57	7
7	7	8	58	59	109	110	7	58	7	109	58	109	7	110	58	110	7	59	58	8
8	8	9	59	60	110	111	8	59	8	110	59	110	110	9	110	60	8	60	59	9
9	9	10	60	61	111	112	9	60	9	111	60	111	9	112	60	112	9	61	60	10
10	10	11	61	62	112	113	10	61	10	112	61	112	112	11	112	62	10	62	61	11
11	11	12	62	63	113	114	11	62	11	113	62	113	11	114	62	114	11	63	62	12
12	12	13	63	64	114	115	12	63	12	114	63	114	114	13	114	64	12	64	63	13
13	13	14	64	65	115	116	13	64	13	115	64	115	13	116	64	116	13	65	64	14
14	14	15	65	66	116	117	14	65	14	116	65	116	116	15	116	66	14	66	65	15
15	15	16	66	67	117	118	15	66	15	117	66	117	15	118	66	118	15	67	66	16
16	16	17	67	68	118	119	16	67	16	118	67	118	118	17	118	68	16	68	67	17
17	17	18	68	69	119	120	17	68	17	119	68	119	17	120	68	120	17	69	68	18
18	18	19	69	70	120	121	18	69	18	120	69	120	120	19	120	70	18	70	69	19
19	19	20	70	71	121	122	19	70	19	121	70	121	19	122	70	122	19	71	70	20
20	20	21	71	72	122	123	20	71	20	122	71	122	122	21	122	72	20	72	71	21
21	21	22	72	73	123	124	21	72	21	123	72	123	21	124	72	124	21	73	72	22
22	22	23	73	74	124	125	22	73	22	124	73	124	124	23	124	74	22	74	73	23
23	23	24	74	75	125	126	23	74	23	125	74	125	23	126	74	126	23	75	74	24
24	24	25	75	76	126	127	24	75	24	126	75	126	126	25	126	76	24	76	75	25
25	25	26	76	77	127	128	25	76	25	127	76	127	25	128	76	128	25	77	76	26
26	26	27	77	78	128	129	26	77	26	128	77	128	128	27	128	78	26	78	77	27
27	27	28	78	79	129	130	27	78	27	129	78	129	27	130	78	130	27	79	78	28
28	28	29	79	80	130	131	28	79	28	130	79	130	130	29	130	80	28	80	79	29
29	29	30	80	81	131	132	29	80	29	131	80	131	29	132	80	132	29	81	80	30
30	30	31	81	82	132	133	30	81	30	132	81	132	132	31	132	82	30	82	81	31
31	31	32	82	83	133	134	31	82	31	133	82	133	31	134	82	134	31	83	82	32
32	32	33	83	84	134	135	32	83	32	134	83	134	134	33	134	84	32	84	83	33
33	33	34	84	85	135	136	33	84	33	135	84	135	33	136	84	136	33	85	84	34
34	34	35	85	86	136	137	34	85	34	136	85	136	136	35	136	86	34	86	85	35
35	35	36	86	87	137	138	35	86	35	137	86	137	35	138	86	138	35	87	86	36
36	36	37	87	88	138	139	36	87	36	138	87	138	138	37	138	88	36	88	87	37
37	37	38	88	89	139	140	37	88	37	139	88	139	37	140	88	140	37	89	88	38
38	38	39	89	90	140	141	38	89	38	140	89	140	140	39	140	90	38	90	89	39
39	39	40	90	91	141	142	39	90	39	141	90	141	39	142	90	142	39	91	90	40
40	40	41	91	92	142	143	40	91	40	142	91	142	142	41	142	92	40	92	91	41
41	41	42	92	93	143	144	41	92	41	143	92	143	41	144	92	144	41	93	92	42
42	42	43	93	94	144	145	42	93	42	144	93	144	144	43	144	94	42	94	93	43
43	43	44	94	95	145	146	43	94	43	145	94	145	43	146	94	146	43	95	94	44
44	44	45	95	96	146	147	44	95	44	146	95	146	146	45	146	96	44	96	95	45
45	45	46	96	97	147	148	45	96	45	147	96	147	45	148	96	148	45	97	96	46
46	46	47	97	98	148	149	46	97	46	148	97	148	148	47	148	98	46	98	97	47
47	47	48	98	99	149	150	47	98	47	149	98	149	47	150	98	150	47	99	98	48
48	48	49	99	100	150	151	48	99	48	150	99	150	150	49	150	100	48	100	99	49
49	49	50	100	101	151	152	49	100	49	151	100	151	49	152	100	152	49	101	100	50
50	50	51	101	102	152	153	50	101	50	152	101	152	152	51	152	102	50	102	101	51
							51	102	51	153	102	153								

ASSEN HIER	LIJST	VERMENIGVULDIGINGSFACTOR	KENGETAL
x	x	1	1
y	z	-1	2
z	y	1	3
KENGETAL + 1	2	4	3
LOKALE COÖR.	x	z	y

KNOOPPUNTEN	**x**	**y**	**z**
1	-50.30	0.58	-0.15
2	-48.96	0.58	-2.79
3	-47.59	0.58	-5.42
4	-46.19	0.58	-8.03
5	-44.76	0.58	-10.62
6	-43.29	0.58	-13.19
7	-41.78	0.58	-15.74
8	-40.23	0.58	-18.27
9	-38.63	0.58	-20.77
10	-36.99	0.58	-23.23
11	-35.29	0.58	-25.66
12	-33.54	0.58	-28.06
13	-31.73	0.58	-30.41
14	-29.85	0.58	-32.70
15	-27.89	0.58	-34.94
16	-25.86	0.58	-37.10
17	-23.74	0.58	-39.19
18	-21.53	0.58	-41.17
19	-19.21	0.58	-43.04
20	-16.78	0.58	-44.77
21	-14.24	0.58	-46.33
22	-11.58	0.58	-47.68
23	-8.81	0.58	-48.80
24	-5.94	0.58	-49.64
25	-2.99	0.58	-50.16
26	0.00	0.58	-50.33
27	2.99	0.58	-50.16
28	5.94	0.58	-49.64
29	8.81	0.58	-48.80
30	11.58	0.58	-47.68
31	14.24	0.58	-46.33
32	16.78	0.58	-44.77
33	19.21	0.58	-43.04
34	21.53	0.58	-41.17
35	23.74	0.58	-39.19
36	25.86	0.58	-37.10
37	27.89	0.58	-34.94
38	29.85	0.58	-32.70
39	31.73	0.58	-30.41
40	33.54	0.58	-28.06
41	35.29	0.58	-25.66
42	36.99	0.58	-23.23
43	38.63	0.58	-20.77
44	40.23	0.58	-18.27
45	41.78	0.58	-15.74
46	43.29	0.58	-13.19
47	44.76	0.58	-10.62
48	46.19	0.58	-8.03
49	47.59	0.58	-5.42
50	48.96	0.58	-2.79
51	50.30	0.58	-0.15
52	-50.30	-0.58	-0.15
53	-48.96	-0.58	-2.79
54	-47.59	-0.58	-5.42
55	-46.19	-0.58	-8.03
56	-44.76	-0.58	-10.62
57	-43.29	-0.58	-13.19
58	-41.78	-0.58	-15.74
59	-40.23	-0.58	-18.27
60	-38.63	-0.58	-20.77
61	-36.99	-0.58	-23.23
62	-35.29	-0.58	-25.66
63	-33.54	-0.58	-28.06
64	-31.73	-0.58	-30.41
65	-29.85	-0.58	-32.70
66	-27.89	-0.58	-34.94
67	-25.86	-0.58	-37.10
68	-23.74	-0.58	-39.19
69	-21.53	-0.58	-41.17
70	-19.21	-0.58	-43.04
71	-16.78	-0.58	-44.77
72	-14.24	-0.58	-46.33
73	-11.58	-0.58	-47.68
74	-8.81	-0.58	-48.80
75	-5.94	-0.58	-49.64
76	-2.99	-0.58	-50.16
77	0.00	-0.58	-50.33
78	2.99	-0.58	-50.16
79	5.94	-0.58	-49.64
80	8.81	-0.58	-48.80
81	11.58	-0.58	-47.68
82	14.24	-0.58	-46.33
83	16.78	-0.58	-44.77
84	19.21	-0.58	-43.04
85	21.53	-0.58	-41.17
86	23.74	-0.58	-39.19
87	25.86	-0.58	-37.10
88	27.89	-0.58	-34.94
89	29.85	-0.58	-32.70
90	31.73	-0.58	-30.41
91	33.54	-0.58	-28.06
92	35.29	-0.58	-25.66
93	36.99	-0.58	-23.23
94	38.63	-0.58	-20.77
95	40.23	-0.58	-18.27
96	41.78	-0.58	-15.74
97	43.29	-0.58	-13.19
98	44.76	-0.58	-10.62
99	46.19	-0.58	-8.03
100	47.59	-0.58	-5.42
101	48.96	-0.58	-2.79
102	50.30	-0.58	-0.15
103	-49.40	0.00	0.30
104	-48.07	0.00	-2.33
105	-46.71	0.00	-4.95
106	-45.31	0.00	-7.55
107	-43.88	0.00	-10.13
108	-42.42	0.00	-12.69
109	-40.92	0.00	-15.23
110	-39.38	0.00	-17.74
111	-37.79	0.00	-20.22
112	-36.16	0.00	-22.67
113	-34.48	0.00	-25.08
114	-32.74	0.00	-27.46
115	-30.94	0.00	-29.78
116	-29.08	0.00	-32.06
117	-27.15	0.00	-34.27
118	-25.14	0.00	-36.41
119	-23.05	0.00	-38.46
120	-20.88	0.00	-40.41
121	-18.60	0.00	-42.24
122	-16.23	0.00	-43.93
123	-13.75	0.00	-45.46
124	-11.17	0.00	-46.77
125	-8.48	0.00	-47.86
126	-5.71	0.00	-48.66
127	-2.87	0.00	-49.16
128	0.00	0.00	-49.33
129	2.87	0.00	-49.16
130	5.71	0.00	-48.66
131	8.48	0.00	-47.86
132	11.17	0.00	-46.77
133	13.75	0.00	-45.46
134	16.23	0.00	-43.93
135	18.60	0.00	-42.24
136	20.88	0.00	-40.41
137	23.05	0.00	-38.46
138	25.14	0.00	-36.41
139	27.15	0.00	-34.27
140	29.08	0.00	-32.06
141	30.94	0.00	-29.78
142	32.74	0.00	-27.46
143	34.48	0.00	-25.08
144	36.16	0.00	-22.67
145	37.79	0.00	-20.22
146	39.38	0.00	-17.74
147	40.92	0.00	-15.23
148	42.42	0.00	-12.69
149	43.88	0.00	-10.13
150	45.31	0.00	-7.55
151	46.71	0.00	-4.95
152	48.07	0.00	-2.33
153	49.40	0.00	0.30

STAVEN	**KNOOP BEGIN**	**KNOOP EIND**	HULPGETALLEN VOOR AANEENVOEGEN KOLOMMEN			
1	1	2	1	1	50	50
2	2	3	2	1	50	50
3	3	4	3	1	50	50
4	4	5	4	1	51	51
5	5	6	5	1	51	51
6	6	7	6	1	51	51
7	7	8	7	1	50	50
8	8	9	8	1	50	50
9	9	10	9	1	50	50
10	10	11	10	1	50	50
11	11	12	11	1		
12	12	13	12	1		
13	13	14	13	1		
14	14	15	14	1		
15	15	16	15	1		
16	16	17	16	1		
17	17	18	17	1		
18	18	19	18	1		
19	19	20	19	1		
20	20	21	20	1		
21	21	22	21	1		
22	22	23	22	1		
23	23	24	23	1		
24	24	25	24	1		
25	25	26	25	1		
26	26	27	26	1		
27	27	28	27	1		
28	28	29	28	1		
29	29	30	29	1		
30	30	31	30	1		
31	31	32	31	1		
32	32	33	32	1		
33	33	34	33	1		
34	34	35	34	1		
35	35	36	35	1		
36	36	37	36	1		
37	37	38	37	1		
38	38	39	38	1		
39	39	40	39	1		
40	40	41	40	1		
41	41	42	41	1		
42	42	43	42	1		
43	43	44	43	1		
44	44	45	44	1		
45	45	46	45	1		
46	46	47	46	1		
47	47	48	47	1		
48	48	49	48	1		
49	49	50	49	1		
50	50	51	50	1		
51	52	53	1	3		
52	53	54	2	3		
53	54	55	3	3		
54	55	56	4	3		
55	56	57	5	3		
56	57	58	6	3		
57	58	59	7	3		
58	59	60	8	3		
59	60	61	9	3		
60	61	62	10	3		
61	62	63	11	3		
62	63	64	12	3		
63	64	65	13	3		
64	65	66	14	3		
65	66	67	15	3		
66	67	68	16	3		
67	68	69	17	3		
68	69	70	18	3		
69	70	71	19	3		
70	71	72	20	3		
71	72	73	21	3		
72	73	74	22	3		
73	74	75	23	3		
74	75	76	24	3		
75	76	77	25	3		
76	77	78	26	3		
77	78	79	27	3		
78	79	80	28	3		
79	80	81	29	3		
80	81	82	30	3		
81	82	83	31	3		
82	83	84	32	3		
83	84	85	33	3		
84	85	86	34	3		
85	86	87	35	3		
86	87	88	36	3		
87	88	89	37	3		
88	89	90	38	3		
89	90	91	39	3		
90	91	92	40	3		
91	92	93	41	3		
92	93	94	42	3		
93	94	95	43	3		
94	95	96	44	3		
95	96	97	45	3		
96	97	98	46	3		
97	98	99	47	3		
98	99	100	48	3		
99	100	101	49	3		
100	101	102	50	3		
101	103	104	1	5		
102	104	105	2	5		
103	105	106	3	5		
104	106	107	4	5		
105	107	108	5	5		
106	108	109	6	5		
107	109	110	7	5		
108	110	111	8	5		
109	111	112	9	5		
110	112	113	10	5		
111	113	114	11	5		
112	114	115	12	5		
113	115	116	13	5		
114	116	117	14	5		
115	117	118	15	5		
116	118	119	16	5		
117	119	120	17	5		
118	120	121	18	5		
119	121	122	19	5		
120	122	123	20	5		
121	123	124	21	5		
122	124	125	22	5		
123	125	126	23	5		
124	126	127	24	5		
125	127	128	25	5		
126	128	129	26	5		
127	129	130	27	5		
128	130	131	28	5		
129	131	132	29	5		
130	132	133	30	5		
131	133	134	31	5		
132	134	135	32	5		
133	135	136	33	5		
134	136	137	34	5		
135	137	138	35	5		
136	138	139	36	5		
137	139	140	37	5		
138	140	141	38	5		
139	141	142	39	5		
140	142	143	40	5		
141	143	144	41	5		
142	144	145	42	5		
143	145	146	43	5		
144	146	147	44	5		
145	147	148	45	5		
146	148	149	46	5		
147	149	150	47	5		
148	150	151	48	5		
149	151	152	49	5		
150	152	153	50	5		
151	1	52	1	7		
152	2	53	2	7		
153	3	54	3	7		
154	4	55	4	7		
155	5	56	5	7		
156	6	57	6	7		
157	7	58	7	7		
158	8	59	8	7		
159	9	60	9	7		
160	10	61	10	7		
161	11	62	11	7		
162	12	63	12	7		
163	13	64	13	7		
164	14	65	14	7		
165	15	66	15	7		
166	16	67	16	7		
167	17	68	17	7		
168	18	69	18	7		
169	19	70	19	7		
170	20	71	20	7		
171	21	72	21	7		
172	22	73	22	7		
173	23	74	23	7		
174	24	75	24	7		
175	25	76	25	7		
176	26	77	26	7		
177	27	78	27	7		
178	28	79	28	7		
179	29	80	29	7		
180	30	81	30	7		
181	31	82	31	7		
182	32	83	32	7		
183	33	84	33	7		
184	34	85	34	7		
185	35	86	35	7		

186	36	87	36	7
187	37	88	37	7
188	38	89	38	7
189	39	90	39	7
190	40	91	40	7
191	41	92	41	7
192	42	93	42	7
193	43	94	43	7
194	44	95	44	7
195	45	96	45	7
196	46	97	46	7
197	47	98	47	7
198	48	99	48	7
199	49	100	49	7
200	50	101	50	7
201	51	102	51	7
202	1	103	1	9
203	2	104	2	9
204	3	105	3	9
205	4	106	4	9
206	5	107	5	9
207	6	108	6	9
208	7	109	7	9
209	8	110	8	9
210	9	111	9	9
211	10	112	10	9
212	11	113	11	9
213	12	114	12	9
214	13	115	13	9
215	14	116	14	9
216	15	117	15	9
217	16	118	16	9
218	17	119	17	9
219	18	120	18	9
220	19	121	19	9
221	20	122	20	9
222	21	123	21	9
223	22	124	22	9
224	23	125	23	9
225	24	126	24	9
226	25	127	25	9
227	26	128	26	9
228	27	129	27	9
229	28	130	28	9
230	29	131	29	9
231	30	132	30	9
232	31	133	31	9
233	32	134	32	9
234	33	135	33	9
235	34	136	34	9
236	35	137	35	9
237	36	138	36	9
238	37	139	37	9
239	38	140	38	9
240	39	141	39	9
241	40	142	40	9
242	41	143	41	9
243	42	144	42	9
244	43	145	43	9
245	44	146	44	9
246	45	147	45	9
247	46	148	46	9
248	47	149	47	9
249	48	150	48	9
250	49	151	49	9
251	50	152	50	9
252	51	153	51	9
253	52	103	1	11
254	53	104	2	11
255	54	105	3	11
256	55	106	4	11
257	56	107	5	11
258	57	108	6	11
259	58	109	7	11
260	59	110	8	11
261	60	111	9	11
262	61	112	10	11
263	62	113	11	11
264	63	114	12	11
265	64	115	13	11
266	65	116	14	11
267	66	117	15	11
268	67	118	16	11
269	68	119	17	11
270	69	120	18	11
271	70	121	19	11
272	71	122	20	11
273	72	123	21	11
274	73	124	22	11
275	74	125	23	11
276	75	126	24	11
277	76	127	25	11
278	77	128	26	11
279	78	129	27	11
280	79	130	28	11
281	80	131	29	11
282	81	132	30	11
283	82	133	31	11
284	83	134	32	11
285	84	135	33	11
286	85	136	34	11
287	86	137	35	11
288	87	138	36	11
289	88	139	37	11
290	89	140	38	11
291	90	141	39	11
292	91	142	40	11
293	92	143	41	11
294	93	144	42	11
295	94	145	43	11
296	95	146	44	11
297	96	147	45	11
298	97	148	46	11
299	98	149	47	11
300	99	150	48	11
301	100	151	49	11
302	101	152	50	11
303	102	153	51	11
304	1	104	1	13
305	104	3	2	13
306	3	106	3	13
307	106	5	4	13
308	5	108	5	13
309	108	7	6	13
310	7	110	7	13
311	110	9	8	13
312	9	112	9	13
313	112	11	10	13
314	11	114	11	13
315	114	13	12	13
316	13	116	13	13
317	116	15	14	13
318	15	118	15	13
319	118	17	16	13
320	17	120	17	13
321	120	19	18	13
322	19	122	19	13
323	122	21	20	13
324	21	124	21	13
325	124	23	22	13
326	23	126	23	13
327	126	25	24	13
328	25	128	25	13
329	128	27	26	13
330	27	130	27	13
331	130	29	28	13
332	29	132	29	13
333	132	31	30	13
334	31	134	31	13
335	134	33	32	13
336	33	136	33	13
337	136	35	34	13
338	35	138	35	13
339	138	37	36	13
340	37	140	37	13
341	140	39	38	13
342	39	142	39	13
343	142	41	40	13
344	41	144	41	13
345	144	43	42	13
346	43	146	43	13
347	146	45	44	13
348	45	148	45	13
349	148	47	46	13
350	47	150	47	13
351	150	49	48	13
352	49	152	49	13
353	152	51	50	13
354	52	104	1	15
355	104	54	2	15
356	54	106	3	15
357	106	56	4	15
358	56	108	5	15
359	108	58	6	15
360	58	110	7	15
361	110	60	8	15
362	60	112	9	15
363	112	62	10	15
364	62	114	11	15
365	114	64	12	15
366	64	116	13	15
367	116	66	14	15
368	66	118	15	15
369	118	68	16	15
370	68	120	17	15
371	120	70	18	15
372	70	122	19	15
373	122	72	20	15
374	72	124	21	15
375	124	74	22	15
376	74	126	23	15
377	126	76	24	15
378	76	128	25	15
379	128	78	26	15

380	78	130	27	15
381	130	80	28	15
382	80	132	29	15
383	132	82	30	15
384	82	134	31	15
385	134	84	32	15
386	84	136	33	15
387	136	86	34	15
388	86	138	35	15
389	138	88	36	15
390	88	140	37	15
391	140	90	38	15
392	90	142	39	15
393	142	92	40	15
394	92	144	41	15
395	144	94	42	15
396	94	146	43	15
397	146	96	44	15
398	96	148	45	15
399	148	98	46	15
400	98	150	47	15
401	150	100	48	15
402	100	152	49	15
403	152	102	50	15
404	1	53	1	17
405	2	54	2	17
406	3	55	3	17
407	4	56	4	17
408	5	57	5	17
409	6	58	6	17
410	7	59	7	17
411	8	60	8	17
412	9	61	9	17
413	10	62	10	17
414	11	63	11	17
415	12	64	12	17
416	13	65	13	17
417	14	66	14	17
418	15	67	15	17
419	16	68	16	17
420	17	69	17	17
421	18	70	18	17
422	19	71	19	17
423	20	72	20	17
424	21	73	21	17
425	22	74	22	17
426	23	75	23	17
427	24	76	24	17
428	25	77	25	17
429	26	78	26	17
430	27	79	27	17
431	28	80	28	17
432	29	81	29	17
433	30	82	30	17
434	31	83	31	17
435	32	84	32	17
436	33	85	33	17
437	34	86	34	17
438	35	87	35	17
439	36	88	36	17
440	37	89	37	17
441	38	90	38	17
442	39	91	39	17
443	40	92	40	17
444	41	93	41	17
445	42	94	42	17
446	43	95	43	17
447	44	96	44	17
448	45	97	45	17
449	46	98	46	17
450	47	99	47	17
451	48	100	48	17
452	49	101	49	17
453	50	102	50	17
454	52	2	1	19
455	53	3	2	19
456	54	4	3	19
457	55	5	4	19
458	56	6	5	19
459	57	7	6	19
460	58	8	7	19
461	59	9	8	19
462	60	10	9	19
463	61	11	10	19
464	62	12	11	19
465	63	13	12	19
466	64	14	13	19
467	65	15	14	19
468	66	16	15	19
469	67	17	16	19
470	68	18	17	19
471	69	19	18	19
472	70	20	19	19
473	71	21	20	19
474	72	22	21	19
475	73	23	22	19
476	74	24	23	19
477	75	25	24	19
478	76	26	25	19
479	77	27	26	19
480	78	28	27	19
481	79	29	28	19
482	80	30	29	19
483	81	31	30	19
484	82	32	31	19
485	83	33	32	19
486	84	34	33	19
487	85	35	34	19
488	86	36	35	19
489	87	37	36	19
490	88	38	37	19
491	89	39	38	19
492	90	40	39	19
493	91	41	40	19
494	92	42	41	19
495	93	43	42	19
496	94	44	43	19
497	95	45	44	19
498	96	46	45	19
499	97	47	46	19
500	98	48	47	19
501	99	49	48	19
502	100	50	49	19
503	101	51	50	19

```
> restart;
> z:=(x-L/2)*(x+L/2)/(L/2)^2*Hoogte:
> DV1:=diff(M_a(x),x$2)=-q:
> #q_langs:=2/1.479:
  #q:=q_langs*sqrt(1+(diff(z,x))^2);
  q:=2:
  #q:=2*Dirac(x):
  #q:=2*(-abs(x)+5):
  #q:=2*x+10:
  #q:=2*x+10-20*Heaviside(x):
  L:=10:
  Hoogte:=5:
  h:=1:
  l:=1.4789:
  b:=2*h/sqrt(3):
  evalf(b):
> OPL0:=dsolve(DV1,M_a(x)): #Als geen oplossing, geen uitvoer
> z_afg:=diff(z,x);
```

$$z\_afg := \frac{2}{5}\,x \quad (1)$$

```
> M_a:=rhs(dsolve(DV1,M_a(x))):
  #M_a:=x -> rhs(OPL0):

> M:=M_a-H*z:
> V:=diff(M_a,x):
> x:=-L/2:
> VG1:=M_a=0:
> x:=L/2:
> VG2:=M_a=0:
> OPL1:=solve({VG1,VG2}):
> assign(OPL1):
> x:='x':
> V:
> V_links:=-eval(V,x=-L/2):
  evalf(V_links);
```

$$-10. \quad (2)$$

```
> V_rechts:=eval(V,x=L/2):
  evalf(V_rechts);
```

$$-10. \quad (3)$$

```
> H_zonder:=(int(M_a*z*sqrt(1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2))/int(z^2*
  sqrt(1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2):
> evalf(H_zonder);
```

$$-5.000000002 \quad (4)$$

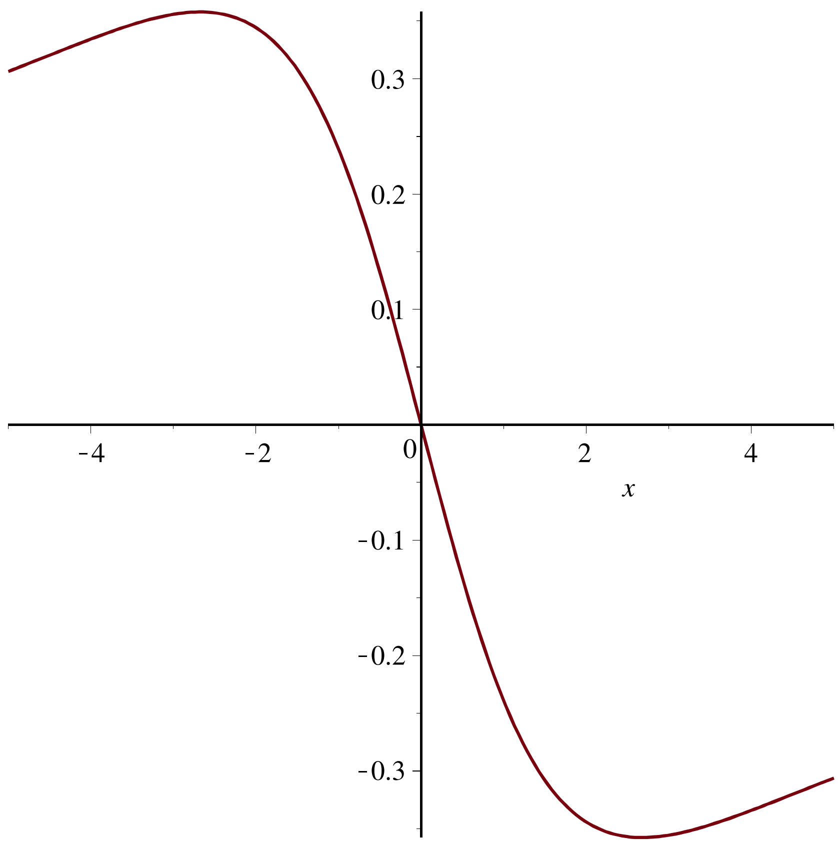
```
> #H:=(int(M_a*z*sqrt(1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2))/(int(z^2*sqrt
  (1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2)+6/27*L*h^2):
  H:=evalf(Int(M_a*z*sqrt(1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2))/(int(z^2*
  sqrt(1+(diff(z,x))^2),x=-L/2..L/2)+6/27*L*h^2): #ivm substitutie,
  Int voorkomt dat maple probeert symbolische oplossing zoekt
> #H:=-1000;
> evalf(H);
```

$$-4.933187593 \quad (5)$$

```
> theta:=arctan(diff(z,x)):
> N:=H*cos(theta)+V*sin(theta): #IN LIJNELEMENT
> Dw:=-H*sin(theta)+V*cos(theta): #IN LIJNELEMENT
> #alpha:=35/180*Pi;
  alpha:=arctan(h/l):
  evalf(alpha/Pi*180);
```

$$34.06570214 \quad (6)$$

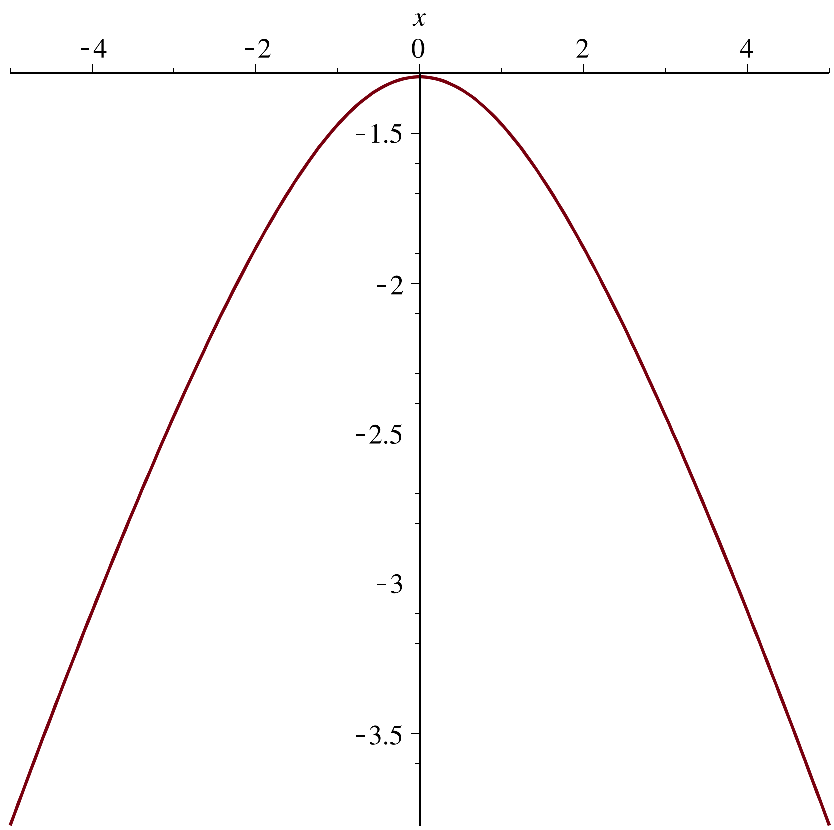
```
> #N_diagonaal:=Dw/sin(alpha)*sqrt(l^2+(b/2)^2+h^2)/sqrt(l^2+h^2)
  /2;
> #plot(N_diagonaal,x=-L/2..L/2);
> #evalf(eval(N_diagonaal, [x = -3.91]));
> lambda:=1/3*h*sin(theta): #altijd goed
  mu:=1/3*h*tan(theta): #NIET GEBRUIKT
> plus_V:=-int(q,x=x..x+lambda):
> #N_diagonaal
> N_plus:=H*cos(theta)+(V+plus_V)*sin(theta):
> Dw_plus:=-H*sin(theta)+(V+plus_V)*cos(theta):
> N_diagonaal:=Dw_plus/sin(alpha)*sqrt(l^2+(b/2)^2+h^2)/sqrt(l^2+
  h^2)/2:
> plot(N_diagonaal,x=-L/2..L/2);
```




```
> evalf(eval(N_diagonaal, [x = .72]));
```

$$-0.183674999 \tag{7}$$

```
> #POGING2 BETERE N_diagonaal, ALLEEN VOOR q_langs
> #plus_V_2:=-lambda*q_langs;
> #N_poging2:=H*cos(theta)+(V+plus_V_2)*sin(theta):
> #Dw_poging2:=-H*sin(theta)+(V+plus_V_2)*cos(theta):
> #N_diagonaal_poging2:=Dw_poging2/sin(alpha);
> #plot(N_diagonaal_poging2,x=-L/2..L/2);
> #evalf(eval(N_diagonaal_poging2, [x = 2.0]));
> ######################
> d_1:=1/3*h:
> d_2:=2/3*h:
> x_bovenrand:=x+diff(z,x)/sqrt(1+(diff(z,x))^2)*d_1:
> z_bovenrand:=z-1/sqrt(1+(diff(z,x))^2)*d_1:
> M_bovenrand:=subs(x=x_bovenrand,M_a)-H*z_bovenrand:
> N_onder:=M_bovenrand/h: #ws altijd goed
> plot(N_onder,x=-L/2..L/2);
```

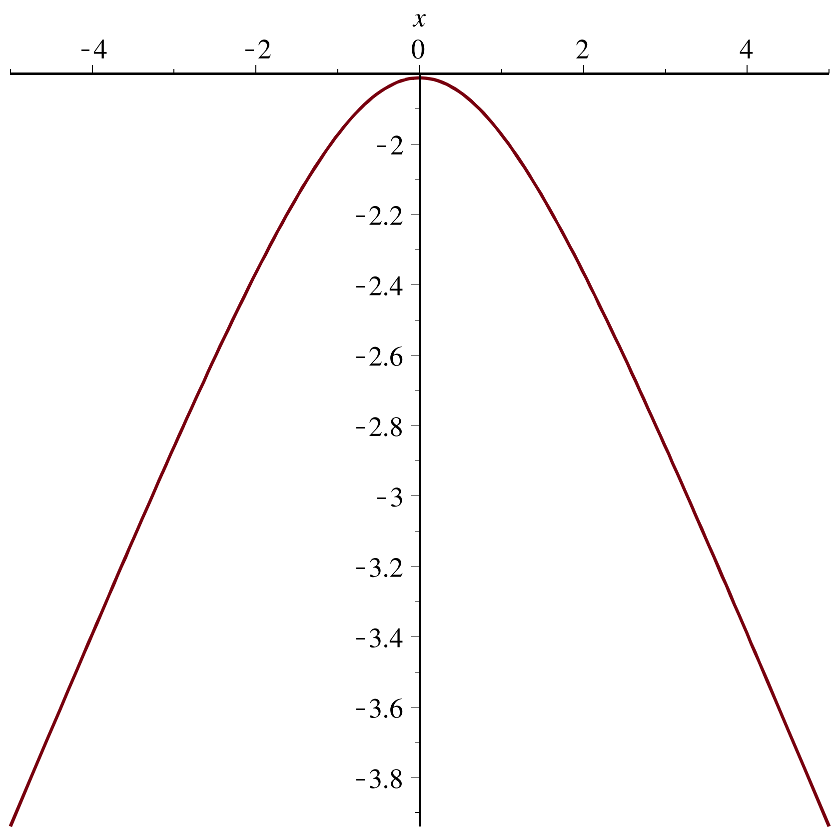



```
> evalf(eval(N_onder,[x=1.41]));
```

$$-1.61339281 \tag{8}$$

```
> x_onderrand:=x-diff(z,x)/sqrt(1+(diff(z,x))^2)*d_2:
> z_onderrand:=z+1/sqrt(1+(diff(z,x))^2)*d_2:
```

```
> #M_onderrand_:=subs(x=x_onderrand,M_a)-H*z_onderrand+int(q*(x-constante1),x=x_onderrand..x_bovenrand):
> #M_onderrand_test:=subs(constante1=x_onderrand,M_onderrand_):
  #ZELFDE RESULTAAT ALS INTEGRAAL HIERONDER
> M_onderrand:=subs(x=x_onderrand,M_a)-H*z_onderrand+int(q*(a-x_onderrand),a=x_onderrand..x_bovenrand):
> N_boven:=-M_onderrand/h/2:
> plot(N_boven,x=-L/2..L/2);
```




```
> evalf(eval(N_boven,[x=0]));
```

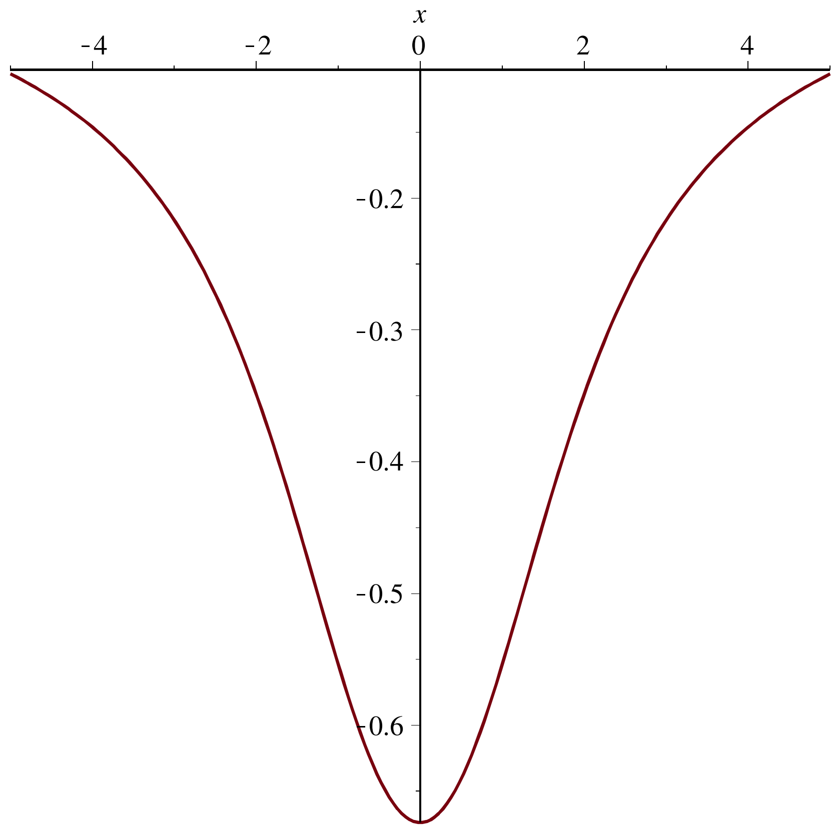
$$-1.81142688 \tag{9}$$

```
> evalf(eval(z_onderrand,[x=2.56]));
```

$$-3.223498001 \tag{10}$$

```
> ####################################################################################POGING BETERE N_BOVENRAND#####################################################################
> #q_resultante:=int(q,x=-L/2..x_bovenrand)+2/3*l*cos(theta);
> #eval(q_resultante, [x=2.56]);
> #M_onderrand2:=subs(x=x_bovenrand,M_a)-(x_onderrand-x_bovenrand)*(q_resultante+V_links)-H*z_onderrand;
> #plot(M_onderrand2);
```

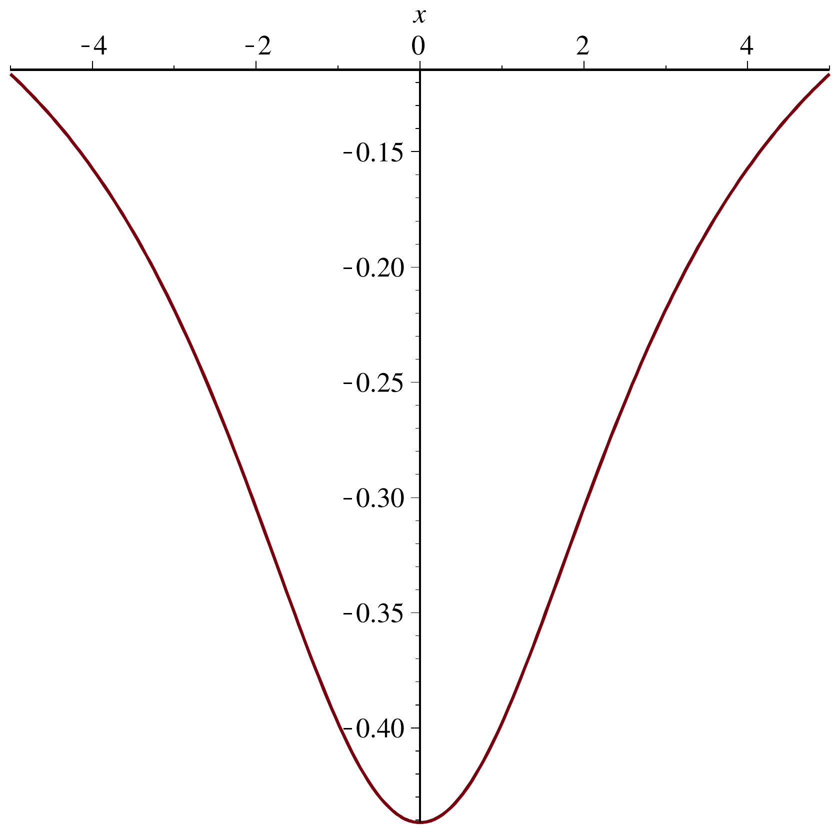
```
> #plot(M_onderrand);
> #N_boven2:=-M_onderrand2/h/2:
> #plot(N_boven2,x=-L/2..L/2);
> #evalf(eval(N_boven2,[x=-4.3]));
> ######################################################################
  ######################################################################
  #####################################
> #HOEK DELTA
> R:=abs((1+diff(z,x)^2)^(3/2)/diff(z,x$2)):
> delta:=l/(2*R):
> #VERTICALEN
> deltax:=1/sqrt(1+diff(z,x)^2):
> #deltax:=1*cos(theta); #ZELFDE
> #VERT_poging:=subs(x=x+l*cos(theta),Dw_plus)-Dw_plus:
> #VERT_diagonalen_OUD:=subs(x=x+l/2*deltax,Dw)-subs(x=x-l/2*
  deltax,Dw):
> #plot(VERT_poging,x=-5..5);
> #plot(VERT_diagonalen,x=-5..5);
> #OUDE FORMULES#############
> #VERT_diagonalen2:=VERT_diagonalen*(subs(x=x+l/2*deltax, theta)-
  theta(x)):
> #VERT_diagonalen3:=subs(x=x+l/2*deltax,Dw_poging)*cos(subs(x=x+
  l/2*deltax, theta)-theta(x))-subs(x=x-l/2*deltax,Dw_poging)*cos
  (subs(x=x-l/2*deltax, theta)-theta(x)):
> #VERT_diagonalen4:=(subs(x=x+l/2*deltax,Dw)-subs(x=x-l/2*deltax,
  Dw))*sqrt(l^2+h^2)/h*sin(alpha-delta): #waarschijnlijk deze
  substitutie met numerieke H altijd goed
> VERT_diagonalen:=2*(subs(x=x+l/2*deltax,N_diagonaal)-subs(x=x-
  l/2*deltax,N_diagonaal))*sqrt(l^2+h^2)/sqrt(h^2+l^2+(b/2)^2)*sin
  (alpha-delta):

> plot(VERT_diagonalen,x=-5..5):
> #evalf(eval(subs(x=x+l/2*deltax, theta)-theta(x),[x=3.5])*180/Pi)
  ; #<====== MOGELIJK BETERE DELTA
> N_onder_voorwaarts:=subs(x=x+l*deltax,N_onder):
> N_onder_achterwaarts:=subs(x=x-l*deltax,N_onder):
> VERT_onderrand:=(N_onder_voorwaarts + N_onder_achterwaarts)*sin
  (delta):
> evalf(eval(VERT_onderrand,[x=0]));
                              -0.956802830                          (11)
> evalf(eval(VERT_diagonalen,[x=0]));
                              -0.210486139                          (12)
> #N_verticaal_OUD:=(VERT_diagonalen+VERT_onderrand)*sqrt(h^2+(b/2)
  ^2)/h/2:
> #N_verticaal:=(VERT_diagonalen+VERT_onderrand)*sqrt(h^2+(b/2)^2)
  /h/2:
> N_verticaal_Y:=(VERT_diagonalen+VERT_onderrand)*sqrt(h^2+(b/2)^2)
  /h/2:
> plot(N_verticaal_Y,x=-5..5);
```




```
> evalf(eval(N_verticaal_Y,[x=0]));
```

$$-0.6739346013 \tag{13}$$

```
> N_verticaal_L:=2*N_onder*sin(delta)*sqrt(h^2+(b/2)^2)/h/2:
> plot(N_verticaal_L,x=-5..5);
```



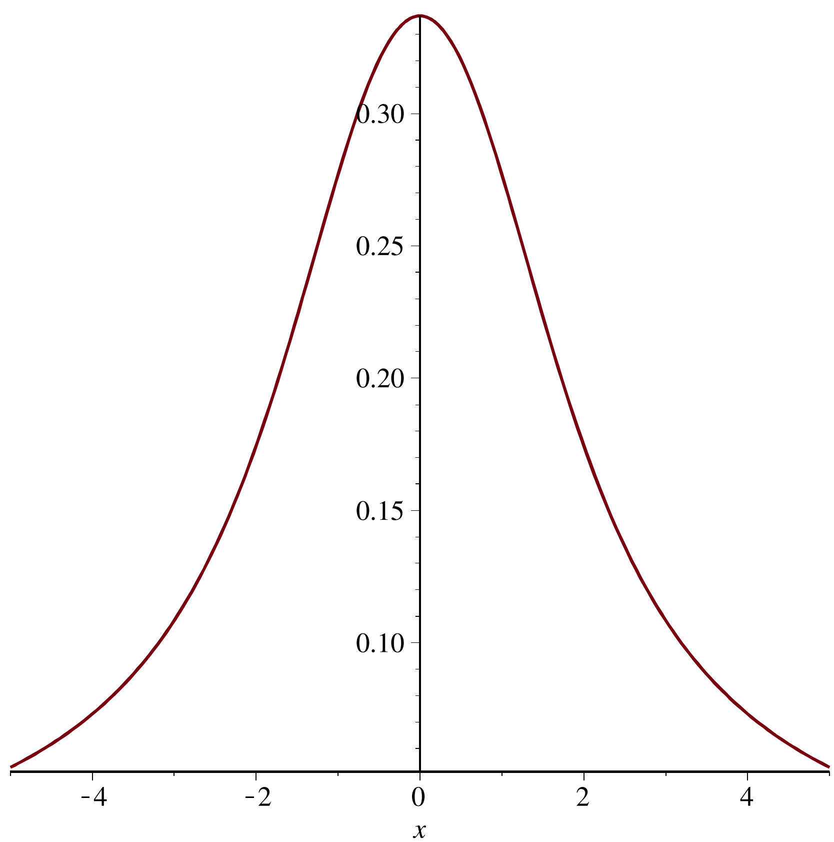

```
> evalf(eval(N_verticaal_L,[x=3.5]));
```

$$-0.1848431136 \tag{14}$$

```
> evalf(eval(delta,[x=3.5])*180/Pi);
```

$$3.327774355 \tag{15}$$

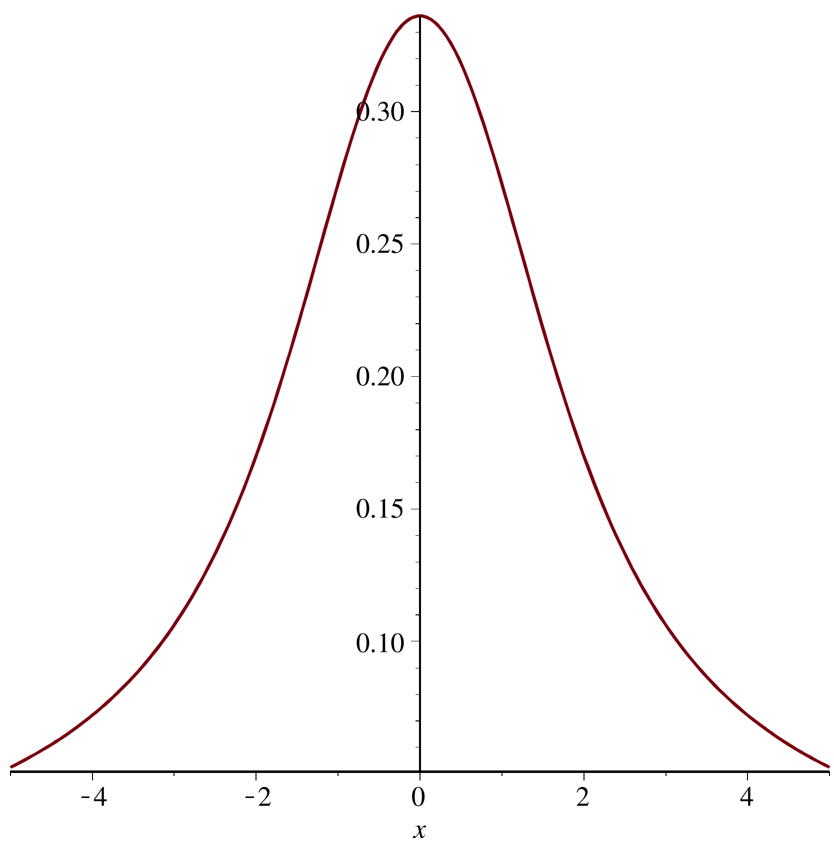
```
> N_dwars_T:=-N_verticaal_Y*b/sqrt(4*h^2+b^2):
> plot(N_dwars_T,x=-5..5);
```




```
> evalf(eval(N_dwars_T,[x=2.56]));
```

$$0.1324825794 \tag{16}$$

```
> #N_dwars_K:=-N_verticaal_L*b/sqrt(4*h^2+b^2)+(-subs(x=x+l/2*
  deltax,Dw)*b/(4*h))+(subs(x=x-l/2*deltax,Dw)*b/(4*h)):
> N_dwars_K:=-N_verticaal_L*b/sqrt(4*h^2+b^2)+(-subs(x=x+l/2*
  deltax,N_diagonaal)*b/2/sqrt(l^2+h^2+(b/2)^2)+(subs(x=x-l/2*
  deltax,N_diagonaal)*b/2/sqrt(l^2+h^2+(b/2)^2))):
> plot(N_dwars_K,x=-5..5);
```




```
> evalf(eval(N_dwars_K,[x=3.5]));
```

$$0.0866666093 \quad (17)$$

```
> #OPLEGGINGEN, SCHUINE STAVEN
> #H:=0.00000001; #Wanneer H=0
> #links
> x_1:=subs(x=-L/2+l*cos(gamma_opl),x_bovenrand):
  evalf(%):
> M_delta_opl:=Int((x+L/2)*q,x=-L/2..x_1): #int slaat Maple vast
  bij sommige belastingen
  evalf(%):
> F_totaal_opl:=Int(q,x=-L/2..x_1): #int slaat Maple vast bij
  sommige belastingen
  evalf(%):
> delta_F_opl_1:=M_delta_opl/(x_1+L/2):
  evalf(%):
> delta_F_opl_l:=F_totaal_opl-delta_F_opl_1:
  evalf(%):
> V_links_k:=V_links+delta_F_opl_l:
> #rechts
> x_1_r:= -x_1:
> M_delta_opl_r:=Int((x-x_1_r)*q,x=x_1_r..L/2): #int slaat Maple
```

```
  vast bij sommige belastingen
  evalf(%):
> F_totaal_opl_r:=Int(q,x=x_1_r..L/2): #int slaat Maple vast bij
  sommige belastingen
  evalf(%):
> delta_F_opl_1_r:=M_delta_opl_r/(L/2-x_1_r):
  evalf(%):
> delta_F_opl_r:=delta_F_opl_1_r:
> V_rechts_k:=V_rechts+delta_F_opl_r:
> #
> F_opl_totaal_links:=sqrt(V_links_k^2+H^2):
> F_opl_totaal_rechts:=sqrt(V_rechts_k^2+H^2):
> alpha_opl:=arctan(d_1/l):
> beta_opl:=arctan(d_2/l):
> afgeleide_opl:=subs(x=-L/2,z_afg): #parabolische boog op even
  hoge steunpunten, afgeleiden gelijk
> x_opl_m:=-L/2+l/2/sqrt(1+afgeleide_opl^2):
> afgeleide_gem_opl:=subs(x=x_opl_m,z_afg):

> #gamma_opl:=abs(arctan(afgeleide_gem_opl)):
  gamma_opl:=abs(arctan(afgeleide_opl)):
> lambda_opl_links:=arctan(-V_links_k/abs(H)):
> lambda_opl_rechts:=arctan(-V_rechts_k/abs(H)):
> N_opleg_boven_links:=-sin(beta_opl+lambda_opl_links-gamma_opl)
  /sin(Pi-beta_opl-alpha_opl)*F_opl_totaal_links*sqrt((b/2)^2+l^2+
  d_1^2)/sqrt(d_1^2+l^2)/2:
> N_opleg_onder_links:=-sin(alpha_opl+gamma_opl-lambda_opl_links)
  /sin(Pi-beta_opl-alpha_opl)*F_opl_totaal_links:
> N_opleg_boven_rechts:=-sin(beta_opl+lambda_opl_rechts-gamma_opl)
  /sin(Pi-beta_opl-alpha_opl)*F_opl_totaal_rechts*sqrt((b/2)^2+l^2+
  d_1^2)/sqrt(d_1^2+l^2)/2:
> N_opleg_onder_rechts:=-sin(alpha_opl+gamma_opl-lambda_opl_rechts)
  /sin(Pi-beta_opl-alpha_opl)*F_opl_totaal_rechts:

> evalf(alpha_opl*180/Pi);
```

$$12.70180011 \tag{18}$$

```
> evalf(beta_opl*180/Pi);
```

$$24.26516090 \tag{19}$$

```
> evalf((gamma_opl-beta_opl)*180/Pi);
```

$$39.16978792 \tag{20}$$

```
> evalf((gamma_opl+alpha_opl)*180/Pi);
```

$$76.13674895 \tag{21}$$

```
> evalf(N_opleg_boven_links);
```

$$-3.868493825 \tag{22}$$

```
> evalf(N_opleg_onder_links);
```

$$-4.128515654 \tag{23}$$

```
> evalf(N_opleg_boven_rechts);
```

$$-3.868493825 \tag{24}$$

```
> evalf(N_opleg_onder_rechts);
```
$$-4.128515654 \tag{25}$$
```
> evalf(lambda_opl_links*180/Pi);
```
$$62.86896754 \tag{26}$$
```
> evalf(lambda_opl_rechts*180/Pi);
```
$$62.86896754 \tag{27}$$
```
> #OPLEGGINGEN, VERTICALEN
> R0:=subs(x=-L/2,R): #gelijk links en rechts
> deltax2_een:=R0/sqrt(1+(1/z_afg)^2)*(1-cos(1*l/R0))+R0/sqrt(1+
  z_afg^2)*sin(1*l/R0):
> deltax2_anderhalf:=R0/sqrt(1+(1/z_afg)^2)*(1-cos(1.5*l/R0))+
  R0/sqrt(1+z_afg^2)*sin(1.5*l/R0):
> deltax2_twee:=R0/sqrt(1+(1/z_afg)^2)*(1-cos(2*l/R0))+R0/sqrt(1+
  z_afg^2)*sin(2*l/R0):
> deltax2_een_opl:=subs(x=-5,deltax2_een):
> deltax2_anderhalf_opl:=subs(x=-5,deltax2_anderhalf):
  evalf(%);
```
$$1.069730996 \tag{28}$$
```
> deltax2_twee_opl:=subs(x=-5,deltax2_twee):
  evalf(%);
```
$$1.460147708 \tag{29}$$
```
> delta_opl_l:=subs(x=-L/2+deltax2_een_opl, delta):
> #links
> VERT_diagonalen_opl_links:=2*(subs(x=-L/2+deltax2_anderhalf_opl,
  N_diagonaal))*sqrt(l^2+h^2)/sqrt(h^2+l^2+(b/2)^2)*sin(alpha-
  delta_opl_l):
> #VERT_schuin_opl_links_OUD:=-d_2/sqrt(l^2+d_2^2)*
  N_opleg_onder_links:
> VERT_schuin_opl_links:=-sin(arctan(d_2/l)-delta_opl_l)*
  N_opleg_onder_links:
> N_onder_opl_stijgend_links:=subs(x=-L/2+deltax2_twee_opl,
  N_onder): #Eerste diagonaal is stijgend
> N_onder_opl_dalend_links:=subs(x=-L/2+deltax2_een_opl, N_onder):
  #Eerste diagonaal is dalend
> VERT_onderrand_links:=(N_onder_opl_stijgend_links)*sin
  (delta_opl_l):
> N_verticaal_opl_stijgend_links:=(VERT_diagonalen_opl_links+
  VERT_schuin_opl_links+VERT_onderrand_links)*sqrt(h^2+(b/2)^2)
  /h/2:
  evalf(%);
```
$$1.032471957 \tag{30}$$
```
> #rechts
> VERT_diagonalen_opl_rechts:=2*(subs(x=L/2-deltax2_anderhalf_opl,
  N_diagonaal))*sqrt(l^2+h^2)/sqrt(h^2+l^2+(b/2)^2)*sin(alpha-
  delta_opl_l):
> VERT_schuin_opl_rechts:=-sin(arctan(d_2/l)-delta_opl_l)*
  N_opleg_onder_rechts:
> N_onder_opl_stijgend_rechts:=subs(x=L/2-deltax2_twee_opl,
  N_onder): #Eerste diagonaal is stijgend
> N_onder_opl_dalend_rechts:=subs(x=L/2-deltax2_een_opl, N_onder):
  #Eerste diagonaal is dalend
```

```
> VERT_onderrand_rechts:=(N_onder_opl_stijgend_rechts)*sin
  (delta_opl_l):
> N_verticaal_opl_stijgend_rechts:=(-VERT_diagonalen_opl_rechts+
  VERT_schuin_opl_rechts+VERT_onderrand_rechts)*sqrt(h^2+(b/2)^2)
  /h/2:
  evalf(%);
```

$$1.032471957 \quad (31)$$

```
> #OPLEGGINGEN, DWARSSTAAF
> N_dwars_opl_stijgend_links:=-(N_verticaal_opl_stijgend_links*
  (b/2)/sqrt(h^2+(b/2)^2)+N_opleg_boven_links*(b/2)/sqrt(l^2+(b/2)
  ^2+d_1^2)):
  evalf(%);
```

$$0.8605682642 \quad (32)$$

```
> N_dwars_opl_stijgend_rechts:=-(N_verticaal_opl_stijgend_rechts*
  (b/2)/sqrt(h^2+(b/2)^2)+N_opleg_boven_rechts*(b/2)/sqrt(l^2+(b/2)
  ^2+d_1^2)):
  evalf(%);
```

$$0.8605682642 \quad (33)$$

```
> #TEST
> R0;
```

$$\frac{25}{2}\sqrt{5} \quad (34)$$

```
> evalf(%);
```

$$27.95084971 \quad (35)$$

```
> evalf(deltax2_twee_opl);
```

$$1.460147708 \quad (36)$$

```
> evalf(alpha);
```

$$0.5945586642 \quad (37)$$