Bepaling van de effectieve kiplengte

Rechthoekige houten liggers belast met puntlast(en) en kopmomenten

Bachelor Eindwerk Djonno Bresser – 4399595

Bepaling van de effectieve kiplengte

Rechthoekige houten liggers belast met puntlast(en) en kopmomenten

Bachelor Eindwerk

ter verkrijging van het Bachelor diploma Civiele Techniek

aan de Technische Universiteit Delft

Auteur: Djonno Bresser

Studentnummer: 4399595

E-mailadres: djonnob@gmail.com

Opleiding: Bachelor Civiele Techniek

Faculteit: Civiele Techniek en Geowetenschappen

Onderwijsinstelling: Technische Universiteit Delft

Eerste begeleider: Dr. Ir. G. J. P. Ravenshorst

Tweede begeleider: Dr. Ir. P. C. J. Hoogenboom

Onderzoeksperiode: april-juni 2017

Spijkenisse, juni 2017

Voorwoord

Beste lezer,

Voor u ligt het eindrapport 'Bepaling van de effectieve kiplengte voor rechthoekige houten liggers belast met puntlast(en) en kopmomenten', geschreven in het kader van het vak CTB3000 Bachelor Eindwerk ter afsluiting van de bachelor Civiele Techniek aan de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschapen van de Technische Universiteit Delft. Het doel van dit vak is het individueel verkrijgen van de benodigde academische kennis en vaardigheden om zelfstandig onderzoek te doen van een voldoende technisch niveau.

Het doel van dit rapport is het uiteenzetten van de bevindingen met betrekking tot de effectieve kiplengte van houten liggers die zijn opgedaan gedurende de onderzoeksperiode. In dit onderzoek is een eindproduct ontwikkeld in de vorm van een Excel Tool die kan worden gebruikt ter bepaling van de effectieve kiplengte die nodig is voor een eerste orde kipstabiliteitstoetsing. Dit rapport kan door de gebruiker van deze tool worden gebruikt als handleiding gecombineerd met een theoretische onderbouwing van de werking van de tool.

Dit onderzoek is uitgevoerd onder begeleiding van Dr. Ir. G. J. P. Ravenshorst en Dr. Ir. P. C. J. Hoogenboom. Op deze manier zou ik graag mijn dank aan deze twee heren willen uitbrengen voor hun kundige adviezen en hun actieve en stimulerende begeleiding gedurende de onderzoeksperiode.

Spijkenisse, juni 2017,

Djonno Bresser

Samenvatting

Kipinstabiliteit is het roteren uit het vlak van een ligger onder invloed van de daarop aangrijpende belasting ten gevolge van een minieme zijwaartse translatie van het op druk belaste deel van de doorsnede. In de huidige normen zijn twee toetsingsmethoden beschreven: eerste orde en tweede orde spanningstoetsing. Dit rapport focust op de eerste orde toetsing en specifiek op het *effectieve kiplengte* principe, waarbij verscheidene belastings-configuraties en opleggingen met behulp van de zogenaamde effectieve kiplengte gerelateerd kunnen worden aan het basisgeval van een ligger met een constant moment over de gehele ligger. Eurocode 5 voor hout geeft slechts voor een paar gevallen waardes voor de effectieve kiplengtes en ook in de literatuur ontbreekt het aan informatie omtrent een aantal veel voorkomende belastings-configuraties, waaronder liggers belast met puntlast(en) en kopmomenten. Van hieruit is de volgende onderzoeksvraag gesteld:

> WAT IS DE INVLOED VAN DE (VERSCHILLENDE) KOPMOMENTEN EN DE LOCATIE(S) VAN DE PUNTLAST(EN) OP DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VAN HOUTEN LIGGERS MET EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE EN HOE VALT DEZE TE KWANTIFICEREN?

Een exactere toetsingsmethode resulteert in een efficiënter, inzichtelijker en economischer toetsings-methode. Om de effectieve kiplengte voor deze belastings-configuratie te bepalen is gebruik gemaakt van energiebeschouwingen, waarbij voor de rotatievorm een enkeltermige sinus is aangenomen. Het blijkt dat de aangenomen rotatievorm leidt tot een fout in de orde van 2 tot 3% aan de onveilige kant, met een gevonden maximum van 6.3%. Deze onveilige afwijking weegt echter niet op tegen de eenvoudigheid en continuïteit van de oplossing. Voor verscheidene belastings-configuraties zijn grafische oplossingsmethoden in de vorm van hoogtekaarten ontworpen waarmee op basis van de locatie van de puntlast(en) en de grootte van de kopmomenten direct de effectieve kiplengte kan worden gevonden. Vanuit deze verscheidene beschouwde gevallen is een algemeen geldende uitdrukking gevonden waarmee voor iedere belastings-configuratie de effectieve kiplengte kan worden bepaald.

$$l_{eff} = \frac{Fl\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta+C_3\alpha+C_4\beta+C_5}}{M_{max}}l$$

Voor elk van de constanten is vervolgens een uitdrukking gevonden. Om de gebruiksvriendelijkheid en de toepasbaarheid van de gevonden oplossing te vergroten, is een *'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'* gecreëerd. Deze tool levert voor willekeurige puntlasten en/of gelijkmatig verdeelde belastingen de effectieve kiplengte, het maximale moment in de ligger en de bijbehorende momentenlijn. Er zijn methodes aangereikt om horizontale en verticale rotatiestijfheden ter plaatse van steunpunten en/of gaffels, liggers over meerdere steunpunten en belastingen die niet aangrijpen in het normaalkrachtencentrum van de doorsnede mee te kunnen nemen in de beschouwing

Er wordt aangeraden gebruik te maken van de grafische oplossingsmethoden indien gevraagd wordt om inzichtelijkheid en een niet al te exacte uitkomst (bijvoorbeeld voor een handberekening van het eerste ontwerp van een constructie). Voor exact gebruik in de praktijk wordt aangeraden gebruik te maken van de Excel Tool, waarbij de beperkingen in acht dienen te worden genomen. De Excel Tool is enkel toepasbaar voor lineair elastische smalle rechthoekige liggers die belast worden met enkel opwaartse of neerwaartse belastingen, waarbij de invloed van de normaalkrachten buiten beschouwing kan worden gelaten. Indien de belasting zeer asymmetrisch van aard is en de toetsing geen duidelijk uitsluitsel geeft, wordt aangeraden gebruik te maken van FEM-softwarepakketten.

Inhoudsopgave

Figurenlijst

Tabellenlijst

Inleiding

Gedurende het ontwerp van een houten draagconstructie dienen alle constructieve elementen getoetst te worden op twee facetten: sterkte en stabiliteit. Een onderdeel van de stabiliteitstoetsing is de toetsing met betrekking tot kipstabiliteit: het roteren uit het vlak van een ligger onder invloed van de daarop aangrijpende belasting ten gevolge van een minieme zijwaartse translatie van het op druk belaste deel van de doorsnede. In de huidige Europese normen met betrekking tot kipstabiliteit wordt een methode voorgeschreven die berust op het *effectieve kiplengte* – principe, waarbij allerlei belastings-configuraties en randvoorwaarden met behulp van de zogenaamde effectieve kiplengte gerelateerd kunnen worden aan het basisgeval van een ligger met een constant moment over de gehele lengte. Middels deze methode kan voor algemene gevallen een eerste orde spanningstoetsing uitgevoerd worden om de kipstabiliteit van de ligger te waarborgen.

Probleemstelling

In de Eurocode 5 voor ontwerp en berekening van houtconstructies wordt de effectieve kiplengte van een ligger voor een beperkt aantal gevallen gegeven: 1) een constant moment over de ligger, 2) een gelijkmatig verdeelde belasting en 3) een puntlast in het midden van de ligger. Het moge duidelijk zijn dat in de praktijk het afzonderlijk voorkomen van deze standaardgevallen eerder uitzondering dan regel is, waardoor de toepasbaarheid van de voorgeschreven effectieve kiplengtes te betwijfelen valt. Voor gevallen die van de standaardgevallen afwijken, dient de ingenieur naar eigen inzicht een kipstabiliteitstoetsing uit te voeren, waarbij hij of zij gebruik kan maken van de beschikbare literatuur en/of softwarepakketten.

In de beschikbare literatuur zijn echter niet alle belastings-configuraties beschreven en onderzocht. Voor deze kennisleemtes moet de ingenieur gebruik maken van de daarvoor geschikte software, met als gevaar dat de ingenieur het inzicht in de materie langzaamaan verliest. Daarbij is het met name voor de vroege fase van het ontwerp wenselijk om van een inzichtelijke eenvoudige (analytische) methode gebruik te kunnen maken, zodat de ingenieur met enkele parameters kan 'spelen' om via die weg tot een passend ontwerp te komen.

Roeland van Straten [1] heeft in zijn onderzoek een analytische oplossing gevonden voor één van deze kennisleemten: een ligger belast met een gelijkmatig verdeelde belasting en aan weerszijden een kopmoment. Ook heeft hij hiervoor een grafische oplossingsmethode ontwikkeld waarbij, afhankelijk van de grootte van de kopmomenten, via een zogenaamde hoogtekaart op eenvoudige wijze de effectieve kiplengte kan worden afgelezen. In de praktijk leiden dit soort grafische oplossingen tot eenvoudige toepassing en begrip van de materie.

Voor een ligger belast met puntlast(en) op willekeurige afstand(en) vanaf de oplegging en aan weerszijden een kopmoment zijn in de literatuur, voor zover bekend, geen analytische oplossingen te vinden. Ook de Europese normen bieden weinig houvast voor deze belastings-configuraties; er kan gebruik worden gemaakt van de drie voorgeschreven gevallen, wat leidt tot een conservatieve benadering van de effectieve kiplengte en daarmee de momentcapaciteit van de ligger. Om tot meer efficiëntere en economische ontwerpen te komen, is het noodzakelijk om een betere benadering van en meer inzicht in de effectieve kiplengtes behorend bij deze belastings-configuraties te verkrijgen.

Onderzoeksvragen

Naar aanleiding van het gestelde probleem zal dit onderzoek de volgende hoofdvraag trachten te beantwoorden:

> WAT IS DE INVLOED VAN DE (VERSCHILLENDE) KOPMOMENTEN EN DE LOCATIE(S) VAN DE PUNTLAST(EN) OP DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VAN HOUTEN LIGGERS MET EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE EN HOE VALT DEZE TE KWANTIFICEREN?

Omdat de hoofdvraag specifiek gesteld is voor houten liggers, kan de versimpeling van het probleem naar enkel rechthoekige doorsnedes toegepast worden, aangezien houten liggers in het algemeen rechthoekig van vorm zijn. Om de hoofdvraag te kunnen beantwoorden, is deze opgesplitst in een zestal deelvragen:

1. WAT IS DE THEORIE ACHTER HET FENOMEEN 'KIP' EN HOE KUNNEN DE BIJBEHORENDE OMSCHRIJVENDE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN OPGELOST WORDEN?
2. WAT IS DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VOOR EEN LIGGER BELAST MET EEN PUNTLAST A) IN HET MIDDEN EN B) OP EEN WILLEKEURIGE LOCATIE OP DE LIGGER?
3. HOE KAN DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VOOR EEN LIGGER IN HET MIDDEN BELAST MET EEN PUNTLAST EN AAN WEERSZIJDEN VERSCHILLENDE KOPMOMENTEN BEPAALD WORDEN EN KAN DE OPLOSSING GRAFISCH WEERGEGEVEN WORDEN?
4. IS HET MOGELIJK OM NAAST DE TWEE KOPMOMENTEN DE LOCATIE VAN DE PUNTLAST TE VARIËREN EN DAARBIJ EEN GRAFISCHE OPLOSSING TE VERKRIJGEN?
5. VALT ER EEN ALGEMENE METHODE TE ONTWIKKELEN WAARMEE VOOR IEDERE BELASTINGS-CONFIGURATIE DE EFFECTIEVE KIPLENGTE BEPAALD KAN WORDEN?
6. KOMEN DE GEVONDEN EFFECTIEVE KIPLENGTES OVEREEN MET DE LITERATUUR?

Plan van aanpak

De eerste stap in het onderzoek is het uitvoeren van een vergaande literatuurstudie. In de gevonden literatuur ([2], [3], [4], [5], [6] en [7]) zijn waardes te vinden voor de effectieve kiplengtes behorende bij verschillende belasting-configuraties. Vaak zijn de bepaalde waardes toepasbaar voor enkel de basisgevallen en daarbij is er vaak geen bijbehorende complete afleiding gegeven. Voor de belastingconfiguratie met een puntlast op een willekeurige locatie en twee verschillende kopmomenten zijn geen waardes gevonden in de literatuur.

Het antwoord op de eerste deelvraag zal gevonden moeten worden in de beschikbare literatuur. In dit stuk zullen ook de huidige normen met betrekking tot kipstabiliteit behandeld worden om tot een compleet beeld te komen. Om de tweede deelvraag te kunnen beantwoorden, zal gebruikt gemaakt worden van energiebeschouwingen zoals die omschreven staan in verscheidene literatuurstukken (onder andere [1], [6], [7], [8] en [9], nog vele andere werken voor beschikbaar). De gebruikte methode zal qua principe niet veranderen gedurende het onderzoek. De uitwerking wordt echter wel steeds complexer voor deelvragen 3 en 4. Het gewenste resultaat van deelvraag 3 is een grafische weergave in de vorm van een hoogtekaart, vergelijkbaar met het resultaat van Roeland van Straten [1].

Het beantwoorden van deelvraag 4 zal waarschijnlijk een grote inspanning zijn vanwege de extra dimensie in de vorm van de locatie van de puntlast. Het gewenste resultaat is een analytische uitkomst, tezamen met een overzichtelijke grafische presentatie van de oplossing. De grafische presentatie van deze oplossing is afhankelijk van de bevindingen van het onderzoek en staat daarom nog open.

Vervolgens dient er op zoek te worden gegaan naar een algemeen verband waarin meerdere en het liefst alle belastings-configuraties gevat kunnen worden. Of een dergelijk verband bestaat en hoe deze gevonden moet worden, dient in het verloop van het onderzoek ondervonden te worden. Het gewenste resultaat is een methode waarmee voor alle (zo niet, veel) gevallen de effectieve kiplengte bepaald kan worden.

Vervolgens zullen de gevonden waarden vergeleken moeten worden met een aantal basisgevallen uit de literatuur om de analytische afleiding te kunnen verifiëren. Indien hier afwijkingen optreden, moeten deze benoemd en geanalyseerd worden. Deze vergelijking wordt per deelvraag uitgevoerd, om het rapport overzichtelijk te houden.

Uitgangspunten

Om tot gericht onderzoek te komen, moeten een aantal uitgangspunten vastgesteld worden. Hieronder vallen de afbakening van het onderzoek, de lijst van symbolen en de tekenafspraken.

Afbakening onderzoek

1. De beschouwde liggers zijn houten, rechthoekige, prismatische liggers, waarvan de hoogte veel groter is dan de breedte. Later in het onderzoek zal blijken dat hierdoor het verschijnsel 'welving' buiten beschouwing kan worden gelaten.
2. Indien niet anders vermeld, zijn aan beide zijden van de liggers gaffelopleggingen toegepast. Gaffelopleggingen zullen in paragraaf 1.1 nader besproken worden.
3. Onder invloed van buiging en dwarskracht blijven vlakke doorsnedes vlak, conform de Bernoulli-aanname. Normaalkrachten en -vervormingen worden buiten beschouwing gelaten.
4. Indien niet anders vermeld, grijpen de belastingen aan in het normaalkrachtencentrum van de doorsnede en werken de belastingen in het xz-vlak.
5. Dit onderzoek focust op het lineair elastische gedrag van houten liggers. Het plastische gedrag zal bij dit onderzoek buiten beschouwing gelaten worden.

Lijst van symbolen

In dit rapport is gebruik gemaakt van de volgende symbolen:

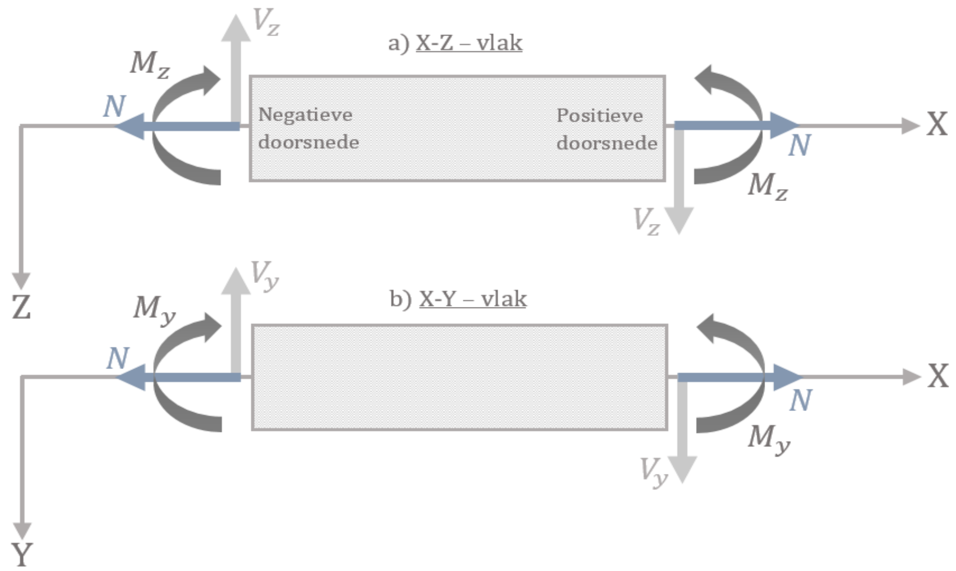
Symbool	Omschrijving	Eenheid
E	Elasticiteitsmodulus	[MPa]
F	Puntlast	[kN]
G	Schuifmodulus	[MPa]
I	Grootte equivalente eenheidspuntlast	[kN]
I_t	Torsie traagheidsmoment	[m^4]
I_{yy}	Traagheidsmoment om de z-as conform mechanica onderwijs TU Delft	[m^4]
I_{zz}	Traagheidsmoment om de y-as conform mechanica onderwijs TU Delft	[m^4]
M_{max}	Maximaal moment in de ligger	[kNm]
M_{kip}	Maatgevend buigend moment waarbij de ligger kipt	[kNm]

M_x	Torderend moment	[kNm]
M_y	Buigend moment om z-as conform Figuur I	[kNm]
M_z	Buigend moment om y-as conform Figuur I	[kNm]
$M_{\bar{x}}$	Lokaal torderend moment in lokaal assenstelsel	[kNm]
$M_{\bar{y}}$	Lokaal buigend moment om lokale z-as	[kNm]
$M_{\bar{z}}$	Lokaal buigend moment om lokale y-as	[kNm]
$M_{z,krit}$	Kritisch kipmoment conform Eurocodes	[kNm]
M_0	Basisgeval met constant moment	[kNm]
$M_{0,eq}$	Equivalent constant moment	[kNm]
$M_{0,krit}$	Constant moment waarbij ligger kipt	[kNm]
N	Normaalkracht in de x-richting conform Figuur I	[kN]
V_y	Dwarskracht in richting y-as conform Figuur I	[kN]
V_z	Dwarskracht in richting z-as conform Figuur I	[kN]
W_z	Weerstandsmoment om y-as conform mechanica onderwijs TU Delft	[m^3]
dA	Verrichte arbeid door kip	[J]
$f_{m,d}$	Rekenwaarde buigsterkte	[MPa]
$f_{m,k}$	Karakteristieke waarde buigsterkte	[MPa]
k_{crit}	Kipinstabiliteitsfactor	[-]
k	Verticale rotatiestijfheid verende oplegging (hoofdstuk 7)	[kNm/rad]
k_{eq}	Dimensieloze constante m.b.t. equivalente moment	[-]
l	Overspanningslengte	[lengte]
l_{eff}	Effectieve kiplengte	[lengte]
n	Lengte verzameling eenheidspuntlasten	[-]
q	Gelijkmatig verdeelde belasting	[kN/m]
u	Horizontale verplaatsing in richting y-as	[lengte]
u_{kip}	Extra horizontale verplaatsing t.g.v. kip	[lengte]
w	Verticale verplaatsing in richting z-as	[lengte]
w_{kip}	Extra verticale verplaatsing t.g.v. kip	[lengte]
x_1, x_2, x_3	Lokale hulpassenstelsels	[-]
$\bar{x}$	Lokale x-as in de verplaatste toestand	[-]
$\bar{y}$	Lokale y-as in de verplaatste toestand	[-]
$\bar{z}$	Lokale z-as in de verplaatste toestand	[-]

α	Dimensieloze kopmomentfactor links	[-]
β	Dimensieloze kopmomentfactor rechts (vanaf hoofdstuk 3)	[-]
β	Helling verplaatste ligger in xy-vlak (hoofdstuk 1)	[-]
γ	Verzameling locaties puntlasten (hoofdstuk 5, 6, 7)	[-]
γ, δ	Locaties puntlasten (hoofdstuk 2,3,4)	[-]
C_1	Kopmomentfactor (vanaf hoofdstuk 4)	[-]
C_2	Kopmomentfactor (vanaf hoofdstuk 4)	[-]
C_3	Kopmoment en puntlast(en) factor (vanaf hoofdstuk 4)	[-]
C_4	Kopmoment en puntlast(en) factor (vanaf hoofdstuk 4)	[-]
C_5	Puntlast(en) factor (vanaf hoofdstuk 4)	[-]
$\lambda_{rel,m}$	Relatieve slankheid	[-]
θ_{kip}	Extra hoekverdraaiing t.g.v. kippen	[rad,◦]
ρ	Dimensieloze rotatieveerstijfheid (hoofdstuk 7)	[-]
$\sigma_{m,crit}$	Kritische buigspanning waarbij kip optreedt	[MPa]
$\sigma_{m,d}$	Rekenwaarde kritische buigspanning	[MPa]
ϕ	Lokale rotatie doorsnede	[rad,◦]
$\mathcal{U}$	Vormveranderingsenergie	[J]
$\mathcal{V}$	Potentiële energie belasting	[J]

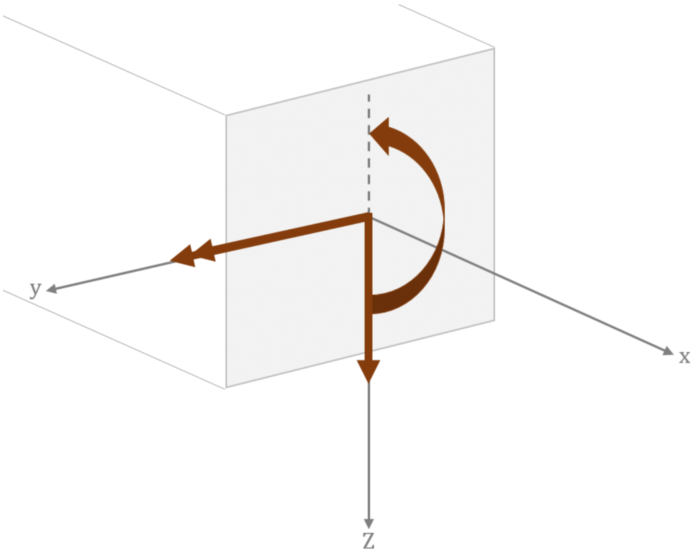
Tekenafspraken

Het assenstelsel en de positieve definities van de momenten M_z en M_y, de dwarskrachten V_z en V_y en de normaalkracht N die werken op een snede van de ligger zijn gekozen volgens het mechanica onderwijs aan de TU Delft en zijn weergegeven in Figuur I. Positieve verplaatsingen vinden plaats in de richting van de bijbehorende as.



Figuur I: *Gekozen assenstelsel en positieve definities van momenten, dwarskrachten en normaalkrachten*

De notaties van de buigende momenten in dit rapport wijken af van de standaardnotatie die in die ingenieurspraktijk geldt. Om de notatie te verduidelijken is in Figuur II hetzelfde buigende moment M_z (waarbij dit moment M_z in het in Figuur I gedefinieerde vlak aangrijpt) op drie verschillende maar equivalente manieren weergegeven.



***Figuur II**: Drietal verschillende notaties voor hetzelfde buigende moment*

Leeswijzer

De gestelde deelvragen worden, op deelvraag 6 na, per deelvraag in een afzonderlijk hoofdstuk behandeld. Zo wordt in hoofdstuk 1 de theoretische achtergrond van het fenomeen 'kip' nader uitgewerkt, tezamen met de theoretische basis voor de rest van het onderzoek. In hoofdstuk 2 wordt deze theoretische basis toegepast op een ligger belast met een puntlast en vervolgens in hoofdstuk 3 op een ligger die belast wordt met een puntlast in het midden en aan weerszijden twee verschillende kopmomenten. Aan het eind van hoofdstuk 3 wordt de grafische methode gepresenteerd van waaruit de effectieve kiplengte afgelezen kan worden.

In hoofdstuk 4 wordt de theorie verder uitgebreid naar een ligger die op een willekeurige positie wordt belast met een puntlast en aan weerszijden kopmomenten. Deze beschouwing resulteert in een model waarmee de effectieve kiplengte bepaald kan worden. Ook is er een grafische oplossing gegeven voor verscheidene belastings-combinaties. Aan het eind van hoofdstuk 4 is ook de opstap gemaakt naar het geval met twee puntlasten. In hoofdstuk 5 wordt vervolgens de belangrijke stap gemaakt naar een algemene methode om de effectieve kiplengte voor rechthoekige houten liggers te bepalen. Deze methode resulteert in een Excel Tool, welke omschreven wordt in hoofdstuk 6. Met behulp van deze Excel Tool worden in hoofdstuk 7 verdere analyses uitgevoerd voor specifieke gevallen en worden methodes aangereikt om met de beperkingen van de Excel Tool om te gaan. Het rapport eindigt in hoofdstuk 8 met de conclusies en aanbevelingen voor vervolgonderzoek.

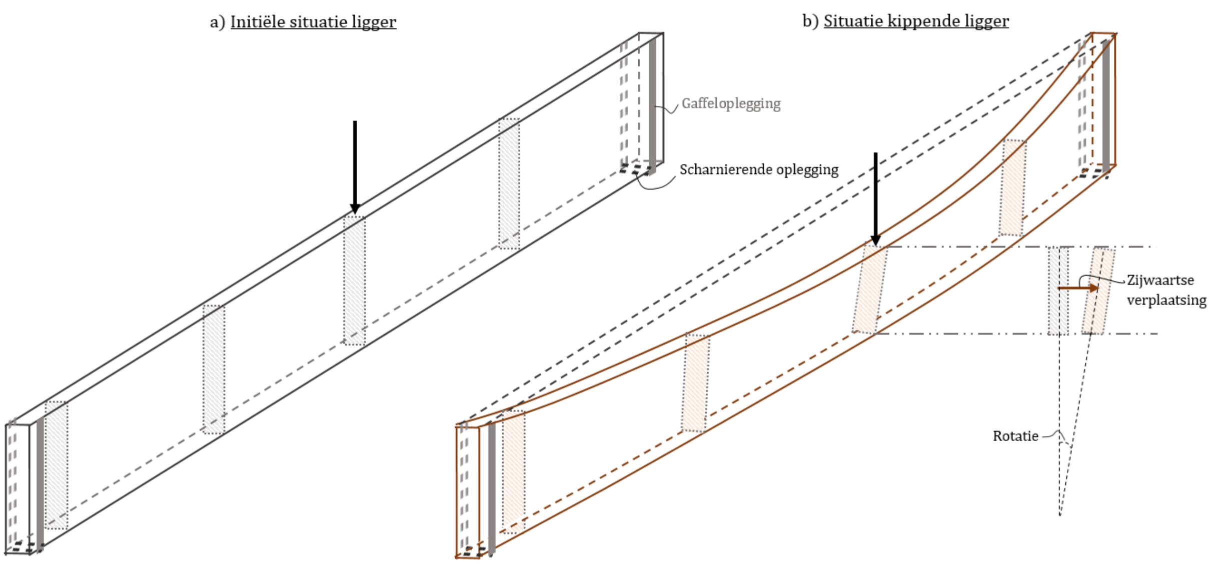
Voor lezers met een beperkte hoeveelheid beschikbare tijd wordt aangeraden gebruik te maken van de samenvattingen die aan het eind van ieder hoofdstuk geplaatst zijn (op hoofdstuk 8 na).

1. Theoretische achtergrond fenomeen 'kip'

In dit hoofdstuk wordt de eerste deelvraag beantwoord. Hiervoor worden eerst de algemene theorie en de bijbehorende differentiaalvergelijking omschreven. Vervolgens wordt deze differentiaal-vergelijking opgelost voor het basisgeval met een constant, waarna de huidige Eurocode voorschriften behandeld worden. Dit hoofdstuk eindigt met een opstapje naar de beantwoording van deelvragen 2, 3 en 4 middels de beschouwing van de theorie achter de energiemethode.

1.1 Algemene theorie 'kip'

In een op buiging belaste ligger (zie Figuur 1.1a) heersen er in de doorsnede zowel druk- als trekspanningen. Wanneer de stijfheid in de buigings-richting vele malen groter is dan de stijfheid in de zijwaartse richting, wat vaak het geval is voor rechthoekige liggers waarvoor meestal geldt dat $h \gg b$, en wanneer de drukzonde niet zijwaarts gesteund is, kan kipinstabiliteit optreden. Deze vorm van instabiliteit treedt op wanneer een bepaalde kritische waarde van het buigend moment wordt overschreden: op dat moment knikt het op druk belaste deel van de doorsnede uit het vlak van de ligger, waarbij het de rest van de doorsnede meeneemt in zijn translatie. Dit resulteert in een zijwaartse verplaatsing en een rotatie van de doorsnede. Ten gevolge van deze rotatie zal de doorsnede ook een kleine verticale verplaatsing ondergaan. In Figuur 1.1b is een buiging belaste ligger die aan weerszijden is opgelegd met een gaffeloplegging weergegeven ten tijde van het optreden van kipinstabiliteit, waarbij de translatie van de doorsnede is gevisualiseerd.



***Figuur 1.1:** Visualisering van a) de initiële situatie van de ligger en b) de situatie van de kippende ligger*

Wanneer de ligger uit het vlak roteert, verliest hij een deel van zijn stijfheid in de buigings-richting, wat leidt tot een grotere translatie van de doorsnede, waardoor als het ware een vicieuze cirkel ontstaat van translatie en stijfheidsverlies. Wegens deze reden is het optreden van kipinstabiliteit equivalent aan het falen van de ligger.

Net als voor knikstabiliteit, wordt kipstabiliteit gerelateerd aan de lengte waarover de ligger kipt. Deze lengte is afhankelijk van de manier van oplegging. Naast de welbekende scharnierende en inklemmende opleggingen, wordt er voor kipstabiliteit ook nog een gaffeloplegging onderscheden. Hierbij wordt ter plaatse van de oplegging de translatie in de richting van de z- en y-assen verhinderd, tezamen met de rotatie om de x-as. Verder kunnen er ook nog steunpunten gecreëerd worden in de vorm van gaffels, waarbij translatie in de richting van de y-as en rotatie om de x-as verhinderd zijn of kipsteunen, waarbij enkel de translatie in de richting van de y-as verhinderd wordt. Uiteraard zijn er in de praktijk ook nog andere complexere opleggings- en steunmethoden te vinden met rotatiestijfheden etc. Deze zullen kort besproken worden in hoofdstuk 7 en worden voor de rest van dit onderzoek buiten beschouwing gelaten.

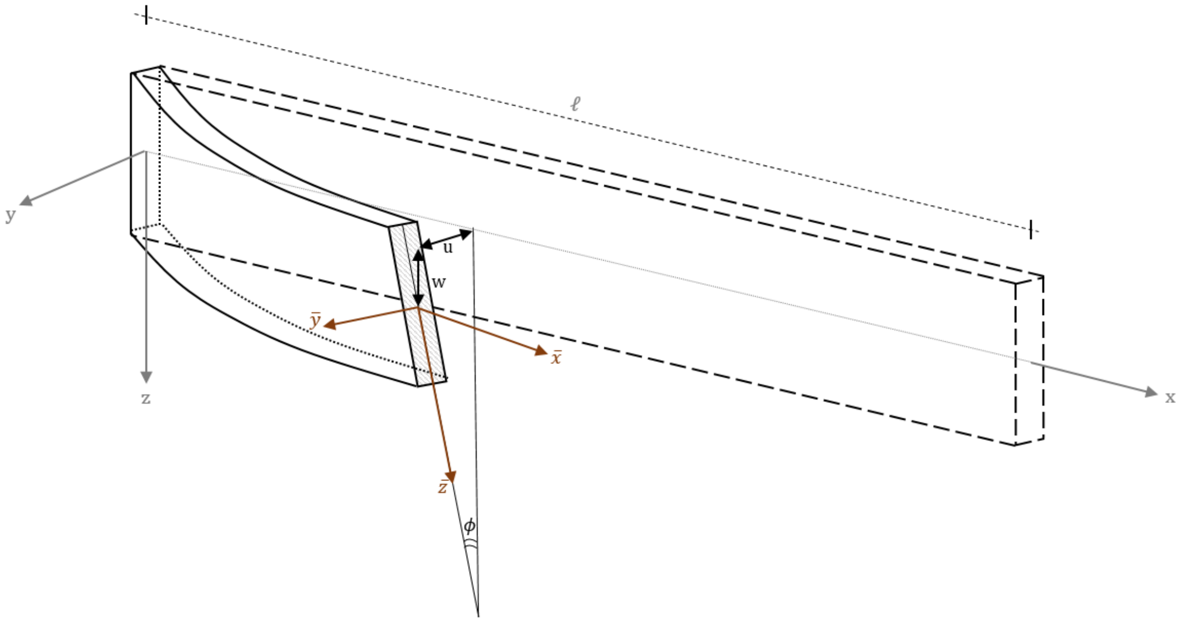
Naast de manier van oplegging is de belastings-configuratie ook van invloed op de lengte waarover de ligger kipt. Om tot een inzichtelijke en simpele toetsingsmethode te komen, wordt er gebruik gemaakt van het *effectieve kiplengte* – principe. Hierbij wordt de lengte waarover een ligger kipt onder willekeurige belasting en randvoorwaarden (in de vorm van een bepaalde oplegging of steunpunt), gerelateerd aan het basisgeval met een constant moment over de ligger en aan weerszijden gaffelopleggingen. De verhouding tussen het beschouwde geval en het basisgeval komt tot uiting in de *effectieve kiplengte*.

Het kipgedrag van een houten ligger is daarbij ook gerelateerd aan de aangrijphoogte van de belasting. Zo zal een puntlast die aangrijpt aan de bovenzijde van de ligger, in het geval van een kleine rotatie van de ligger, resulteren in een meewerkend torderend moment uit het vlak van de ligger, waardoor kipinstabiliteit eerder zal optreden. Echter, een puntlast die aangrijpt aan de onderzijde van de ligger, resulteert in een tegenwerkend torderend moment uit het vlak van de ligger, waardoor kipinstabiliteit juist tegen gewerkt wordt en dus later zal optreden. In dit onderzoek zal hier geen directe aandacht aan besteed worden.

1.2 Afleiding algemene differentiaalvergelijkingen kip

In deze paragraaf zal een stelsel algemene differentiaalvergelijkingen afgeleid worden waarmee het kipgedrag van rechthoekige liggers, belast door een moment M_z, beschreven kan worden. Met behulp van het afgeleide stelsel zal in paragraaf 1.3 het basisgeval, met een constant moment M_0 over de gehele lengte van de ligger, beschouwd worden.

Voor de ligger wordt een globaal x-y-z assenstelsel gekozen waarvan de oorsprong ligt in het normaalkrachtencentrum aan de linker rand van de ligger. Het kippen van de ligger leidt voor $0 < x < l$ tot een verticale verplaatsing *w(x)*, een horizontale verplaatsing *u(x)* en een rotatie *ϕ(x)* van het lokale normaalkrachtencentrum. Om deze translaties eenvoudig in rekening te brengen, wordt er gebruikt gemaakt van een lokaal $\bar{x}$-$\bar{y}$-$\bar{z}$ assenstelsel. De verplaatste toestand en het lokale assenstelsel van een rechthoekige ligger met aan beide zijden een gaffeloplegging is weergegeven in Figuur 1.2.



Figuur 1.2: *Ligger in verplaatste toestand met de definitie van de verplaatsingsgrootheden en het bijbehorende assenstelsel.*

Vanuit de basis mechanica [10] volgen de evenwichtsvergelijkingen voor een ligger belast op buiging. Voor buiging in x-z-vlak geldt de volgende constitutieve betrekking:

$$M_z = -EI_{zz}\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1.1}$$

Wanneer de rotatiehoek ϕ voldoende klein is, worden de traagheidsmomenten en krommingen (welke gelijk zijn aan de tweede afgeleide van de verplaatsingsgrootheden naar x) in het lokale assenstelsel verondersteld gelijk te zijn aan de traagheidsmomenten en krommingen in het globale assenstelsel. In dat geval geldt voor het geroteerde $\bar{x}$-$\bar{z}$ –vlak en respectievelijk het geroteerde $\bar{x}$-$\bar{y}$ -vlak:

$$M_{\bar{z}} = -EI_{zz}\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1.2}$$

$$M_{\bar{y}} = -EI_{yy}\frac{d^2u}{dx^2} \tag{1.3}$$

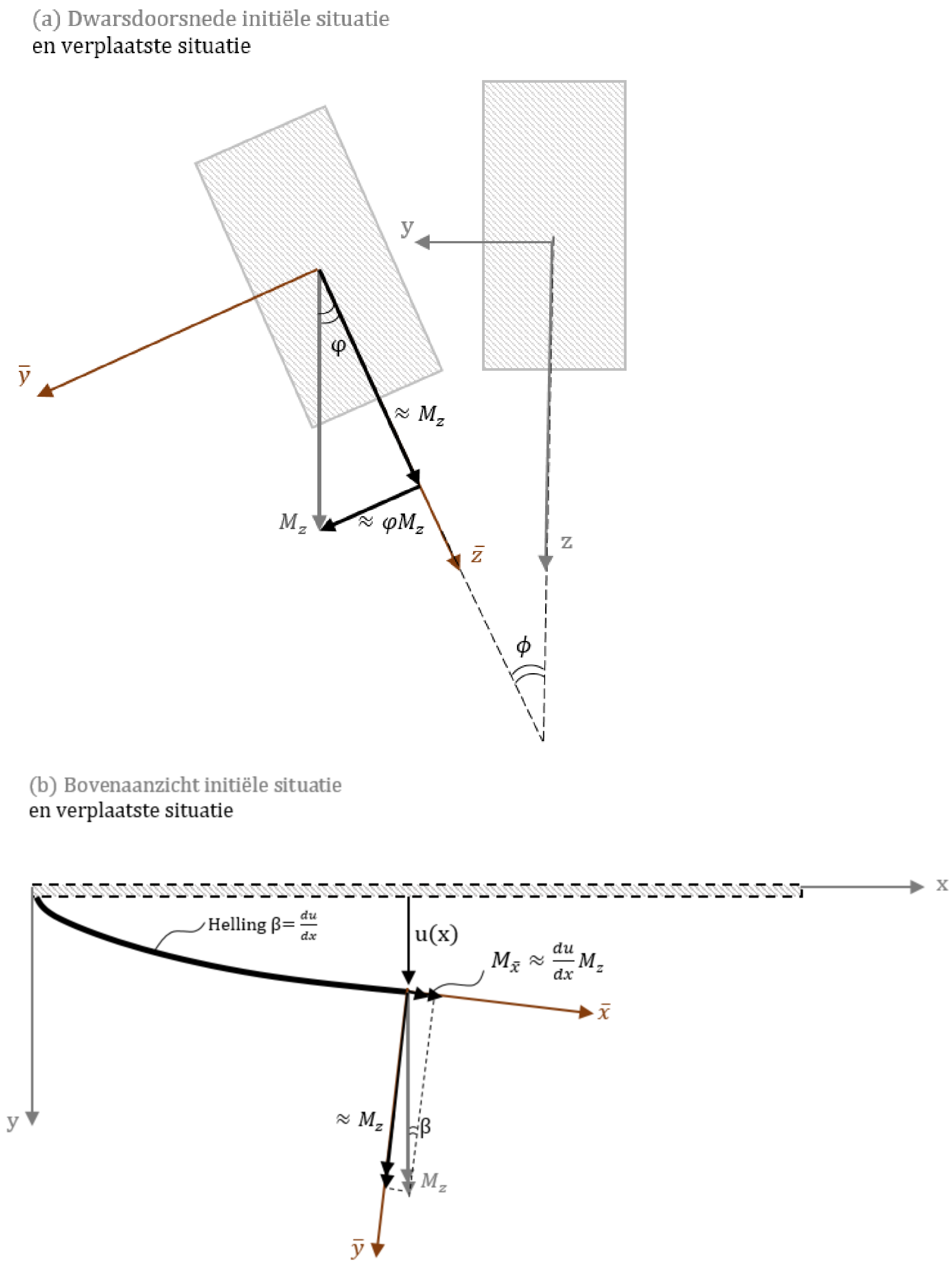
Voor wringing wordt in de basis mechanica de volgende vergelijking gevonden (deze vergelijking staat ook wel bekend als de St Venant wringingsvergelijking):

$$M_{\bar{x}} = GI_t \frac{d\phi}{dx} \tag{1.4}$$

Vervolgens kunnen de momenten in het lokale assenstelsel uitgedrukt worden in de uitwendige belasting M_z door de geometrie van de doorsnede in acht te nemen. Met behulp van Figuur 1.3(a) en de aanname dat de rotatie ϕ voldoende klein is, leidt dit tot

$$M_{\bar{z}} = M_z cos\phi \approx M_z \tag{1.5}$$

$$M_{\bar{y}} = M_y sin\phi \approx \phi M_z \tag{1.6}$$



Figuur 1.3: *(a) visualisatie moment-transformatie dwarsdoorsnede en (b) visualisatie moment- transformatie bovenaanzicht*

Het uitdrukken van het torderend moment $M_{\bar{x}}$ in M_z wordt gevisualiseerd door Figuur 1.3(b). In deze figuur wordt voor het moment een andere notatie gebruikt (zie Figuur II) om tot een inzichtelijke weergave te komen (weergave verkregen vanuit [11]). In het x-y –vlak is de helling β van de ligger gelijk aan $\frac{du}{dx}$, wat samen met Figuur 1.3(b) leidt tot

$$M_{\bar{x}} = M_z \sin\beta \approx M_z\beta \tag{1.7}$$

Wat gecombineerd met β resulteert in

$$M_{\bar{x}} \approx M_z \frac{du}{dx} \tag{1.8}$$

Bij deze afleiding wordt er van uit gegaan dat welving niet van invloed is op het kipgedrag. Welving ontstaat als een doorsnede belast wordt op wringing en daarbij niet vlak blijft en speelt vooral een belangrijke rol bij staalprofielen (I-U-H-V profielen etc.). Voor rechthoekige smalle doorsneden mag de invloed van welving verwaarloosd worden, een aanname die ondersteund wordt door onder andere [6], [11], [12] en [13].

Invullen van vergelijkingen (1.5), (1.6) en (1.8) in de evenwichtsvergelijkingen (1.2), (1.3) en (1.4) levert het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op:

$$M_z = -EI_{zz}\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1.9}$$

$$\phi M_z = -EI_{yy}\frac{d^2u}{dx^2} \tag{1.10}$$

$$M_z\frac{du}{dx} = GI_t\frac{d\phi}{dx} \tag{1.11}$$

Vergelijking (1.9) is een losstaande onafhankelijke vergelijking die de buiging van de ligger in het vlak van de belasting omschrijft. De andere twee vergelijkingen (1.10) en (1.11) zijn gekoppeld en beschrijven samen het gedrag uit het vlak van de belasting, ook wel lateraal genoemd (vandaar de Engelse term ‘*lateral buckling*’). Om tot één uitdrukking te komen, wordt vergelijking (1.11) gedifferentieerd naar x en gesubstitueerd in vergelijking (1.10). Deze differentiatie gaat alleen goed wanneer het moment M_z constant wordt genomen over de ligger, wat dus leidt tot het basisgeval dat besproken wordt in paragraaf 1.3. Wanneer het moment M_z een functie is van *x* dient de kettingregel toegepast te worden. Dit heeft als gevolg dat de differentiaalvergelijking al gauw ingewikkeld wordt voor gevallen die niet overeen komen met het basisgeval.

$$M_z\frac{d^2u}{dx^2} = GI_t\frac{d^2\phi}{dx^2} \tag{1.12}$$

Substitueren van vergelijking (1.12) in vergelijking (1.10) leidt tot de differentiaalvergelijking die het kipgedrag omschrijft.

$$GI_t\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\phi M_z^2}{EI_{yy}} = 0 \tag{1.13}$$

Deze vergelijking beschrijft het evenwicht in de vervormde toestand. Voor een bepaalde waarde van M_z kan het evenwicht nog net gevonden worden; een hogere waarde van het moment leidt tot het verliezen van evenwicht. Het moment M_z waarvoor dit het geval is, wordt het kipmoment genoemd.

1.3 Oplossing voor het basisgeval

Het basisgeval bestaat uit een ligger met lengte ℓ die aan weerszijden is opgelegd met een gaffeloplegging waarbij aan beide uiteinden een even groot moment M_0 aangrijpt, wat leidt tot een constant moment M_0 over de ligger. Voor dit basisgeval kan vergelijking (1.13) vrij eenvoudig opgelost worden door het constante moment in te vullen en vervolgens de niet-triviale oplossing te vinden. Allereerst wordt vergelijking (1.13) omgeschreven tot

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{M_0^2}{GI_tEI_{yy}}\phi = 0 \tag{1.14}$$

Om de afleiding overzichtelijk te houden, wordt de constante α ingevoerd.

$$\alpha = \frac{M_0}{\sqrt{GI_tEI_{yy}}} \tag{1.15}$$

Wat leidt tot de volgende tweede orde homogene differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha^2\phi = 0 \tag{1.16}$$

De algemene oplossing ϕ van vergelijking (1.16) is eenvoudig te vinden en wordt omschreven door een combinatie van een sinus en een cosinus.

$$\phi = \gamma \sin \mathrm{\alpha x} + \delta \cos \alpha x \tag{1.17}$$

Aan weerszijden van de ligger bevindt zich een gaffeloplegging, wat inhoudt dat de rotatie ϕ hier compleet verhinderd wordt, ofwel

$$\phi(x = 0) = \phi(x = l) = 0 \tag{1.18}$$

Na invullen van deze randvoorwaarden in vergelijking (1.17) blijft een homogeen stelsel vergelijkingen over die opgelost kan worden door de determinant van het stelsel gelijk te stellen aan 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

$$0 * \cos \alpha l - 1 * \sin \alpha l = 0 \tag{1.20}$$

Wat uiteindelijk leidt tot de niet-triviale oplossing

$$\sin \alpha l = 0 \rightarrow \ \alpha = n\pi \ met \ n = 1,2,3.. \tag{1.21}$$

Invullen van de gevonden oplossing voor α in vergelijking (1.15) en oplossen naar M_0 leidt uiteindelijk naar de momentwaardes waarvoor nog juist evenwicht gevonden kan worden.

$$M_0 = \frac{n\pi}{l}\sqrt{GI_tEI_{yy}} \tag{1.22}$$

De kritieke waarde van M_0 wordt gevonden voor n = 1. Hiermee is het kipmoment gevonden.

$$M_{0,kritisch} = \frac{\pi}{l}\sqrt{GI_tEI_{yy}} \tag{1.23}$$

Voor gevallen afwijkend van dit basisgeval moet per geval bekeken worden of het kipmoment bepaald kan worden door de differentiaalvergelijkingen op te lossen. Doordat de differentiaalvergelijkingen vaak niet-lineair worden, levert dit complexe vraagstukken op. In paragraaf 1.5 wordt een methode omschreven waarmee dit soort complexiteiten ontweken kunnen worden: de energiemethode.

1.4 Eurocode voorschriften met betrekking tot kippen houten liggers

Het kipgedrag van houten liggers wordt beschreven in NEN-EN 1995-1-1: Ontwerp en berekening van houtconstructies hoofdstuk 6.3.3 [4]. De houtnormen met betrekking tot kip zijn in tegenstelling tot de staalnormen bondig. Dit valt te verklaren doordat houten liggers over het algemeen rechthoekig zijn, wat tot een significante versimpeling van de kipvergelijkingen leidt. In deze paragraaf wordt de eerste orde toetsing besproken. Daarnaast is het altijd toegestaan om een tweede orde toetsing uit te voeren. Hier zal in dit onderzoek niet op in worden gegaan.

De kipstabiliteit moet voor twee gevallen getoetst worden: het geval met alleen een moment M_z en het geval met zowel een moment M_z als een drukkracht N_c. Allereerst wordt het geval met enkel buiging beschouwd. Bij de verwerking van de formules uit de norm is de notatie conform dit rapport gebruikt en de formules komen daarom dus niet exact overeen met de norm.

In de houtnormen wordt gebruik gemaakt van het principe van *de effectieve kiplengte*, waarin een willekeurige situatie vergeleken wordt met het standaardgeval zoals omschreven in paragraaf 1.3. De effectieve kiplengte is afhankelijk van de manier van oplegging, belastings-configuratie en aangrijpingspunt van de belasting, en brengt deze zaken in rekening op de lengte ℓ (zie vergelijking (1.23)) waarover de ligger kipt. Voor een aantal configuraties zijn waardes voor de effectieve kiplengte voorgeschreven in Tabel 1.1

Tabel 1.1: *Effectieve lengte in verhouding tot de overspanning voor verscheidene situaties(Tabel 6.1 uit [4])*

Balktype	**Belastingstype**	ℓ_{ef}/ℓ [a]
Op twee steunpunten	Constant moment Gelijkmatig verdeelde belasting Puntlast in het midden van de overspanning	1,0 0,9 0,8
In overkraging	Gelijkmatig verdeelde belasting Puntlast op het niet-ondersteunde uiteinde van de balk	0,5 0,8

[a] De verhouding tussen de meewerkende lengte ℓ_{ef} en de overspanning ℓ is geldig voor een balk met torsiestijve (gaffel-) opleggingen en belast in het zwaartepunt. Indien de last is toegepast aan de drukzijde van de balk dan behoort ℓ_{ef} te zijn vermeerderd met $2h$ en voor een last aan de trekzijde van de balk kan ℓ_{ef} worden verminderd met $0,5h$.

Met behulp van de gevonden effectieve kiplengtes kan op een vergelijkbare wijze als in vergelijking (1.23) het kritische kipmoment en dus ook de kritische kipspanning bepaald worden.

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{z,crit}}{W_z} = \frac{\pi\sqrt{E_{0.05}I_{yy}G_{0.05}I_t}}{l_{ef}W_z} \tag{1.24}$$

Voor de elasticiteitsmodulus en de afschuivingsmodulus worden de 5-percentielwaardes gebruikt. Dit is nodig omdat de mechanische eigenschappen van hout zeer grote spreidingen vertonen rondom het gemiddelde. Het weerstandsmoment W_z wordt voor rechthoekige doorsneden gevonden door $\frac{1}{6}bh^2$. Omdat voor gedrongen liggers niet alleen het kritische kipmoment maar ook het bezwijkmoment van invloed is op het gedrag (deze benaderen elkaar en voor hele gedrongen liggers zal het bezwijkmoment zelfs eerder optreden), wordt deze in rekening gebracht met behulp van de relatieve slankheid $\lambda_{rel,m}$.

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \tag{1.25}$$

De relatieve slankheid bepaalt uiteindelijk of het gedrag van de ligger bepaald wordt door een combinatie van het bezwijkmoment en het kritische kipmoment of door één van deze twee afzonderlijk. Indien alleen een moment M_z aangrijpt op de ligger, kan de spanning als volgt getoetst worden:

$$\sigma_{m,d} \leq k_{crit} f_{m,d} \tag{1.26}$$

Waarin $\sigma_{m,d}$ de rekenwaarde is van de buigspanning en $f_{m,d}$ de rekenwaarde van de buigsterkte. k_{crit} is een reductiefactor die volgt uit de relatieve slankheid en is bepaald door middel van een groot aantal numerieke simulaties uit te voeren. Er is echter niet bekend in hoeverre de instabiliteitsfactor k_{crit} exact is.

$$k_{crit} = \begin{cases} 1 & voor\ \lambda_{rel,m} \leq 0.75 \\ 1.56 - 0.75\lambda_{rel,m} & voor\ 0.75 < \lambda_{rel,m} \leq 1.4 \\ \dfrac{1}{\lambda_{rel,m}{}^2} & voor\ 1.4 < \lambda_{rel,m} \end{cases} \tag{1.27}$$

Wanneer de ligger over de gehele drukzijde zijdelings ondersteund is, kan k_{crit} gelijk worden gesteld aan 1.0.

Het tweede geval dat getoetst moet worden, is de combinatie van het moment M_z om de sterke as van de ligger en een drukkracht N_c. Voor dit geval moet de spanning in ligger aan de volgende uitdrukking voldoen:

$$\left(\frac{\sigma_{m,d}}{k_{crit} f_{m,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} \leq 1 \tag{1.28}$$

Waarin $\sigma_{c,0,d}$ de rekenwaarde voor de drukspanning evenwijdig aan de vezelrichting is, $f_{c,0,d}$ de rekenwaarde voor de druksterkte evenwijdig aan de vezelrichting en $k_{c,z}$ de reductiefactor voor knikstabiliteit die volgt uit paragraaf 6.3.2 van NEN-EN 1995-1-1 [4]. Uit vergelijking (1.28) volgt dus dat de stabiliteit in het geval van zowel een moment M_z en een drukkracht N_c afhankelijk is van de combinatie van knikstabiliteit en kipstabiliteit. In dit onderzoek zal alleen de kipstabiliteit beschouwd worden waarbij de aanwezigheid van een normaalkracht N_c buiten beschouwing wordt gelaten.

1.5 Theorie achter energiebeschouwingen

In paragraaf 1.2 is een algemene differentiaalvergelijking opgesteld die het kipgedrag van een rechthoekige ligger omschrijft. Voor een constant moment kan deze differentiaalvergelijking eenvoudig opgelost worden. Deze methode wordt echter ingewikkeld en soms zelfs analytisch onoplosbaar wanneer het moment over de ligger varieert. Vanwege deze reden worden er vaak numerieke benaderingen toegepast om tot een oplossing te komen.

Via de klassieke energiebeschouwingsmethode is het echter toch mogelijk om vrij eenvoudig tot een (benadering van de) oplossing te komen. Deze methode is gebaseerd op het principe van energiebehoud. Binnen een systeem kan energie voorkomen in de vorm van vormveranderingsenergie $\mathcal{U}$, kinetische energie $\mathcal{K}$, potentiële energie van de belasting $\mathcal{V}$ en dissipatie-energie $\mathcal{D}$. In dit rapport wordt het probleem vanuit de statica benaderd waardoor gesteld kan worden dat $\mathcal{K} = 0$. Verder wordt aangenomen dat het beschouwde materiaal lineair elastisch is, wat impliceert dat er geen energieverlies is en dus geldt $\mathcal{D} = 0$. Wat rest is de volgende energievergelijking die stelt dat de totale potentiële energie in het systeem constant blijft:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = constant \tag{1.29}$$

Of in andere woorden: wanneer de vormveranderingsenergie in een systeem toeneemt, moet de potentiële energie van de belasting afnemen om te voldoen aan vergelijking (1.29). Nu deze relatie bekend is, zullen beide energievormen afzonderlijk besproken worden.

De vormveranderingsenergie $\mathcal{U}$ is de energie die verbruikt wordt om een element te vervormen. Deze energie is in verscheidene literatuurstukken behandeld (onder andere [2], [6], [12], [14] en [15]) en bestaat voor het beschouwde kipprobleem uit twee elementen: buiging en wringing/torsie. In hoofdstuk 2 zullen deze twee elementen verder behandeld worden.

De potentiële energie van de belasting $\mathcal{V}$ is het energieniveau van een belasting ten opzichte van een bepaald referentiepunt en kan vergeleken worden met de potentiële zwaarte-energie van een element dat zich op een bepaalde hoogte ten opzichte van het referentieniveau bevindt [14]. Wanneer een ligger doorbuigt, verplaatst de belasting met een zekere verticale afstand w. De verandering van de potentiële energie van de belasting $\mathcal{V}$ is dan gelijk aan het negatieve product van de belasting en de afstand w, ofwel de grootte van de arbeid verricht door de belasting (echter wel het tegengestelde teken). Uit vergelijking (1.29) volgt dat de som van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ constant moet blijven, dus een verandering van $\mathcal{V}$ resulteert in een even grote tegengestelde verandering van $\mathcal{U}$.

$$\Delta\mathcal{U} = -\Delta\mathcal{V} \quad \rightarrow \quad \Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V} = 0 \tag{1.30}$$

Dit principe zal gebruikt worden bij het beschouwen van verscheidene belastings-configuraties. Vergelijking (1.30) staat bekend als de stationaire potentiële energie theorie [12]. Zolang voor kleine verplaatsingen of afwijkingen van het systeem aan deze vergelijking kan worden voldaan, is het beschouwde systeem in evenwicht en zal er geen instabiliteit in de vorm van kip of knik optreden. De totale potentiële energie van een systeem is afhankelijk van meerdere variabelen en daarom moet voor een kleine variatie van iedere afzonderlijke variabele voldaan worden aan vergelijking (1.30) om de stabiliteit te behouden, ofwel

$$\frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_1} = 0, \frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_2} = 0, \dots, \frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_n} = 0 \tag{1.31}$$

Het stelsel van vergelijkingen gegeven door (1.31) zal in Bijlage H toegepast worden.

1.6 Samenvatting

In dit hoofdstuk is antwoord gegeven op de eerste deelvraag. De algemene begrippen *kip, gaffelopleggingen, gaffels, kipsteunen* en *effectieve kiplengte* zijn nader uitgelegd. Er is een algemene differentiaalvergelijking afgeleid waarmee het kritische kipmoment M_z bepaald kan worden.

$$GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\phi M_z^2}{EI_{yy}} = 0 \tag{1.32}$$

Vervolgens is deze differentiaalvergelijking opgelost voor het basisgeval met een constant moment M_0 over een ligger die aan weerszijden is opgelegd met gaffelopleggingen.

$$M_{0,kritisch} = \frac{\pi}{l}\sqrt{GI_t EI_{yy}} \tag{1.33}$$

Een overeenkomstige methode is terug gevonden in de Eurocode voorschriften met betrekking tot houtconstructies. In deze normen wordt de overspanningslengte vervangen door de effectieve kiplengte. In de Eurocode is deze effectieve kiplengte maar voor een beperkt aantal gevallen gegeven. Om voor overige belastings-configuraties de effectieve kiplengte te bepalen, wordt gebruik gemaakt van energiebeschouwingen (de differentiaalvergelijking oplossen is vaak onhaalbaar en daarom heeft deze methode de voorkeur). De algemene theorie achter deze energiebeschouwingen is gegeven in paragraaf 1.4, waarbij de belangrijkste vergelijkingen hieronder weergegeven zijn.

$$\Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V} = 0 \tag{1.34}$$

$$\frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_1} = 0, \frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_2} = 0, \dots, \frac{d(\mathcal{U}+\mathcal{V})}{dx_n} = 0 \tag{1.35}$$

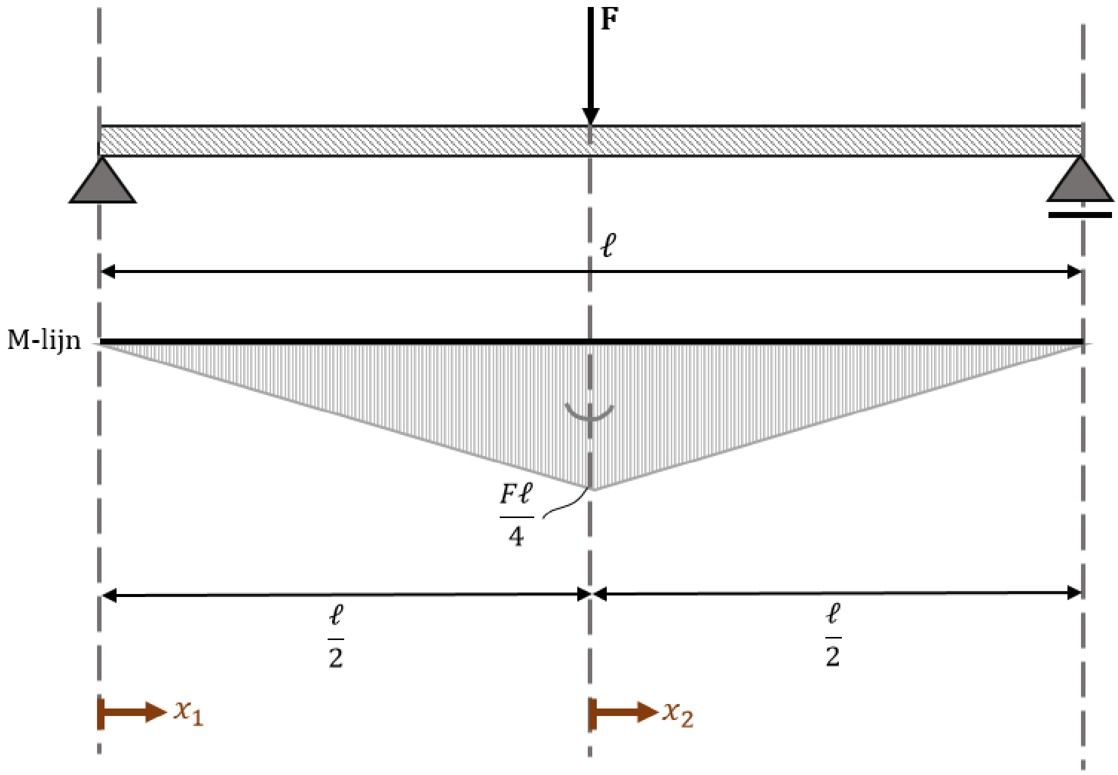
Deze vergelijkingen zullen in het vervolg van dit onderzoeksrapport gebruikt worden om deelvragen 2 tot en met 5 mee te beantwoorden.

2. Ligger belast met puntlast

In dit hoofdstuk zal met behulp van de in paragraaf 1.5 omschreven energiebeschouwing de effectieve kiplengte bepaald worden voor a) een ligger belast met een puntlast in het midden en b) een ligger belast met een puntlast op YL. Beide gevallen zijn reeds door Van Straten [1] beschreven, maar om tot een goed begrip van de methode die in latere hoofdstukken wordt toegepast te komen, is het noodzakelijk om bij de basis te beginnen. De puntlast grijpt in het normaalkrachtencentrum van de doorsnede aan, zodat er geen extra of reducerend torderend moment ontstaat in de doorsnede.

2.1 Ligger belast met een puntlast in het midden

In deze paragraaf wordt de effectieve kiplengte bepaald voor een rechthoekige ligger die aan beide uiteinden is opgelegd met een gaffeloplegging en belast wordt met een puntlast in het midden. De ligger is samen met de bijbehorende momentenlijn weergegeven in Figuur 2.1.



Figuur 2.1: *Een ligger belast met een puntlast F in het midden van de overspanning met de bijbehorende momentenlijn*

Omdat de momentenlijn voor een puntlast niet omschreven kan worden door middel van een continue functie, wordt de ligger opgedeeld in twee delen met twee eigen assen: x_1 en x_2 welke gedefinieerd zijn in Figuur 2.1. Deze twee assen zijn als volgt aan elkaar gerelateerd:

$$x_2 = x_1 + \frac{l}{2} \tag{2.1}$$

De momentenlijn kan ook met één enkele as bepaald worden, maar omdat later in het rapport complexe asymmetrische momentenlijnen zullen verschijnen waarbij meerdere assen meer dan handig zijn, wordt hier voor de eenduidigheid met twee assen gewerkt. In Bijlage D is aangetoond dat beide manieren tot hetzelfde resultaat leiden. De momentenlijn wordt omschreven door het volgende stelsel vergelijkingen:

$$M_z(x_1,x_2) = \begin{cases} M_1 = \frac{1}{2}Fx_1, & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ M_2 = \frac{1}{4}Fl - \frac{1}{2}Fx_2, & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{2.2}$$

Voor de energiebeschouwing van deze ligger moeten de veranderingen van de vormveranderingsenergie $\mathcal{U}$ en de potentiële energie van de belasting $\mathcal{V}$ bepaald worden. De verandering van deze energieën volgt uit het beschouwen van de situatie vlak voor (I) en vlak na het kippen van de ligger (II). Wanneer dit gedaan is, kan vergelijking (1.30) toegepast worden.

2.1.1 Bepaling van $\Delta\mathcal{U}$

Voor een element die op buiging belast wordt, volgt de vormveranderingsenergie $\mathcal{U}$ uit de basis mechanica [14]:

$$\mathcal{U}_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \tag{2.3}$$

Hetzelfde geldt voor een element belast op wringing. $\mathcal{U}$ volgt dan uit

$$\mathcal{U}_w = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_t} dx \tag{2.4}$$

In de situatie voor het kippen (I) werkt er enkel een M_z op de ligger. Er is geen wringing en geen belasting in de andere richtingen. De vormveranderingsenergie voor deze situatie wordt daarmee

$$\mathcal{U}_I = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_{zz}} dx \tag{2.5}$$

In de situatie na het kippen (II) werken er drie momenten op de ligger: $M_{\bar{z}}$, $M_{\bar{y}}$ en $M_{\bar{x}}$ (torderend moment). Met behulp van vergelijking (2.3) en (2.4) leidt dit tot de vormveranderingsenergie voor de situatie na het kippen.

$$\mathcal{U}_{II} = \int_0^l \frac{(M_{\bar{z}})^2}{2EI_{zz}} dx + \int_0^l \frac{(M_{\bar{y}})^2}{2EI_{yy}} dx + \int_0^l \frac{(M_{\bar{x}})^2}{2GI_t} dx \tag{2.6}$$

Samen met vergelijkingen (1.5), (1.6) en (1.8) leidt vergelijking (2.6) tot

$$\mathcal{U}_{II} = \int_0^l \frac{{M_z}^2}{2EI_{zz}} dx + \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2}\int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{2.7}$$

$\Delta\mathcal{U}$ kan nu bepaald worden door het verschil te nemen tussen beide situaties.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_{II} - \mathcal{U}_I = &\left(\int_0^l \frac{{M_z}^2}{2EI_{zz}} dx + \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2}\int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx\right) \\ &- \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI_{zz}} dx = \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2}\int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

Later in deze paragraaf zullen de verschillende termen uit vergelijking (2.8) verder uitgewerkt worden.

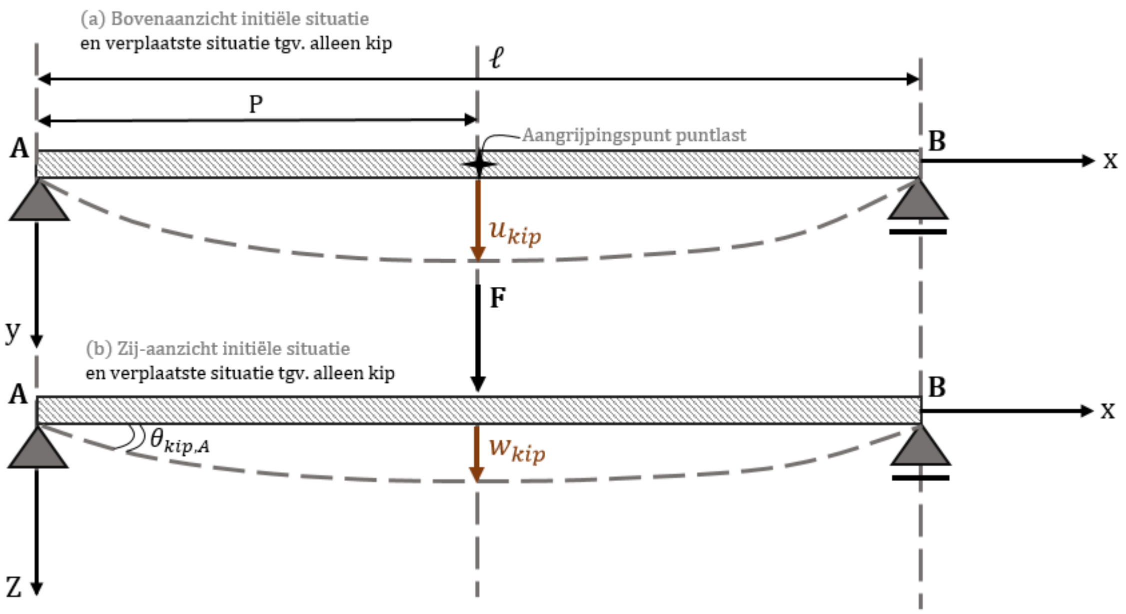
2.1.2 Bepaling van $\Delta\mathcal{V}$

Zoals omschreven in paragraaf 1.5 is de verandering van de potentiële energie van de belasting $\Delta\mathcal{V}$ gelijk aan de arbeid die verricht is door de belasting. Arbeid kan alleen verricht worden door een verplaatsing in de richting van de puntlast en daarom is alleen de verticale verplaatsing *w* van belang voor het bepalen van $\Delta\mathcal{V}$. In de situatie voor het kippen (I), heeft de ligger ter plaatse van de puntlast een verticale doorbuiging w ten gevolge van M_z. In de situatie na het kippen (II) is deze verticale doorbuiging w nog steeds aanwezig. Door de zijdelingse doorbuiging *u* zal er geen extra verticale verplaatsing ontstaan en wordt er dus geen arbeid verricht, zie figuur 2.2(a). Door de rotatie ϕ van de doorsnede ontstaat er echter wel een extra verticale verplaatsing w_{kip}, welke met behulp van Figuur 1.3(a) als volgt bepaald kan worden:

$$w_{kip} = u_{kip} \sin\phi \approx \phi u_{kip} \tag{2.9}$$

De verticale verplaatsing w_{kip}resulteert in de verrichte arbeid (zie figuur 2.2(b)), welke, op het teken na, gelijk is aan $\Delta\mathcal{V}$. Het teken van deze energieverandering is negatief omdat de positieve z-as in de richting wijst van een potentiële energie afname.

$$\Delta\mathcal{V} = -F \cdot w_{kip} \tag{2.10}$$



Figuur 2.2: *Verplaatsing ten gevolge van enkel en alleen kip met a)een bovenaanzicht en b)een zijaanzicht van de ligger*

Nu is echter de verplaatsing u_{kip} nog onbekend. Deze kan bepaald worden met de momentenvlakstellingen conform [10]. Een element met breedte *dx* op een afstand *x* van punt A (volgens figuur 2.2) met een kromming κ_y zal op een afstand *P* ten opzichte van punt A voor een doorbuiging *u* ter grootte van $\kappa_y(p-x)dx$ zorgen. Samen met vergelijking (2.9) leidt dit voor *w* tot $\phi\kappa_y(p-x)dx$. Daarbij zorgt de hoekverdraaiing $\theta_{kip,A}$ voor een extra verplaatsing *w* in *P* ter grootte van $p \cdot \theta_{kip,A}$. Aan de hand van deze afleiding kan nu een uitdrukking voor w_{kip} opgesteld worden conform de bekende momentenvlakstellingen.

$$w_{kip} = p \cdot \theta_{kip,A} - \int_0^P \phi\kappa_y(p-x)dx \tag{2.11}$$

Ook volgt vanuit de mechanica de volgende constitutieve betrekking:

$$\kappa_y = -\frac{M_y}{EI_{yy}} = -\frac{\phi M_z}{EI_{yy}} \tag{2.12}$$

Wat resulteert in een uitdrukking voor w_{kip}.

$$w_{kip} = p \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^P \phi^2 M_z (p - x) dx \tag{2.13}$$

De enige onbekende die hiermee nog overblijft is $\theta_{kip,A}$. Deze kan echter bepaald worden door de momentenvlakstelling toe te passen voor punt B, waarvan bekend is dat de doorbuiging w_{kip} gelijk is aan nul. Toepassen van vergelijking (2.13) en *P* gelijk stellen aan l geeft voor punt B:

$$w_{kip,B} = l \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 M_z (l - x) dx = 0 \tag{2.14}$$

Waaruit een oplossing voor $\theta_{kip,A}$ gevonden kan worden.

$$\theta_{kip,A} = \frac{1}{l \cdot EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 M_z (l - x) dx \tag{2.15}$$

Toepassen van vergelijking (1.30) leidt tot

$$\Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V} = \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx - F \cdot w_{kip} = 0 \tag{2.16}$$

2.1.3 Tussenstap in bepaling effectieve kiplengte

Nu $\Delta\mathcal{U}$ en $\Delta\mathcal{V}$ bekend zijn (zie vergelijking (2.8) en (2.10)), kan met behulp van vergelijking (1.30) het kipmoment bepaald worden.

$$\Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V} = \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx - F \cdot w_{kip} = 0 \tag{2.17}$$

Deze vergelijking kan nu helemaal uitgewerkt worden, wat leidt tot een uitdrukking voor het kritisch kipmoment. Echter, om tot de effectieve kiplengte te komen, wordt er door het American Wood Council [2] en daaropvolgend Van Straten [1] een tussenstap gemaakt om direct tot de effectieve kiplengte te komen. Deze tussenstap bestaat uit het beschouwen van het basisgeval dat omschreven is in paragraaf 1.3. Deze methode werkt alleen indien voor zowel het basisgeval als het beschouwde geval dezelfde rotatievorm is aangenomen. Later in het rapport zal blijken dat dit een redelijk juiste aanname is.

Voor het basisgeval met een constant moment M_0 over de ligger, kan vergelijking (1.30) versimpeld worden tot

$$\Delta\mathcal{U} = \frac{{M_0}^2}{2EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{2.18}$$

Voor de rotatie ϕ van de liggerdoorsnede wordt in de literatuur (Timoshenko [16] was voor zover bekend de eerste die deze aanname deed, echter komt deze aanname ook terug in onder andere [2], [6], [7], [9] [12], [13] en [15]) vaak een sinusvorm aangenomen. Deze vorm volgt daarbij ook uit de oplossing van de differentiaalvergelijking van het basisgeval zoals omschreven in vergelijking (1.17).

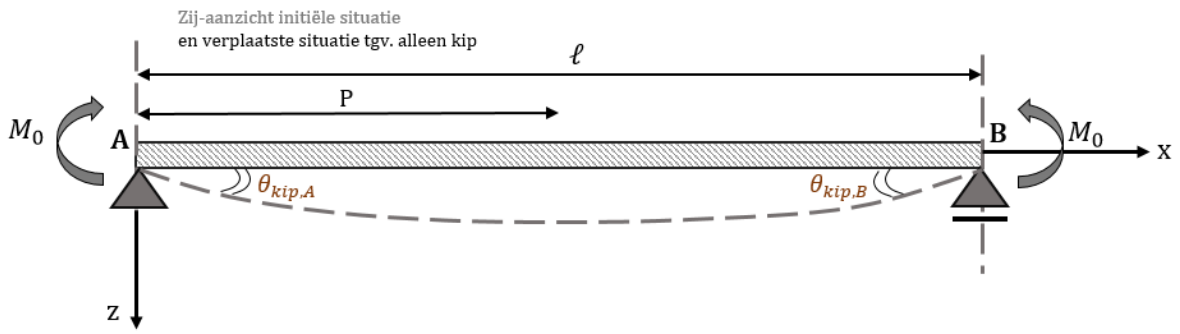
$$\phi = a\,\sin(\frac{\pi}{l}x) \tag{2.19}$$

Deze vorm voldoet aan de randvoorwaarden aan beide randen, welke als volgt zijn gesteld:

$$\phi(0) = \phi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0 \tag{2.20}$$

Waarbij de tweede afgeleide van ϕ aan beide randen gelijk aan nul moet zijn doordat er aan beide gaffelopleggingen geen weerstand is tegen welving (de ligger kan ter plaatse van de gaffelopleggingen vrij roteren om de z-as). De welving is proportioneel aan ϕ' [6]. Doordat er ter plaatse van de gaffelopleggingen geen weerstand is tegen welving is de welving constant en geldt dus $\phi''(0) = \phi''(l) = 0$. Uiteraard kan de rotatievorm ook omschreven worden door een combinatie van verscheidene sinussen. Deze optie is beschouwd in Bijlage H. Uit deze bijlage blijkt dat meenemen van 1 sinusterm voldoende nauwkeurig is ten opzichte van 5 sinustermen. De aangenomen rotatievorm is bepalend voor het eindresultaat van de beschouwing: des te correcter de aangenomen vorm, des te beter de benadering van de effectieve kiplengte. Dit is daarom ook een nadeel van de energiemethode, aangezien de rotatievorm van tevoren vaak onbekend is. Indien de rotatievorm exact correct wordt gekozen, levert de energiebeschouwing ook een exacte oplossing.

De verandering van de potentiële energie van de belasting $\Delta\mathcal{V}$ kan voor een constant moment zeer eenvoudig bepaald worden. Figuur 2.3 weergeeft de belasting samen met de verplaatste stand van de ligger ten gevolge van enkel en alleen het kippen van de ligger (hierbij is dus niet de verplaatsing ten gevolge van het moment M_0 mee genomen!).



Figuur 2.3: *Een ligger belast met een constant moment samen met de verplaatste stand van de ligger ten gevolge het kippen van de ligger*

De arbeid verricht door de belasting is in dit geval gelijk aan $(\theta_{kip,A} + \theta_{kip,b})M_0$ wat door de symmetrie van de belasting verder herleid kan worden tot $2\theta_{kip,a}M_0$. De verrichte arbeid is positief omdat de richtingen van het moment en $\theta_{kip,a}$gelijk aan elkaar zijn. $\theta_{kip,a}$wordt op eenzelfde manier als bepaald als in paragraaf 2.1.2, wat leidt tot

$$\theta_{kip,A} = \frac{M_0}{EI_{yy}}\int_0^l \frac{\phi^2(l-x)}{l}dx \tag{2.21}$$

Wat versimpeld kan worden door de rechterhelft van de integraal verder uit te werken:

$$\int_0^l \frac{(l-x)}{l} dx = \left[x - \frac{x^2}{l}\right]_0^l = \frac{l}{2} \tag{2.22}$$

Samen leidt dit uiteindelijk tot de volgende vergelijking voor $\theta_{kip,A}$ en daaropvolgend $\Delta\mathcal{V}$:

$$\theta_{kip,A} = -\frac{M_0}{2EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \tag{2.23}$$

$$\Delta\mathcal{V} = -\frac{{M_0}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \tag{2.24}$$

Toepassen van vergelijking (1.30) leidt tot

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V} &= \frac{{M_0}^2}{2EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx - \frac{{M_0}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \\ &= -\frac{{M_0}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Wanneer vergelijking (2.16) en vergelijking (2.25) met elkaar vergeleken worden, valt er op dat de wringingsterm in beide vergelijking gelijk is. Hierdoor kunnen de overige termen van vergelijking (2.16) gelijk worden gesteld aan de overige termen van vergelijking (2.25) , wat leidt tot:

$$F \cdot w_{kip} - \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx = \frac{{M_{0,eq}}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \tag{2.26}$$

De hoeveelheid verrichte arbeid wordt genoteerd als dA, en de volgende vereenvoudiging wordt toegepast:

$$dA - \Delta\mathcal{U}_{buiging} = \frac{{M_{0,eq}}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \tag{2.27}$$

Hiermee is een direct verband gevonden tussen aan de ene kant het aanwezige moment M_z en aan de andere kant het constante equivalente moment $M_{0,eq}$ vanuit het basisgeval. Doordat een willekeurig moment nu uitgedrukt kan worden in het basisgeval, is hiermee een uitdrukking gevonden voor de equivalente momentfactor. Doordat de kipmomenten volgens vergelijking (1.23) direct gelinkt zijn aan l, is deze gevonden equivalente momentfactor gelijk aan de effectieve kiplengte.

2.1.4 Bepaling effectieve lengte

Met behulp van vergelijking (2.27) kan nu de effectieve kiplengte bepaald worden voor het beschouwde belastings-geval met een puntlast op het midden van de overspanning. Voor de rotatievorm wordt de volgende sinusvorm aangenomen, conform paragraaf 2.1.3:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \phi_1 = a\sin(\frac{\pi}{l}x_1), & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ \phi_2 = a\sin(\frac{\pi}{l}x_1) = a\sin(\frac{\pi}{l}(x_2 + \frac{l}{2})), & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{2.28}$$

De rotatievorm ϕ wordt evenals de momentenlijn in twee delen gesplitst. $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$ kan met behulp van stelsel (2.2) nu als volgt worden bepaald:

$$\Delta\mathcal{U}_{buiging} = \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi_1 M_1)^2}{2EI_{yy}} dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi_2 M_2)^2}{2EI_{yy}} dx_2 \quad (2.29)$$

Verder wordt $\theta_{kip,A}$ conform vergelijking (2.15) bepaald.

$$\theta_{kip,A} = \frac{1}{l \cdot EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 M_z (l-x) dx$$
$$= \frac{1}{l \cdot EI_{yy}} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_1}^2 M_1 (l - x_1) dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_2}^2 M_2 \left(\frac{l}{2} - x_2\right) dx_2 \right] \quad (2.30)$$

In het derde deel van vergelijking (2.30) wordt de term $(l-x)$ vervangen door $\left(\frac{l}{2} - x_2\right)$ omdat de afstand vanaf een punt x_2 tot aan de rechteroplegging hieraan gelijk is (de afstand tot aan de rechteroplegging werd gebruikt bij het bepalen van $\theta_{kip,A}$ in vergelijking (2.14)). w_{kip} kan nu volgens vergelijking (2.13) bepaald worden.

$$w_{kip,l/2} = \frac{l}{2} \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{l/2} {\phi_1}^2 M_1 \left(\frac{l}{2} - x_1\right) dx_1 \quad (2.31)$$

Nu alle termen uit vergelijking (2.27) bepaald zijn, kan $M_{0,eq}$ bepaald worden. De berekening is geautomatiseerd met behulp van Maple en de bijbehorende code valt te vinden in Bijlage I.1. Dit leidt tot $M_{0,eq} = 0.183\,Fl$. Het maximale moment in de ligger is gelijk aan $0.25\,Fl$, dus de effectieve kiplengte kan als volgt bepaald worden:

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} \cdot l = \frac{0.183\,Fl}{0.25\,Fl} = 0.7321\,l \quad (2.32)$$

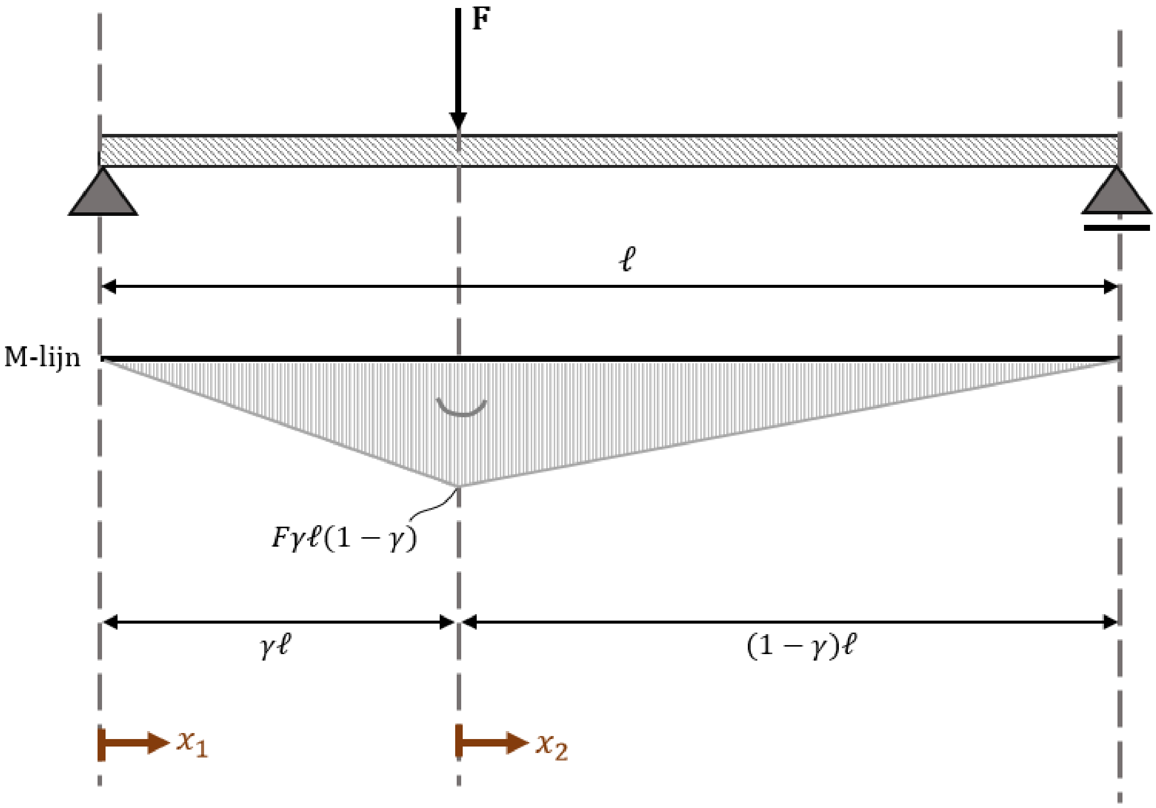
Met behulp van de gevonden effectieve kiplengte en vergelijking (1.23) kan voor een ligger in het midden belast met een puntlast het kritische kipmoment bepaald worden.

$$M_{kip} = \frac{\pi}{l_{eff}} \sqrt{GI_t EI_{yy}} = \frac{\pi}{0.7321 \cdot l} \sqrt{GI_t EI_{yy}} \quad (2.33)$$

Deze waarde komt overeen met geval 4 uit het STEP-dictaat [17] in Bijlage A. Het American Wood Council [2] geeft een waarde van $\frac{1}{1.35} = 0.741$, welke ook terug gevonden kan worden in [12] en [13]. Hiermee kan geconcludeerd worden dat de gevonden effectieve kiplengte en daarmee ook de gebruikte methode voor deze belastings-configuratie overeenkomt met de literatuur.

2.2 Ligger belast met een puntlast op ϒL

In deze paragraaf wordt de effectieve kiplengte bepaald voor een rechthoekige ligger die aan beide uiteinden is opgelegd met een gaffeloplegging en belast wordt met een puntlast op een afstand ϒL vanaf de linker oplegging. De ligger is samen met de bijbehorende momentenlijn weergegeven in Figuur 2.4.



Figuur 2.4: *Een ligger belast met een puntlast op een willekeurige plaats samen met de bijbehorende momentenlijn*

2.2.1 Bepaling momentenlijn

Dit geval wordt op eenzelfde wijze aangepakt als het geval met een puntlast in het midden van de overspanning. Allereerst wordt de momentenlijn opgedeeld in twee delen (x_1 en x_2), wat leidt tot het volgende momentverloop:

$$M_z(x_1, x_2) = \begin{cases} M_1 = (1-\gamma)Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ M_2 = F\gamma l(1-\gamma) - F\gamma x_2, & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{2.34}$$

Daarbij geldt $0 < \gamma < 1$. Op beide uiteinden zal een puntlast niet tot een moment in de ligger leiden en dus hoeft kipstabiliteit in dat geval niet beschouwd te worden. Voor alle overige gevallen zal in de ligger op een bepaald moment het kritieke kipmoment behaald worden. Voor de rotatievorm ϕ na het kippen wordt conform vergelijking (2.28) het volgende aangenomen:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \phi_1 = a\sin(\frac{\pi}{l}x_1), & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ \phi_2 = a\sin(\frac{\pi}{l}(x_2 + \gamma l)), & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{2.35}$$

2.2.2 Bepaling effectieve kiplengte

Met behulp van de momentenlijn en de aangenomen rotatievorm kan nu $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$ bepaald worden volgens vergelijking (2.29). De verrichte arbeid van de puntlast volgt uit vergelijking (2.10), waarbij w_{kip} de verplaatsing van de ligger ten gevolge van enkel en alleen het kippen is op een afstand $p = \gamma l$ van de linker oplegging. Vergelijking (2.13) toepassen geeft

$$w_{kip,\gamma l} = \gamma l \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\gamma l} \phi^2 M_z(\gamma l - x)dx \tag{2.36}$$

Waarin $\theta_{kip,A}$ bepaald wordt conform vergelijking (2.30).

$$\theta_{kip,A} = \frac{1}{l \cdot EI_{yy}} \left[\int_0^{\gamma l} {\phi_1}^2 M_1(l - x_1)dx_1 + \int_0^{(1-\gamma)l} {\phi_2}^2 M_2((1-\gamma)l - x_2)dx_2 \right] \tag{2.37}$$

In vergelijking (2.37) komt in het tweede deel de term $((1-\gamma)l - x_2)$ voor. Deze term volgt uit de afstand van een punt x_2 tot aan de rechter oplegging. Nu alle termen uit vergelijking (2.27) bepaald zijn, kan $M_{0,eq}$ bepaald worden. Hierbij is $M_{0,eq}$ een functie van γ, de parameter die de positie van de puntlast bepaalt. Om tot de effectieve kiplengte te komen, moet het maximale moment in de ligger bekend zijn. Deze is in dit geval gelijk aan $F\gamma l(1-\gamma)$, conform Figuur 2.4. Met behulp van Maple is de berekening geautomatiseerd (zie Bijlage I.2) en de analytische oplossing voor l_{eff} wordt gevonden door

$$l_{eff} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma\pi(\gamma-1)\cos(\pi\gamma)^2 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\cos(\pi\gamma)\sin(\pi\gamma) + \frac{1}{3}\pi(\gamma^2\pi^2 - \pi^2\gamma - \frac{3}{2})\gamma(\gamma-1)}}{\gamma(1-\gamma)} l \tag{2.38}$$

Deze analytische oplossing wordt weergegeven in figuur 2.5. In het STEP-dictaat [17] (zie Bijlage A) wordt voor $\gamma = 0.25$ de effectieve kiplengte gegeven door $0.69\ l$. De gevonden oplossing resulteert voor dit geval in een effectieve kiplengte gelijk aan $0.67\ l$, wat redelijk overeen komt. Een andere benadering wordt gevonden door Trahair [6] (zie Bijlage B), welke vervolgens omgezet is naar de in dit onderzoek gebruikte variabelen:

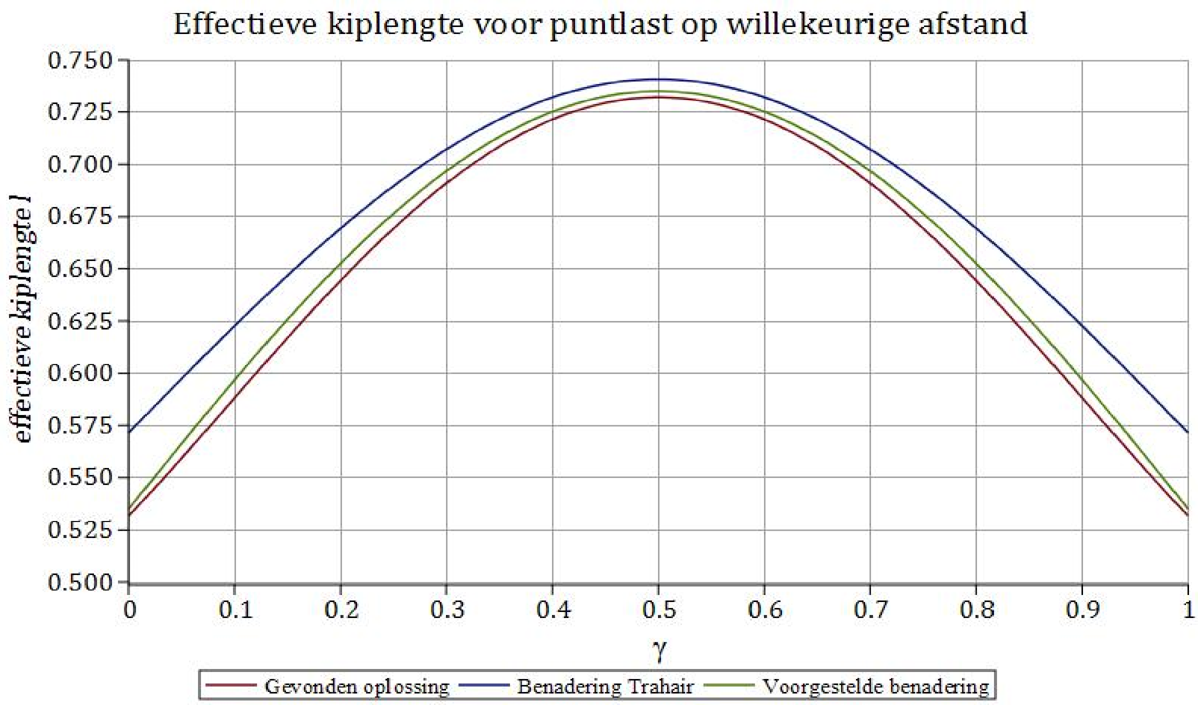
$$l_{eff} \approx \frac{1}{1.35 + 0.4 \cdot (2(\gamma - 0.5))^2} l \tag{2.39}$$

De benadering van Trahair heeft als doeleinde om gebruikt te worden in het ontwerp en is daarom redelijk conservatief van aard. In Figuur 2.5 valt te zien dat de veilige benadering van Trahair altijd boven de theoretische effectieve kiplengte ligt, wat equivalent is aan een lagere (veiligere) waarde van het kritisch moment volgens vergelijking (1.23). Omdat de benadering van Trahair voornamelijk in het gebied rondom de opleggingen significant afwijkt van de gevonden oplossing, wordt de volgende benadering voorgesteld:

$$l_{eff} = (0.2\sin(\pi\gamma) + 0.535)l \tag{2.40}$$

Deze benadering is weergegeven in Figuur 2.5 en benadert de gevonden oplossing beter. Tegelijkertijd geeft de voorgestelde benadering voor iedere locatie een hogere effectieve kiplengte wat leidt tot een lagere en dus veiligere ontwerpcapaciteit.

Vanwege de symmetrie zijn de gevonden oplossing en beide benaderingen symmetrisch in het middelpunt van de ligger. Verder geeft de gevonden theoretische oplossing twee verticale asymptoten



Figuur 2.5: *De gevonden oplossing, de benadering van Trahair en de voorgestelde benadering van de effectieve kiplengte voor een puntlast op een afstand γl vanaf de linker oplegging*

ter plaatse van de twee steunpunten aangezien een puntlast op het steunpunt niet zal leiden tot een moment in de ligger. De theoretische oplossing valt in twijfel te trekken ter plaatse van de opleggingen (of op een zeer kleine afstand van de opleggingen): voor de rotatie ϕ is tijdens het afleiden van de theoretische oplossing een enkeltermige sinusvorm aangenomen, wat voor een puntlast direct naast de oplegging waarschijnlijk niet de correcte rotatievorm is. Wellicht houdt de benadering van Trahair rekening met deze onzekerheid en resulteert dat in de afwijking rondom de opleggingen. Dit kan nader onderzocht worden met behulp van eindige elementen berekeningen, maar hier wordt in dit onderzoek niet verder op in gegaan.

2.3 Samenvatting

In dit hoofdstuk is de tweede deelvraag beantwoord. Eerst is de belastings-configuratie met een puntlast in het midden van de overspanning beschouwd. Hiervoor is gebruik gemaakt van een energiebeschouwing, waarbij voor de rotatievorm na het kippen het volgende aangenomen is.

$$\phi = a \sin(\frac{\pi}{l} x) \tag{2.41}$$

Het gevonden kritische kipmoment voor deze belastings-configuratie is vergeleken met het kritische kipmoment voor het basisgeval met een constant moment over de gehele lengte van de ligger. Hierbij is een methode beschreven waarmee een willekeurig momentenverloop kan worden uitgedrukt in een equivalent constant moment $M_{0,eq}$.Vervolgens wordt de effectieve kiplengte gevonden door

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} \cdot l \tag{2.42}$$

Voor het geval met een puntlast in het midden van de overspanning resulteert deze methode in een effectieve kiplengte gelijk aan $0.7321\ l$. Deze waarde komt overeen met de literatuur.

Ten tweede is de belastings-configuratie met een puntlast op een willekeurige locatie γl op de ligger beschouwd. Op eenzelfde wijze is hiervoor een exacte oplossing gevonden.

$$l_{eff} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma\pi(\gamma-1)\cos(\pi\gamma)^2 + \left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\cos(\pi\gamma)\sin(\pi\gamma) + \frac{1}{3}\pi(\gamma^2\pi^2 - \pi^2\gamma - \frac{3}{2})\gamma(\gamma-1)}{\gamma(1-\gamma)}}\, l \tag{2.43}$$

Deze oplossing blijkt overeen te komen met de in de literatuur omschreven basisgevallen. Verder is een benadering gevonden waarmee de effectieve kiplengte voor dit geval vrij exact bepaald kan worden.

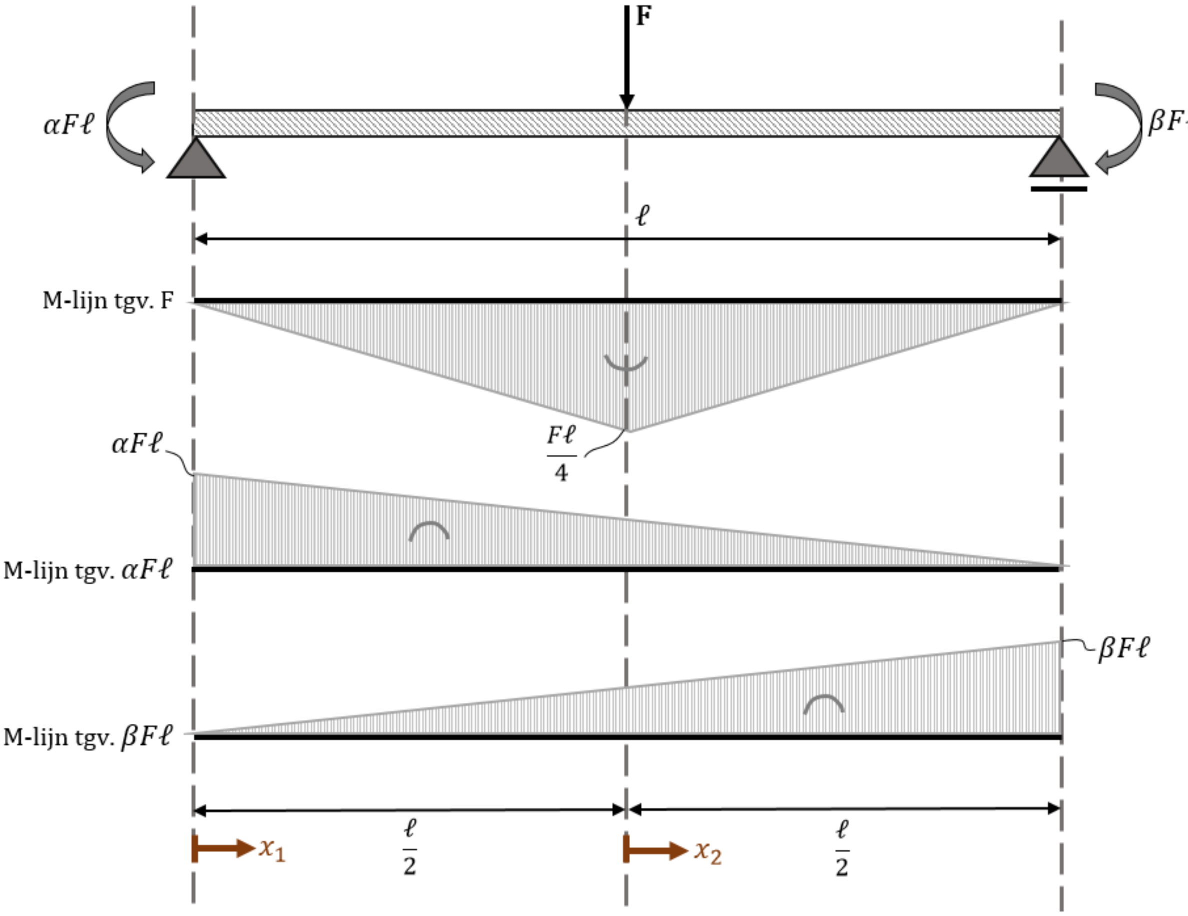
$$l_{eff} = (0.2 \sin(\pi\gamma) + 0.535) l \tag{2.44}$$

In hoofdstuk 3 zal de belastings-configuratie uitgebreid worden met twee kopmomenten.

3. Ligger belast met puntlast in het midden en kopmomenten

In dit hoofdstuk zal de derde deelvraag behandeld en beantwoord worden. Er wordt een rechthoekige ligger beschouwd die aan weerszijden is opgelegd met een gaffeloplegging. Deze ligger wordt in het midden van de overspanning in het normaalkrachtencentrum belast met een puntlast F en aan weerszijden twee verschillende (negatieve) kopmomenten. De positieve richting van de kopmomenten is gekozen in de gebruikelijke richting van het steunpuntsmoment voor een ligger over meerdere steunpunten.

Aan de linkerkant is dit kopmoment gelijk aan αFl en aan de rechterkant βFl. Beide momenten zijn gerelateerd aan de belasting Fl om te zorgen dat de Fl termen later in de beschouwing tegen elkaar wegvallen. De belastings-configuratie en de positief aangenomen richtingen van de kopmomenten zijn weergegeven in Figuur 3.1.



Figuur 3.1: *Een ligger belast met een puntlast in het midden en twee (negatieve) kopmomenten samen met de bijbehorende momentenlijnen*

3.1 Opstellen momentenlijn

Om op een inzichtelijke en overzichtelijke manier tot een uitdrukking voor het verloop van de momentenlijn te komen, zijn alle belastingen afzonderlijk beschouwd. Vervolgens is met het principe van superpositie de complete momentenlijn verkregen. Conform de eerdere beschouwde belastings-configuraties, worden er twee lokale assenstelsels ingevoerd (x_1 en x_2). De tekens van de momenten worden volgens de gemaakte afspraken gebruikt (een positief moment zorgt voor trek aan de onderzijde van de ligger). De afzonderlijke momentenlijnen zijn gevisualiseerd in Figuur 3.1 en resulteren in de volgende uitdrukkingen:

$$M_{z,F}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}Fx_1, & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ \frac{1}{4}Fl - \frac{1}{2}Fx_2, & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$M_{z,\alpha Fl}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\alpha F(l - x_1), & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ -\alpha\left(\frac{Fl}{2} - Fx_2\right), & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$M_{z,\beta Fl}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\beta Fx_1, & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ -\beta\left(\frac{Fl}{2} + Fx_2\right), & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{3.3}$$

Toepassen van het principe van superpositie leidt tot:

$$M_z(x_1,x_2) = \begin{cases} M_1 = (\alpha - \beta + 0.5)Fx_1 - \alpha Fl, & 0 \le x_1 \le \frac{l}{2} \\ M_2 = (\alpha - \beta - 0.5)Fx_2 + 0.5(-\alpha - \beta + 0.5)Fl, & 0 \le x_2 \le \frac{l}{2} \end{cases} \tag{3.4}$$

Voor de bepaling van de effectieve kiplengte moet het maximale moment in de ligger bekend zijn. Door het lineaire verloop van de momentenlijn kan deze eenvoudig bepaald worden: het maximum moment bevindt zich of aan één van de twee uiteinden ($x_1 = 0, x_2 = 0.5l$) of onder de puntlast ($x_2 = 0$). Voor $x_1 = 0$ is het moment gelijk aan $|Fl\alpha|$ en voor $x_2 = 0.5l$ is het moment $|Fl\beta|$. De richting van het moment doet er niet toe, het gaat om de maximale absolute waarde. Voor $x_2 = 0$ is het moment gelijk aan $|Fl(0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta)|$. Hiermee kan een uitdrukking gevonden worden voor het maximale moment in de ligger:

$$M_{max} = Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|) \tag{3.5}$$

Deze uitdrukking is in Bijlage E verder onderzocht om tot een beter begrip van de in paragraaf 3.5 beschreven grafische oplossing te komen.

3.2 Bepaling van $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$

De verandering van de vormveranderingsenergie $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$ kan bepaald worden met behulp van vergelijking (2.29).

$$\Delta\mathcal{U}_{buiging} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi_1 M_1)^2}{2EI_{yy}} dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi_2 M_2)^2}{2EI_{yy}} dx_2 \tag{3.6}$$

3.3 Bepaling van dA

De verandering van de potentiële energie van de belasting $\Delta\mathcal{V}$ kan bepaald worden door de verrichte arbeid dA te bepalen. Bovenop de arbeid die puntlast F verricht, verrichten beide kopmomenten ook nog arbeid. De hoeveelheid verrichte arbeid door de belasting wordt hiermee:

$$dA = F \cdot w_{kip,l/2} - \theta_{kip,A} \cdot \alpha Fl - \theta_{kip,B} \cdot \beta Fl \tag{3.7}$$

$\theta_{kip,A}$ wordt volgens vergelijking (2.30) bepaald en $w_{kip,l/2}$ volgens vergelijking (2.13). $\theta_{kip,B}$ kan vervolgens bepaald worden door te constateren dat $w_{kip,l/2}$ ook vanaf de rechterkant van de ligger bepaald kan worden. Omdat $w_{kip,l/2}$ bekend is, kan $\theta_{kip,B}$ hieruit opgelost worden.

$$w_{kip,l/2,B} = \frac{\theta_{kip,B} l}{2} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_2}^2 M_2 x_2 dx_2 \tag{3.8}$$

In deze vergelijking wordt de term $(l - x)$ van vergelijking (2.30) vervangen door x_2, omdat de afstand vanaf een punt x_2 tot aan het beschouwde punt halverwege de ligger hieraan gelijk is. Vervolgens wordt vanwege continuïteit van de ligger de eis gesteld dat $w_{kip,l/2,A} = w_{kip,l/2,B}$, wat leidt tot

$$\frac{l}{2} \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_1}^2 M_1 \left(\frac{l}{2} - x_1\right) dx_1 = \frac{\theta_{kip,B} l}{2} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_2}^2 M_2 x_2 dx_2 \tag{3.9}$$

Waaruit $\theta_{kip,B}$ opgelost kan worden.

$$\theta_{kip,B} = \frac{2}{l} \left[\frac{l}{2} \cdot \theta_{kip,A} - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_1}^2 M_1 \left(\frac{l}{2} - x_1\right) dx_1 + \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\frac{l}{2}} {\phi_2}^2 M_2 x_2 dx_2 \right] \tag{3.10}$$

Substitutie van de gevonden uitdrukkingen in vergelijking (3.7) leidt tot dA.

3.4 Bepalen van de effectieve kiplengte

Door vergelijkingen (3.6) en (3.7) in te vullen in vergelijking (2.27), kan het equivalente moment $M_{0,eq}$ bepaald worden. Dit is gedaan met behulp van Maple (zie Bijlage I.3). Gecombineerd met het maximale moment vanuit vergelijking (3.5), kan de effectieve lengte nu bepaald worden:

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} \cdot l = \frac{M_{0,eq}}{Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|)} \cdot l \tag{3.11}$$

Hiervoor wordt met behulp van Maple na het samenvoegen van enkele termen de volgende oplossing gevonden:

$$l_{eff} = l \cdot \frac{\sqrt{0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta - 0.1757(\alpha + \beta) + 0.0335}}{\max(|\alpha|, |\beta|, |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|)} \tag{3.12}$$

Wanneer de grootte en de richtingen van de twee kopmomenten bekend zijn, kan met behulp van vergelijking (3.12) de effectieve kiplengte bepaald worden. Opvallend is de overeenkomstigheid tussen de gevonden vergelijking door Van Straten [1] voor een ligger belast met een q-last en twee willekeurige kopmomenten en de gevonden oplossing:

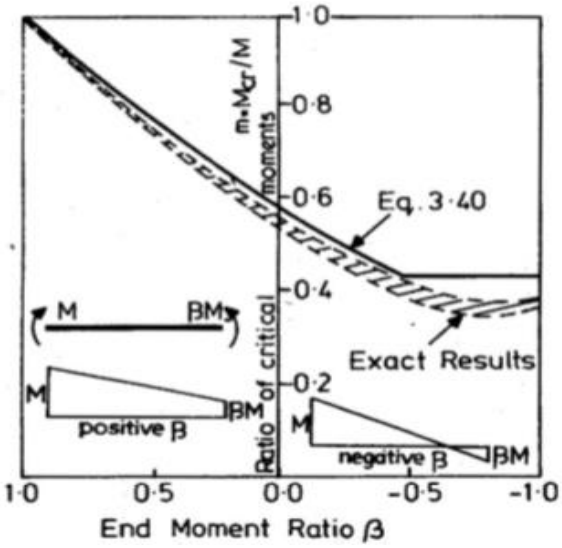
$$l_{eff,Van\ Straten} = ql^2 \cdot \frac{\sqrt{0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta - 0.1086(\alpha + \beta) + 0.0122}}{M_{max}} l \tag{3.13}$$

De term $0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta$ komt overeen met de oplossing voor een puntlast in het midden en aan weerszijden een kopmoment. Voor deze overeenkomst is een verklaring gevonden welke in hoofdstuk 5 besproken wordt.

Om de gevonden oplossing te kunnen verifiëren, is deze met een aantal basisgevallen uit de literatuur vergeleken. Deze zijn hieronder opgesomd.

- Voor $\alpha = \beta = 0$ geeft de oplossing $l_{eff} = 0.7321\, l$, wat gelijk is aan gevonden effectieve kiplengte in paragraaf 2.1.

- Trahair [6] geeft voor $\alpha = \beta = \frac{1}{8}$ (vijfde belastings-configuratie in Bijlage B) $l_{eff} = \frac{1}{1.35+0.36}\, l = 0.585\, l$. Deze configuratie komt overeen met de achtste belastings-configuratie in het STEP dictaat, welke resulteert in $l_{eff} = 0.59\, l$. De gevonden oplossing resulteert in $l_{eff} = 0.578\, l$, wat de literatuurwaardes vrij goed benadert.
- Kirby en Nethercot [7] hebben de belastings-configuratie met twee kopmomenten beschouwd (zie Figuur 3.2) en benaderd met $l_{eff} = 0.57 + 0.33\beta + 0.1\beta^2 \geq 0.43$, waarbij β gedefinieerd is in Figuur 3.2. Hierbij is niet bekend welke oplossingsmethode is gebruikt.



***Figuur 3.2**: Benadering effectieve kiplengte Kirby en Nethercot voor enkel kopmomenten*

Wanneer enkel aan één kant van de ligger een kopmoment aangrijpt en dus geldt $\beta = 0$, is de effectieve kiplengte volgens de benadering van Kirby en Nethercot gelijk $0.57\, l$. Dit komt overeen met de tweede belastings-configuratie in het STEP-dictaat. De in dit onderzoek gevonden oplossing resulteert voor $\alpha = 1000$ en $\beta = 0$ (invloed puntlast is voor deze waardes verwaarloosbaar klein) in $l_{eff} = 0.53\, l$, wat enigszins afwijkt van de benadering. Echter valt in Figuur 3.2 in te zien dat het exacte resultaat voor $\beta = 0$ leidt tot een lagere effectieve kiplengte dan $0.57\, l$, wat overeenkomt met de bevindingen. Hetzelfde kan gedaan worden voor het geval met even grote, maar tegengestelde momenten, wat overeen komt met de derde belastings-configuratie van het STEP-dictaat. De benadering van Kirby en Nethercot leidt voor dat geval tot $l_{eff} = 0.43\, l$, waar de in dit onderzoek gevonden oplossing leidt tot $l_{eff} = 0.36\, l$. Ook deze oplossing is conform het exacte resultaat in Figuur 3.2. Het opgestelde model is dus conform de exacte oplossing van Kirby en Nethercot, die veilig benaderd kan worden met $l_{eff} = 0.57 + 0.33\beta + 0.1\beta^2 \geq 0.43$.

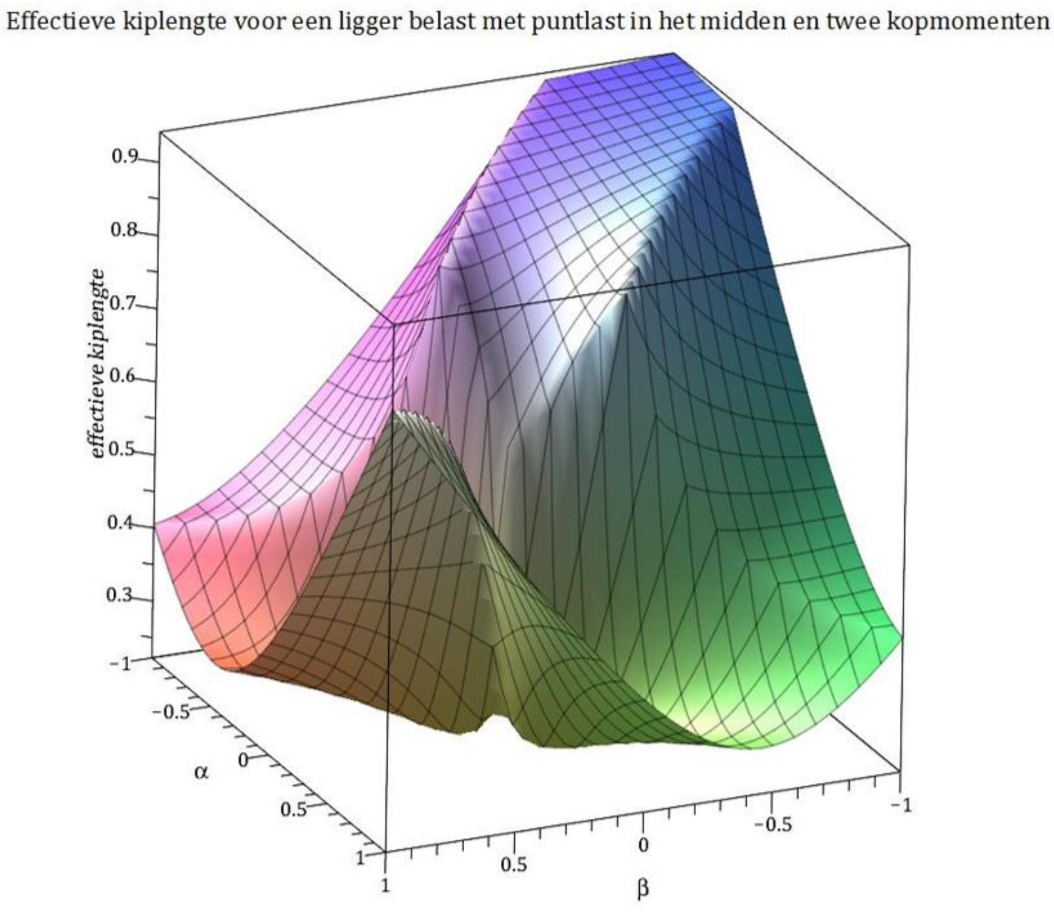
- Trahair heeft de situatie met een puntlast en één kopmoment beschouwd (zie de vierde belastings-configuratie in Bijlage B). Voor een kopmoment gelijk aan $\frac{3}{16}Fl$ leidt de oplossing van Trahair tot $l_{eff} = \frac{1}{1.35+0.15} l = 0.702\, l$ en de in dit onderzoek gevonden oplossing tot $l_{eff} = 0.690$. Deze waardes komen zo goed als overeen.

Uit deze beschouwing kan geconcludeerd worden dat de in dit onderzoek gevonden oplossing voor een ligger die in het midden belast wordt met een puntlast en aan weerszijden een kopmoment conform de waardes uit de literatuur is en dat daarmee de oplossing als geverifieerd beschouwd mag worden.

Omdat de belastings-configuratie met een puntlast in het midden en twee verschillende kopmomenten al gauw nogal asymmetrisch wordt, is in Bijlage H een analyse uitgevoerd waarin tot 6 sinustermen worden meegenomen in de aangenomen rotatievorm. Uit deze analyse blijkt dat de oplossing die gebaseerd is op 1 sinusterm gemiddeld maximaal 4.35% afwijkt van de oplossing met 5 sinustermen. Deze afwijking zit helaas aan de onveilige kant. Echter compenseert de methode met 1 sinusterm dit door zijn eenvoudigheid en continuïteit waardoor deze veel toepasbaarder is. De afwijking dient wel erkent te worden tijdens het gebruik van de in dit onderzoek ontwikkelde methode.

3.5 Grafische oplossingsmethode

Naast de analytische oplossing voor de effectieve kiplengte van een ligger die in het midden belast wordt met een puntlast en aan weerszijden een kopmoment, is het voor de toepasbaarheid en inzichtelijkheid van de oplossing zeer wenselijk om een grafische oplossing te verkrijgen. De oplossing van vergelijking (3.12) is in Figuur 3.3 voor $-1 \leq \alpha \leq 1$ en $-1 \leq \beta \leq 1$ weergegeven.



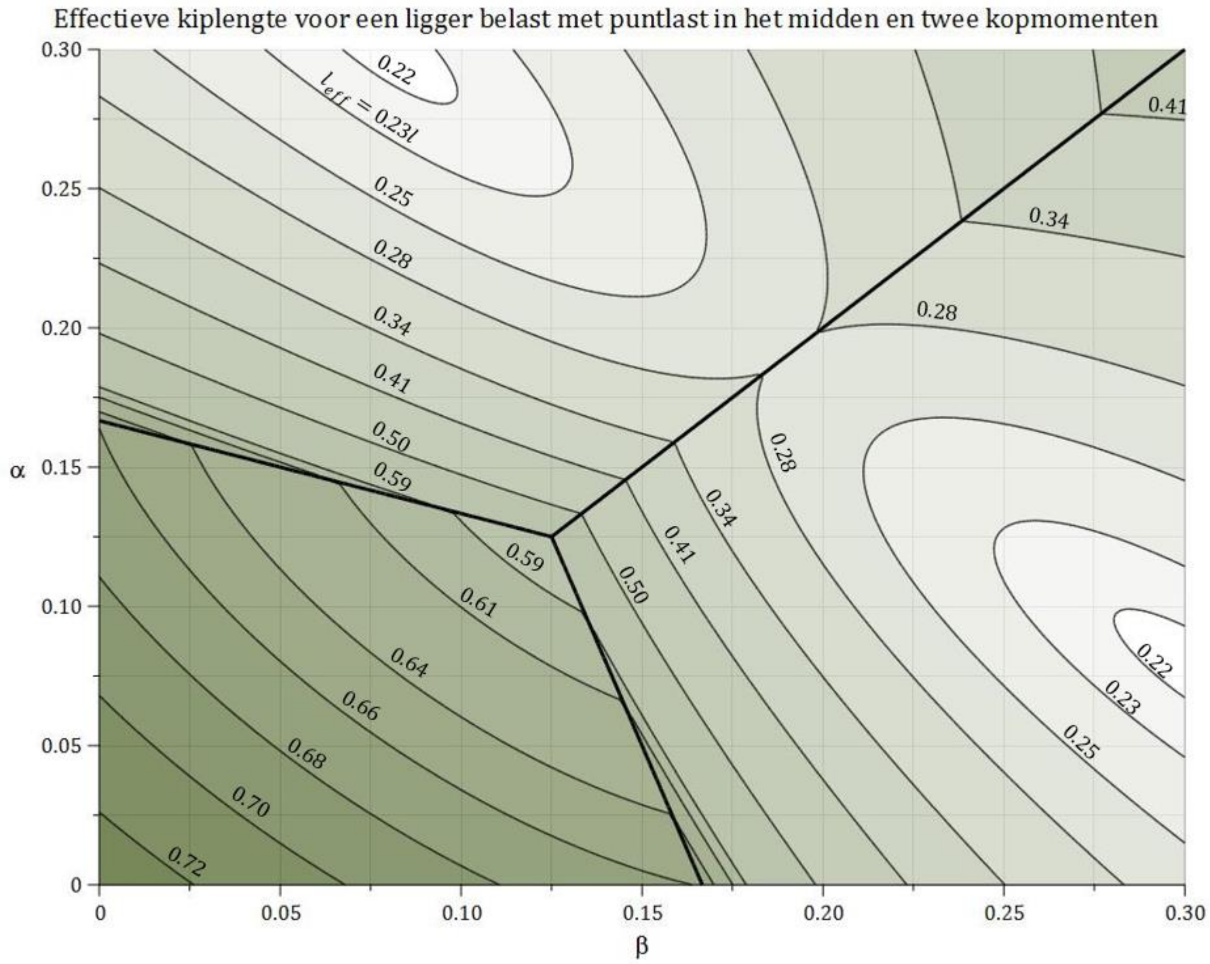
Figuur 3.3: *De effectieve kiplengte voor een ligger belast met een puntlast in het midden en twee kopmomenten in 3D geplot*

In Figuur 3.3 komen de in Bijlage E gevonden 'zones' voor het maximale moment duidelijk naar voren. In feite zou de effectieve kiplengte uit deze figuur afgelezen kunnen worden. Het is echter duidelijker en eenvoudiger in het gebruik om een zogenaamde contourplot/hoogtekaart te maken van het driedimensionale vlak dat de effectieve kiplengte omschrijft.

Deze contourplot is gecreëerd voor $0 \leq \alpha \leq 0.3$ en $0 \leq \beta \leq 0.3$. Deze waardes van α en β zijn gekozen om twee redenen:

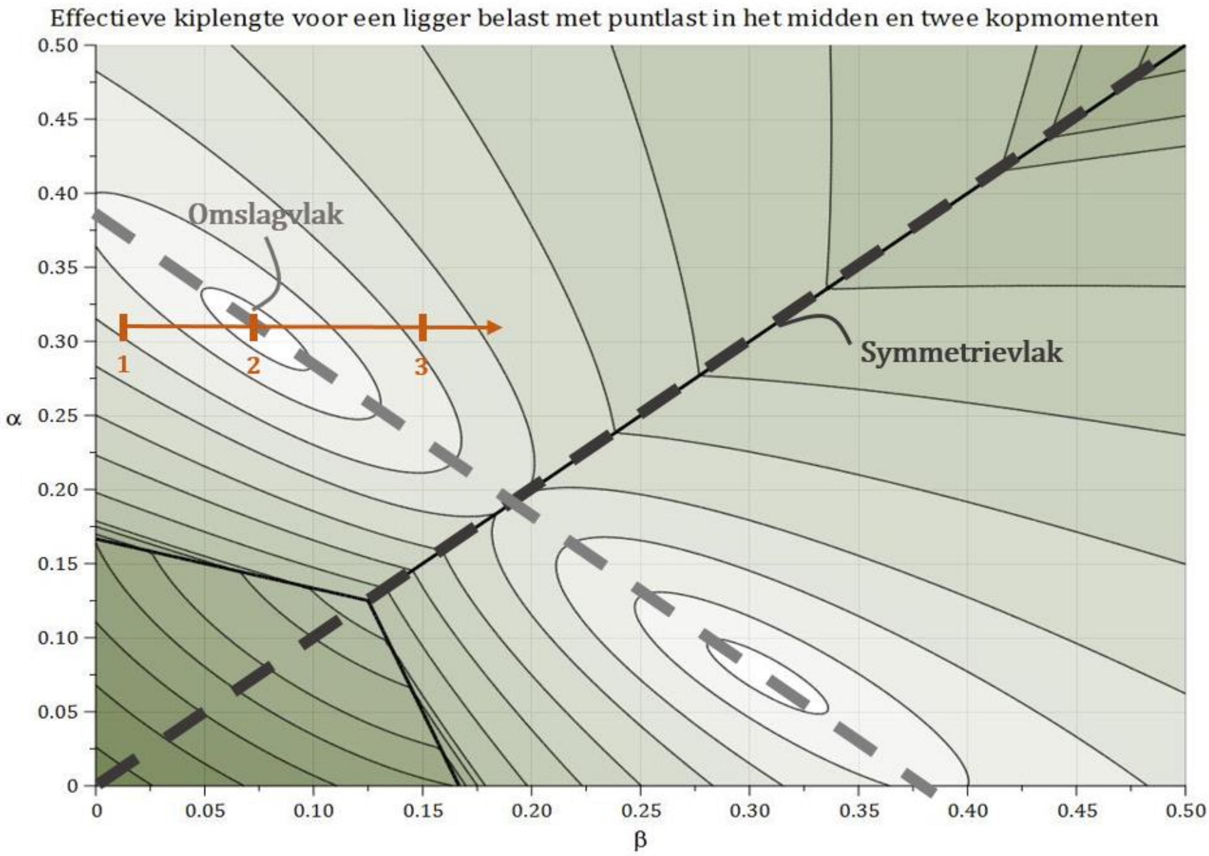
- Ten eerste is deze range van kopmomenten het meest toepasbaar voor liggers. Zo heeft een ligger die aan één kant ingeklemd is en belast met een puntlast in het midden van de overspanning een kopmoment (inklemmingsmoment) gelijk aan $\frac{3}{16}Fl$. Een ligger opgelegd op drie steunpunten en een belasting in het midden van één van de twee velden heeft een kopmoment (in dit geval steunpuntsmoment) gelijk aan $\frac{3}{32}Fl$. Voor meerdere gevallen is het moment bekeken en de gekozen range is voor de standaard gevallen voldoende. Indien in specifieke gevallen de range overschreden wordt, is de grafische methode niet toepasbaar en dient de analytische oplossing toegepast te worden.
- Ten tweede valt er in Figuur 3.3 te zien dat de helling rondom $\alpha = \beta \approx 0.15$ zeer steil is, met als gevolg dat de effectieve kiplengte door een kleine toename van één van de twee variabelen aan grote verandering onderhevig is. Om de resolutie van de contourplot van voldoende niveau te krijgen, moet dit gebied uitvergroot worden. Dit wordt gerealiseerd door de gekozen intervallen voor de kopmomenten.

Figuur 3.4 laat de gecreëerde contourplot (ook wel hoogtekaart genoemd) zien. De contourwaarden zijn op zo'n wijze gekozen dat er een gelijkmatige spreiding van contouren ontstaat. Dit principe zal gedurende de rest van het onderzoek aangehouden worden, waardoor de contourwaardes per geval verschillen. Tussen de contourlijnen dient gebruik te worden gemaakt van interpolatie. De donkere lijnen in het figuur bakenen de verschillende maximale moment zones af (zie Bijlage E).



Figuur 3.4: *Contourplot waaruit de effectieve kiplengte voor een ligger belast met een puntlast in het midden en twee kopmomenten kan worden afgelezen*

Aan Figuur 3.4 vallen een aantal zaken op. Ten eerste convergeert de effectieve kiplengte naar ongeveer $0.73\ l$ wanneer beide kopmomenten naar 0 gaan, wat conform paragraaf 2.1 en 3.4 is. Ten tweede is de contourplot symmetrisch in de lijn $\alpha = \beta$, wat weergegeven is in Figuur 3.5. Dit is logisch te verklaren doordat de belastings-configuratie ook symmetrisch is: omdat de puntlast in het midden aangrijpt kunnen de definities van α en β vrijuit omgewisseld worden zonder daarbij de effectieve kiplengte te beïnvloeden (beide kopmomenten grijpen na omwisselen nog steeds aan op een afstand $0.5l$ vanaf de puntlast). Indien de puntlast niet in het midden van de ligger aangrijpt, kunnen de definities van α en β niet meer vrijuit omgewisseld worden (beide kopmomenten grijpen na omwisselen op verschillende afstanden van de puntlast aan) en zal de contourplot niet meer symmetrisch zijn.

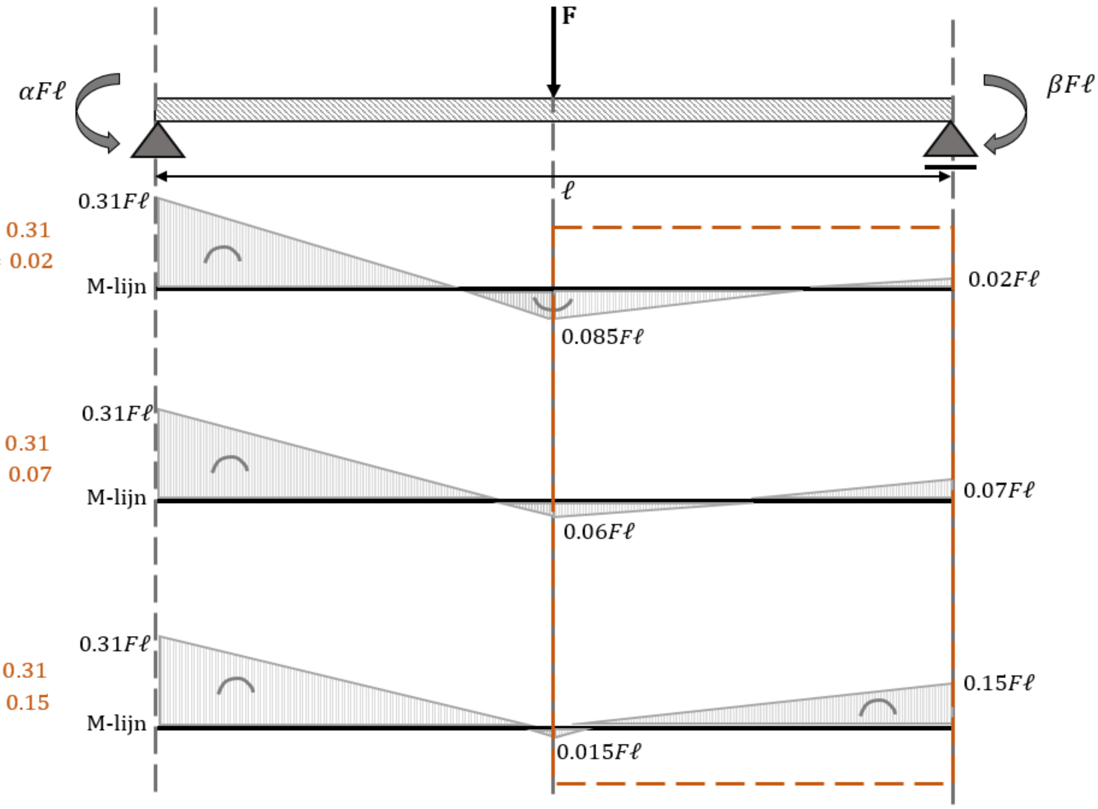


Figuur 3.5: Analyse van de grafische oplossing voor een puntlast in het midden en kopmomenten aan weerszijden

Wanneer een willekeurige waarde voor α wordt gekozen en β stapsgewijs wordt opgehoogd, neemt de effectieve kiplengte af tot aan een bepaald punt. Na dit punt neemt de effectieve kiplengte weer toe. Dit kan gedaan worden voor iedere waarde voor α, met als resultaat het omslagvlak dat weergegeven is in Figuur 3.5. Links van dit vlak neemt de kiplengte voor toenemende kopmomenten af, rechts van dit vlak neemt de kiplengte voor toenemende kopmomenten weer toe. Verder zijn er ten gevolge van de symmetrie twee minima te vinden ter plaatse van $\alpha \approx 0.31$; $\beta \approx 0.07$ en $\alpha \approx 0.07$; $\beta \approx 0.31$. In deze minima is de effectieve kiplengte gelijk aan $0.22l$ en daarmee de momentcapaciteit maximaal.

Met behulp van Figuur 3.6 is gevisualiseerd hoe de momentenlijn verloopt voor een vaste waarde van $\alpha = 0.31$ en een drietal waarden voor $\beta = 0.02, 0.07\ en\ 0.15$ (zie ook Figuur 3.5). Via deze momentenlijnen kan het omslagpunt beredeneerd worden. Dezelfde analyse kan ook uitgevoerd worden voor een vaste waarde van β en een drietal waarden voor α (geeft hetzelfde resultaat). Het maximale moment in de ligger is voor alle drie de gevallen gelijk aan αFl. Deze term verandert dus niet in vergelijking (3.12). Hieruit volgt dat $M_{0,eq}$ de veranderende term is. Dit equivalente moment is als het ware een versimpeling van de ware momentenlijn. Voor de linkerhelft van de ligger zal dit equivalente moment niet significant veranderen omdat deze kant van de momentenlijn vrij constant is voor alle drie gevallen.

Het verschil zit hem echter in de rechterkant van de ligger. Voor het eerste geval met $\alpha = 0.31$ en $\beta = 0.02$ zal het equivalente moment waarschijnlijk positief zijn aangezien het grootste deel van de momentenlijn van de rechterhelft aan de positieve zijde van de momenten-as ligt (zie Figuur 3.6).



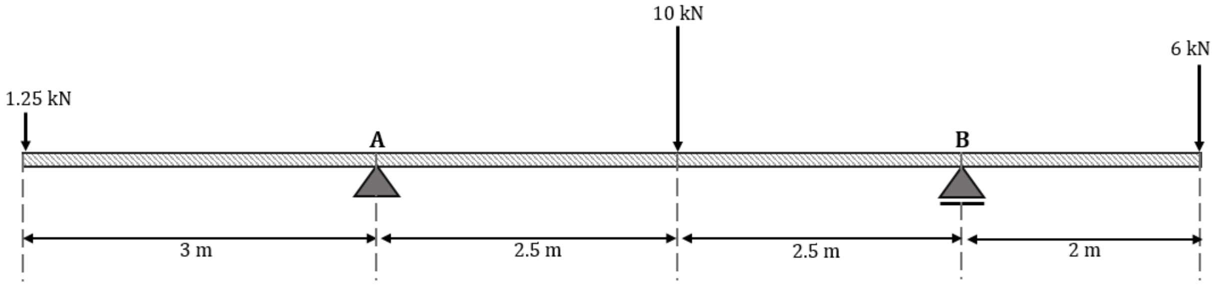
***Figuur 3.6**: Momentenlijnen voor drie gekozen kopmomenten*

Voor het derde geval zal het equivalente moment waarschijnlijk negatief zijn omdat het grootste deel van de momentenlijn van het rechterdeel van de ligger aan de negatieve zijde van de momenten-as ligt. Voor grotere waardes van β zal het equivalente moment zich verder verplaatsen in de negatieve richting.

Het tweede geval laat echter de overgang zien tussen een grotendeels positieve (geval 1) en een grotendeels negatieve (geval 3) momentenverloop voor het rechterdeel van de ligger. Voor dit geval zal het equivalente moment voor dit deel van de ligger hoogstwaarschijnlijk rondom 0 liggen en is het equivalente moment voor dit geval dus minimaal, met als gevolg dat de effectieve kiplengte voor de vastgelegde waarde van $\alpha = 0.31$ minimaal is. In absolute waarde zal het equivalente moment dus afnemen tot een bepaald punt (geval 1 naar geval 2), om vervolgens vanaf dat punt weer toe te nemen (geval 2 naar geval 3). Dit kan voor iedere waarde van α gedaan worden, waarmee een vlak gevonden wordt waarin de oplossing als het ware omslaat. Hiermee is een verklaring gegeven voor het omslagvlak.

3.6 Toepassing grafische methode

Om de grafische methode te verduidelijken, is er een voorbeeld van een toepassing uitgewerkt. Gegeven een ligger op twee steunpunten en aan weerszijden een uitkraging. De ligger wordt in het midden van de overspanning belast met een puntlast van 10 kN, aan het linker eind van de uitkragende ligger met een puntlast van 1.25 kN en aan het rechter eind van de uitkragende ligger met een puntlast van 6 kN. De afmetingen zijn gegeven door Figuur 3.7. Opleggingen A en B zijn gaffelopleggingen.



***Figuur 3.7**: Lengtematen van een ligger op twee steunpunten belast in het midden en aan het eind van de uitkragingen*

Voor het veld tussen de twee opleggingen dient de effectieve kiplengte bepaald te worden. Hierbij kan gebruik worden gemaakt van zowel de exacte methode als de grafische methode. Het toetsen van de uitkragingen op kipstabiliteit wordt buiten beschouwing gelaten aangezien uitkragingen niet tot de scope van dit onderzoek behoren.

Om de effectieve kiplengte te kunnen bepalen, dient de belastings-configuratie gegeven door Figuur 3.7 omgezet te worden naar een equivalente belastings-configuratie volgens Figuur 3.1. De (negatieve) steunpuntsmomenten in A en B worden als volgt bepaald:

$$M_A = 1.25\ kN\ \cdot 3\ m = 3.75\ kNm \tag{3.14}$$

$$M_B = 6\ kN\ \cdot 2\ m = 12\ kNm \tag{3.15}$$

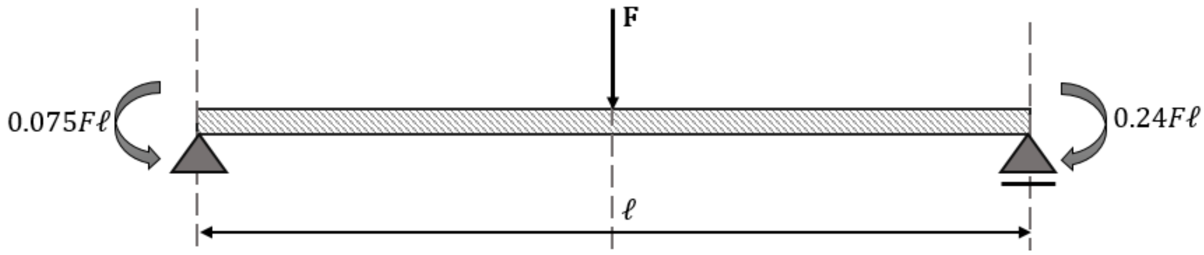
De overspanningslengte ℓ tussen de steunpunten is gelijk aan 5 m en de puntlast *F* in het midden van de ligger is gelijk aan 10 kN. Daarmee wordt de term Fl gelijk aan 50 kNm.

Vervolgens worden de kopmomentfactoren α en β bepaald met behulp van de in vergelijkingen (3.14) en (3.15) gevonden steunpuntsmomenten en de waarde voor Fl.

$$\alpha = \frac{M_A}{Fl} = \frac{3.75\ kNm}{50\ kNm} = 0.075 \tag{3.16}$$

$$\beta = \frac{M_B}{Fl} = \frac{12\ kNm}{50\ kNm} = 0.24 \tag{3.17}$$

Figuur 3.8 weergeeft de equivalente belastings-configuratie waarmee de effectieve kiplengte zowel exact als grafisch bepaald kan worden.



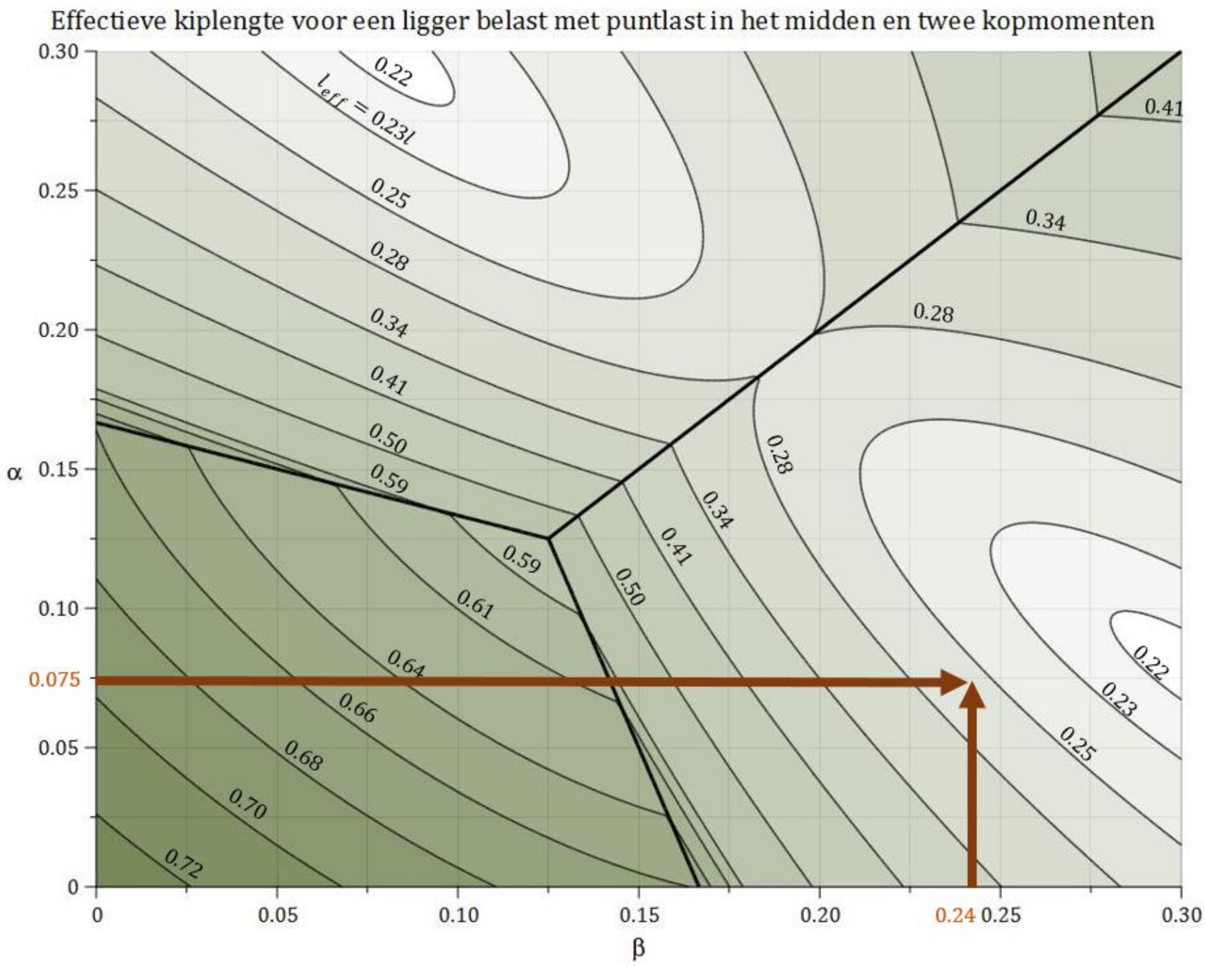
***Figuur 3.8**: Equivalente belastings-configuratie voor deze toepassing*

De exacte oplossing wordt gevonden door vergelijking (3.12) in te vullen.

$$l_{eff} = l \cdot \frac{\sqrt{0.2827(0.075^2 + 0.24^2) + 0.4347 \cdot 0.075 \cdot 0.24 - 0.1757(0.075 + 0.24) + 0.0335}}{\max(|0.075|, |0.24|, |0.25 - 0.5 \cdot 0.075 - 0.5 \cdot 0.24|)} \quad (3.18)$$

$$l_{eff} = l \cdot \frac{\sqrt{0.0621}}{0.24} = 0.258\, l = 0.259 \cdot 5\, m \approx 1.3\, m \quad (3.19)$$

De exacte effectieve kiplengte is dus gelijk aan $0.258\, l$. Dit resultaat kan ook verkregen worden met behulp van de grafische oplossingsmethode. Deze methode is weergegeven in Figuur 3.9



Figuur 3.9: Toepassing grafische oplossingsmethode voor belastings-configuratie gegeven in Figuur 3.7

De grafische oplossing resulteert in een positie tussen twee contouren: $0.25l$ en $0.28l$. De oplossing ligt dichter bij de rechter contour dan bij de linker contour, waardoor met interpolatie een waarde $l_{eff} \approx 0.26l$ wordt gevonden. Deze waarde komt goed overeen met de exacte waarde. Voor een eerste ontwerp wordt aangeraden om gebruik te maken van de inzichtelijke grafische oplossingsmethode. Voor meer gedetailleerd ontwerp wordt echter aangeraden om gebruik te maken van de exacte oplossing volgens vergelijking (3.12). Vervolgens kan de kipstabiliteit-toetsing uitgevoerd worden volgens de in paragraaf 1.4 omschreven methode.

3.7 Samenvatting

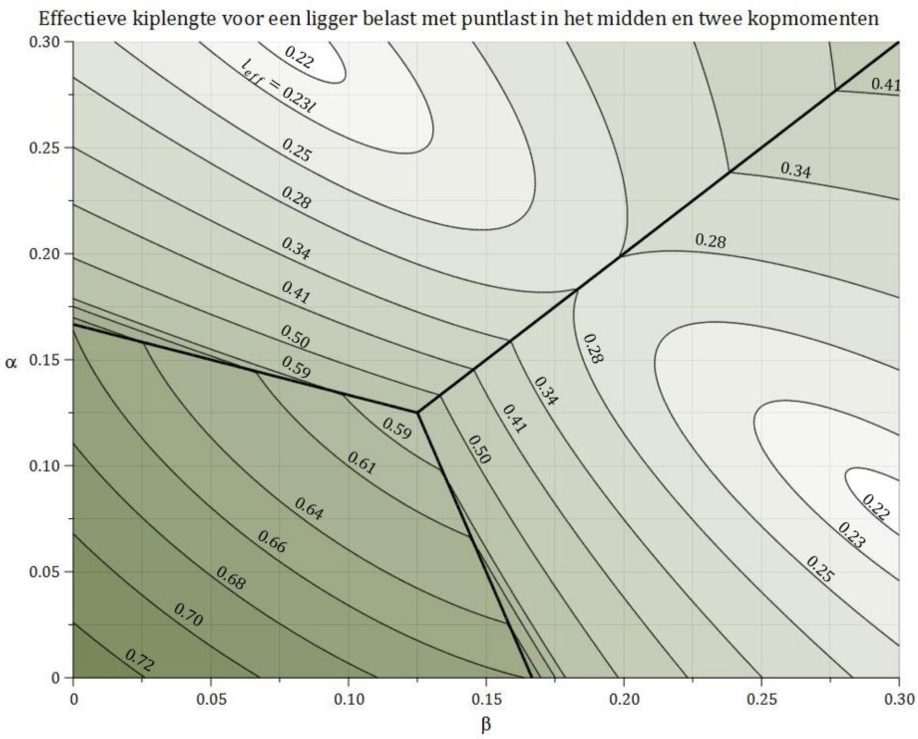
In dit hoofdstuk is de derde deelvraag beantwoord. De belastings-configuratie met een puntlast in het midden en twee kopmomenten αFl en βFl is beschouwd. Met behulp van de energiebeschouwing is voor dit geval een oplossing gevonden voor de effectieve kiplengte. Naast de puntlast voeren de kopmomenten in dit geval ook arbeid uit, waardoor de uitdrukking voor de arbeid uitbreidt naar

$$dA = F \cdot w_{kip,l/2} - \theta_{kip,A} \cdot \alpha Fl - \theta_{kip,B} \cdot \beta Fl \tag{3.20}$$

Met behulp van Maple is een exacte oplossing gevonden. Deze oplossing komt opvallend veel overeen met de gevonden oplossing van Roeland van Straten voor een gelijkmatig verdeelde belasting.

$$l_{eff} = l \cdot \frac{\sqrt{0.2827(\alpha^2+\beta^2)+0.4347\alpha\beta-0.1757(\alpha+\beta)+0.0335}}{\max(|\alpha|,|\beta|,|0.25-0.5\alpha-0.5\beta|)} \tag{3.21}$$

Deze oplossing is vergeleken met meerdere bekende basisgevallen uit de literatuur; de oplossing komt goed overeen en is daarmee geverifieerd. Ter uitbreiding van deze oplossing is een grafische methode ontwikkeld waarmee op een eenvoudige en inzichtelijke wijze de effectieve kiplengte kan worden afgelezen uit een zogenaamde hoogtekaart (ook wel contourplot genoemd).

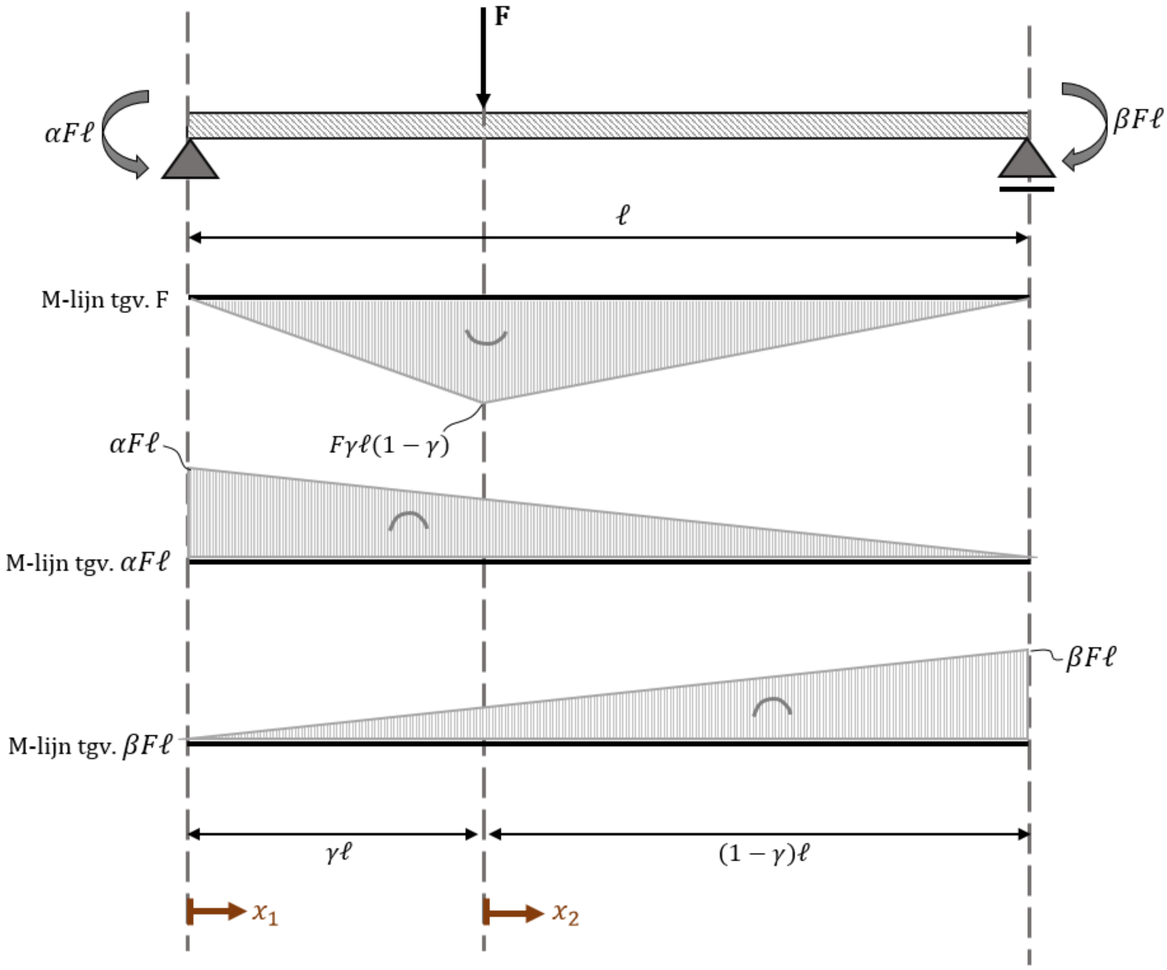


Figuur 3.10: Grafische oplossingsmethode ter bepaling van de effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast in het midden en twee kopmomenten

Het verloop van de hoogtekaart is vervolgens verder geanalyseerd en daarna toegepast op een eenvoudig voorbeeld. In hoofdstuk 4 wordt de belastings-configuratie uitgebreid met een variabele locatie van de puntlast.

4. Ligger belast met puntlast op ϒL en kopmomenten

In dit hoofdstuk zal de vierde deelvraag behandeld en beantwoord worden. De effectieve kiplengte zal bepaald worden voor een rechthoekige ligger aan weerszijden opgelegd met een gaffeloplegging. De ligger wordt op een afstand γl van de linker oplegging in het normaalcentrum belast met een puntlast F en aan beide uiteinden met een kopmoment. De gekozen positieve richtingen zijn conform eerdere gevallen. De belastings-configuratie is weergeven in Figuur 4.1.



***Figuur 4.1**: Een ligger belast met een puntlast op een afstand γl van de linker oplegging en aan weerszijden een verschillend kopmoment met de bijbehorende momentenlijnen*

4.1 Opstellen momentenlijn

De momentenlijnen van de verschillende belastingen komen grotendeels overeen met de momentenlijnen van paragraaf 3.1. De momentenlijnen kunnen als volgt omschreven worden:

$$M_{z,F}(x_1,x_2) = \begin{cases} (1-\gamma)Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ F\gamma l(1-\gamma) - F\gamma x_2, & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{4.1}$$

$$M_{z,\alpha Fl}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\alpha F(l-x_1), & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ -\alpha(Fl(1-\gamma) - Fx_2), & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{4.2}$$

$$M_{z,\beta Fl}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\beta Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ -\beta(Fl\gamma + Fx_2), & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{4.3}$$

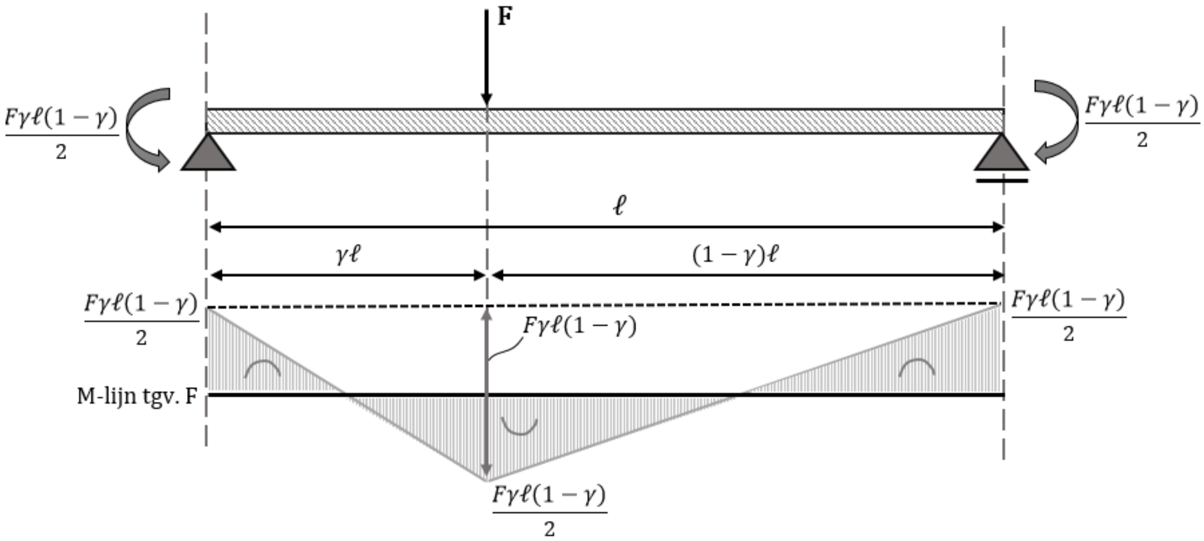
Met behulp van het principe van superpositie wordt de volgende momentenlijn verkregen:

$$M_z = \begin{cases} M_1 = (\alpha - \beta - \gamma + 1)Fx_1 - \alpha Fl, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ M_2 = (\alpha - \beta - \gamma)Fx_2 + \big(-\alpha(1-\gamma) - \beta\gamma + \gamma(1-\gamma)\big)Fl, & 0 \leq x_2 \leq (1-\gamma)l \end{cases} \tag{4.4}$$

Voor de bepaling van de effectieve kiplengte moet het maximale moment in de ligger bekend zijn. Door het lineaire verloop van de momentenlijn kan deze eenvoudig bepaald worden: het maximum moment bevindt zich of aan één van de twee uiteinden ($x_1 = 0, x_2 = (1-\gamma)l$) of onder de puntlast ($x_2 = 0$). Voor $x_1 = 0$ is het moment gelijk aan $|Fl\alpha|$ en voor $x_2 = (1-\gamma)l$ is het moment $|Fl\beta|$. De richting van het moment doet er niet toe, het gaat om de maximale absolute waarde. Voor $x_2 = 0$ is het moment gelijk aan $|Fl(-\alpha(1-\gamma) - \beta\gamma + \gamma(1-\gamma))|$. Hiermee kan een uitdrukking gevonden worden voor het maximale moment in de ligger:

$$M_{max} = Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |-\alpha(1-\gamma) - \beta\gamma + \gamma(1-\gamma)|) \tag{4.5}$$

Deze vergelijking kan op eenzelfde wijze als in Bijlage E geanalyseerd worden. Wederom worden er drie ‘zones’ gevonden: het maximale moment volgt uit het veldmoment, uit het linker kopmoment of uit het rechter kopmoment. De raakvlakken van de verschillende zones worden gevonden door twee van de drie elementen uit vergelijking (4.5) aan elkaar gelijk te stellen. Deze raakvlakken worden later in dit rapport gebruikt om de grafische oplossingsmethode te creëren. Het snijpunt van de drie velden wordt op een zelfde manier als in Bijlage E gevonden door $\alpha = \beta = \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}$. Deze waardes kunnen ook gevonden worden door de momentenlijn te beschouwen. In Figuur 4.2 is de momentenlijn voor de betreffende waardes weergegeven. De drie opties voor de maximale momenten zijn voor deze waardes van α en β gelijk aan elkaar.



Figuur 4.2*: Momentenlijn voor het geval waarbij de kopmomenten gelijk zijn aan het maximale veldmoment*

4.2 Bepalen van de effectieve kiplengte

Om tot de effectieve kiplengte voor dit belastings-geval te komen, moet $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$ volgens vergelijking (2.29) bepaald worden en vervolgens moet dA via vergelijking (3.7) bepaald worden. Hiervoor moet $\theta_{kip,A}$ via vergelijking (2.37) gevonden worden. $\theta_{kip,B}$ kan conform paragraaf 3.3 worden bepaald, waarin enkele termen lichtelijk veranderen wegens de variabele ligging van as x_2. Voor de duidelijkheid is de procedure om $\theta_{kip,B}$ te bepalen hieronder nogmaals uiteen gezet.

$$w_{kip,\gamma l,A} = \theta_{kip,A} \cdot \gamma l - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\gamma l} {\phi_1}^2 M_1(\gamma l - x_1) dx_1 \tag{4.6}$$

$$w_{kip,\gamma l,B} = \theta_{kip,B} l(1-\gamma) - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{l(1-\gamma)} {\phi_2}^2 M_2 x_2 dx_2 \tag{4.7}$$

$$eis\colon w_{kip,\gamma l,A} = w_{kip,\gamma l,B} \tag{4.8}$$

$$\theta_{kip,B} = \frac{1}{l(1-\gamma)} \left[\theta_{kip,A} \cdot \gamma l - \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{\gamma l} {\phi_1}^2 M_1(\gamma l - x_1) dx_1 + \frac{1}{EI_{yy}} \int_0^{l(1-\gamma)} {\phi_2}^2 M_2 x_2 dx_2 \right] \tag{4.9}$$

Nu kan het equivalente moment $M_{0,eq}$ opgelost worden via

$$dA - \Delta\mathcal{U}_{buiging} = \frac{{M_{0,eq}}^2}{EI_{yy}} \int_0^{l} \phi^2 dx \tag{4.10}$$

Wat samen met vergelijking (4.5) leidt tot de effectieve kiplengte.

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} \cdot l = \frac{M_{0,eq}}{Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |-\alpha(1-\gamma) - \beta\gamma + \gamma(1-\gamma)|)} \cdot l \tag{4.11}$$

De berekening is geautomatiseerd met behulp van Maple en de bijbehorende code is te vinden in Bijlage I.4. In de literatuur zijn er geen analyses van het geval met twee kopmomenten en een puntlast op een afstand anders dan $0.5l$ van de linker oplegging gevonden en daarom is een directe vergelijking van de gevonden oplossing niet mogelijk. Wel kan de beschouwde belastings-configuratie terug geleid worden naar de eerder bekeken gevallen, waarmee de gevonden oplossing wel indirect getoetst kan worden. De volgende gevallen zijn indirect getoetst:

- Wanneer $\alpha = \beta$ en de puntlast op één van de twee uiteinden wordt geplaatst, reduceert de belastings-configuratie zich tot het algemene basisgeval met een constant moment over de ligger. Het model geeft voor deze input $l_{eff} = 1.00\ l$, wat correct is.
- Wanneer $\alpha = \beta = 0$ in de puntlast op een willekeurige positie op de ligger aangrijpt, wordt hetzelfde resultaat als in Figuur 2.5 gevonden. Voor $\gamma = 0.25$, geeft het model $l_{eff} = 0.67\ l$, wat overeenkomt met het eerder gevonden resultaat in hoofdstuk 2 en het zevende geval uit het STEP-dictaat.
- Voor $\alpha = 1000$ en $\beta = 0$ (conform paragraaf 3.4), wordt een effectieve kiplengte gevonden gelijk aan $0.53\ l$, wat overeenkomt met de eerder gevonden en geverifieerde waarden. Ook voor $\alpha = 1000$ en $\beta = -1000$ komt het model overeen met de bekende waarden uit de literatuur en paragraaf 3.4: $l_{eff} = 0.36\ l$.

Via deze indirecte vergelijking van de gevonden oplossing met de bekende waardes van de effectieve kiplengte kan geconcludeerd worden dat de gevonden oplossing in ieder geval voldoet voor versimpelde belastings-configuraties en hoogstwaarschijnlijk ook voor de belastings-configuratie gegeven bij Figuur 4.1. Hier kan echter geen uitsluitsel over worden gegeven, omdat er voor deze belastings-configuratie geen waarden bekend zijn in de literatuur. Een eindige elementen berekening zou eventueel uitsluitsel kunnen geven. Dit valt echter buiten de scope van dit onderzoek.

Vergelijking (4.11) bestaat uit twee delen: het equivalente moment $M_{0,eq}$ en het maximale moment in de ligger M_{max}. Het maximale moment in de ligger kan eenvoudig bepaald worden, voor het equivalente moment is dit echter wat lastiger. Voor iedere locatie op de ligger wordt voor $M_{0,eq}$ een zelfde soort uitdrukking gevonden van de volgende vorm:

$$M_{0,eq} = Fl\sqrt{C_1(\alpha^2 + \beta^2) + C_2\alpha\beta + C_3\alpha + C_4\beta + C_5} \qquad (4.12)$$

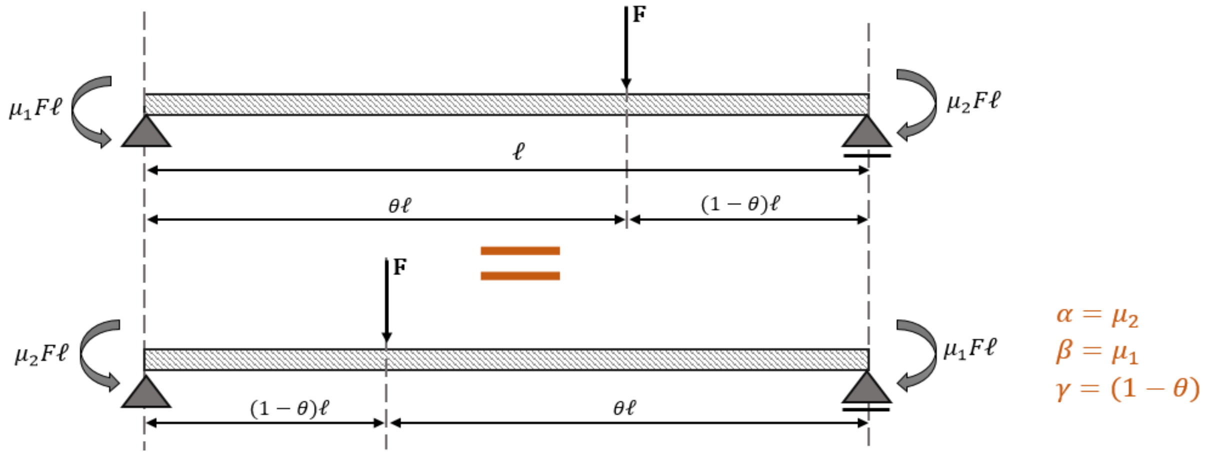
Deze uitdrukking kan ook terug gevonden worden in vergelijking (3.12). Voor verschillende waardes van γ zijn C_1 tot en met C_5 exact bepaald en opgesomd in Tabel 4.1.

***Tabel 4.1**: C1 tot en met C5 voor een aantal locaties van de puntlast*

γ	C1	C2	C3	C4	C5
0.10	0.2827	0.4347	-0.0562	-0.0434	0.0028
0.15	0.2827	0.4347	-0.0833	-0.0651	0.0062
0.20	0.2827	0.4347	-0.1087	-0.0864	0.0106
0.25	0.2827	0.4347	-0.1312	-0.1069	0.0158
0.30	0.2827	0.4347	-0.1501	-0.1263	0.0211
0.33	0.2827	0.4347	-0.1592	-0.1369	0.0241
0.35	0.2827	0.4347	-0.1644	-0.1436	0.0260
0.40	0.2827	0.4347	-0.1735	-0.1581	0.0300
0.45	0.2827	0.4347	-0.1773	-0.1691	0.0326
0.50	0.2827	0.4347	-0.1757	-0.1757	0.0335

C_1 en C_2 blijken voor iedere locatie van de puntlast hetzelfde te zijn. In hoofdstuk 5 zal hier verder op ingegaan worden, in dit hoofdstuk wordt alleen het (versimpelde) gebruik van de gevonden oplossing belicht. Met behulp van Tabel 4.1 kan voor de gegeven locaties, wanneer de grootte van beide kopmomenten bekend is, het equivalente moment en vervolgens de effectieve kiplengte bepaald worden.

Waar de analytische oplossing van vergelijking (4.11) te vinden is voor $0 \leq \gamma \leq l$, is in Tabel 4.1 en in de verdere analyse van deze belastings-configuratie enkel gebruik gemaakt van $0 \leq \gamma \leq 0.5l$. Deze beperking is bewust opgelegd, aangezien een puntlast op de rechterhelft van de ligger ook gespiegeld kan worden naar een puntlast op de linkerhelft van de ligger, waarbij de posities van de kopmomenten αFl en βFl ook omdraaien. Dit is gevisualiseerd door Figuur 4.3. Voor $0.5l \leq \gamma \leq l$ vanaf de linker oplegging gezien, kan de ligger dus gespiegeld worden waardoor de voorwaarde $0 \leq \gamma \leq 0.5l$ weer geldig is. Wel is het belangrijk om de correcte definities van het kopmoment aan te houden: αFl werkt op de linker oplegging (zie Figuur 4.3 voor meer verduidelijking).



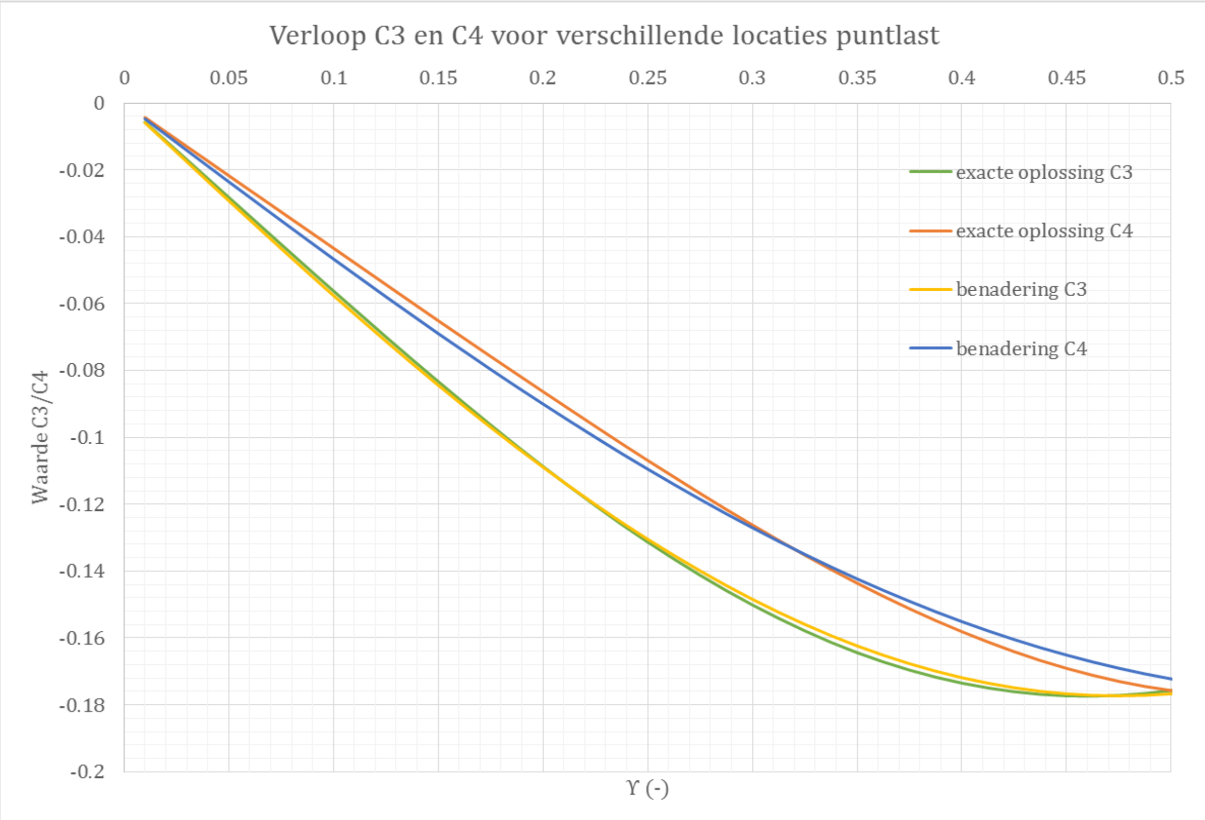
Figuur 4.3: Spiegeling van de belastings-configuratie, waarbij de kopmomenten en locatie van de puntlast volgens de correcte definities bepaald dienen te worden

Naast de getabelleerde waardes voor C_1 tot en met C_5, is het ook mogelijk om deze waardes af te lezen in een continue grafiek (daar waar de tabel discreet is). In Figuur 4.4 is het verloop van C_3 en C_4 gegeven als functie van de locatie γ van de puntlast voor $0 \leq \gamma \leq 0.5\ l$. Naast de waardes die volgen uit de gevonden oplossing, zijn benaderingen gevonden en geplot in Figuur 4.4 waarmee C_3 en C_4 redelijk exact bepaald kunnen worden. Deze benaderingen zijn als volgt:

$$benadering\ C_3 = -0.1773 \sin(\frac{\pi}{0.95}\gamma) \tag{4.13}$$

$$benadering\ C_4 = -0.1773 \sin(\frac{\pi}{1.18}\gamma) \tag{4.14}$$

De gemiddelde absolute afwijking van de benadering van C_3 ten opzichte van de exacte oplossing is 1.37%. Voor de gevonden benadering van C_4 is de gemiddelde absolute afwijking 4.19%.

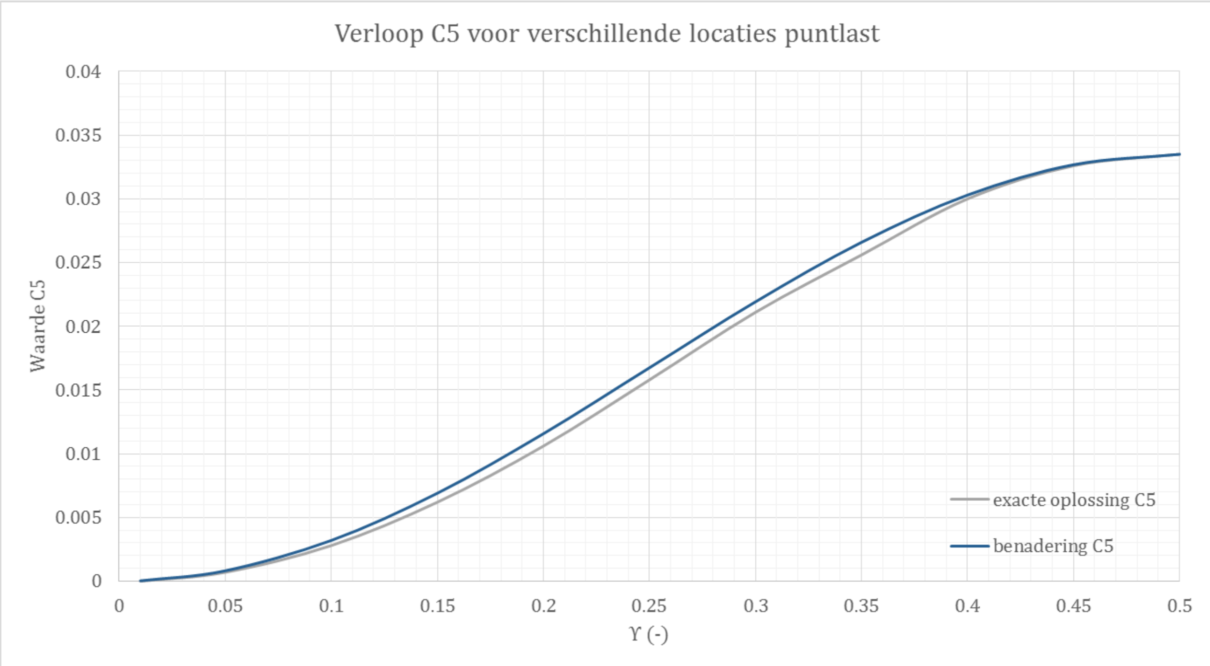


Figuur 4.4: Verloop C3 en C4 voor verschillende locaties van de puntlast, zowel exact als de benadering

In Figuur 4.5 is het verloop van C_5 voor verschillende locaties γ van de puntlast gegeven. Ook voor deze constante is een benadering gevonden.

$$benadering\ C_5 = 0.01675\,[1 - \cos(2\pi\gamma)] \tag{4.15}$$

De absolute gemiddelde afwijking van deze benadering is gelijk aan 6.70%. Met behulp van Figuren 4.4 en 4.5 kan voor iedere locatie het equivalente moment en daarbij dus ook de effectieve kiplengte gevonden worden. Deze methode is zowel gedeeltelijk grafisch (het bepalen van C_3, C_4 en C_5) als gedeeltelijk analytisch (het bepalen van het equivalente moment volgens vergelijking (4.12) en vervolgens de effectieve kiplengte via vergelijking (4.11)).



Figuur 4.5: Verloop C5 voor verschillende locaties van de puntlast, zowel exact als benaderd

4.3 Grafische oplossingsmethode

Op dezelfde wijze als in paragraaf 3.5 is er voor deze belastings-configuratie gezocht naar een grafische oplossing. Doordat de oplossing voor dit geval afhankelijk is van zowel α, β en γ kan er niet volstaan worden met één contourplot. Het probleem is vierdimensionaal en daarom is er voor een beperkt aantal locaties van de puntlast een contourplot gemaakt. Voor overige gevallen kan middels de gedeeltelijk grafische, gedeeltelijk theoretische methode vanuit paragraaf 4.2 bepaald worden.

De raakvlakken en het snijpunt van de maximale moment 'zones' zijn bepaald volgens paragraaf 4.1 en weergegeven in de contourplots middels dikgedrukte zwarte lijnen. De volgende locaties van de puntlast zijn onderzocht: $0.20l, 0.25l, 0{,}33l$ en $0.40l$. De contourplot voor $0.50l$ is in paragraaf 3.5 te vinden. De contourplots voor de puntlast op $0.20l, 0.25l, 0{,}33l$ en $0.40l$ zijn te vinden in respectievelijk Figuren F.1 t/m F.4 van Bijlage F. Zoals reeds omschreven in paragraaf 4.2, zijn deze contourplots, op de definities van α en β na, gelijk aan de contourplots voor puntlasten op $0.80l, 0.75l, 0{,}67l$ en $0.60l$.

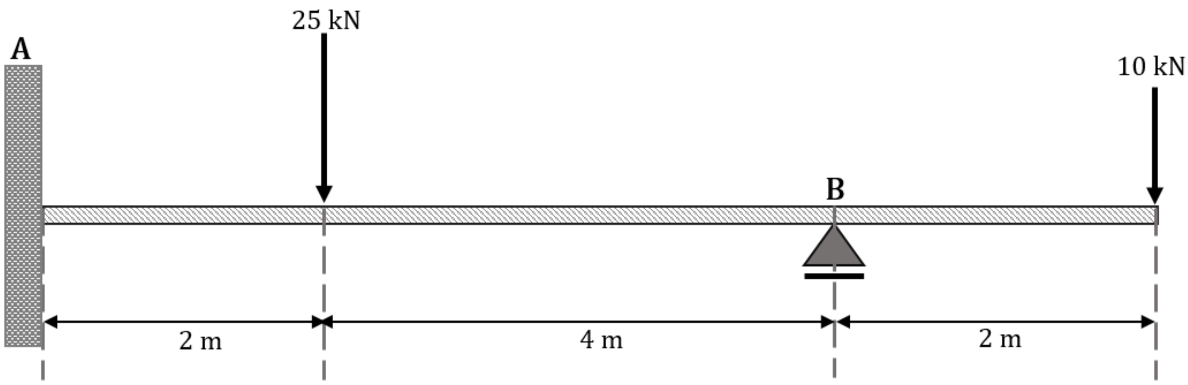
Aan de gecreëerde hoogtekaarten/contourplots vallen een aantal zaken op. Ten eerste zijn de hoogtekaarten niet meer symmetrisch, waar dat in Figuur 3.5 wel het geval is. Dit is te verklaren doordat de belastings-configuratie niet meer te spiegelen valt en daarmee dus asymmetrisch is. De definities van de kopmomenten vallen niet meer zonder gevolg om te draaien. Wel bevatten alle hoogtekaarten een omslagvlak. De locatie van dit omslagvlak varieert per belastings-configuratie, maar valt op een zelfde wijze als in paragraaf 3.5 te beredeneren. Als laatste valt op dat de minimale effectieve kiplengte toeneemt voor toenemende γ. Zo is deze voor $\gamma = 0.25$ gelijk aan $0.10l$, waar het minimum voor $\gamma = 0.4$ gelijk is aan $0.18l$ en het minimum voor $\gamma = 0.5$ gelijk is aan $0.22l$. Eventueel zou met behulp van eindige elementen simulaties hier een verdere analyse op losgelaten kunnen worden om een verklaring hiervoor te vinden. Dat is dit onderzoek echter niet gedaan.

Hiermee zijn dus vijf mogelijkheden gevonden om de effectieve kiplengte te vinden. Afhankelijk van de gevraagde nauwkeurigheid en de locatie van de puntlast dient een van de volgende methoden (of een combinatie daarvan) gebruikt te worden:

- Exacte oplossing vanuit Maple.
- Met behulp van Tabel 4.1, waarin exacte waardes voor C_1 tot en met C_5 gegeven zijn voor een beperkt aantal locaties. Hierbij worden afrondfouten gemaakt.
- Via Figuren 4.4 en 4.5 de exacte waardes voor C_3 tot en met C_5 bepalen. Deze methode is gevoelig voor afleesfouten.
- Middels de gegeven benaderingen C_3 tot en met C_5, waarmee een lichte afwijking geïntroduceerd wordt.
- Voor een beperkt aantal waarden van γ met behulp van de gecreëerde hoogtekaarten. Hierbij kunnen afleesfouten worden gemaakt.

4.4 Toepassing gevonden oplossing

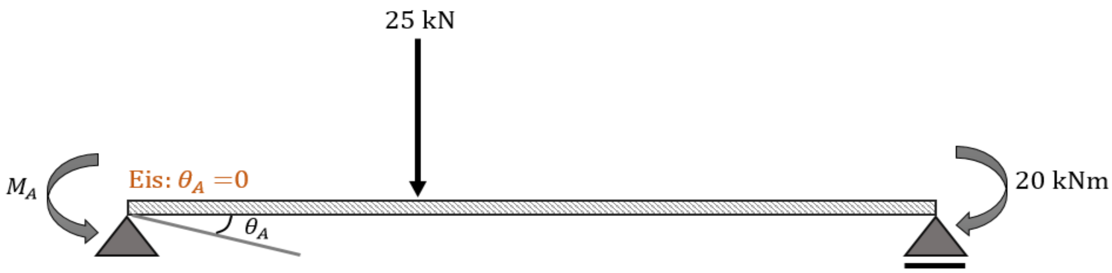
In deze paragraaf zullen zowel de theoretische als de grafische methode toegepast worden, waarna de uitkomsten met elkaar zullen worden vergeleken. Gegeven een ligger die eenzijdig is ingeklemd, met aan de andere zijde een roloplegging en een uitkraging. Deze ligger wordt met een puntlast van 25 kN belast tussen de twee steunpunten en een puntlast van 10 kN aan het eind van de uitkraging. De lengtematen zijn gegeven door Figuur 4.6.



Figuur 4.6: Lengtematen behorend bij de toepassing van de gevonden oplossingen

Oplegging B is een gaffeloplegging. De inklemming in A wordt geschematiseerd met behulp van een inklemmingsmoment en een gaffeloplegging, waarbij de invloed van de inklemming op de kip-rotatievorm buiten beschouwing wordt gelaten (de werkelijke kipvorm zal waarschijnlijk wat afwijken van de aangenomen sinusvorm, het verwaarlozen van de inklemming is echter eerder een veilige onderschatting dan een overschatting van het kritische kopmoment, hier wordt verder op ingegaan in hoofdstuk 7). De effectieve kiplengte van veld AB dient bepaald te worden. De uitkraging wordt wederom niet meegenomen in de toetsing wegens de scope van het onderzoek, alhoewel het kippen van de uitkraging in de praktijk zeer zeker beschouwd moet worden.

Om tot de effectieve kiplengte te komen, moeten de kopmomenten bepaald worden. Het kopmoment in B is simpel te bepalen via $M_B = 10\ kN \cdot 2m = 20\ kNm$. Het inklemmingsmoment in A kan bepaald worden met behulp van de vergeet-mij-nietjes in Bijlage C. Omdat de constructie enkelvoudig statisch onbepaald is, is er een extra vergelijking nodig. Deze vergelijking komt uit de eis dat de hoekverdraaiing in A gelijk aan 0 moet zijn, zie Figuur 4.7.



Figuur 4.7: Schematisatie van de equivalente belasting op veld AB

Met behulp van vergeet-mij-nietje (c) uit Bijlage C wordt voor de hoekverdraaiing ten gevolge van de puntlast het volgende gevonden:

$$\theta_{A,tgv\ F} = +\frac{Fab(l+b)}{6EIl} = +\frac{25\ kN \cdot 2\ m \cdot 4\ m \cdot (6\ m + 4m)}{6EI \cdot 6\ m} = +\frac{500\ kNm^2}{9EI} \qquad (4.16)$$

Op eenzelfde wijze worden de hoekverdraaiingen ten gevolge van beide kopmomenten gevonden met behulp van vergeet-mij-nietje (4):

$$\theta_{A,tgv\,M_B} = -\frac{M_B l}{6EI} = -\frac{20\,kNm \cdot 6\,m}{6EI} = -\frac{20\,kNm^2}{EI} \tag{4.17}$$

$$\theta_{A,tgv\,M_A} = -\frac{M_A l}{3EI} = -\frac{M_A \cdot 6\,m}{3EI} = -\frac{M_A \cdot 2\,m}{EI} \tag{4.18}$$

Door de hoekverdraaiing in A gelijk te stellen aan 0, kan het inklemmingsmoment in A opgelost worden.

$$\theta_{A,tgv\,F} + \theta_{A,tgv\,M_B} + \theta_{A,tgv\,M_A} = 0 \tag{4.19}$$

$$+\frac{500\,kNm^2}{9EI} - \frac{20\,kNm^2}{EI} - \frac{M_A \cdot 2\,m}{EI} = 0 \tag{4.20}$$

$$M_A = \frac{160}{9}\,kNm \tag{4.21}$$

Om tot de factoren α en β te komen, dient de term Fl bekend te zijn. De puntlast F is gelijk aan 25 kN en de overspanningslengte gelijk aan 6 m, wat resulteert in $Fl = 150\ kNm$. De factoren α en β kunnen nu als volgt bepaald worden:

$$\alpha = \frac{M_A}{Fl} = \frac{160}{9 \cdot 150} \approx 0.119 \tag{4.22}$$

$$\beta = \frac{M_B}{Fl} = \frac{20}{150} \approx 0.133 \tag{4.23}$$

De locatie van de puntlast γ is gelijk aan $\frac{2\,m}{6\,m} = \frac{1}{3}$. Allereerst zal de exacte oplossing bepaald worden. Deze kan gevonden worden door C_1 tot en met C_5 af te lezen in Tabel 4.1. Dit geeft $C_1 = 0.2827, C_2 = 0.4347, C_3 = -0.1592, C_4 = -0.1369$ en $C_5 = 0.0241$. Ter vergelijking, deze waardes kunnen ook bepaald worden met behulp van de in paragraaf 4.2 gegeven benaderingen en/of Figuren.

$$\begin{aligned} benadering\ C_3 &= -0.1773 \sin\left(\frac{\pi}{0.95} \cdot \frac{1}{3}\right) = -0.1582 \\ benadering\ C_4 &= -0.1773 \sin\left(\frac{\pi}{1.18} \cdot \frac{1}{3}\right) = -0.1375 \\ benadering\ C_5 &= 0.01675 \left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{3}\right)\right] = 0.0251 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Deze benaderingen benaderen de exacte waardes voor C_3 tot en met C_5 zeer goed. Het equivalente moment wordt vervolgens via vergelijking (4.12) bepaald.

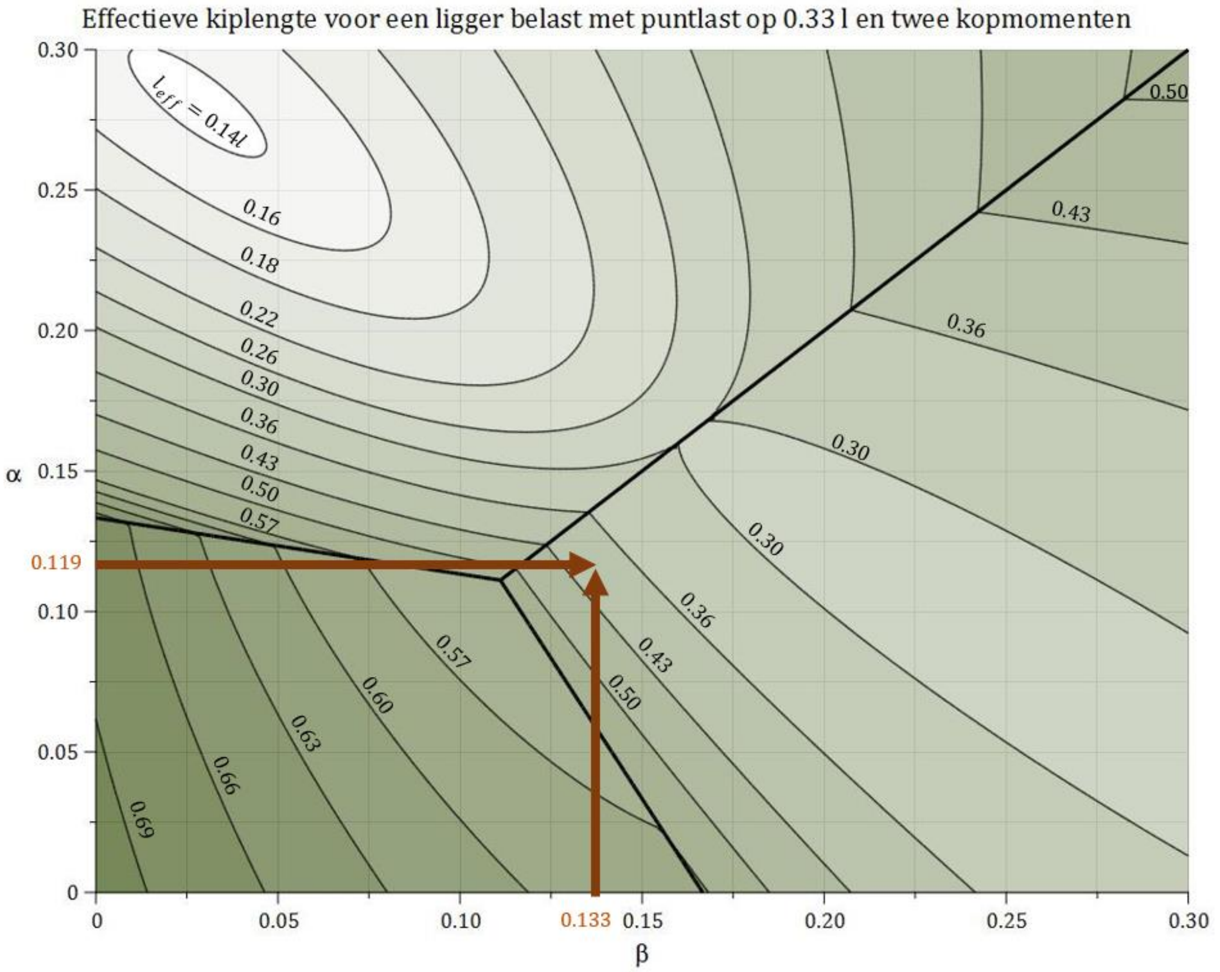
$$\begin{aligned} M_{0,eq} &= Fl\sqrt{0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta - 0.1592\alpha - 0.1369\beta + 0.0241} \\ &= 0.0532\,Fl \end{aligned} \tag{4.25}$$

Vervolgens kan met behulp van vergelijking (4.11) de effectieve kiplengte bepaald worden.

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{Fl \cdot \max\left(|0.119|, |0.133|, \left|-0.119 \cdot \frac{2}{3} - 0.133 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right|\right)} \cdot l = 0.40\,l \tag{4.26}$$

De exacte oplossing voor de effectieve kiplengte is gelijk aan $0.40\,l = 0.40 \cdot 6\,m = 2.4\,m$. Deze zelfde waarde zou moeten volgen uit de grafische methode. In Figuur 4.8 is de grafische methode uitgewerkt.

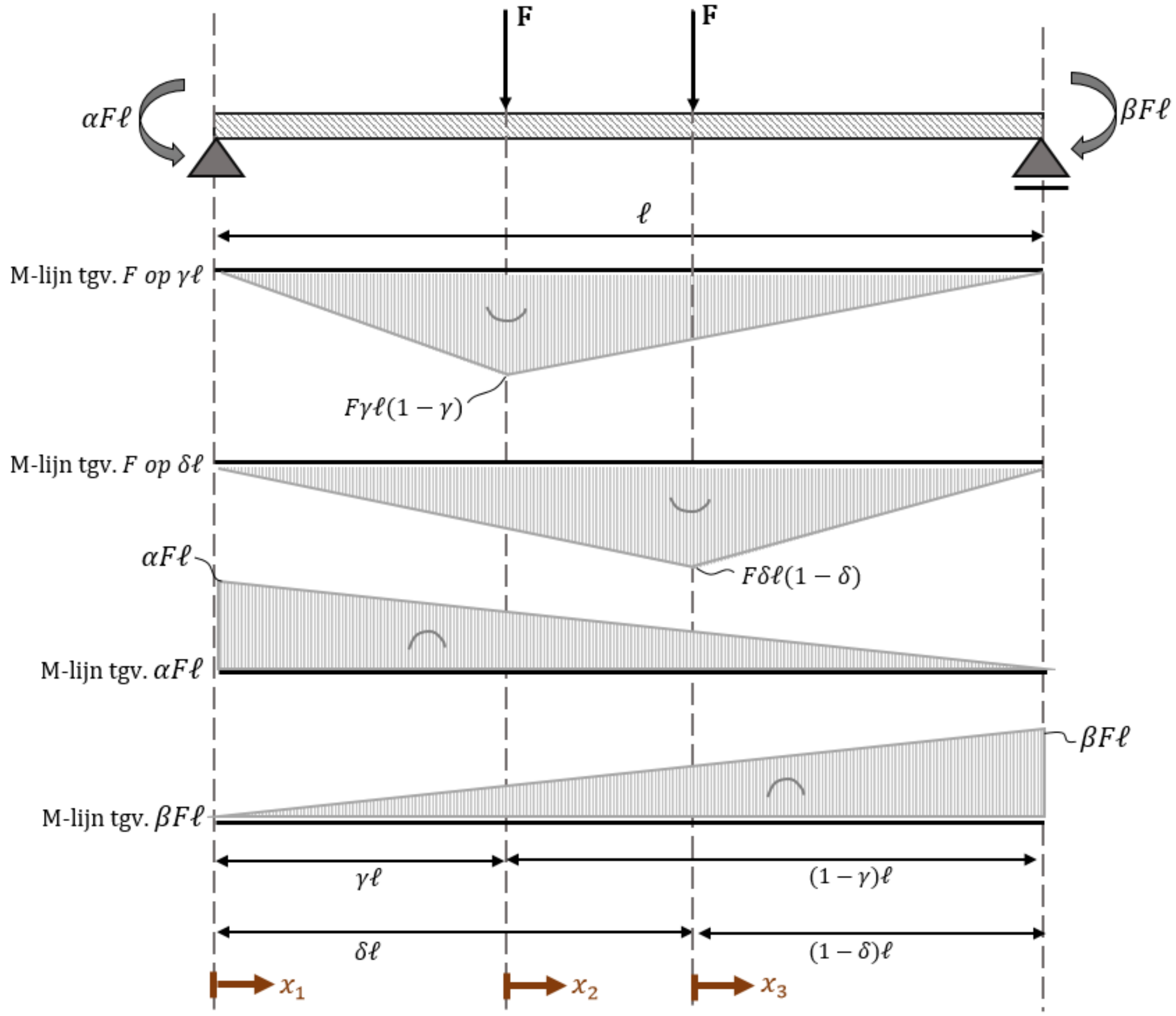
Met behulp van interpolatie wordt een kiplengte van ongeveer $0.40\ l$ gevonden, wat gelijk is aan de exacte oplossing.



***Figuur 4.8**: Toepassing van de grafische methode voor een puntlast op 0.33 l van de linker oplegging*

4.5 Uitbreiding model naar 2 puntlasten

Om het gecreëerde model nog toepasbaarder te maken, is de belastings-configuratie van Figuur 4.1 uitgebreid naar een rechthoekige ligger belast met twee (gelijke) puntlasten: één puntlast F op een afstand γl van de linker oplegging en één puntlast F op een afstand δl van de linker oplegging, waarbij $\delta \geq \gamma$. Beide puntlasten grijpen aan in het normaalkrachtencentrum. De beschouwde belastings-configuratie tezamen met de momentenlijnen van de afzonderlijke componenten is weergegeven in Figuur 4.9.



Figuur 4.9: *Een rechthoekige ligger belast met twee verschillende kopmomenten en twee puntlasten op variabele afstanden γl en δl van de linker oplegging*

Het toevoegen van een extra puntlast aan de ligger heeft als gevolg dat er nu een drie-assig systeem (x_1, x_2 en x_3) is ontstaan, welke gedefinieerd zijn in Figuur 4.9. De afzonderlijke momentenlijnen worden nu omschreven met drie velden in plaats van twee velden, wat leidt tot de volgende uitdrukkingen:

$$M_{z,\gamma}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (1-\gamma)Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ F\gamma l(1-\gamma) - F\gamma x_2, & 0 \leq x_2 \leq (\delta-\gamma)l \\ F\gamma l(1-\delta) - F\gamma x_3, & 0 \leq x_3 \leq (1-\delta)l \end{cases} \tag{4.27}$$

$$M_{z,\delta}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} (1-\delta)Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \gamma l \\ F\gamma l(1-\delta) + (1-\delta)Fx_2, & 0 \leq x_2 \leq (\delta-\gamma)l \\ (1-\delta)\delta Fl - F\delta x_3, & 0 \leq x_3 \leq (1-\delta)l \end{cases} \tag{4.28}$$

$$M_{z,\alpha}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} -\alpha F(l-x_1), & 0 \le x_1 \le \gamma l \\ -\alpha Fl(l-\gamma) + \alpha F x_2, & 0 \le x_2 \le (\delta-\gamma)l \\ -\alpha Fl(l-\delta) + \alpha F x_3, & 0 \le x_3 \le (1-\delta)l \end{cases} \quad (4.29)$$

$$M_{z,\beta}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} -\beta F x_1, & 0 \le x_1 \le \gamma l \\ -\beta F\gamma l - \beta F x_2, & 0 \le x_2 \le (\delta-\gamma)l \\ -\beta F\delta l - \beta F x_3, & 0 \le x_3 \le (1-\delta)l \end{cases} \quad (4.30)$$

Wederom wordt het principe van superpositie toegepast, wat leidt tot de volgende uitdrukking voor de totale momentenlijn.

$$\begin{aligned} &M_z(x_1,x_2,x_3) \\ &= \begin{cases} (2-\gamma-\delta+\alpha-\beta)Fx_1 - \alpha Fl, & 0 \le x_1 \le \gamma l \\ (1-\gamma-\delta+\alpha-\beta)Fx_2 + (\gamma(2-\gamma-\delta) - \alpha(1-\gamma) - \beta\gamma)Fl, & 0 \le x_2 \le (\delta-\gamma)l \\ (-\gamma-\delta+\alpha-\beta)Fx_3 + \big((\gamma+\delta-\alpha)(1-\delta) - \beta\delta\big)Fl, & 0 \le x_3 \le (1-\delta)l \end{cases} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Voor de bepaling van de effectieve kiplengte dient het maximale moment in de ligger bekend te zijn. Het maximum moment bevindt zich of aan één van de twee uiteinden ($x_1 = 0, x_3 = (1-\delta)l$) of onder één van de twee puntlasten ($x_2 = 0, x_3 = 0$). Deze waardes kunnen met behulp van stelsel (4.31) bepaald worden. In $x_1 = 0$ is het moment gelijk aan $Fl|\alpha|$ en in $x_3 = (1-\delta)l$ gelijk aan $Fl|\beta|$. In $x_2 = 0$ is het moment $Fl|\gamma(2-\gamma-\delta) - \alpha(1-\gamma) - \beta\gamma|$ en in $x_3 = 0$ gelijk aan $Fl|(\gamma+\delta-\alpha)(1-\delta) - \beta\delta|$. Het maximale moment kan nu als volgt bepaald worden:

$$\begin{aligned} M_{max} = Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma(2-\gamma-\delta) - \alpha(1-\gamma) \\ - \beta\gamma|, |(\gamma+\delta-\alpha)(1-\delta) - \beta\delta|) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Op eenzelfde wijze als in paragraaf 4.2 kan nu de energiebeschouwing uitgevoerd worden, met als enige toevoeging dat er nu drie assen en dus ook drie velden in plaats van twee velden gebruikt wordt. Voor ϕ wordt nu op een zelfde wijze als in vergelijking (2.28) het volgende aangenomen:

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \phi_1 = a\sin(\frac{\pi}{l}x_1), & 0 \le x_1 \le \gamma l \\ \phi_2 = a\sin(\frac{\pi}{l}(x_2+\gamma l)), & 0 \le x_2 \le (\delta-\gamma)l \\ \phi_3 = a\sin(\frac{\pi}{l}(x_3+\delta l)), & 0 \le x_3 \le (1-\delta); \end{cases} \quad (4.33)$$

De verrichte arbeid neemt daarom ook toe met een hoeveelheid $F \cdot w_{kip,\delta l}$ ten gevolge van de tweede puntlast, waarin $w_{kip,\delta l}$ conform vergelijking (2.13) bepaald kan worden.

$$w_{kip,\delta l} = \theta_{kip,a} \cdot \delta l - \left[\int_0^{\gamma l} \frac{{\phi_1}^2 M_1}{EI_{yy}}(\delta l - x_1)dx_1 + \int_0^{(\delta-\gamma)l} \frac{{\phi_2}^2 M_2}{EI_{yy}}((\delta-\gamma)l - x_2)dx_2 \right] \quad (4.34)$$

De overige termen in de verrichte arbeid en $\Delta\mathcal{U}_{buiging}$ blijven gelijk. $M_{0,eq}$ kan nu worden opgelost.

$$F \cdot w_{kip,\gamma l} + F \cdot w_{kip,\delta l} - \alpha Fl\theta_{kip,a} - \beta Fl\theta_{kip,b} - \Delta\mathcal{U}_{buiging} = \frac{{M_{0,eq}}^2}{EI_{yy}} \int_0^l \phi^2 dx \quad (4.35)$$

Met behulp van Maple kan deze vergelijking opgelost worden voor $M_{0,eq}$, waarmee de effectieve kiplengte met behulp van vergelijking (4.32) bepaald kan worden via

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} \cdot l \qquad (4.36)$$

Deze procedure is uitgevoerd met behulp van Maple en de bijbehorende code is te vinden in Bijlage I.5. Met behulp van deze energiebeschouwing kan de effectieve kiplengte benaderd worden voor een breed scala aan belastings-configuraties.

Op eenzelfde wijze als in paragraaf 4.2 kan de effectieve kiplengte ook bepaald worden middels C_1 tot en met C_5, waarin C_1 en C_2 de bekende constanten zijn. Voor $\gamma \leq \delta$ zijn C_3 tot en met C_5 opgesomd in Tabel 4.2.

***Tabel 4.2**: C3 tot en met C5 voor twee kopmomenten en 2 puntlasten op locaties γ en δ*

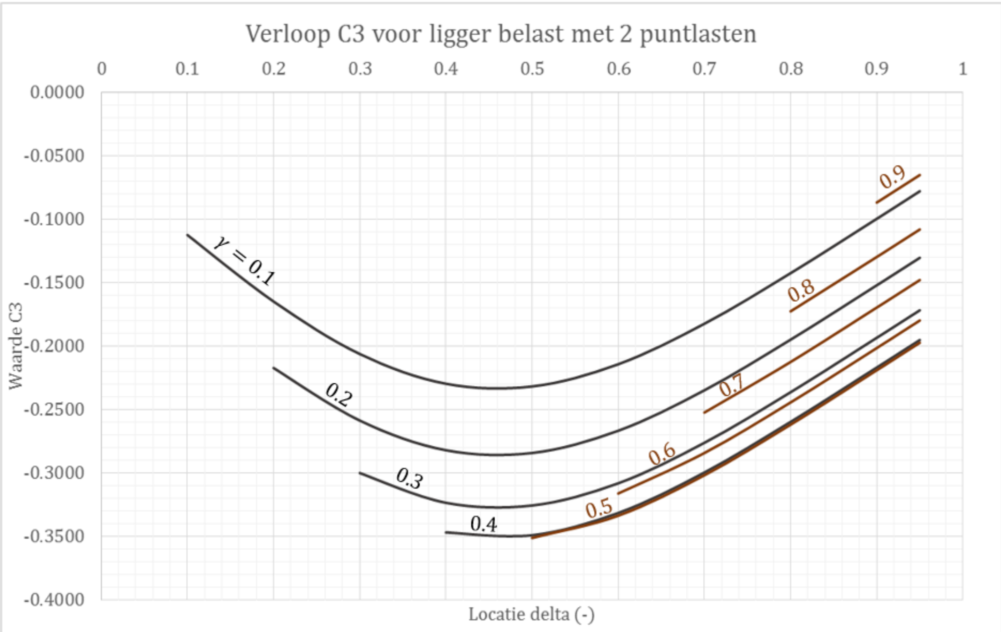
		γ										
	C3	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.95**
	0.05	-0.0565										
	0.1	-0.0845	-0.1125									
	0.2	-0.1369	-0.1649	-0.2173								
	0.3	-0.1783	-0.2063	-0.2588	-0.3002							
	0.4	-0.2018	-0.2297	-0.2822	-0.3236	-0.3470						
δ	**0.5**	-0.2039	-0.2319	-0.2843	-0.3258	-0.3492	-0.3513					
	0.6	-0.1864	-0.2144	-0.2668	-0.3082	-0.3317	-0.3338	-0.3163				
	0.7	-0.1545	-0.1825	-0.2349	-0.2763	-0.2997	-0.3019	-0.2844	-0.2525			
	0.8	-0.1146	-0.1426	-0.1950	-0.2364	-0.2599	-0.2620	-0.2445	-0.2126	-0.1727		
	0.9	-0.0717	-0.0997	-0.1521	-0.1935	-0.2170	-0.2191	-0.2016	-0.1697	-0.1298	-0.0869	
	0.95	-0.0500	-0.0780	-0.1304	-0.1718	-0.1952	-0.1974	-0.1799	-0.1480	-0.1081	-0.0652	-0.0435

		γ										
	C4	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.95**
	0.05	-0.0435										
	0.1	-0.0652	-0.0869									
	0.2	-0.1081	-0.1298	-0.1727								
	0.3	-0.1480	-0.1697	-0.2126	-0.2525							
	0.4	-0.1799	-0.2016	-0.2445	-0.2844	-0.3163						
δ	**0.5**	-0.1974	-0.2191	-0.2620	-0.3019	-0.3338	-0.3513					
	0.6	-0.1952	-0.2170	-0.2599	-0.2997	-0.3317	-0.3492	-0.3470				
	0.7	-0.1718	-0.1935	-0.2364	-0.2763	-0.3082	-0.3257	-0.3236	-0.3002			
	0.8	-0.1304	-0.1521	-0.1950	-0.2349	-0.2668	-0.2843	-0.2822	-0.2588	-0.2173		
	0.9	-0.0780	-0.0997	-0.1426	-0.1825	-0.2144	-0.2319	-0.2297	-0.2063	-0.1649	-0.1125	
	0.95	-0.0500	-0.0717	-0.1146	-0.1545	-0.1864	-0.2039	-0.2018	-0.1783	-0.1369	-0.0845	-0.0565

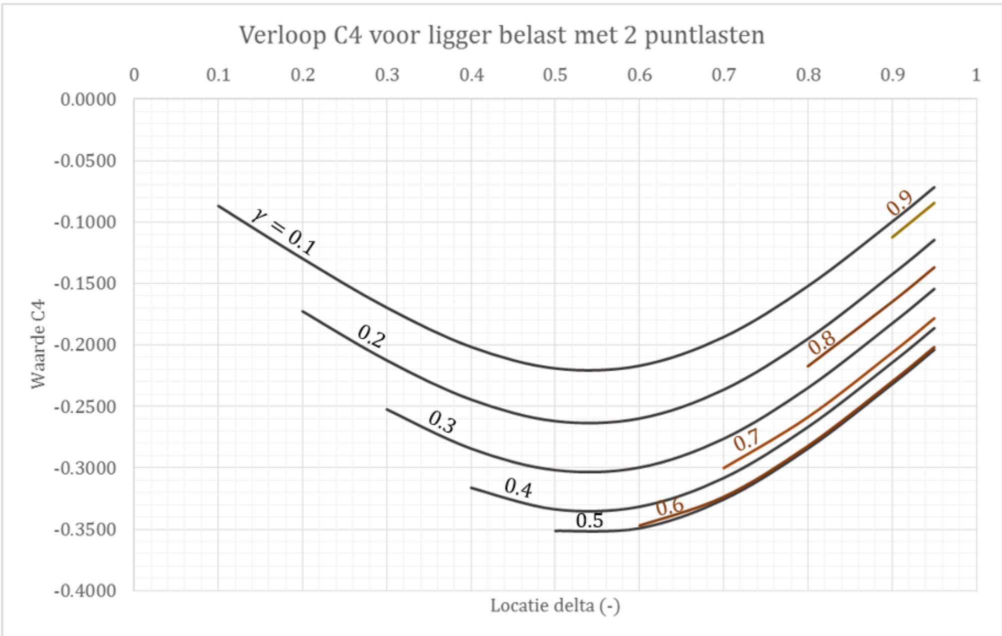
		γ										
	C5	**0.05**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.95**
	0.05	0.0028										
	0.1	0.0063	0.0112									
	0.2	0.0168	0.0243	0.0425								
	0.3	0.0293	0.0389	0.0613	0.0842							
	0.4	0.0394	0.0501	0.0750	0.1006	0.1199						
δ	**0.5**	0.0430	0.0539	0.0790	0.1052	0.1259	0.1400					
	0.6	0.0386	0.0486	0.0720	0.0968	0.1169	0.1259	0.1199				
	0.7	0.0281	0.0365	0.0568	0.0787	0.0968	0.1052	0.1006	0.0842			
	0.8	0.0157	0.0221	0.0384	0.0568	0.0720	0.0790	0.0750	0.0613	0.0425		
	0.9	0.0057	0.0100	0.0221	0.0365	0.0486	0.0539	0.0501	0.0389	0.0243	0.0112	
	0.95	0.0025	0.0057	0.0157	0.0281	0.0386	0.0430	0.0394	0.0293	0.0168	0.0063	0.0028

Met behulp van de in Tabel 4.2 gegeven waardes kan voor een hoop belastings-configuraties het equivalente moment en daarmee de effectieve kiplengte gevonden worden. In de tabel valt op dat C_3 en C_4 elkaars spiegelbeeld zijn. Dit valt te verklaren doordat C_3 de invloed van de puntlasten op het kopmoment α en C_4 de invloed van de puntlasten op het kopmoment β in rekening brengt op het equivalente moment. De afstand van een puntlast tot aan één van de twee kopmomenten is omgekeerd evenredig met de afstand van diezelfde puntlast tot aan het andere kopmoment en daarom zijn C_3 en C_4 elkaars spiegelbeeld. Constante C_5 blijkt symmetrisch te zijn; deze constante brengt de invloed van de puntlasten op het equivalente moment in rekening. Hiervoor maakt het niet uit ten opzichte van welke oplegging de afstanden tot aan de puntlasten bepaald worden, wat resulteert in symmetrie.

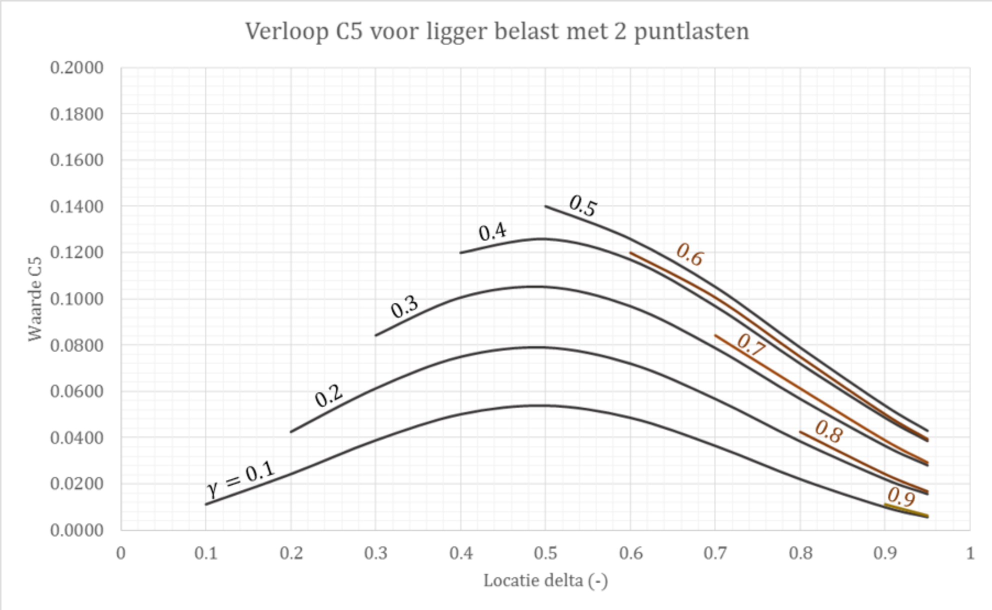
Om ook voor de tussenliggende punten de waardes van C_3 tot en met C_5 te kunnen vinden, zijn de waardes vanuit Tabel 4.2 weergeven in Figuren 4.10, 4.11 en 4.12



***Figuur 4.10**: Verloop C3 voor een ligger belast met 2 puntlasten en 2 kopmomenten*



***Figuur 4.11**: Verloop C4 voor een ligger belast met 2 puntlasten en 2 kopmomenten*



Figuur 4.12: *Verloop C5 voor een ligger belast met 2 puntlasten en 2 kopmomenten*

Middels deze figuren kunnen C_3 tot en met C_5 grafisch bepaald worden, waarna met behulp van de analytische oplossing de effectieve kiplengte gevonden wordt.

Om de gevonden analytische oplossing te verifiëren, wordt wederom een indirecte vergelijking (conform paragraaf 4.2) met een aantal bekende belastings-configuraties uitgevoerd:

- Voor $\alpha = \beta = 0, \gamma = 0.25$ en $\delta = 0.75$ leidt het model tot een effectieve kiplengte gelijk aan $0.96\ l$. Dit is gelijk aan de in paragraaf 2.2 gevonden waarde en komt overeen met belastings-configuratie zes uit het STEP-dictaat.
- Wanneer $\delta = 1$ (en er dus maar één puntlast op de ligger aangrijpt) resulteert dit model in dezelfde uitkomsten als de oplossing voor een ligger belast met één puntlast en twee kopmomenten. Hieruit valt in ieder geval te concluderen dat de methode, waarmee beide oplossingen gevonden zijn, consequent is.
- Voor $\alpha = \beta = 1000$ geeft het model $l_{eff} = 1.00\ l$, wat equivalent is aan een constant moment over de gehele ligger. Ook voor dit standaardgeval werkt het model.

Met behulp van deze indirecte vergelijking van de gevonden oplossing met de bekende waardes kan gesteld worden dat de gevonden oplossing hoogstwaarschijnlijk correct is.

Naast de exacte oplossing vanuit Maple en de grafisch-analytische oplossingsmethode, zijn voor deze belastings-configuratie een drietal contourplots gecreëerd, welke te vinden zijn in Figuren G.1 tot en met G.3 in Bijlage G. Met behulp van deze contourplots kan de effectieve kiplengte volledig grafisch bepaald worden. De volgende drie gevallen zijn beschouwd: $\gamma = 0.25; \delta = 0.75, \gamma = \frac{1}{3};\ \delta = \frac{2}{3}$ en $\gamma = 0.25;\ \delta = 0.5$. De twee eerstgenoemde belastings-configuraties zijn symmetrisch en daarom tonen de contourplots ook symmetrievlakken. Het derde geval is echter niet symmetrisch en toont daarom ook geen symmetrievlakken. Wel geven alle drie de gevallen een omslagvlak.

In Figuren G.1 tot en met G.3 in Bijlage G zijn wederom drie zones voor het maximale moment in de ligger te onderscheiden. De zone waarin het maximale moment volgt uit het veldmoment bestaat voor deze belastings-configuratie echter uit twee zones: een zone waarin het maximale veldmoment plaats vindt op een afstand γl en een zone waarin het maximale veldmoment plaats vindt op een afstand δl.

Deze twee zones zijn samengevoegd omdat ze afzonderlijk niet tot nieuwe inzichten leiden en iets toevoegen aan de hoogtekaarten. Het snijpunt van de drie zones kan op eenzelfde manier als in Figuur E.3 bepaald worden. Voor de drie beschouwde belastings-configuraties levert dit

- $\gamma = 0.25; \delta = 0.75$: $M_{max} = \frac{1}{4} Fl$, snijpunt voor $\alpha = \beta = \frac{M_{max}}{2} = 0.125\ Fl$
- $\gamma = \frac{1}{3}; \delta = \frac{2}{3}$: $M_{max} = \frac{1}{3} Fl$, snijpunt voor $\alpha = \beta = \frac{M_{max}}{2} = 0.167\ Fl$
- $\gamma = 0.25; \delta = 0.50$: $M_{max} = \frac{3}{8} Fl$, snijpunt voor $\alpha = \beta = \frac{M_{max}}{2} = 0.1875\ Fl$

Deze waardes zijn terug te vinden in de hoogtekaarten en hiermee is het verloop van de maximale moment zones verklaard.

4.6 Samenvatting

In dit hoofdstuk is antwoord gegeven op deelvraag 4. De belastings-configuratie met een puntlast op locatie γl en twee kopmomenten αFl en βFl is beschouwd. Met behulp van een energiebeschouwing is een oplossing gevonden voor de effectieve kiplengte. Omdat deze oplossing varieert voor verschillende locaties van de puntlast is er geen gesloten uitdrukking gevonden.

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |-\alpha(1-\gamma) - \beta\gamma + \gamma(1-\gamma)|)} \cdot l \tag{4.37}$$

Wel is er een algemene uitdrukking opgesteld voor $M_{0,eq}$ (een opstap naar beantwoording deelvraag 5 later in het onderzoek)

$$M_{0,eq} = Fl\sqrt{C_1(\alpha^2 + \beta^2) + C_2\alpha\beta + C_3\alpha + C_4\beta + C_5} \tag{4.38}$$

Voor een aantal waarden van γ zijn de waardes van C_1 tot en met C_5 gevat in een tabel. Voor iedere locatie geldt $C_1 = 0.2827$ en $C_2 = 0.4347$. Er zijn figuren gemaakt waarmee de overige constanten bepaald kunnen worden. Ook zijn er eenvoudige uitdrukkingen gevonden waarmee C_3 tot en met C_5 kunnen worden bepaald.

$$benadering\ C_3 = -0.1773 \sin(\frac{\pi}{0.95}\gamma) \tag{4.39}$$

$$benadering\ C_4 = -0.1773 \sin(\frac{\pi}{1.18}\gamma) \tag{4.40}$$

$$benadering\ C_5 = 0.01675\,[1 - \cos(2\pi\gamma)] \tag{4.41}$$

Verder zijn er voor een beperkt aantal locaties γ hoogtekaarten gemaakt om een grafische oplossingsmethode te verkrijgen. Deze hoogtekaarten zijn te vinden in Bijlage F. Hiermee zijn dus vijf mogelijkheden gevonden om de effectieve kiplengte te vinden. Afhankelijk van de gevraagde nauwkeurigheid en de locatie van de puntlast dient een van de volgende methoden (of een combinatie daarvan) gebruikt te worden:

- Exacte oplossing vanuit Maple.
- Met behulp van Tabel 4.1, waarin exacte waardes voor C_1 tot en met C_5 gegeven zijn voor een beperkt aantal locaties. Hierbij worden afrondfouten gemaakt.
- Via Figuren 4.4 en 4.5 de exacte waardes voor C_3 tot en met C_5 bepalen. Deze methode is gevoelig voor afleesfouten.
- Middels de gegeven benaderingen C_3 tot en met C_5, waarmee een lichte afwijking geïntroduceerd wordt.
- Voor een beperkt aantal waarden van γ met behulp van de gecreëerde hoogtekaarten. Hierbij kunnen afleesfouten worden gemaakt.

Dezelfde beschouwing is gedaan voor een ligger belast met twee puntlasten op locaties γl en δl. De waardes voor C_3 tot en met C_5 zijn getabelleerd (discreet) en weergegeven in grafieken (continu). Hiermee kan op een grafisch-analytische wijze de effectieve kiplengte bepaald worden. Ook zijn er voor een beperkt aantal locaties hoogtekaarten gecreëerd (zie Bijlage G).

De oplossingen van beide beschouwde belastings-configuraties zijn vergeleken met de in de literatuur beschreven basisgevallen. De oplossingen komen overeen en hieruit is geconcludeerd dat de gevonden methode zeer hoogstwaarschijnlijk correct is. In hoofdstuk 5 wordt de stap naar een algemene uitdrukking voor de effectieve kiplengte gemaakt.

5. Algemene methode bepaling l_{eff}

Gedurende dit onderzoek zijn een groot aantal belastings-configuraties onderzocht en beschreven. De oplossingen van deze beschouwingen zijn slechts toepasbaar voor een beperkt aantal gevallen. In dit hoofdstuk wordt een methode beschreven waarmee voor ieder geval de effectieve kiplengte bepaald kan worden, onder aanname dat beide uiteinden van de ligger opgelegd zijn met gaffelopleggingen, de belasting in het normaalkrachtencentrum aangrijpt en de rotatievorm redelijk exact beschreven kan worden met een sinusterm (zoals uit Bijlage H volgt). In dit hoofdstuk wordt deelvraag 5 behandeld en beantwoord. Eerst zal het gevonden algemene verband beschreven worden, waarna een aantal uitdrukkingen worden gevonden voor de bijbehorende variabelen om uiteindelijk de theorie uit te kunnen breiden naar een eindeloze hoeveelheid belastings-configuraties in Hoofdstuk 6.

5.1 Algemeen verband

De uitdrukking voor de effectieve kiplengte kan voor iedere belastings-configuratie (conform paragraaf 4.2) als volgt omschreven worden:

$$l_{eff} = \frac{M_{0,eq}}{M_{max}} l \tag{5.1}$$

Het maximale moment in de ligger kan vrij eenvoudig bepaald worden volgens de basis mechanica en aan dit aspect is daarom weinig aandacht besteed in dit onderzoek. Wel is er een methode gevonden waarmee voor iedere belastings-configuratie de momentenlijn en daarmee het maximale moment in de ligger bepaald kan worden (zie paragraaf 5.3). Voor het equivalente moment is in paragraaf 4.2 reeds een algemene uitdrukking gevonden.

$$M_{0,eq} = Fl\sqrt{C_1(\alpha^2 + \beta^2) + C_2\alpha\beta + C_3\alpha + C_4\beta + C_5} = Fl \cdot \sqrt{k_{eq}} \tag{5.2}$$

Hierin is een nieuwe dimensieloze constante k_{eq} geïntroduceerd die onafhankelijk is van de grootte van de puntlast F en de lengte van de overspanning en is daarmee een functie van de geometrie van de belasting (de locatie van de puntlasten en aangrijppunt van de kopmomenten etc.). Constante k_{eq} is afhankelijk van C_1 tot en met C_5 en de factoren α en β. De fysische onderbouwing van C_1 tot en met C_5 is onderzocht, waarbij de volgende verklaring is gevonden:

- C_1 en C_2 zijn twee constante waardes, respectievelijk 0.2827 en 0.4347 conform Tabel 4.1, die de invloed van enkel de kopmomenten αFl en βFl op het equivalente moment in rekening brengen. Deze twee waardes zijn constant omdat enkel de grootte en niet de locatie van de kopmomenten aan variatie onderhevig is, waardoor de geometrie van de belasting onveranderd blijft.
- C_5 brengt de invloed van enkel de puntlast(en) op het equivalente moment in rekening en is afhankelijk van de locatie(s) van de puntlast(en). Dit volgt direct uit vergelijking (5.2): wanneer er geen kopmomenten aangrijpen op de ligger en dus $\alpha = \beta = 0$, reduceert k_{eq} tot enkel C_5, waarmee het equivalente moment voor enkel puntlasten dus bepaald wordt door enkel C_5.
- C_3 en C_4 zijn fysisch wat lastiger te verklaren. Waarschijnlijk brengen C_3 en C_4 de interactie tussen de puntlast(en) en de kopmomenten αFl en βFl in rekening op het equivalente moment, waardoor C_3 en C_4 als het ware een kruisterm zijn van de puntlast en de kopmomenten. De hoekverdraaiingen in de opleggingen (die de verrichte arbeid van de kopmomenten bepalen) en de verticale verplaatsing onder de puntlast(en) (die de verrichte

arbeid van de puntlast(en) bepaalt), volgen beiden uit het momentenverloop (die een functie is van α, β, γ). Hiermee is het kruisverband fysisch verklaard.

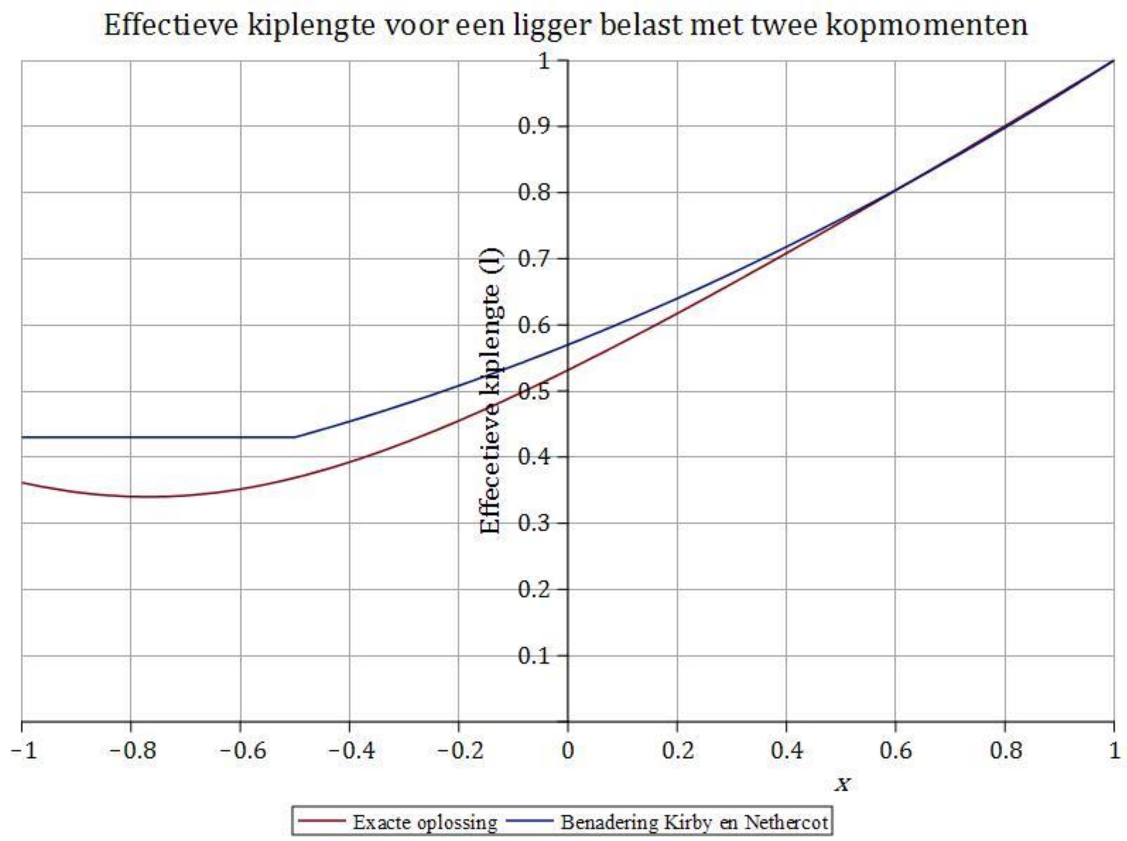
Deze verklaringen zijn hieronder onderbouwd. Als alleen C_1 en C_2 de invloed van de kopmomenten in rekening brengen, dan zou de belastings-configuratie met enkel 2 kopmomenten omschreven kunnen worden met behulp van

$$l_{eff} = \frac{Fl\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta}}{M_{max}}l \qquad (5.3)$$

Waarbij $C_1 = 0.2827$ en $C_2 = 0.4347$. Wanneer de door vergelijking (5.3) gevonden effectieve kiplengte gelijk is aan de benadering van Kirby en Nethercot [7] die gegeven is in Figuur 3.2, is aangetoond dat enkel C_1 en C_2 de invloed van de kopmomenten in rekening brengen. Om de effectieve kiplengte te kunnen vergelijken met de benadering van Kirby en Nethercot, wordt α gelijk gesteld aan 1 en β aan x. De notatie van de twee kopmomenten is hiermee conform Figuur 3.2.

$$l_{eff} = \frac{Fl\sqrt{0.2827(1+x^2)+0.4347x}}{Fl \cdot \max(1,|x|)}l \qquad (5.4)$$

Het verloop van de effectieve kiplengte als functie van x is weergegeven in Figuur 5.1, tezamen met de benadering van Kirby en Nethercot. Deze benadering is, zoals omschreven in paragraaf 3.4, conservatief en daarom dus ook niet exact. De exacte oplossing komt overeen met de exacte oplossing gegeven in Figuur 3.2, waarmee dus aangetoond is dat dat enkel C_1 en C_2 de invloed van de kopmomenten in rekening brengen op het equivalente moment en daarmee ook de effectieve kiplengte.



Figuur 5.1: Effectieve kiplengte voor een ligger belast met twee kopmomenten: exacte oplossing en benadering Kirby en Nethercot

Voor C_5 is eerder in deze paragraaf al aangetoond dat deze enkel de invloed van de puntlast(en) op het equivalente moment in rekening brengt. Omdat C_3 en C_4 zowel voor het geval met enkel puntlasten als voor het geval met enkel kopmomenten niet van invloed zijn op het equivalente moment (en daarbij volgens Tabel 4.1 niet gelijk aan 0 zijn), is de enige mogelijke conclusie dat C_3 en C_4 kruistermen van de invloed van de puntlast(en) en de kopmomenten zijn en daarom dus wegvallen wanneer één van de twee belastings-typen afwezig is. Overigens bleek uit de benaderingen van C_3 en C_4 in vergelijkingen (4.13) en (4.14) al dat deze termen kruistermen zijn (een vermenigvuldiging van γ met α, β). Omdat de puntlasten voor een reductie zorgen op de momentenlijn die volgt uit enkel de kopmomenten zullen C_3 en C_4 hoogstwaarschijnlijk een reducerend effect hebben op $M_{0,eq}$ en l_{eff}.

5.2 Bepaling C_3, C_4 en C_5

Om voor iedere belastings-configuratie tot de effectieve kiplengte te komen, dienen uitdrukkingen voor C_3, C_4 en C_5 gevonden te worden. Deze uitdrukkingen zijn gevonden door de analytische oplossingen van k_{eq} voor verschillende belastings-configuraties te onderzoeken op patronen. Voor C_3 en C_4 is dit patroon relatief eenvoudig gevonden. De gevonden uitdrukking voor C_5 is echter complexer en wordt daarom later in dit hoofdstuk omschreven. Het verloop van C_3, C_4 en C_5 is onderzocht voor een toenemend aantal puntlasten, waarbij de achterliggende gedachte is dat ook gelijkmatig verdeelde belastingen gemodelleerd kunnen worden als een verzameling puntlasten op gelijke afstanden van elkaar. Met het gevonden resultaat kan in theorie dus ook de effectieve kiplengte worden bepaald voor een ligger belast met een gelijkmatig verdeelde belasting. Deze optie wordt later beschouwd. Allereerst wordt de analytische oplossing van k_{eq} voor een ligger belast met twee kopmomenten en een puntlast op γl bekeken (zoals beschouwd in paragraaf 4.1-3). Deze totale oplossing volgt uit Maple (zie Bijlage I.4) is als volgt:

$$
\begin{aligned}
k_{eq} = \frac{1}{6\pi^3}\Big[&-6\pi(-\gamma^2 + (\alpha - \beta + 1)\gamma - \alpha)\cos(\pi\gamma)^2 + 6\left(\alpha - \beta - \gamma + \frac{1}{2}\right)\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) \\
&+ 2\pi^3\{\gamma^4 + (-\alpha + \beta - 2)\gamma^3 + (3\alpha + 1)\gamma^2 + (-2\alpha - \beta)\gamma + \alpha^2 + \alpha\beta \\
&+ \beta^2\} + 2\pi\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(3\alpha - 3\beta + \frac{3}{2}\right)\gamma - \frac{3}{2}\alpha^2 + (3\beta - 3)\alpha - \frac{3}{2}\beta^2\right\}\Big]
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Deze uitdrukking valt op te delen in drie delen: een kwadratische cosinusterm (in vergelijking (5.5) rood weergegeven, de kleuren zullen voor het overzicht consequent gebruikt worden in deze paragraaf), een kruisterm van een sinus en een cosinus (blauw weergegeven) en een restterm (groen weergegeven). Echter komen C_1, C_2, C_3, C_4 en C_5 niet naar voren in deze uitdrukking. Om dat voor elkaar te krijgen dienen de termen te worden verzameld: voor C_1 zijn dit de termen voor α^2 en β^2, voor C_2 zijn dit de termen voor $\alpha\beta$ enzovoorts.

$$
\begin{aligned}
&termen\ \alpha^2, \beta^2 = C_1 = \frac{2\pi^3 - 3\pi}{6\pi^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \approx 0.2827 \\
&termen\ \alpha\beta = C_2 = \frac{2\pi^3 + 6\pi}{6\pi^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.4347 \\
&termen\ \alpha = C_3 = \frac{1}{6\pi^3}[-6\pi(\gamma - 1)\cos(\pi\gamma)^2 + 6\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) + 2\pi^3\{-\gamma^3 + 3\gamma^2 - 2\gamma\} \\
&\qquad + 2\pi\{3\gamma - 3\}] \\
&termen\ \beta = C_4 = \frac{1}{6\pi^3}[6\pi\gamma\cos(\pi\gamma)^2 - 6\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) + 2\pi^3\{\gamma^3 - \gamma\} + 2\pi\{-3\gamma\}] \\
&termen\ rest = C_5 = -6\pi(-\gamma^2 + \gamma)\cos(\pi\gamma)^2 + 6\left(-\gamma + \frac{1}{2}\right)\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) \\
&\qquad + 2\pi^3\{\gamma^4 - 2\gamma^3 + \gamma^2\} + 2\pi\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma\right\}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Met deze beschouwing zijn de exacte waardes van C_1 en C_2 bepaald en hiermee is nu dus bekend waar de constanten 0.2827 en 0.4347 vandaan komen in onder andere vergelijkingen (3.12) en (3.13) en Tabel 4.1. Verder zijn hiermee uitdrukkingen gevonden voor C_3, C_4 en C_5 voor een ligger belast met een enkele puntlast en twee kopmomenten. Om tot een algemene uitdrukking voor deze constanten te komen, is dezelfde analyse uitgevoerd voor de belastings-configuratie met twee puntlasten (op γl en δl) en twee kopmomenten (volgens paragraaf 4.5). Wanneer de relatie tussen de uitdrukkingen van C_3, C_4 en C_5 en de geometrie van de belasting gevonden is, kan voor iedere belastings-configuratie een uitdrukking gevonden worden voor k_{eq} en daarmee ook uiteindelijk de effectieve kiplengte. De analytische oplossing voor k_{eq} wordt gegeven door (zie Bijlage I.5 voor Maple code, de oplossing is met de hand nog enigszins gesorteerd).

$$
\begin{aligned}
k_{eq} = \frac{1}{6\pi^3}\Big[& -6\pi(-\gamma^2 + (\alpha - \beta - \delta + 2)\gamma - \alpha)\cos(\pi\gamma)^2 \\
& + 6\left(\alpha - \beta - \delta - \gamma + \frac{3}{2}\right)\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) \\
& - 6\pi\big((1-\delta)\gamma - \delta^2 + (\alpha - \beta + 1)\delta - \alpha\big)\cos(\pi\delta)^2 \\
& + 6\left(\alpha - \beta - \delta - \gamma + \frac{1}{2}\right)\sin(\pi\delta)\cos(\pi\delta) \\
& + 2\pi^3\{\gamma^4 + (-\alpha + \beta + \delta - 3)\gamma^3 + (3\alpha + 1)\gamma^2 + (\delta^3 - 3\delta^2 - 2\alpha - \beta + 2\delta)\gamma \\
& + \delta^4 + (-\alpha + \beta - 2)\delta^3 + (3\alpha + 1)\delta^2 + (-2\alpha - \beta)\delta + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\} \\
& + 2\pi\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(-3\delta + \frac{9}{2} + 3\alpha - 3\beta\right)\gamma - \frac{3}{2}\delta^2 + \left(\frac{3}{2} + 3\alpha - 3\beta\right)\delta - \frac{3}{2}\alpha^2 \right. \\
& \left. + (3\beta - 6)\alpha - \frac{3}{2}\beta^2\right\}\Big]
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Het aantal termen in de vergelijking lijkt te verdubbelen. Net zoals voor het geval met één puntlast en twee kopmomenten worden alle termen (op C_1 en C_2 na, die zijn al bepaald).

$$
\begin{aligned}
termen\ \alpha = C_3 = \frac{1}{6\pi^3}[& -6\pi(\gamma - 1)\cos(\pi\gamma)^2 + 6\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) - 6\pi(\delta - 1)\cos(\pi\delta)^2 \\
& + 6\sin(\pi\delta)\cos(\pi\delta) + 2\pi^3\{-\gamma^3 + 3\gamma^2 - 2\gamma - \delta^3 + 3\delta^2 - 2\delta\} \\
& + 2\pi\{3\gamma + 3\delta - 6\}] \\
termen\ \beta = C_4 = \frac{1}{6\pi^3}[& 6\pi\gamma\cos(\pi\gamma)^2 - 6\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) + 6\pi\delta\cos(\pi\delta)^2 \\
& - 6\sin(\pi\delta)\cos(\pi\delta) + 2\pi^3\{\gamma^3 - \gamma + \delta^3 - \delta\} + 2\pi\{-3\gamma - 3\delta\}] \\
restterm = C_5 = \frac{1}{6\pi^3}\Big[& -6\pi(-\gamma^2 + (-\delta + 2)\gamma)\cos(\pi\gamma)^2 \\
& + 6\left(-\delta - \gamma + \frac{3}{2}\right)\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) - 6\pi\big((1-\delta)\gamma - \delta^2 + \delta\big)\cos(\pi\delta)^2 \\
& + 6\left(-\delta - \gamma + \frac{1}{2}\right)\sin(\pi\delta)\cos(\pi\delta) \\
& + 2\pi^3\{\gamma^4 + (\delta - 3)\gamma^3 + \gamma^2 + (\delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta)\gamma + \delta^4 - 2\delta^3 + \delta^2\} \\
& + 2\pi\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(-3\delta + \frac{9}{2}\right)\gamma - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{3}{2}\delta\right\}\Big]
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Wanneer stelsel (5.6) wordt vergeleken met stelsel (5.8) vallen er twee dingen op. Ten eerste blijken C_3 en C_4 in de vorm van een sommatie door te werken voor meerdere puntlasten: de uitdrukkingen voor C_3 en C_4 in stelsel (5.6) kunnen voor meerdere puntlasten simpelweg bij elkaar opgeteld worden, waarbij enkel de locatie van de puntlast verandert. Hiermee zijn, na wegdelen van $6\pi^3$, algemene uitdrukkingen gevonden voor C_3 en C_4 in de vorm van een sommatie.

$$C_3 = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\pi^2}(\gamma_i - 1)\cos(\pi\gamma_i)^2 + \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) + \frac{-\gamma_i{}^3 + 3\gamma_i{}^2 - 2\gamma_i}{3} + \frac{\gamma_i - 1}{\pi^2}\right] \tag{5.9}$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i}{\pi^2}\cos(\pi\gamma_i)^2 - \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) + \frac{\gamma_i{}^3 - \gamma_i}{3} - \frac{\gamma_i}{\pi^2}\right] \tag{5.10}$$

Waarin γ een verzameling met een lengte n van locaties van puntlasten is. Wanneer er bijvoorbeeld vier puntlasten gelijkmatig over de ligger verdeeld zijn, geldt $\gamma = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]$. Met behulp van de gevonden uitdrukkingen kunnen voor iedere belastings-configuratie C_3 en C_4 bepaald worden. Deze methode kan ook gebruikt worden voor een gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele ligger wanneer ingezien wordt dat een gelijkmatig verdeelde belasting equivalent is aan een oneindige hoeveelheid kleine puntlasten evenredig verspreidt over de lengte van de ligger. Door de integraal te nemen voor $0 \leq \gamma \leq 1$ kunnen C_3 en C_4 bepaald worden voor een gelijkmatig verdeelde belasting. Maple geeft hiervoor (zie Bijlage I.6)

$$C_3 = \int_0^1 \left[-\frac{1}{\pi^2}(\gamma - 1)\cos(\pi\gamma)^2 + \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) + \frac{-\gamma^3 + 3\gamma^2 - 2\gamma}{3} + \frac{\gamma - 1}{\pi^2}\right] d\gamma = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2 + 3}{\pi^2} \approx -0.1086 \tag{5.11}$$

$$C_4 = \int_0^1 \left[\frac{\gamma}{\pi^2}\cos(\pi\gamma)^2 - \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma)\cos(\pi\gamma) + \frac{\gamma^3 - \gamma}{3} - \frac{\gamma}{\pi^2}\right] d\gamma = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2 + 3}{\pi^2} \tag{5.12}$$

Van Straten [1] heeft voor een gelijkmatig verdeelde belasting de oplossing reeds bepaald (vergelijking (3.13)).

$$l_{eff,Van\,Straten} = ql^2 \cdot \frac{\sqrt{0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta \boxed{- 0.1086(\alpha + \beta)} + 0.0122}}{M_{max}} l \tag{5.13}$$

De gevonden waardes van C_3 en C_4 voor een gelijkmatig verdeelde belasting komen overeen met het resultaat van Van Straten, waarbij de constanten met een algemene methode bepaald zijn in plaats van met specifieke oplossingen die gelden voor enkele gevallen. Hiermee is de juistheid van de gevonden uitdrukking voor C_3 en C_4 aangetoond.

Een wiskundige bijkomstigheid van vergelijkingen (5.9) en (5.10) is het feit dat C_3 en C_4 voor $\gamma = 0$ en $\gamma = 1$ gelijk aan 0 zijn. Voor $\gamma = 0$ n $\gamma = 1$ valt de laatste term (voor C_3 is dat $\frac{\gamma-1}{\pi^2}$) weg tegenover de eerste term (voor C_3 is dat $-\frac{1}{\pi^2}(\gamma - 1)\cos(0)^2 = -\frac{1}{\pi^2}(\gamma - 1)$). Hiermee is de in paragraaf 5.1 gegeven fysische verklaring met betrekking tot C_3 en C_4 nogmaals bevestigd: C_3 en C_4 zijn kruistermen van de invloed van de puntlast en de kopmomenten.

Het tweede dat opvalt wanneer stelsel (5.6) wordt vergeleken met stelsel (5.8), is dat de term C_5 niet met behulp van een simpele optelling bepaald kan worden. De uitdrukking om deze term mee te bepalen is vele maten complexer en om tot deze uitdrukking te komen, zijn de gevallen met enkel 2, 3 en 4 puntlasten nader onderzocht. De bijbehorende Maple codes van deze belastings-configuraties zijn te vinden in Bijlagen I.7, I.8 en I.9. Om de analyse overzichtelijk te houden wordt de uitdrukking voor C_5 verdeeld in twee delen: een deel met alle (co)sinus termen ($C_{5,sincos}$, de met rood en blauw weergegeven termen in stelsels (5.6) en (5.8)) en een deel met alle resttermen ($C_{5,rest}$, de met groen weergegeven termen). Voor de situaties met 4 puntlasten worden de volgende locaties van de puntlasten aangehouden: $\gamma, \delta, \varepsilon, f$. Verder zijn beide kopmomenten gelijk aan nul gesteld omdat deze, zoals eerder geconstateerd, geen invloed hebben op de term C_5. De uitdrukking voor $C_{5,sincos}$ voor verschillende aantallen puntlasten is ook weer onderverdeeld per term en uitgezet in Tabel 5.1. De in deze tabel gegeven waarden dienen uiteindelijk nog vermenigvuldigd te worden met $\frac{1}{6\pi^3}$. Deze stap wordt als laatste gemaakt.

***Tabel 5.1:** Uitdrukkingen voor $C_{5,sincos}$ voor 1, 2, 3 en 4 puntlasten*

	1 puntlast	2 puntlasten	3 puntlasten	4 puntlasten
$\cos(\pi\gamma)^2$	$6\gamma\pi(\gamma-1)$	$6\gamma\pi(\gamma+\delta-2)$	$6\gamma\pi(\gamma+\delta+\varepsilon-3)$	$6\gamma\pi(\gamma+\delta+\varepsilon+f-4)$
$\cos(\pi\gamma)\sin(\pi\gamma)$	$-6(\gamma-\frac{1}{2})$	$-6(\gamma+\delta-\frac{3}{2})$	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon-\frac{5}{2})$	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon+f-\frac{7}{2})$
$\cos(\pi\delta)^2$	-	$6\pi(\delta-1)\gamma+\delta(\delta-1))$	$6\pi((\delta-1)\gamma+\delta(\delta+\varepsilon-2))$	$6\pi((\delta-1)\gamma+\delta(\delta+\varepsilon+f-3))$
$\cos(\pi\delta)\sin(\pi\delta)$	-	$6(\gamma+\delta-\frac{1}{2})$	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon-\frac{3}{2})$	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon+f-\frac{5}{2})$
$\cos(\pi\varepsilon)^2$	-	-	$6\pi((\varepsilon-1)\gamma+(\varepsilon-1)\delta+(\varepsilon-1)\varepsilon)$	$6\pi((\varepsilon-1)\gamma+(\varepsilon-1)\delta+(\varepsilon+f-2)\varepsilon)$
$\cos(\pi\varepsilon)\sin(\pi\varepsilon)$	-	-	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon-\frac{1}{2})$	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon+f-\frac{3}{2})$
$\cos(\pi f)^2$	-	-	-	$6\pi\big((\varepsilon-1)\gamma+(\varepsilon-1)\delta+(\varepsilon-1)\varepsilon+(\varepsilon-1)f\big)$
$\cos(\pi f)\sin(\pi f)$	-	-	-	$-6(\gamma+\delta+\varepsilon+f-\frac{1}{2})$

De totale uitdrukking voor $C_{5,sincos}$ voor bijvoorbeeld 3 puntlasten volgt uit sommatie van de producten van de beschouwde kolom en de eerste kolom. Zo is de uitdrukking voor 2 puntlasten gelijk aan de uitdrukking van de term $C_{5,sincos}$ in stelsel (5.8). Door de termen in Tabel 5.1 te analyseren, is een algemene uitdrukking gevonden voor $C_{5,sincos}$.

$$
\begin{aligned}
C_{5,sincos} = \frac{1}{6\pi^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ & 6\pi \cos(\pi\gamma_i)^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j(\gamma_i - 1)) + \gamma_i \cdot \sum_{j=i}^{n} (\gamma_j - 1) \right) \\
& - 6\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j) - \frac{1+2(n-i)}{2} \right) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Waarin γ_i een verzameling locaties is. Het patroon in de $\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)$ termen laat zich vrij eenvoudig en duidelijk beschrijven. Het patroon in de cos^2 termen is echter iets lastiger te vinden. Om dit gevonden patroon te verduidelijken zijn voor het geval met 4 puntlasten de termen hieronder op een alternatieve (uitgebreidere) manier weergegeven.

$$
\begin{array}{l|l}
 & \xrightarrow{\hspace{4em} \mathbf{j} \hspace{4em}} \\
\mathbf{i} \downarrow &
\begin{aligned}
&term\cos(\pi\gamma)^2 = 6\pi\big(\gamma(\gamma-1) + \gamma(\delta-1) + \gamma(\varepsilon-1) + \gamma(f-1)\big) \\
&term\cos(\pi\delta)^2 = 6\pi\big(\gamma(\delta-1) + \delta(\delta-1) + \delta(\varepsilon-1) + \delta(f-1)\big) \\
&term\cos(\pi\varepsilon)^2 = 6\pi\big(\gamma(\varepsilon-1) + \delta(\varepsilon-1) + \varepsilon(\varepsilon-1) + \varepsilon(f-1)\big) \\
&term\cos(\pi f)^2 = 6\pi\big(\gamma(f-1) + \delta(f-1) + \varepsilon(f-1) + f(f-1)\big)
\end{aligned}
\end{array}
\tag{5.15}
$$

Met blauw is het tweede deel van de somterm behorend bij de cos^2 term in vergelijking (5.14) weergegeven. In zwart is het eerste deel van deze somterm weergegeven. Ook is hierbij de definitie van i en j gegeven.

$C_{5,rest}$ is op eenzelfde wijze als $C_{5,sincos}$ onderzocht. Voor 1, 2, 3 en 4 puntlasten is de analytische uitdrukking gevonden. Deze zijn gegeven in Tabel 5.2 (nog te vermenigvuldigen met $\frac{1}{6\pi^3}$).

***Tabel 5.2**: Gevonden uitdrukking voor $C_{5,rest}$ voor 1, 2, 3 en 4 puntlasten*

	Gevonden uitdrukking $C_{5,rest}$
1 puntlast	$2\pi^3[\gamma^4 - 2\gamma^3 + \gamma^2] + 2\pi\left[-\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma\right]$
2 puntlasten	$2\pi^3[\gamma^4 + (\delta - 3)\gamma^3 + \gamma^2 + (\delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta)\gamma + \delta^2(1-\delta)^2] + 2\pi\left[-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(\frac{9}{2} - 3\delta\right)\gamma - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{3}{2}\delta\right]$
3 puntlasten	$2\pi^3[\gamma^4 + (\delta + \varepsilon - 4)\gamma^3 + \gamma^2 + (\delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta + \varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\gamma + \delta^4 + (\varepsilon - 3)\delta^3 + \delta^2 + (\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\delta + \varepsilon^2(1-\varepsilon)^2]$ $+ 2\pi\left[-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(\frac{15}{2} - 3\delta - 3\varepsilon\right)\gamma - \frac{3}{2}\delta^2 + \left(\frac{9}{2} - 3\varepsilon\right)\delta - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon\right]$
4 puntlasten	$2\pi^3[\gamma^4 + (\delta + \varepsilon + f - 5)\gamma^3 + \gamma^2 + (\delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta + \varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + f^3 - 3f^2 + 2f)\gamma + \delta^4 + (\varepsilon + f - 4)\delta^3 + \delta^2$ $+ (\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + f^3 - 3f^2 + 2f)\delta + \varepsilon^4 + (f - 3)\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + (f^3 - 3f^2 + 2f)\varepsilon + f^2(1-f)^2]$ $+ 2\pi\left[-\frac{3}{2}\gamma^2 + \left(\frac{21}{2} - 3\delta - 3\varepsilon - 3f\right)\gamma - \frac{3}{2}\delta^2 + \left(\frac{15}{2} - 3\varepsilon - 3f\right)\delta - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \left(\frac{9}{2} - 3f\right)\varepsilon - \frac{3}{2}f^2 + \frac{3}{2}f\right]$

De uitdrukking voor $C_{5,rest}$ valt onder te verdelen in twee delen: de term behorend bij $2\pi^3$ en de term behorend bij 2π. Voor allebei deze termen is de gevonden uitdrukking voor 4 puntlasten middels rode lijnen opgedeeld in 4 onderdelen (zie Tabel 5.2). De totale uitdrukking is de optelsom van deze onderdelen, waarbij de inhoud van de onderdelen zelf ook weer gedeeltelijk afhankelijk is van de overige onderdelen (zo wordt de eerste term beïnvloedt door alle hogere termen, waar de laatste term onafhankelijk is van andere termen omdat deze term de 'hoogste' term is. Met 'hoogte' wordt in deze context het volgnummer van de term bedoeld. In het geval van $\gamma = [0.25, 0.50, 0.75]$ is het volgnummer van locatie 0.50 gelijk aan 2. De complexe somrij die een uitdrukking geeft voor $C_{5,rest}$ wordt als volgt beschreven:

$$C_{5,rest} = \frac{1}{6\pi^3}\left[2\pi^3 \sum_{i=1}^{n} \left\{ {\gamma_i}^4 + \left(\sum_{j=i+1 \leq n}^{n} (\gamma_j) - (n+2-i) \right) \cdot {\gamma_i}^3 + {\gamma_i}^2 + \left(\sum_{j=i+1 \leq n}^{n} ({\gamma_j}^3 - 3{\gamma_j}^3 + \gamma_j) \right) \gamma_i \right\} + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{3}{2}{\gamma_i}^2 + \left(\frac{3 + 6(n-i)}{2} - 3 \cdot \sum_{j=i+1 \leq n}^{n} (\gamma_j) \right) \gamma_i \right\} \right] \tag{5.16}$$

Deze uitdrukking omschrijft zowel de $2\pi^3$ als de 2π term. De uitdrukking voor $C_{5,rest}$ komt voor $n = 4$ overeen met de uitdrukking omschreven in Tabel 5.2.

Nu voor zowel $C_{5,rest}$ als $C_{5,sincos}$ een uitdrukking is gevonden, kan met behulp van superpositie van de twee oplossingen de totale oplossing voor C_5 gevonden worden. Deze oplossing bestaat uit een omvangrijke somrij waarmee voor iedere gegeven verzameling γ de waarde van C_5 en daarmee dus ook k_{eq} bepaald kan worden. Voor de compleetheid zijn de uitdrukkingen waarmee voor iedere belastings-configuratie C_1, C_2, C_3, C_4 en C_5 bepaald kunnen worden hieronder geven.

$$C_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \approx 0.2827 \tag{5.17}$$

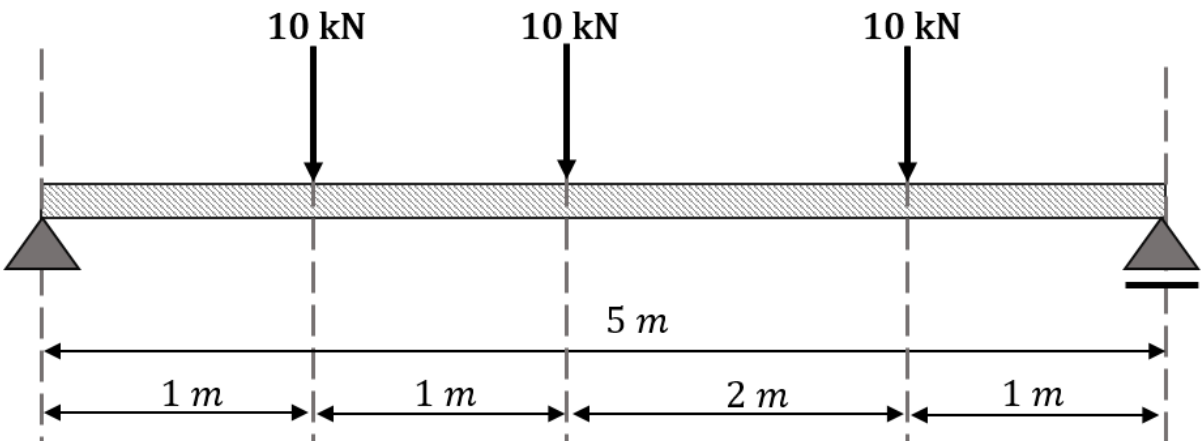
$$C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.4347 \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} C_3 = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& -\frac{1}{\pi^2}(\gamma_i - 1)\cos(\pi\gamma_i)^2 + \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) \\ & + \frac{-\gamma_i{}^3 + 3\gamma_i{}^2 - 2\gamma_i}{3} + \frac{\gamma_i - 1}{\pi^2} \Bigg] \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\gamma_i}{\pi^2}\cos(\pi\gamma_i)^2 - \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) + \frac{\gamma_i{}^3 - \gamma_i}{3} - \frac{\gamma_i}{\pi^2} \right] \tag{5.20}$$

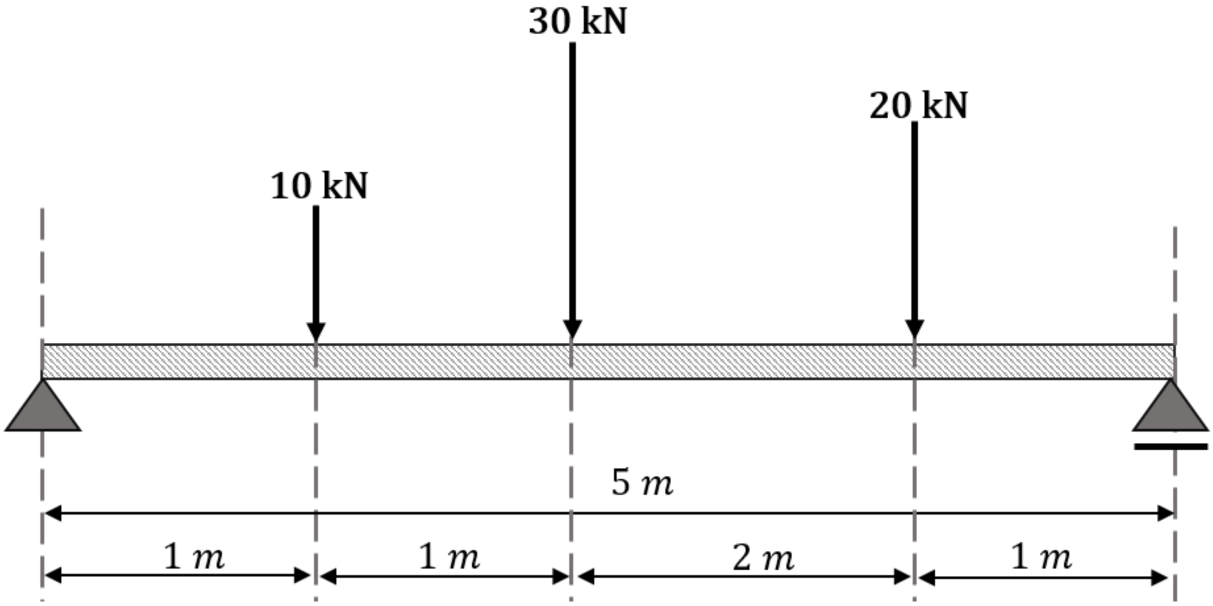
$$\begin{aligned} C_5 = \frac{1}{6\pi^3} \Bigg[& \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ 6\pi\cos(\pi\gamma_i)^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j(\gamma_i - 1)) + \gamma_i \cdot \sum_{j=i}^{n} (\gamma_j - 1) \right) \\ & - 6\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (\gamma_j) - \frac{1 + 2(n-i)}{2} \right) \Bigg\} \\ & + 2\pi^3 \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \gamma_i{}^4 + \left(\sum_{j=i+1 \le n}^{n} (\gamma_j) - (n + 2 - i) \right) \cdot \gamma_i{}^3 + \gamma_i{}^2 \\ & + \left(\sum_{j=i+1 \le n}^{n} (\gamma_j{}^3 - 3\gamma_j{}^3 + \gamma_j) \right) \gamma_i \Bigg\} \\ & + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{3}{2}\gamma_i{}^2 + \left(\frac{3 + 6(n-i)}{2} - 3 \cdot \sum_{j=i+1 \le n}^{n} (\gamma_j) \right) \gamma_i \right\} \Bigg] \end{aligned} \tag{5.21}$$

De enige input voor deze vergelijking is de verzameling γ met lengte n. Ter verduidelijking wordt hieronder een eenvoudig voorbeeld gegeven hoe deze verzameling γ gevonden kan worden. Neem een ligger belast met 3 gelijke puntlasten van 10 kN zoals weergeven in Figuur 5.2. De verzameling γ volgt uit de locaties van de puntlasten ten opzichte van de linker oplegging in verhouding tot de totale overspanningslengte.



***Figuur 5.2**: Voorbeeld 1 opstelling gamma reeks*

Verder geldt voor de verzameling γ dat $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \cdots \leq \gamma_n$, ofwel de gesorteerde lijst met locaties. Voor de belastings-configuratie weergeven bij Figuur 5.2 geldt dat $\gamma_1 = \frac{1m}{5m} = 0.2$, $\gamma_2 = \frac{2m}{5m} = 0.4$ en $\gamma_3 = \frac{4m}{5m} = 0.8$. Hiermee wordt de totale verzameling $\gamma = [0.2, 0.4, 0.8]$, met $n = 3$. Een uitbreiding op deze toepassing wordt gegeven door Figuur 5.3, waarin de puntlasten ook variëren in de grootte.



Figuur 5.3: Voorbeeld 2 opstelling gamma reeks

Voor dit geval kan de verzameling γ opgesteld worden door in te zien dat een puntlast van $30\ kN$ gelijk is aan 3 puntlasten van $10\ kN$, waardoor de totale verzameling $\gamma = [0.2, 0.4, 0.4, 0.4, 0.8, 0.8]$, met $n = 6$. Op deze manier kan via een zogenaamde *eenheidspuntlast* I (in dit geval $I = 10\ kN$) de variërende grootte van de puntlasten in rekening gebracht worden. Aan deze methode zitten echter twee beperkingen. Ten eerste werkt deze aanpak niet wanneer de puntlasten over de ligger ook nog eens verschillende richtingen hebben (een combinatie van opwaarts en neerwaarts). In de verzameling γ kan geen rekening worden gehouden met de richting van de puntlasten. Ten tweede kan niet iedere combinatie van puntlasten exact gesimuleerd worden. Een exacte simulatie kan enkel wanneer de puntlasten allemaal veelvouden zijn van een bepaalde eenheidspuntlast. Indien dit niet het geval is, worden er afrondfouten gemaakt. Zo wordt een puntlast van 105 kN afgerond naar 11 eenheidspuntlasten van 10 kN in het geval van Figuur 5.3. Deze afrondfout valt te beperken door een hele kleine eenheidspuntlast te aan te nemen. Op deze manier kan bijvoorbeeld een puntlast van 105 kN weergeven worden door 105 puntlasten van 1 kN. Van deze methode zal later in dit onderzoek in hoofdstuk 6 gebruik gemaakt worden.

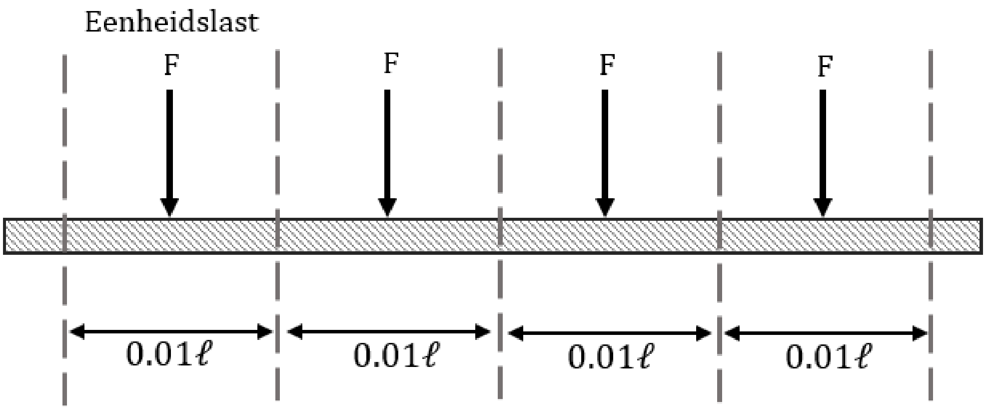
Omdat het met de hand uitwerken van de gevonden uitdrukkingen voor C_3, C_4 en C_5 nogal complex en tijdrovend is door de grote hoeveelheid somreeksen, is een drietal Excel sheets gecreëerd waarmee deze somreeksen automatisch bepaald worden. De toelichting op deze Excel sheets is te vinden in Bijlage J (de Excel sheets geven daarbij een meer begrijpelijke weergave van de somrij). Om de gevonden uitdrukking voor C_5 en daarbij de gecreëerde Excel sheets te controleren, is de belastings-configuratie met een gelijkmatig verdeelde belasting over de gehele lengte van de ligger onderzocht. Hierbij wordt een gelijkmatig verdeelde belasting gemodelleerd als 100 eenheidspuntlasten die evenredig verspreid zijn over de ligger.

$$\gamma = [0.005, 0.015, 0.025, \ldots, 0.985, 0.995], n = 100 \tag{5.22}$$

De waardes voor C_3, C_4 en C_5 volgen uit Figuren J.1, J.2 en J.3: $C_3 = -10.867, C_4 = -10.867$ en $C_5 = 121.87$. Dit resulteert hiermee in de volgende oplossing voor $M_{0,eq}$:

$$M_{0,eq} = Fl \cdot \sqrt{0.2827(\alpha^2 + \beta^2) + 0.4347\alpha\beta - 10.867(\alpha + \beta) + 121.87} \tag{5.23}$$

Waarin F de grootte is van de gebruikte eenheidspuntlast. Om deze uitdrukking te vergelijken met de oplossing van Van Straten, dient deze oplossing eerst omgezet te worden in een equivalente gelijkmatig verdeelde belasting. De afstand tussen de gebruikte eenheidspuntlasten is $0.01l$. Het veld waarover deze eenheidspuntlasten werken is hiermee gelijk aan $0.01l$, zie Figuur 5.4.



***Figuur 5.4**: Weergave omzetting eenheidspuntlasten naar equivalente gelijkmatig verdeelde belasting q*

Hiermee wordt de equivalente gelijkmatig verdeelde belastingen gevonden door

$$q = \frac{F}{0.01l} \rightarrow F = 0.01\,ql \tag{5.24}$$

Verder zijn de definities voor α en β van Van Straten anders dan dit onderzoek: een factor voor ql^2, waar in dit onderzoek gebruik wordt gemaakt van een factor voor Fl. Dit kan met behulp van vergelijking (5.24) verrekend worden via

$$\begin{aligned} \alpha &= 100\alpha_{Straten} = 100\alpha_S \\ \beta &= 100\beta_{Straten} = 100\beta_S \end{aligned} \tag{5.25}$$

Substitutie van vergelijkingen (5.24) en (5.25) in vergelijking (5.23) leidt tot: (3.13)

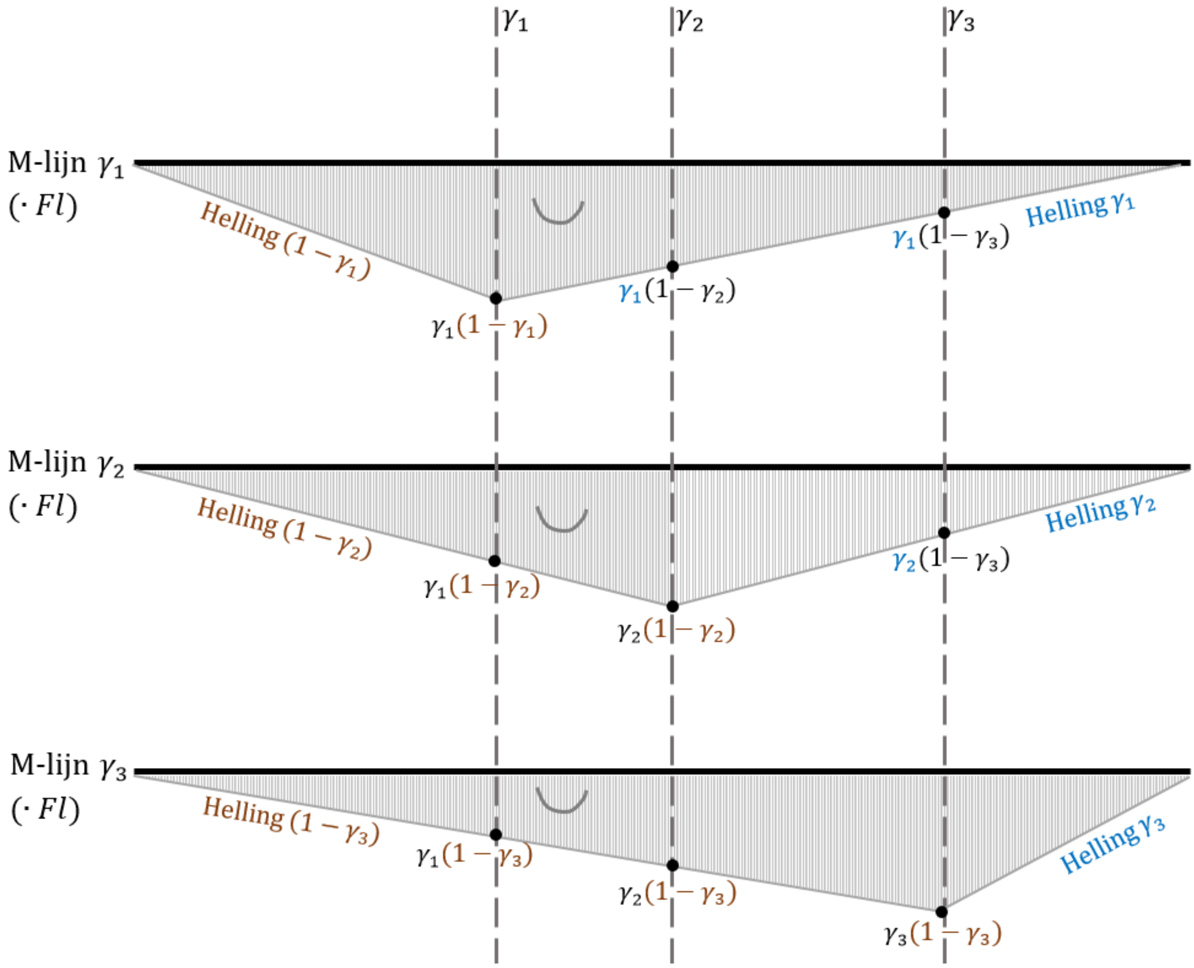
$$\begin{aligned} M_{0,eq} &= 0.01ql \cdot l \cdot \sqrt{0.2827((100\alpha_S)^2 + (100\beta_S)^2) + 0.4347 \cdot 100\alpha_S \cdot 100\beta_S - 10.867(100\alpha_S + 100\beta_S) + 121.87} \\ M_{0,eq} &= ql^2\sqrt{0.01^2(0.2827((100\alpha_S)^2 + (100\beta_S)^2) + 0.4347 \cdot 100\alpha_S \cdot 100\beta_S - 10.867(100\alpha_S + 100\beta_S) + 121.87)} \\ M_{0,eq} &= ql^2\sqrt{0.2827({\alpha_S}^2 + {\beta_S}^2) + 0.4347\alpha_S\beta_S - 0.10867(\alpha_S + \beta_S) + 0.012187} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Wat gelijk is aan de oplossing voor een gelijkmatig verdeelde belasting zoals gevonden door Van Straten in vergelijking (3.13). Hiermee is aangetoond dat de gevonden uitdrukkingen voor C_3, C_4 en C_5 en de bijbehorende uitwerking in Excel correct zijn. Middels deze methode kan voor iedere verzameling γ het equivalente moment $M_{0,eq}$bepaald worden. Hierbij is het wel belangrijk dat de verzameling γ representatief is voor de beschouwde belastings-configuratie. Hier wordt in Hoofdstuk 6 verder op in gegaan.

5.3 Bepaling M_{max}

Wanneer het equivalente moment $M_{0,eq}$ conform paragraaf 5.2 is bepaald, dient het maximale moment M_{max} bepaald te worden om tot toepassing van vergelijking (5.1) te komen. In deze paragraaf wordt een methode beschreven waarmee voor iedere (voor dit onderzoek relevante) belastings-configuratie de momentenlijn en het maximale moment in de ligger kan worden bepaald.

De momentenlijn is de som van twee bijdragen: 1) de kopmomenten αFl en βFl en 2) de verzameling eenheidspuntlasten F op locaties γ. Allereerst zal de bijdrage van de eenheidspuntlasten beschouwd worden. De momentenlijn ten gevolge van een bepaalde puntlast bestaat uit twee velden (de twee assen x_1 en x_2 zoals eerder toegepast) met twee verschillende hellingen. Voor een puntlast op locatie γ_1 is de helling voor het deel links van de last gelijk aan $Fl(1-\gamma_1)$ en rechts van de last gelijk aan $Fl\gamma_1$. Met behulp van deze twee hellingen kan voor iedere positie op de ligger het moment ten gevolge van de beschouwde puntlast bepaald worden. In het geval van meerdere puntlasten kunnen de bijdragen van de verschillende puntlasten opgeteld worden via het principe van superpositie. Figuur 5.5 weergeeft het geval met 3 puntlasten met locaties $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$.



***Figuur 5.5**: Visualisatie momentenlijnen voor een drietal eenheidspuntlasten*

Doordat de momentenlijn lineair is en enkel ter plaatse van de puntlasten varieert in richting, is het voor het maximale moment voldoende om enkel de locaties van de eenheidspuntlasten te beschouwen.

$$\begin{aligned} M_{\gamma_1} &= Fl(\gamma_1(1-\gamma_1)+\gamma_1(1-\gamma_2)+\gamma_1(1-\gamma_3)\,) \\ &= Fl(\gamma_1(3-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)) \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} M_{\gamma_2} &= Fl(\gamma_1(1-\gamma_2)+\gamma_2(1-\gamma_2)+\gamma_2(1-\gamma_3)\,) \\ &= Fl(\gamma_1+\gamma_2(2-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)) \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned} M_{\gamma_3} &= Fl(\gamma_1(1-\gamma_3)+\gamma_2(1-\gamma_3)+\gamma_3(1-\gamma_3)\,) = \\ &= Fl(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3(1-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)) \end{aligned} \tag{5.29}$$

De relatie tussen de verzameling eenheidspuntlasten γ en het verloop van het moment over de ligger valt af te leiden uit deze drie vergelijkingen en kan omschreven worden door een uitdrukking die het deel links van de beschouwde last beschrijft en een uitdrukking die het deel rechts van de beschouwde last beschrijft.

$$M_{\gamma_i} = Fl\cdot\left[\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j)+\gamma_i\cdot\left((n-i+1)-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\right] \tag{5.30}$$

Wanneer de invloed van de kopmomenten αFl en βFl mee wordt genomen, wordt een complete uitdrukking gevonden voor het buigend moment op een locatie γ_i. De momentenlijn ten gevolge van enkel kopmomenten volgt uit

$$M_{\gamma_i} = Fl(-\alpha(1-\gamma_i)-\beta\gamma_i) \tag{5.31}$$

Waarmee met behulp van het principe van superpositie een totale uitdrukking wordt gevonden voor het moment op een willekeurige positie op de ligger.

$$M_{\gamma_i} = Fl\cdot\left[\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j)+\gamma_i\cdot\left((n-i+1)-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right)-\alpha(1-\gamma_i)-\beta\gamma_i\right] \tag{5.32}$$

Met deze uitdrukking wordt het buigend moment ter plaatse van de eenheidspuntlasten in de vorm van een verzameling gevonden. Het maximale moment is de grootste absolute waarde van deze verzameling. De omschreven methode voor de bepaling van M_{max} is in Excel verwerkt (zie Bijlage K voor toelichting).

Om vergelijking (5.32) en de opgestelde Excel sheet te verifiëren, is de momentenlijn voor een gelijkmatig verdeelde belasting met behulp van de Excel sheet opgesteld. Verzameling γ wordt gekozen volgens (5.22). In Figuur K.1. valt af te lezen dat het maximale moment voor dit geval gevonden wordt door $M_{max} = 12.5\ Fl$. Daarbij volgt uit paragraaf 5.2 dat de eenheidspuntlast voor een gelijkmatig verdeelde belasting als volgt gevonden kan worden:

$$F = 0.01ql \tag{5.33}$$

Substitutie van F in M_{max} leidt tot

$$M_{max} = 12.5\cdot 0.01ql\cdot l = 0.125ql^2 = \frac{1}{8}ql^2 \tag{5.34}$$

Het gevonden maximale moment in de ligger bepaald met behulp van de gevonden uitdrukking is gelijk aan het exacte maximale moment volgens de constructiemechanica. Hiermee is aangetoond dat vergelijking (5.32) en de opgestelde Excel sheet correct zijn. In paragraaf 6.5 wordt een uitgebreidere verificatie uitgevoerd voor de gehele opgestelde methode om de effectieve kiplengte te bepalen.

5.4 Samenvatting

In dit hoofdstuk is een deel van deelvraag 5 beantwoord en behandeld. In hoofdstuk 4 is een algemene uitdrukking gevonden voor het equivalente moment, welke in dit hoofdstuk verder besproken is.

$$M_{0,eq} = Fl\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta+C_3\alpha+C_4\beta+C_5} \tag{5.35}$$

Hierin blijken C_1 en C_2 de invloed van de kopmomenten in rekening te brengen op het equivalente moment. C_3 en C_4 zijn kruistermen die de interactie tussen de kopmomenten en puntlasten in rekening brengen en C_5 brengt de invloed van enkel de puntlasten in rekening op het equivalente moment. Door de uitkomsten van de Maple oplossingen te analyseren, zijn de volgende oplossingen gevonden voor C_1 tot en met C_5 afhankelijk van verzameling γ:

$$C_1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi^2} \approx 0.2827 \tag{5.36}$$

$$C_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2} \approx 0.4347 \tag{5.37}$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\pi^2}(\gamma_i-1)\cos(\pi\gamma_i)^2+\frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)+\frac{-\gamma_i^3+3\gamma_i^2-2\gamma_i}{3}+\frac{\gamma_i-1}{\pi^2}\right] \tag{5.38}$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i}{\pi^2}\cos(\pi\gamma_i)^2-\frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)+\frac{\gamma_i^3-\gamma_i}{3}-\frac{\gamma_i}{\pi^2}\right] \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned} C_5 = \frac{1}{6\pi^3}\Bigg[&\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{6\pi\cos(\pi\gamma_i)^2\cdot\left(\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j(\gamma_i-1))+\gamma_i\cdot\sum_{j=i}^{n}(\gamma_j-1)\right)-6\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) \\ &\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(\gamma_j)-\frac{1+2(n-i)}{2}\right)\Bigg\} \\ &+2\pi^3\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma_i^4+\left(\sum_{j=i+1\le n}^{n}(\gamma_j)-(n+2-i)\right)\cdot\gamma_i^3+\gamma_i^2+\left(\sum_{j=i+1\le n}^{n}(\gamma_j^3-3\gamma_j^3+\gamma_j)\right)\gamma_i\right\} \\ &+2\pi\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{3}{2}\gamma_i^2+\left(\frac{3+6(n-i)}{2}-3\cdot\sum_{j=i+1\le n}^{n}(\gamma_j)\right)\gamma_i\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{5.40}$$

Vervolgens is het maximale moment in de ligger beschouwd. Er is een uitdrukking gevonden waarmee het moment op iedere locatie in de ligger bepaald kan worden,

$$M_{\gamma_i} = Fl\cdot\left[\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j)+\gamma_i\cdot\left((n-i+1)-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right)-\alpha(1-\gamma_i)-\beta\gamma_i\right] \tag{5.41}$$

Zowel de uitdrukkingen om het maximale moment als constanten C_1 tot en met C_5 te bepalen zijn geprogrammeerd in sheets *'C3, C4, C5, Coef. C5 en Mmax'* van Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'***. Ook is aangetoond dat de gevonden uitdrukkingen correct zijn voor een gelijkmatig verdeelde belasting. Hiermee is een opstap gemaakt naar een Excel Tool waarmee voor iedere belastings-configuratie de effectieve kiplengte bepaald kan worden. In hoofdstuk 6 wordt het systeem waarmee de verzameling γ kan worden bepaald verder uiteengezet.

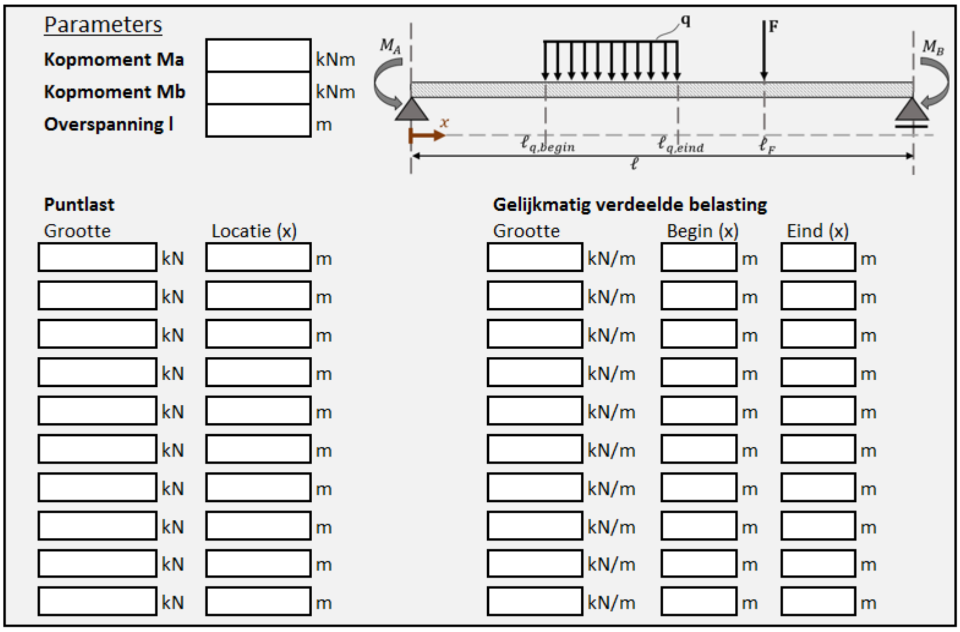
6. Excel Tool voor bepaling effectieve kiplengte

In hoofdstuk 5 is een methode omschreven waarmee C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 en M_{max} bepaald kunnen worden. Vervolgens kan hiermee het equivalente moment en daarmee ook de effectieve kiplengte worden bepaald. De vereiste input voor deze methode zijn de factoren α en β en de verzameling γ, die de locaties van de eenheidspuntlasten weergeeft. Zoals geïntroduceerd in paragraaf 5.2 kunnen verscheidene belastings-configuraties beschouwd worden door de belasting om te zetten naar eenheidspuntlasten met een grootte I die aangrijpen op locaties γ. Zo kan een gelijkmatig verdeelde belasting q gesimuleerd worden door (bijvoorbeeld) een honderdtal eenheidspuntlasten I evenredig te verdelen over de lengte l van de ligger. Voor dit voorbeeld is de afstand tussen de eenheidspuntlasten gelijk aan $0.01l$ en de grootte van de eenheidspuntlasten $I = 0.01\,ql$ (volgens vergelijking (5.24)). Deze methode kan op een zelfde wijze ook toegepast worden voor een willekeurig aantal puntlasten met willekeurige grootte. Ook kunnen meerdere gelijkmatig verdeelde belastingen (van verschillende grootte) over gedeeltes van de ligger gesimuleerd worden door naast de grootte van de eenheidspuntlasten ook te variëren in de tussenliggende afstand.

Hiermee kan de procedure om de effectieve kiplengte te vinden onderscheiden worden in twee onderdelen: 1) de omzetting van een willekeurige belastings-configuratie naar een verzameling γ, eenheidspuntlast I en kopmomentfactoren α en β en 2) de bepaling van C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 en M_{max} met behulp van γ. Het tweede deel van deze procedure is reeds geautomatiseerd met behulp van Excel (zie hoofdstuk 5 en Bijlagen J en K). In dit hoofdstuk wordt een systeem omschreven waarmee een willekeurige belastings-configuratie wordt omgezet naar een aantal eenheidspuntlasten met grootte I ter plaatse van locaties γ. Deze twee delen worden vervolgens verwerkt in een Excel Tool waarmee voor iedere belastings-configuratie de effectieve kiplengte kan worden bepaald. Deze Excel Tool zal onderverdeeld in meerdere lagen beschreven worden. Eerst wordt de input van de gebruiker beschreven, gevolgd door de werking van het systeem, waarna de user interface en de beperkingen van de Excel Tool verder belicht worden. Tot slot wordt de Excel Tool geverifieerd.

6.1 Beschrijving input gebruiker

De door de gebruiker in te voeren input is weergeven in Figuur 6.1. Hierbij dient de gebruiker de (positieve) definities van de parameters aan te houden, tezamen met de opgegeven eenheden.



Figuur 6.1: Input voor de Excel Tool

6.2 Beschrijving systeem

Nadat de gebruiker de input heeft ingevoerd, wordt de input als het ware vertaald naar input voor het systeem (zie sheet *'Verwerking'* van Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** alle verwijzingen naar Excel sheets in deze paragraaf refereren naar dit bestand, voor een goede opening van de Excel Tool is het essentieel dat de toelichting is doorgelezen, zie Bijlage L). De locaties van de puntlasten worden omgezet naar relatieve locaties (tussen 0 en 1) ten opzichte van de ingevoerde overspanningslengte en vervolgens gesorteerd, waardoor de meest linkse puntlast vooraan in verzameling γ komt te staan conform voorbeeld 1 in paragraaf 5.2. Ook de locaties van de gelijkmatig verdeelde belastingen worden omgezet naar relatieve locaties. Vervolgens worden de gelijkmatig verdeelde belastingen gesorteerd op grootte (let op: niet de locatie!). De volgende stap is het bepalen van de equivalente eenheidspuntlast I. Hiervoor worden drie situaties onderscheiden:

- **Enkel puntlasten** (sheet *'eq. lasten F'*). Om puntlasten te simuleren, wordt de totale som aan puntlasten verdeeld over een aantal eenheidspuntlasten; voor dit systeem maximaal 1000. Door deze eenheidspuntlasten op een correcte manier te verdelen over de ligger, kan in theorie iedere puntlast-gerelateerde belastings-configuratie gesimuleerd worden. Bij het vereenvoudigen van willekeurige puntlasten naar een heel aantal eenheidspuntlasten worden afrondfouten gemaakt. In deze sheet wordt het aantal eenheidslasten gezocht waarvoor de som van deze afrondfouten minimaal is. Met dit aantal wordt de bijbehorende grootte van de eenheidspuntlast I_F bepaald via $I_F = \frac{som\ puntlasten}{gevonden\ aantal\ eenheidspuntlasten}$. Vervolgens worden in sheet *'eq. gamma F'* de puntlasten omgezet in een verzameling γ_F met behulp van de gevonden I_F.
- **Enkel gelijkmatig verdeelde belastingen** (sheet *'eq. lasten Q'*). Deze vorm van belasting wordt gesimuleerd door 200 eenheidspuntlasten op een equivalente wijze te verdelen over de ligger. In het geval van meerdere gelijkmatig verdeelde belastingen worden alle q-lasten uitgedrukt in een ratio ten opzichte van de kleinste q-last. De afstand tussen twee eenheidspuntlasten is afhankelijk van deze ratio. Vervolgens worden deze afstanden tussen twee opeenvolgende eenheidspuntlasten omgezet in een verzameling γ_q. Uit deze afstanden wordt de grootte van de eenheidspuntlast I_q bepaald.
- **Puntlasten en gelijkmatig verdeelde belastingen** (sheet *'eq. Q+F'*). Wanneer zowel puntlasten als q-lasten aangrijpen op de ligger is het niet meer mogelijk om op zoek te gaan naar de eenheidspuntlast waarvoor de afrondfout minimaal is; zowel de puntlasten als de q-lasten zijn (op een verschillende manier) afhankelijk van de eenheidspuntlast. Voor dit geval wordt de eenheidspuntlast I_q, die volgt uit enkel de q-lasten, gebruikt om de puntlasten te simuleren (in plaats van de eerder gevonden I_F). Het maximale aantal eenheidspuntlasten is voor dit systeem gesteld op 1000, wat betekent dat er naast de 200 eenheidspuntlasten die gebruikt worden voor het simuleren van de q-last nog maximaal 800 eenheidspuntlasten over zijn voor het simuleren van de puntlasten. Voor het grootste deel van de gevallen blijkt dit voldoende. In paragraaf 6.5 wordt verder ingegaan op de gevallen waarvoor dit onvoldoende is. Ten slotte worden de puntlasten met behulp van I_q omgezet in een verzameling γ_{q+F}.

Het beschouwen van de genoemde drie gevallen resulteert in verzamelingen γ_F, γ_q en γ_{q+F} en eenheidspuntlasten I_F en I_q. Op basis van welk geval optreedt, dient het systeem een keuze te maken tussen deze drie gevallen (sheet *'gamma'*). Dit is gerealiseerd met behulp van een aantal *IF*-statements. Bijvoorbeeld: als alle q-lasten gelijk zijn aan 0 en (één van) de puntlasten groter dan 0, dan is de belastings-configuratie te omschrijven met enkel puntlasten en dienen γ_F en I_F gekozen te worden. Vervolgens worden kopmomentfactoren α en β als volgt bepaald:

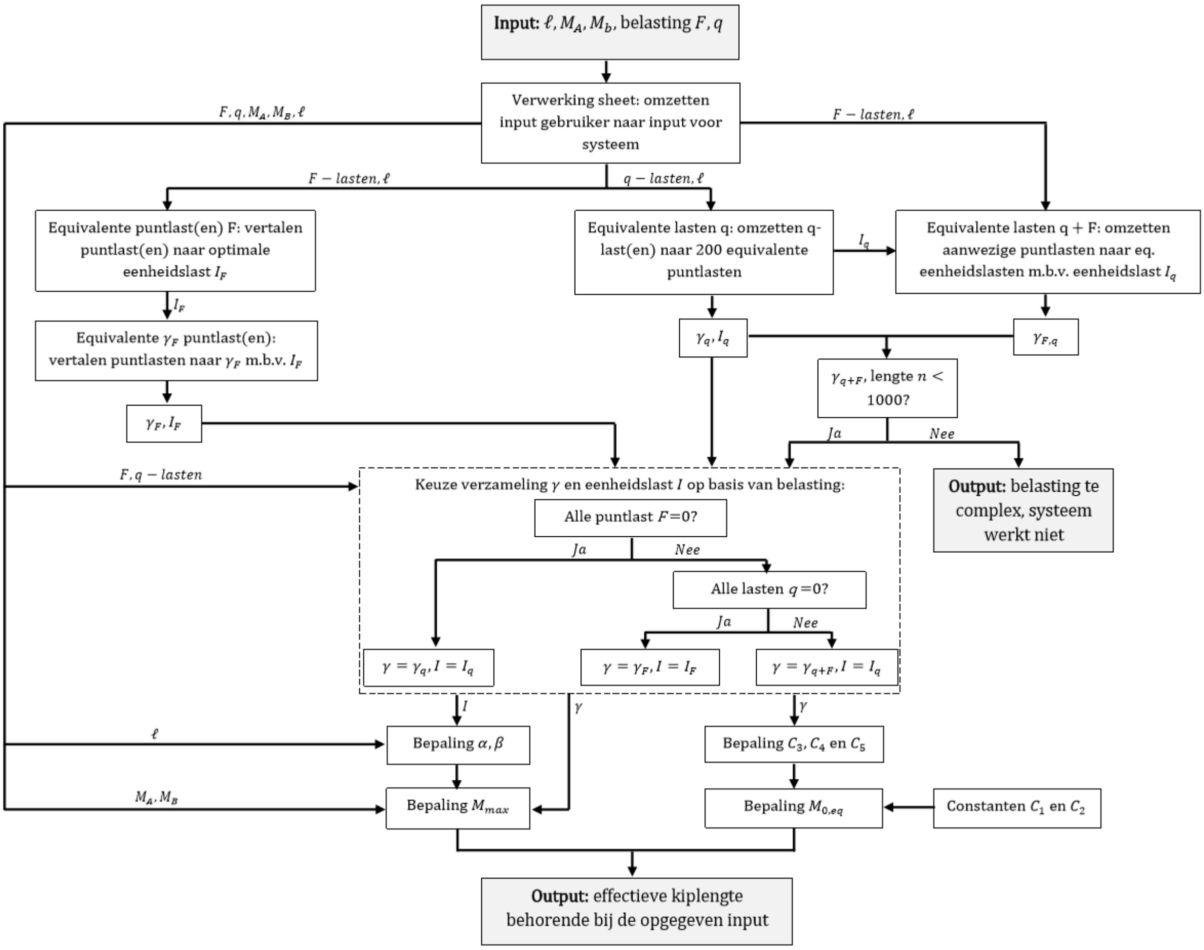
$$\alpha = \frac{M_A}{I \cdot \ell}, \quad \beta = \frac{M_B}{I \cdot \ell} \tag{6.1}$$

Hiermee is het eerste deel van het systeem afgerond en treedt het tweede deel van het systeem in werking om C_3, C_4, C_5 en M_{max} te bepalen (sheets *'C3, C4, C5, Coef C5, Mmax'*). Input voor dit tweede deel van het systeem is: γ, α en β, waar voor de bepaling van C_3, C_4 en C_5 enkel γ nodig is. Dit systeem is uitvoerig behandeld in hoofdstuk 5 en zal daarom hier niet verder besproken worden.

Vervolgens kan de effectieve kiplengte voor de beschouwde belastings-configuratie worden gevonden via de bekende vergelijking, waarin de puntlast *F* is vervangen door de eenheidspuntlast I.

$$l_{eff} = \frac{I \cdot l\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta+C_3\alpha+C_4\beta+C_5}}{M_{max}}l \tag{6.2}$$

Om de werking van het systeem samen te vatten en daarbij eventueel te verduidelijken, is een stromingsschema van de gecreëerde Excel Tool gemaakt. Deze is weergegeven in Figuur 6.2 en voor een betere leesbaarheid uitvergroot weergegeven in Bijlage M.



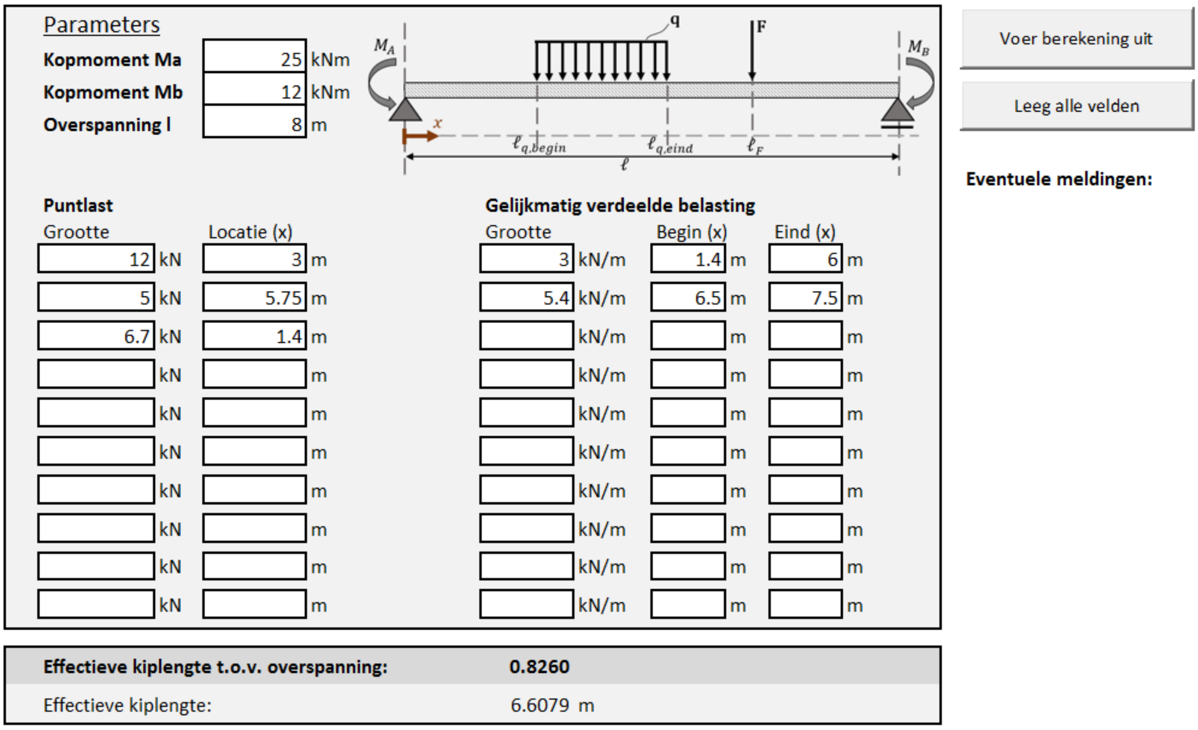
***Figuur 6.2**: Stromingsschema voor het in Excel ontworpen systeem om de effectieve kiplengte te bepalen*

Voor het tweede deel van het systeem (bepaling C_3, C_4, C_5 en M_{max}) is in hoofdstuk 5 voor bepaalde gevallen al aangetoond dat deze correct is. Daarmee is de uitkomst, mits het eerste deel van het systeem goed functioneert, correct. In Bijlage N is aangetoond dat ook het eerste deel van het systeem correct is. In paragraaf 6.5 wordt de Excel Tool verder getest.

6.3 User interface Excel Tool

De eerste sheet in het Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** bevat de gebruikerspagina. De overige sheets zijn voor de gebruiker niet nodig om de effectieve kiplengte te bepalen. Naast correctheid van het systeem is gebruiksvriendelijkheid een vereiste. Dit kan gerealiseerd worden door een duidelijke user interface toe te passen. In Figuur 6.3 is een deel van het gebruikersscherm weergegeven. Met deze user interface is als volgt geprobeerd een overzichtelijk en instinctief gebruik te realiseren:

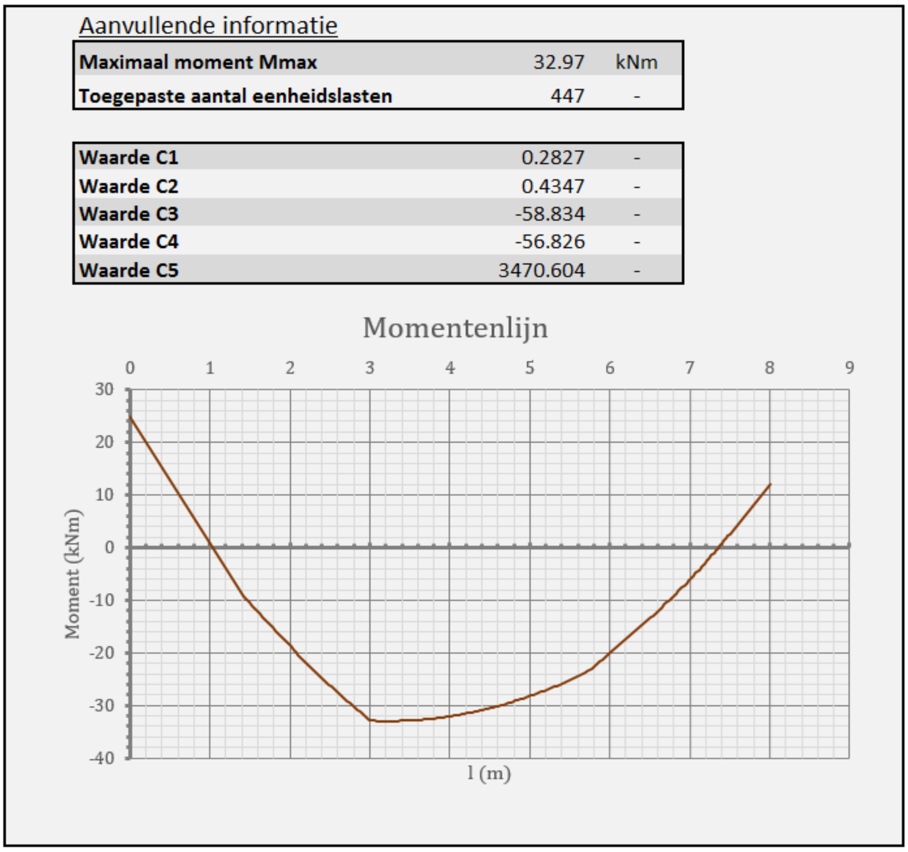
- De (positieve) definities zijn rechtsboven gegeven in een figuur.
- De inputvelden zijn duidelijk te onderscheiden van de andere velden.
- Eenheden zijn gegeven waardoor eenheidsfouten vrijwel niet voor kunnen komen.
- Er is duidelijk onderscheid gemaakt tussen de kolommen behorend bij puntlasten en de q-lasten door een lege kolom tussen beiden toe te passen.
- De output in de vorm van de effectieve kiplengte is de enige rij met een donkerdere tint dan de rest, waardoor deze rij er gelijk uit springt.



__Figuur 6.3__: User interface gebruikersdeel Excel Tool

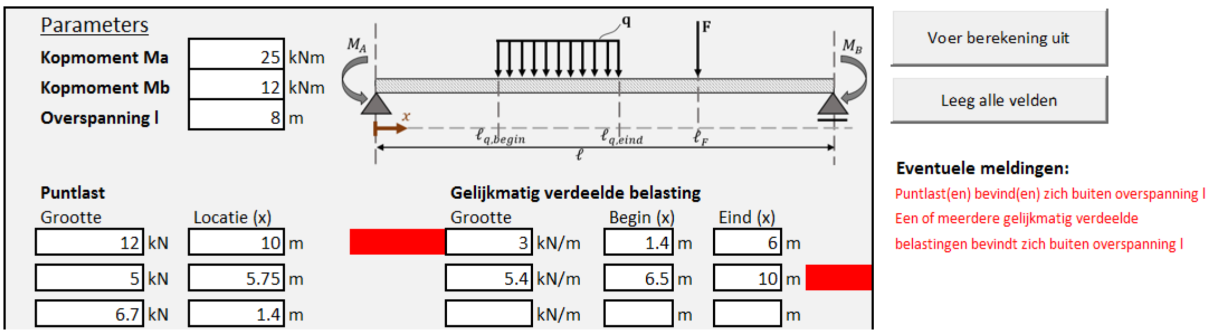
Daarnaast is er een tweetal 'knoppen' toegevoegd. De knop *voer berekening uit* dient ingedrukt te worden wanneer alle gewenste input ingevuld is. Deze knop is gecreëerd met behulp van Microsoft Visual Basic for Applications, waarmee een aantal Excel Macro's is ontworpen (zie Bijlage O voor verdere toelichting op de gemaakte Macro's). Deze Macro's worden gebruikt om de berekening pas te later starten wanneer de knop *voer berekening uit* wordt ingedrukt. Op deze manier wordt voorkomen dat de effectieve kiplengte constant her-berekend wordt en het systeem daarmee te veel rekentijd vergt. De Macro's kopiëren de input naar de verwerkingssheet, waarmee de berekening in gang wordt gezet en kopiëren de output vervolgens weer terug naar het gebruikersscherm. Om het gebruiksgemak te vergroten, is de knop *leeg alle velden* toegevoegd. Ook deze knop is met behulp van een Macro in Visual Basic gecreëerd.

Naast het gebruikersscherm voor de input is er een extra blok ontworpen met daarin extra informatie omtrent de output van de berekening. Dit blok is weergegeven in Figuur 6.4 en levert extra informatie omtrent de waardes van C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 en M_{max}. Daarbij wordt ook de momentenlijn weergegeven. Het gevonden maximale moment kan bijvoorbeeld weer gebruikt worden voor de verdere kipstabiliteitstoetsing zoals beschreven in paragraaf 1.4. Tevens wordt ook weergegeven hoeveel eenheidspuntlasten toegepast zijn om de belastings-configuratie te simuleren. Aangezien het systeem ontworpen is voor maximaal 1000 eenheidspuntlasten moge het duidelijk zijn dat deze waarde kleiner dan 1000 moet zijn.



Figuur 6.4: User interface extra informatie deel Excel Tool

Het kan voorkomen dat de gebruiker onbedoeld verkeerde waardes voor de locatie invoert. De gecreëerde Excel Tool zoekt automatisch naar waardes die buiten de overspanning liggen en daarmee (onbedoeld) foutief zijn ingevoerd. Deze procedure wordt zowel voor puntlasten als voor gelijkmatig verdeelde belastingen uitgevoerd. Wanneer de Excel Tool een dergelijke waarde vindt, wordt een foutmelding onder het kopje *eventuele meldingen* gegenereerd en wordt de bijbehorende rij rood weergegeven. Dit is weergegeven in Figuur 6.5.



Figuur 6.5: Foutmeldingen Excel Tool indien foutieve waarden locatie(s) word(t)(en) gegeven

Een zelfde soort mechanisme is ingebouwd met betrekking tot de maximale hoeveelheid eenheidspuntlasten. Wanneer deze hoeveelheid groter is dan 1000, wordt de foutmelding *'de belastings-configuratie kan met behulp van dit model niet goed geschematiseerd worden en daarom is de output onbruikbaar. Probeer Aanvullend bestand'* gegenereerd en wordt de betreffende cel rood. Dit Aanvullend bestand wordt verder besproken in paragraaf 6.4.

6.4 Beperkingen

Voor het gebruik van de gemaakte Excel Tool is het van belang dat de gebruiker op de hoogte is van de beperkingen van de Tool.

- De Excel Tool is enkel toepasbaar voor houten rechthoekige liggers waarvan de hoogte vele malen groter is dan de breedte (conform de afbakening van dit onderzoek).
- De Tool houdt geen rekening met rotatiestijfheden ter plaatse van de opleggingen als gevolg van bijvoorbeeld inklemmingen of naastgelegen velden. Wel kunnen er hiervoor veilige aannames gedaan worden. Dit wordt besproken in Hoofdstuk 7.
- Omdat er in de afleiding van de gevonden methode enkel rekening is gehouden met de locatie en niet met de richting van de equivalente eenheidspuntlasten, kan de richting van de belasting niet mee genomen worden in de Excel Tool. Enkel belastingen die allemaal in dezelfde richting werken, kunnen meegenomen worden. Hierbij dienen wel de positieve definities van de kopmomenten in de gaten gehouden te worden.
- Tijdens het creëren van de Excel Tool is de keuze gemaakt om de invoer tot aan 10 puntlasten en 10 gelijkmatig verdeelde belastingen mogelijk te maken. Deze keuze is gemaakt omdat belastings-configuraties van hogere complexiteit vrijwel niet voorkomen en daarbij ook niet praktisch zijn. In de praktijk worden belastingen vaak vereenvoudigd weergegeven, waardoor een uitbreiding van de invoermogelijkheden van lasten niet noodzakelijk is.
- De Excel Tool is gecreëerd voor belastings-configuraties die geschematiseerd kunnen worden met behulp van maximaal 1000 equivalente eenheidspuntlasten. Hierbij ligt vast dat 200 eenheidspuntlasten gebruikt worden om de gelijkmatig verdeelde belasting te simuleren. Deze keuze is gemaakt vanwege 2 redenen: voor deze hoeveelheid eenheidspuntlasten is de opsplitsing van een q-last in puntlasten nog voldoende correct en voor grotere hoeveelheden eenheidspuntlasten wordt de hoeveelheid overgebleven eenheidspuntlasten dermate klein dat het toepasgebied van de Excel Tool aanzienlijk krimpt. Wanneer een zeer lage waarde wordt ingevoerd voor de gelijkmatig verdeelde belasting resulteert dat in eveneens een zeer lage waarde voor de eenheidspuntlast (aangezien deze lage q-last opgedeeld wordt in 200 equivalente puntlasten). Indien er naast deze lage q-last ook naar verhouding grote puntlasten ingevoerd worden, groeit het aantal equivalente eenheidspuntlasten explosief: de grote puntlasten en de zeer lage eenheidspuntlasten zorgen voor een zeer groot aantal equivalente eenheidspuntlasten. Wanneer dit aantal eenheidspuntlasten groter is dan 1000 geeft Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** een foutmelding: de effectieve kiplengte kan niet bepaald worden. Om voor dit soort (uitzonderlijke) gevallen toch de effectieve kiplengte te kunnen bepalen, is het Excel bestand '***Excel Tool Aanvulling Bepaling Effectieve Kiplengte'*** gecreëerd. Met behulp van dit bestand kunnen tot 2500 eenheidspuntlasten verwerkt worden. In dit bestand is het aantal eenheidspuntlasten dat gebruikt wordt verlaagd naar 100, waardoor de grootte I van de equivalente eenheidspuntlasten ook halveert. Op deze manier kunnen er 6 keer grotere puntlasten ingevoerd worden in combinatie met q-lasten (2400 i.p.v. 800 eenheidspuntlasten, waarbij I_q tweemaal groter is), waarbij er wel wat precisie

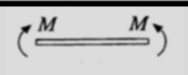
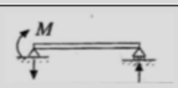
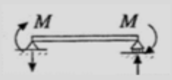
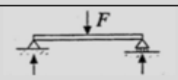
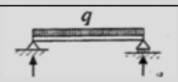
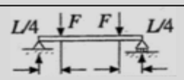
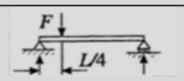
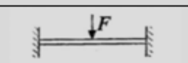
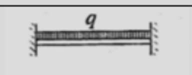
wordt ingeleverd met betrekking tot de simulatie van de q-lasten. De rekentijd van dit bestand is tientallen keren groter dan het bestand met 1000 eenheidspuntlasten en gebruik van dit bestand wordt daarom enkel aangeraden indien de Excel Tool dat aangeeft. Meer toelichting over dit Aanvullend bestand tezamen met een voorbeeld is te vinden in Bijlage P. Indien er meer dan 2500 eenheidspuntlasten nodig blijken te zijn, biedt de gecreëerde Excel Tool geen oplossing. In dit geval dient de belastings-configuratie naar eigen inzicht versimpeld te worden om tot een (conservatieve) waarde voor de effectieve kiplengte te komen. Voor een voorbeeld van deze versimpeling wordt verwezen naar Bijlage P.

- De output van de Excel Tool is enkel bruikbaar wanneer de lasten aangrijpen in het normaalkrachtencentum van de doorsnede. Hier wordt verder op ingegaan in paragraaf 7.3.
- De Excel Tool is gebaseerd op de aanname dat de rotatievorm na kippen omschreven kan worden met een enkele sinusterm. Alhoewel in Bijlage H is aangetoond dat de hierdoor geïntroduceerde afwijking voor de beschouwde gevallen gering is, is het onbekend hoe groot deze afwijking is voor zeer complexe asymmetrische belastings-configuraties.

6.5 Verificatie met behulp van literatuur

Zoals omschreven in paragraf 6.1 valt het systeem op te delen in twee delen: 1) de omzetting van een willekeurige belastings-configuratie naar een verzameling γ, eenheidspuntlast I en kopmoment-factoren α en β en 2) de bepaling van C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 en M_{max} met behulp van γ. Beide systemen zijn verwerkt in Excel en afzonderlijk van elkaar geverifieerd (deel 2 in hoofdstuk 5 en deel 1 in Bijlage N). In deze paragraaf wordt een complete verificatie uitgevoerd door alle gegeven waarden voor de

Tabel 6.1: Vergelijking Excel Tool met basisgevallen STEP-dictaat

Belastings-configuratie	Waarde STEP dictaat	Waarde model	Afwijking (%)
	1.00	1.00	0.00
	0.57	0.532	-6.66 T.o.v. exact: 0.38%
	0.43	0.362	-15.81 T.o.v. exact: -2.16%
	0.74	0.732	-1.08
	0.88	0.883	0.34
	0.96	0.962	0.21
	0.69	0.669	-3.04
	0.59	0.577	-2.20
	0.39	0.383	-1.79

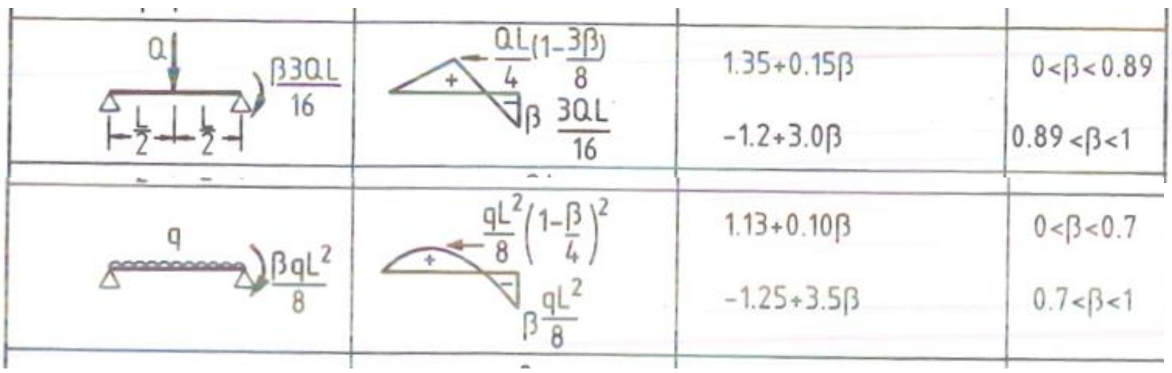
basisgevallen uit het STEP-dictaat uit Bijlage A te vergelijken met de uitkomst van de Excel Tool. Daarbij worden ook enkele belastings-configuraties vergeleken met de gevonden waarden van Trahair (zie Bijlage B). De vergelijking met het STEP-dictaat is weergegeven in Tabel 6.1.

Het eerste dat opvalt aan deze vergelijking is het grote verschil voor het tweede (-6.66%) en het derde basisgeval (-15.81%). Op het eerste oog lijken dit fouten in de Excel Tool, echter zijn deze afwijkingen eenvoudig te verklaren. In paragraaf 3.5 zijn deze twee basisgevallen al nader onderzocht. De twee waardes uit het STEP-dictaat blijken afkomstig te zijn van de benadering van Kirby en Nethercot die weergegeven is in Figuur 3.2. Deze benadering is aan de conservatieve kant, wat volgt uit de exacte oplossing die weergegeven is in Figuur 3 (en gereproduceerd is in Figuur 5.1). Aangezien de Excel Tool de exacte analytische oplossing geeft, dient de uitkomst te worden vergeleken met de exacte oplossing. Uit Figuur 5.1 blijkt dat de exacte oplossing voor basisgeval 2 uit STEP-dictaat ongeveer gelijk is aan 0.53 en voor basisgeval 3 ongeveer gelijk is aan 0.37. De afwijkingen van de Excel Tool ten opzichte van deze exacte waardes zijn respectievelijk 0.38% en -2.16% (afleesfouten buiten beschouwing gelaten, het draait enkel om de orde van de fout).

De waardes voor de effectieve kiplengte die volgen uit de Excel Tool blijken de waardes uit het STEP-dictaat vrij goed te benaderen. Ook de gevonden effectieve kiplengte voor aan weerszijden ingeklemde liggers blijkt correct te zijn. De waardes uit het STEP-dictaat zijn over het algemeen veilig ten opzichte van de exacte oplossing volgens de Excel Tool.

De orde van de afwijkingen komt overeen met de orde afwijking van de oplossing met een enkele sinusterm ten opzichte van de oplossing met 5 sinustermen (zie Bijlage H). Ook komt de richting van de afwijking overeen: de exactere oplossing die gebruik maakt van 5 sinustermen ligt altijd boven de oplossing met 1 sinusterm (net zoals de meeste waardes uit het STEP-dictaat boven de waardes uit de Excel Tool liggen). Hiermee is een mogelijke verklaring gegeven voor de kleine afwijkingen van de Excel Tool. Echter is de afleiding van de waardes uit het STEP-dictaat onbekend en kunnen hier dus ook geen verdere verklaringen worden gegeven of conclusies worden getrokken.

De door Trahair beschouwde basisgevallen komen op twee gevallen na overeen met de beschouwde basisgevallen uit het STEP-dictaat. De twee door Trahair toegevoegde gevallen zijn weergeven in Figuur 6.6.



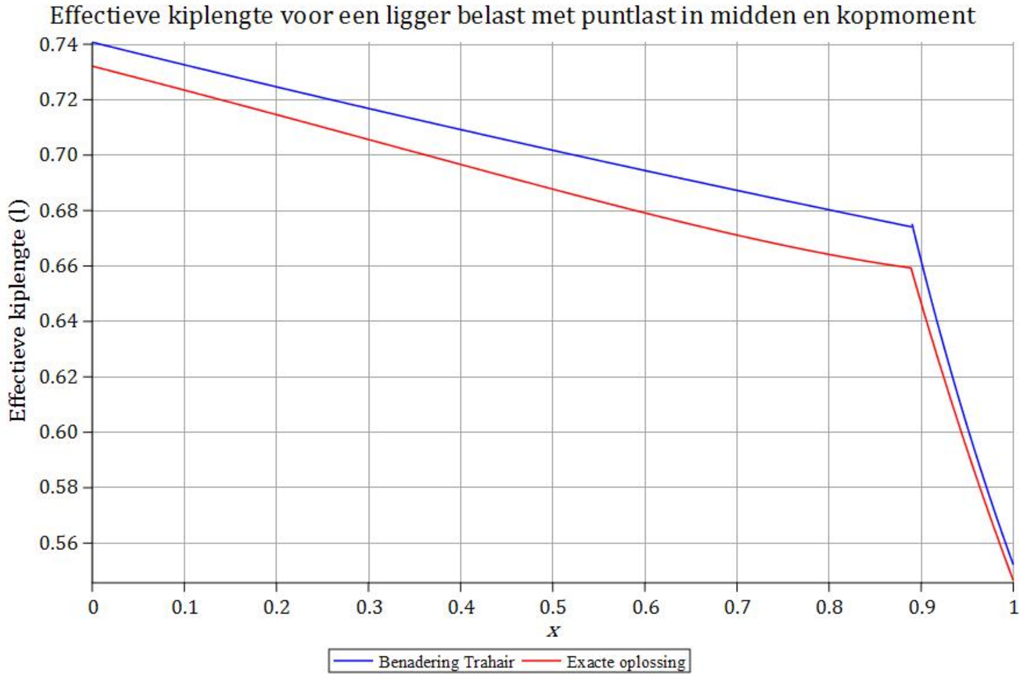
Figuur 6.6: De door Trahair toegevoegde basisgevallen t.o.v. het STEP dictaat

Beide gevallen zijn met behulp van de Excel Tool geanalyseerd en vervolgens vergeleken met de door Trahair gevonden benaderingen. Om tot dezelfde notatie te komen, is de inverse van de benadering genomen (conform Bijlage B) en is de notatie als volgt veranderd:

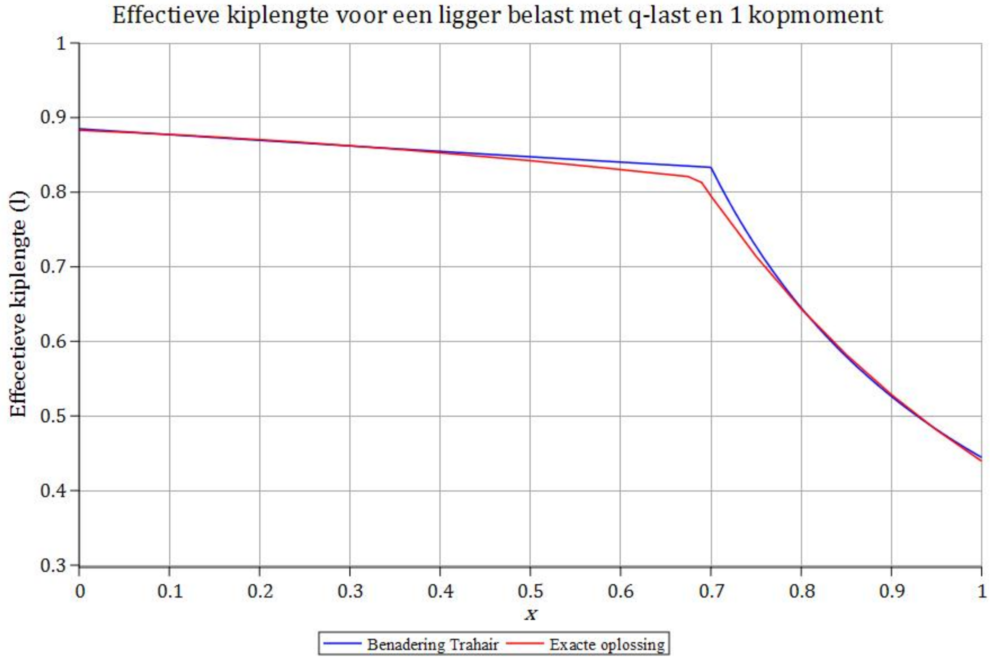
$$Geval\ Q - last: l_{eff} = \begin{cases} \dfrac{1}{1.35 + 0.15\,x}, 0 < x < 0.89 \\ \dfrac{1}{-1.2 + 3.0\,x}, 0.89 < x < 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$Geval\ q - last: l_{eff} = \begin{cases} \dfrac{1}{1.13 + 0.10\,x}, 0 < x < 0.7 \\ \dfrac{1}{-1.25 + 3.5\,x}, 0.7 < x < 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Voor $l = 10\ m, Q = 16\ kN$ en $q = 1\ kN/m$ (willekeurige waardes) worden de uitkomsten vergeleken in Figuren 6.7 en 6.8.



***Figuur 6.7**: Vergelijking exacte oplossing Excel Tool met benadering Trahair voor puntlast in het midden en 1 kopmoment*

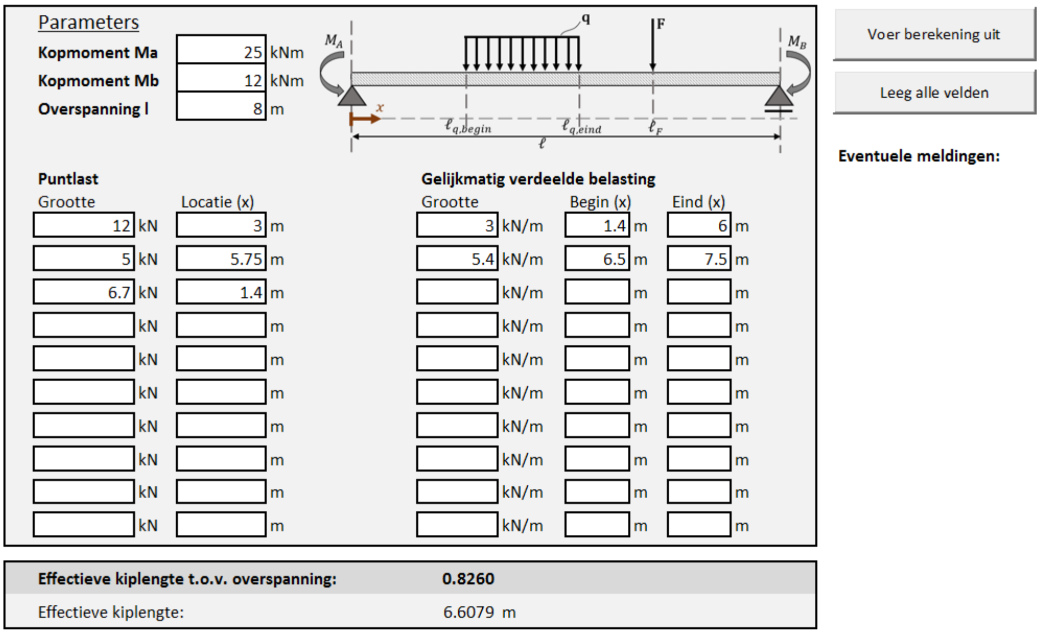


***Figuur 6.8:** Vergelijking exacte oplossing Excel Tool met benadering Trahair voor q-last en 1 kopmoment*

De benadering van Trahair en de oplossing vanuit de Excel Tool benaderen elkaar voornamelijk in Figuur 6.8 zeer goed. Voor Figuur 6.7 is de maximale afwijking ongeveer 2.2%. Vanuit de vergelijking van de Excel Tool met de basisgevallen vanuit het STEP-dictaat en van Trahair kan geconcludeerd worden dat de gecreëerde Tool zo goed als overeen komt met alle beschouwde gevallen. Hiermee valt met zekerheid te zeggen dat de Excel Tool een correcte uitkomst geeft en daarmee geverifieerd is.

6.6 Samenvatting

In dit hoofdstuk (samen met hoofdstuk 5) is deelvraag 5 volledig beantwoord. In hoofdstuk 5 zijn uitdrukkingen gevonden waarmee C_1 tot en met C_5 en M_{max} afhankelijk van verzameling γ, α en β kunnen worden bepaald. Hiermee is indirect al een methode gevonden om de effectieve kiplengte voor iedere belastings-configuratie te bepalen. Echter is het voor het gebruiksgemak wenselijk om de verzameling γ, α en β op een automatische wijze te laten bepalen. Deze automatisering is uitgevoerd in bijgeleverd Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** (voor een goede opening van de Excel Tool is het essentieel dat de toelichting is doorgelezen, zie Bijlage L). In deze Excel Tool dient de gebruiker de belasting conform de in Figuur 6.9 gegeven positieve definities in te vullen. De user interface is zodanig ontworpen dat het op een intuïtieve wijze kan worden gebruikt. De berekening kan worden gestart door de knop recht in te drukken. Verder geeft het programma bepaalde foutmeldingen indien nodig.



Figuur 6.9: *Gebruikersscherm Excel Tool*

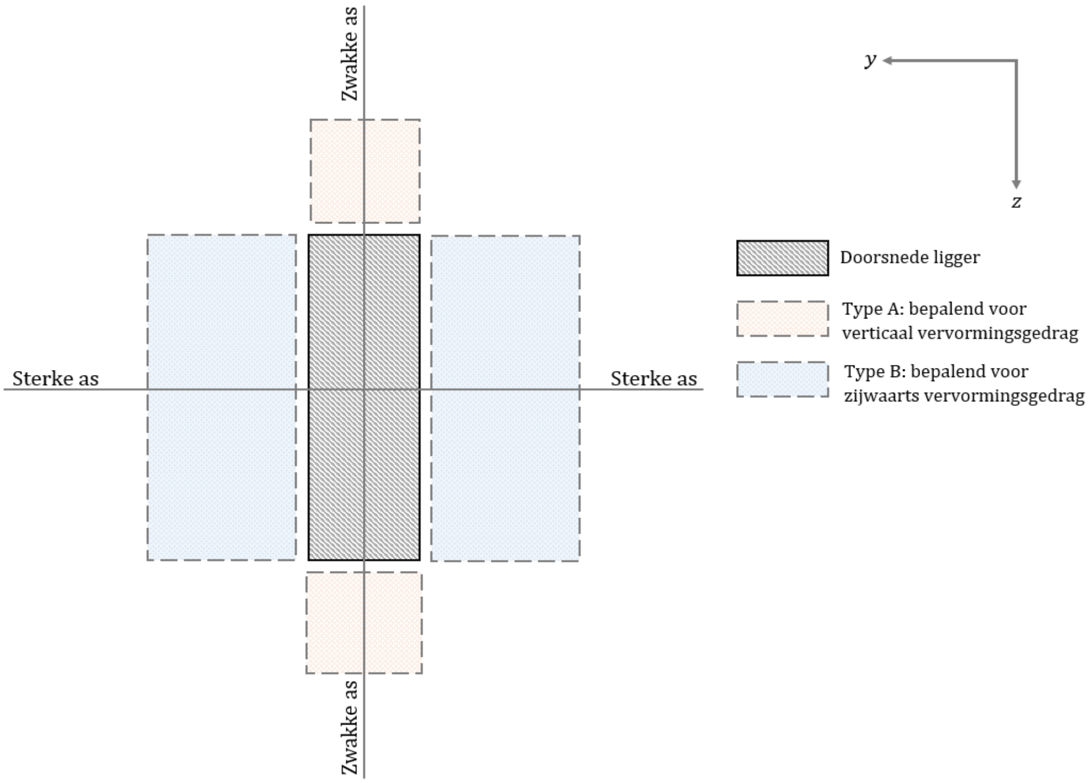
De werking van de omzetting van een belasting naar verzameling γ, α en β is weergeven in Figuur 6.2. Samengevat werkt het systeem als volgt: de ingevoerde belasting wordt omgezet naar input voor het systeem. Vervolgens dient de eenheidspuntlast met grootte I te worden bepaald waarmee alle lasten gesimuleerd kunnen worden. Hiervoor maakt het systeem onderscheid in drie gevallen: enkel puntlasten, enkel q-lasten en een combinatie van beiden. Op basis van een aantal IF-statements wordt uiteindelijk het optredende geval geselecteerd en wordt de verzameling γ doorgevoerd naar het in hoofdstuk 5 omschreven systeem die resulteert in C_1 tot en met C_5 en M_{max}. Hierbij worden de kopmomenten omgezet naar kopmomentfactoren α en β met behulp van I. Vervolgens kan met de bepaalde waardes de effectieve kiplengte worden gevonden, welke wordt teruggekoppeld naar het beginscherm tezamen met de momentenlijn en enkele andere relevante parameters. Omdat de Excel Tool enkel tot 1000 eenheidspuntlasten kan verwerken, is '***Excel Tool Aanvulling Bepaling Effectieve Kiplengte'*** gecreëerd waarmee tot 6 keer meer eenheidspuntlasten verwerkt kunnen worden (met een veel grotere rekentijd. Het systeem heeft een aantal beperkingen: enkel opwaartse of neerwaartse krachten als input; krachten kunnen enkel aangrijpen in het NC; houdt geen rekening met rotatiestijfheden bij de opleggingen en maximaal 10 puntlasten en 10 q-lasten. In paragraaf 6.5 is de Excel Tool voor alle basisgevallen geverifieerd, waaruit kan worden geconcludeerd dat het systeem hoogstwaarschijnlijk correct is.

7. Verdere analyse

In dit hoofdstuk wordt de bepaling van de effectieve kiplengte voor rechthoekige houten liggers via de in dit onderzoek gevonden oplossingsmethoden verder geanalyseerd. Hierbij wordt onder andere onderzocht wat de invloed is van de beperking van rotatievrijheden in de vorm van bijvoorbeeld gaffels en inklemmingen en op welke manier de gevonden methode veilig toegepast kan worden voor dergelijke gevallen. Ook wordt een voorstel gedaan waarmee de aangrijphoogte van de belasting meegenomen kan worden in het model en wordt een volledige toetsing uitgewerkt. Tot slot worden een aantal voorkomende (maar complexe) belastings-configuraties beschouwd.

7.1 Rotatievrijheden/beperkingen

Tot nu toe zijn voornamelijk scharnierend opgelegde liggers beschouwd. In paragraaf 4.4 is een toepassing uitgewerkt waarbij een inklemming is verwerkt in de belastings-configuratie. Hierbij is aangenomen dat het vervangen van de inklemming door een equivalent inklemmingsmoment een veilige aanname is. In deze paragraaf wordt aandacht besteedt aan de manier van oplegging op de steunpunten. Deze manier van oplegging kan variëren van een scharnier tot aan een inklemming, waarbij het tussenliggende stuk met behulp van rotatieveren in rekening kan worden gebracht. Daarnaast is het belangrijk om onderscheid te maken in de richting waarin de oplegging de ligger steunt. Met betrekking tot kip zijn er twee relevante richtingen die van belang zijn: de verticale- en de zijwaartse horizontale ondersteuning. Beide types zijn weergegeven in Figuur 7.1. De verticale ondersteuning (in dit hoofdstuk een Type A ondersteuning genoemd) is bepalend voor de verticale krachtenverdeling en het bijbehorende verticale vervormingsgedrag (en daarmee dus ook de grootte van $\Delta\mathcal{U} + \Delta\mathcal{V}$ waarmee de effectieve kiplengte bepaald wordt). De horizontale ondersteuning (in dit hoofdstuk een Type B ondersteuning genoemd) is enkel bepalend voor het zijwaartse vervormingsgedrag onder invloed van de verticale belasting en is daarmee dus sterk gerelateerd aan het kipgedrag (een Type B ondersteuning werkt de rotatie ϕ in het vlak van de ligger al dan niet tegen).

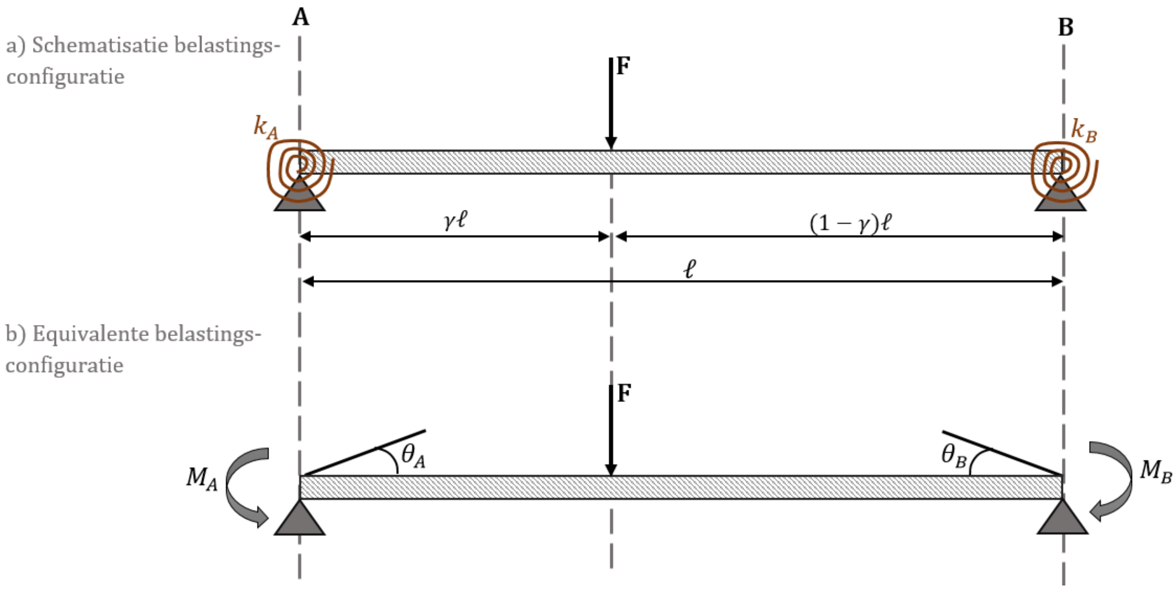


Figuur 7.1: *Onderscheid in Type A en Type B ondersteuningen ter plaatse van oplegging*

Of in andere woorden: een Type A ondersteuning is relevant voor buiging om de sterke as en een Type B ondersteuning voor buiging om de zwakke as van de doorsnede. De invloed van beide typen ondersteuningen en de manier waarop deze kan worden geïmplementeerd in de Excel Tool wordt hieronder verder toegelicht.

7.1.1 De invloed van Type A ondersteuningen

Zoals eerder omschreven, werken Type A ondersteuningen in de verticale richting. Hierbij kan de ondersteuning variëren van scharnierend tot inklemmend en wordt de verticale krachtenverdeling bepaald op basis van de hoeveelheid rotatievrijheid die de ondersteuning biedt. Een Type A ondersteuning beïnvloedt de kipvorm enkel via het verloop van de momentenlijn en niet via de randvoorwaarde dat de rotatie in het vlak van de doorsnede en de bijbehorende afgeleiden in de oplegging gelijk aan 0 moeten zijn (wat voor Type B inklemmingen wel het geval is). De verticale rotatievrijheid van een ondersteuning kan gemodelleerd worden met behulp van een rotatieveer met rotatiestijfheid k, zoals weergeven in Figuur 7.2(a). Eerst wordt de situatie met een puntlast op een willekeurige locatie γl beschouwd. De verticaal verende opleggingen resulteren in een statisch onbepaald systeem; om de krachtenverdeling te bepalen wordt er gebruik gemaakt van vormveranderingsvergelijkingen en vergeet-mij-nietjes. De rotatieveren aan de uiteinden kunnen worden vervangen door kopmomenten (zie Figuur 7.2(b)).



Figuur 7.2: *(a) Schematisatie van de belastings-configuratie behorend bij een verticale rotatieveer en (b) equivalente belastings-configuratie*

Hierbij volgt echter de extra eis (in de vorm van een vormveranderingsvergelijking) dat de verandering van de hoeken θ_A en θ_B evenredig is met de kopmomenten M_A en M_B, aangezien geldt dat

$$\Delta\theta_A = \frac{M_A}{k_A}, \Delta\theta_B = \frac{M_B}{k_B} \tag{7.1}$$

Het moment dat volgt uit de rotatieveer moet in evenwicht zijn met het optredende moment, ofwel in andere woorden: de hoekverandering ten gevolge van het buigend moment moet gelijk zijn aan het de hoekverandering ten gevolge van het verend moment. Vanuit deze constatering kunnen de volgende vormveranderingsvergelijkingen opgesteld worden:

$$\theta_A + \Delta\theta_A = 0;\ \theta_B + \Delta\theta_B = 0 \tag{7.2}$$

Om de bepaling van de krachtenverdeling te vergemakkelijken, wordt de dimensieloze constante ρ ingevoerd die de verticale rotatiestijfheid ten opzichte van de buigstijfheid.

$$\rho[-] = \frac{k_A[kNm/rad] \ \cdot l[m]}{EI_{zz}[kNm^2]} \tag{7.3}$$

Door gebruik te maken van de vergeet-mij-nietjes in Bijlage C, worden vanuit vergelijking (7.2) de volgende vergelijkingen afgeleid:

$$\begin{aligned} \theta_A + \Delta\theta_A &= \frac{M_A l}{3EI_{zz}} + \frac{M_B l}{6EI_{zz}} - \frac{Fl^2}{6EI_{zz}}(2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3) \ + \frac{M_A}{k_A} \\ &= 2M_A + M_B - Fl(2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3) + \frac{6M_A}{\rho_A} = 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} \theta_B + \Delta\theta_B &= \frac{M_B l}{3EI_{zz}} + \frac{M_A l}{6EI_{zz}} - \frac{Fl^2}{6EI_{zz}}(\gamma - \gamma^3) + \frac{M_B}{k_B} \\ &= 2M_B + M_A - Fl(\gamma - \gamma^3) + \frac{6M_B}{\rho_B} = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

De oplossing van dit stelsel vergelijkingen is gevonden met behulp van Maple (zie Bijlage I.13).

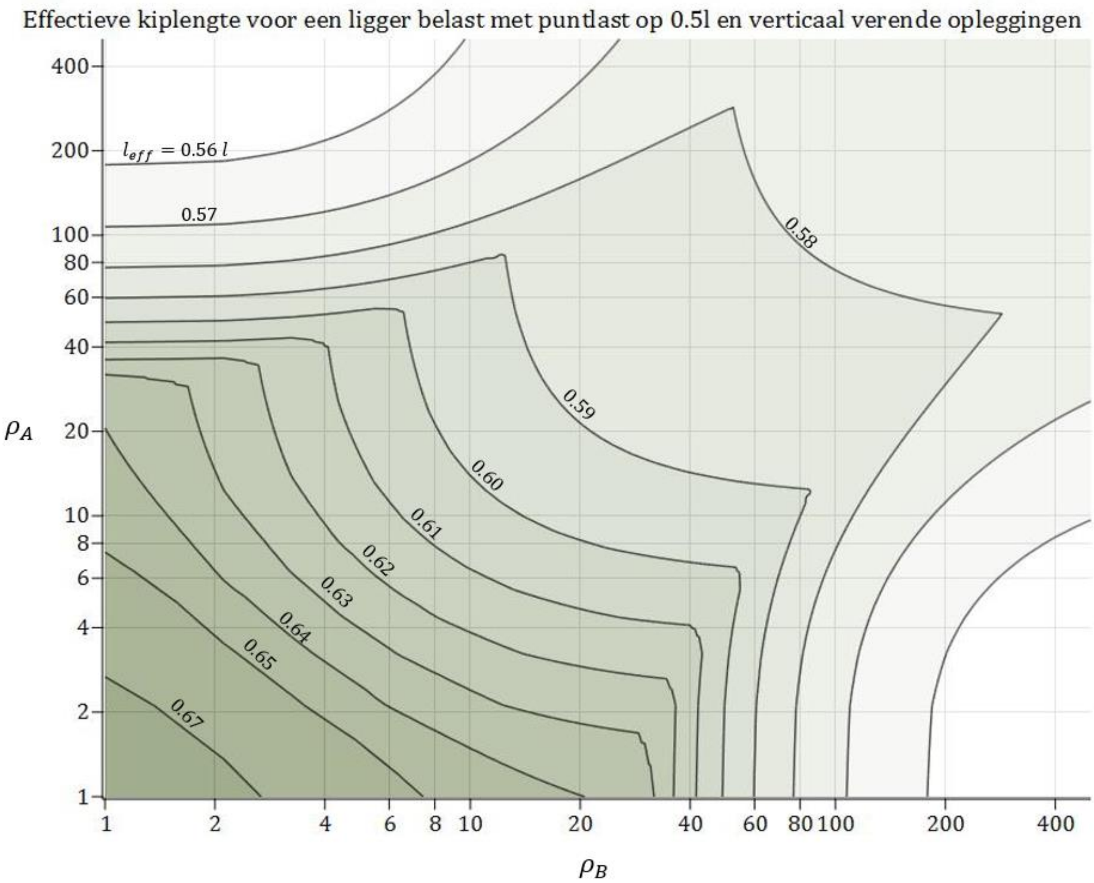
$$M_A = Fl\ \frac{\rho_A\rho_B(\gamma^3 - 2\gamma^2 + \gamma) + 2\rho_A(\gamma^3 - 3\gamma^2 + 2\gamma)}{\rho_A(\rho_B + 4) + 4(\rho_B + 3)} \tag{7.6}$$

$$M_B = Fl\ \frac{\rho_A\rho_B(-\gamma^3 + \gamma^2) + 2\rho_B(-\gamma^3 + \gamma)}{\rho_A(\rho_B + 4) + 4(\rho_B + 3)} \tag{7.7}$$

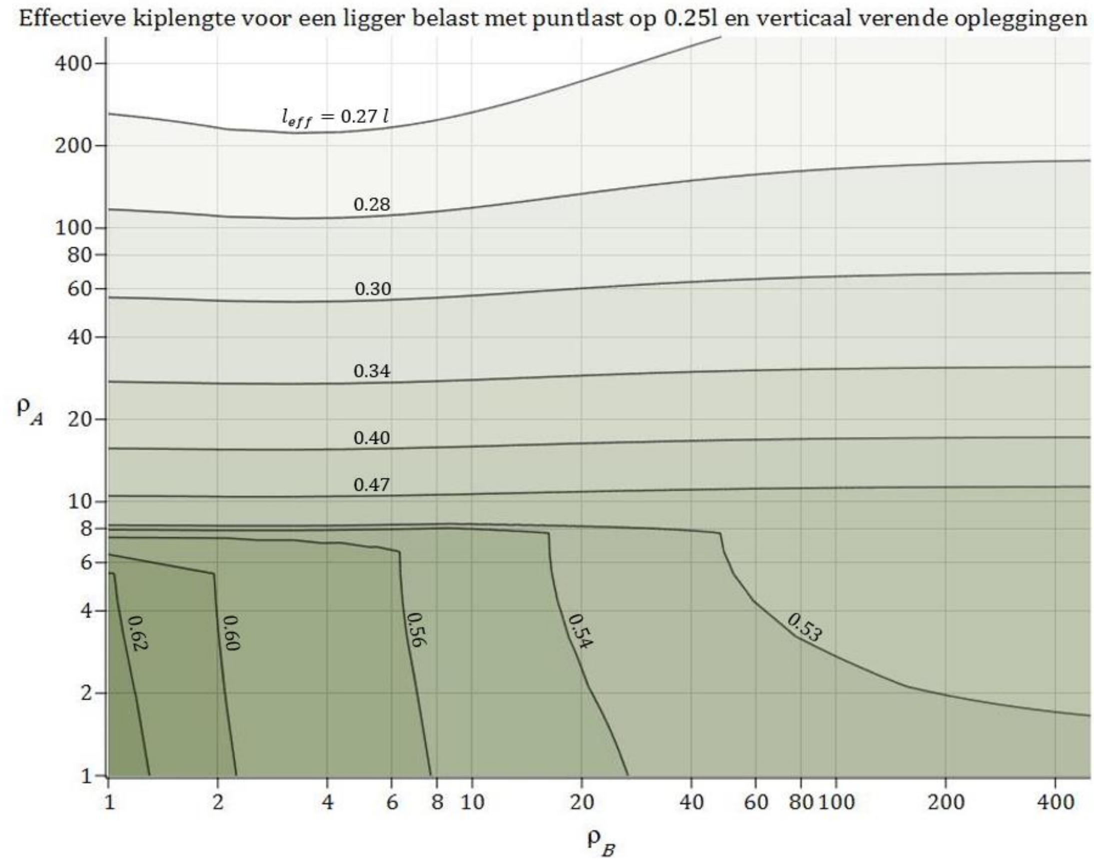
De juistheid van deze uitdrukkingen kan geverifieerd worden door ze terug te leiden naar bekende gevallen. Indien voor beide rotatiestijfheden wordt gesteld dat ze gelijk aan 0 zijn (en daarmee dus scharnierend zijn), reduceren beide kopmomenten ook tot 0. Dit is conform de in hoofdstuk 2 beschreven belastings-configuraties. Wanneer voor beide rotatiestijfheden wordt gesteld dat ze oneindig groot zijn (en daarmee dus een verticale inklemming simuleren) en de puntlast aangrijpt halverwege de overspanning, leiden beide uitdrukkingen tot een kopmoment $0.125\ Fl$, wat gelijk is aan het inklemmingsmoment voor een aan weerszijden ingeklemde ligger. Hiermee is de juistheid van vergelijkingen (7.6) en (7.7) geverifieerd.

Nu de twee kopmomenten bepaald zijn, zijn er twee mogelijke vervolgstappen. Ten eerste zou de gebruiker ervoor kunnen kiezen om de kopmomenten om te zetten naar kopmomentfactoren α en β (wat eenvoudig gedaan kan worden door de term Fl weg te laten uit vergelijkingen (7.6) en (7.7)). De gebruiker kan dan middels de in paragraaf 4.3 gecreëerde hoogtekaarten de effectieve kiplengte aflezen. Ten tweede zou de gebruiker de gevonden kopmomenten als input in kunnen voeren in de in hoofdstuk 6 beschreven Excel Tool. Om het gebruiksgemak te vergroten, zijn er voor $\gamma = 0.25, 0.50$ hoogtekaarten gemaakt waarmee de effectieve kiplengte bepaald kan worden als functie van de verticale rotatiestijfheden van beiden uiteinden en de locatie van de puntlast. Hierbij zijn de waardes α en β omgezet naar de in vergelijkingen (7.6) en (7.7) gegeven uitdrukkingen (zonder de Fl term). Deze hoogtekaarten zijn weergegeven in Figuren 7.3 en 7.4 (zie Bijlage I.13 voor Maple Codes).

Wanneer de puntlast in het midden van de ligger aangrijpt, is ook deze hoogtekaart symmetrisch (conform hoofdstuk 3). Wanneer de ligger op $0.25\ l$ aangrijpt, is de hoogtekaart asymmetrisch; in dit geval wordt het gedrag grotendeels bepaald door de dichtstbijzijnde oplegging. In Figuur 7.4 is dit goed te zien: vanaf $\rho_A \approx 10$ wordt de effectieve kiplengte enkel bepaald door de waarde van ρ_A.



***Figuur 7.3**: Hoogtekaart ter bepaling van effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast op 0.5l en verticaal verende opleggingen*



***Figuur 7.4**: Hoogtekaart ter bepaling van effectieve kiplengte voor een ligger belast met een puntlast op 0.25l en verticaal verende opleggingen*

Wanneer in Figuur 7.3 voor de rotatiestijfheden zeer grote waardes worden aangenomen, resulteert dat in een effectieve kiplengte rond $0.57\ a\ 0.58\ l$. Voor een ligger die aan weerszijden is ingeklemd, wordt in Bijlage A een effectieve kiplengte gelijk aan $0.59\ l$ gevonden. Wanneer enkel 1 rotatiestijfheid oneindig groot wordt gekozen en voor de andere 0, resulteert dat in een effectieve kiplengte rond de $0.55\ a\ 0.56\ l$. In Bijlage B wordt voor een eenzijdig ingeklemde ligger (met een inklemmingsmoment gelijk aan $\frac{3}{16}Fl$) een effectieve kiplengte gelijk aan $\frac{1}{-1.2+3} = 0.556\ l$ gevonden. Voor beide gevallen komen de effectieve kiplengtes vanuit Figuur 7.3 overeen. Hiermee is het hoogstwaarschijnlijk dat de tussenliggende gevallen ook een correcte uitkomst genereren.

Een ander opvallend verschijnsel is dat de effectieve kiplengte voor toenemende rotatiestijfheden enkel afneemt; er is nergens een toename te zien. Dit houdt in dat, zoals te verwachten was, het kipmoment groter wordt naarmate de opleggingen meer weerstand bieden tegen verticale rotaties. Het toevoegen van verticale rotatiestijfheden aan een tweezijdig scharnierend opgelegde ligger resulteert dus in een grotere momentcapaciteit met betrekking tot kipstabiliteit.

Op eenzelfde wijze kan de belastings-configuratie met een gelijkmatig verdeelde belasting en aan weerszijden verticale rotatieveren beschouwd worden. Voor dit geval gelden dezelfde vormveranderingsvergelijkingen als in vergelijking (7.2).

$$\theta_A + \Delta\theta_A = \frac{M_A l}{3EI_{zz}} + \frac{M_B l}{6EI_{zz}} - \frac{ql^3}{24EI_{zz}} + \frac{M_A}{k_A} = 8M_A + 4M_B - ql^2 + \frac{24M_A}{\rho_A} = 0 \tag{7.8}$$

$$\theta_B + \Delta\theta_B = \frac{M_B l}{3EI_{zz}} + \frac{M_A l}{6EI_{zz}} - \frac{ql^3}{24EI_{zz}} + \frac{M_B}{k_B} = 8M_B + 4M_A - ql^2 + \frac{24M_B}{\rho_B} = 0 \tag{7.9}$$

De oplossing van dit stelsel vergelijking is gevonden met behulp van Maple (zie Bijlage I.14).

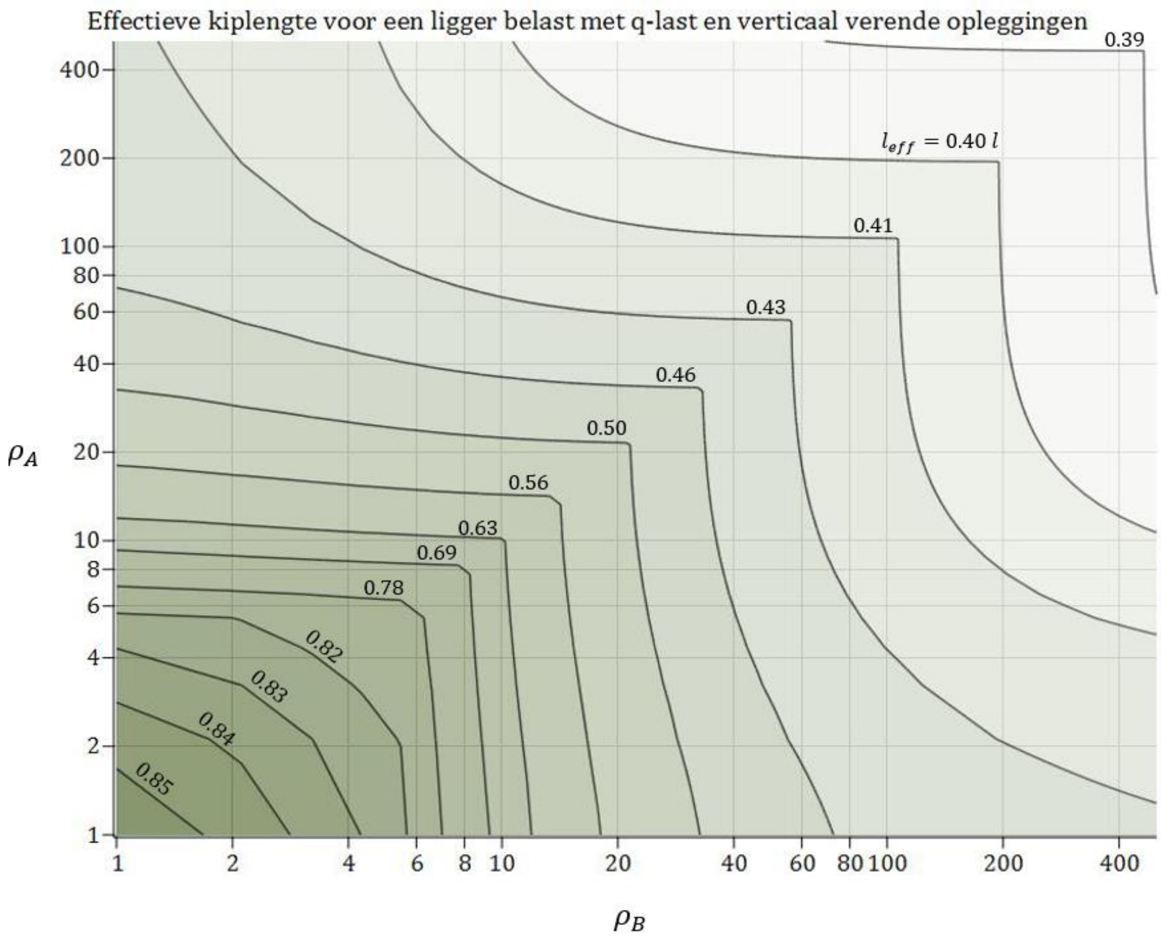
$$M_A = ql^2\ \frac{\rho_A(\rho_B + 6)}{12\rho_A(\rho_B + 4) + 48(\rho_B + 3)} \tag{7.10}$$

$$M_B = ql^2\ \frac{\rho_B(\rho_A + 6)}{12\rho_A(\rho_B + 4) + 48(\rho_B + 3)} \tag{7.11}$$

Ook hier kan weer een keuze gemaakt worden tussen een grafische oplossingsmethode (in dit geval de oplossing van Roeland van Straten) en de Excel Tool. Voor inzichtelijke uitkomsten wordt aangeraden gebruik te maken van de grafische methode. Met behulp van de oplossing van Van Straten voor een gelijkmatig verdeelde belasting is een hoogtekaart gecreëerd waarin de assen zijn getransformeerd naar de verticale rotatiestijfheden ρ ter plaatse van beide opleggingen. Deze hoogtekaart is weergeven in Figuur 7.5.

Indien voor beide rotatiestijfheden een oneindig grote waarde wordt genomen, resulteert dat in een effectieve kiplengte gelijk aan $0.39\ l$. In het STEP-dictaat in Bijlage A wordt voor een tweezijdig ingeklemde ligger belast met een q-last een effectieve kiplengte gelijk aan $0.39\ l$ gevonden. Wanneer enkel 1 rotatiestijfheid oneindig groot wordt gesteld en de andere gelijk aan 0, wordt een effectieve kiplengte gelijk aan $0.43\ a\ 0.44\ l$ gevonden. In Bijlage B wordt voor een eenzijdig ingeklemde ligger (waarvoor het inklemmingsmoment gelijk is aan $\frac{1}{8}ql^2$) gevonden dat $l_{eff} = \frac{1}{-1.25+3.5} = 0.444\ l$. Voor beide gevallen komt de hoogtekaart overeen met de in de literatuur gegeven waardes.

Op eenzelfde wijze kunnen de rotatiestijfheden en de bijbehorende kopmomenten voor meer complexe belastings-configuraties bepaald worden.

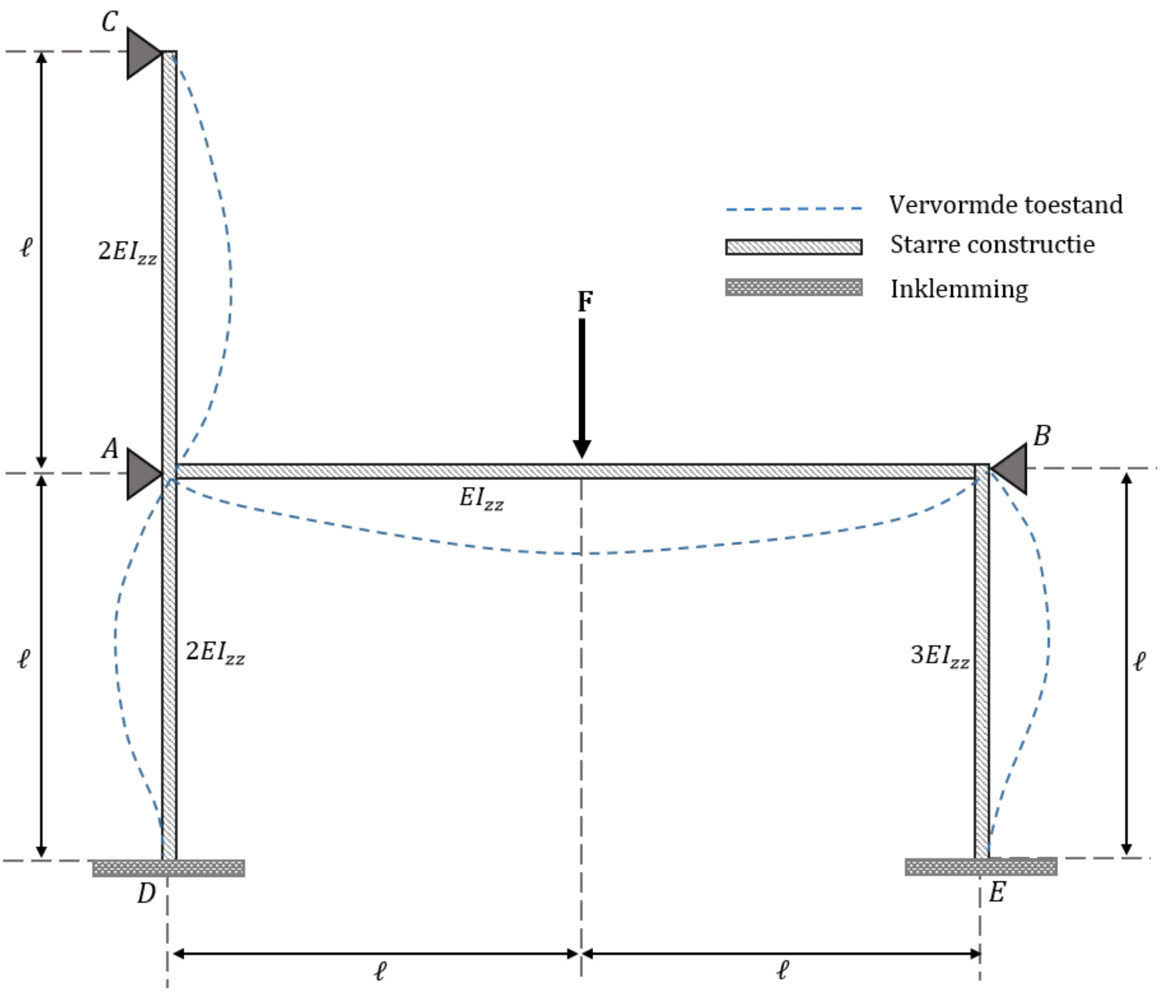


Figuur 7.5: Hoogtekaart ter bepaling van effectieve kiplengte voor een ligger belast met een q-last en verticaal verende opleggingen

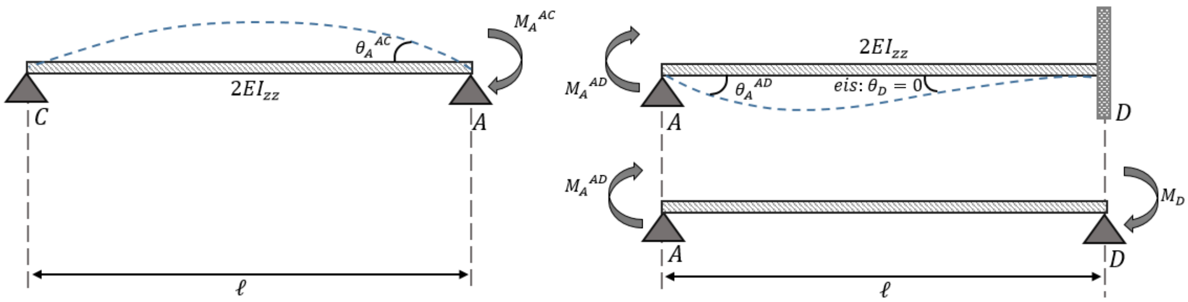
Ter verduidelijking van de omschreven methode om de verticale rotatiestijfheid van de opleggingen in rekening te brengen, wordt hieronder een voorbeeld uitgewerkt.

De effectieve kiplengte van ligger AB dient te worden bepaalt voor de door Figuur 7.6 weergegeven constructie. Hierbij worden normaalkrachten en knikstabiliteit buiten beschouwing gelaten, aangezien deze buiten de scope van dit onderzoek vallen. Binnen deze constructie zijn alle verbindingen tussen staven star en variëren de stijfheden van EI_{zz} tot $3EI_{zz}$. Ter versimpeling van de berekening is voor alle velden dezelfde lengte l aangenomen. De weergegeven constructie zou bijvoorbeeld een onderdeel kunnen zijn van de draagconstructie van een houten hal, waarbij verschillende doorsneden of materialen zijn gebruikt voor de kolommen. De constructie wordt in het midden van ligger AB belast met een puntlast. Ter vereenvoudiging van het vraagstuk wordt het eigen gewicht van de constructie buiten beschouwing gelaten.

Ligger AB kan niet vrij verticaal roteren; door de starre verbindingen zal de rest van de constructie een zekere vorm van weerstand bieden tegen deze rotatie. Deze weerstand wordt in rekening gebracht met behulp van verticale rotatieveren met rotatiestijfheden k_A en k_B. In dit voorbeeld zal duidelijk worden gemaakt op welke wijze deze rotatiestijfheden bepaald kunnen worden (andere manieren zijn uiteraard ook mogelijk). De rotatiestijfheden van opleggingen A en B kunnen bepaald worden door een relatie te leggen tussen het buigend moment en de verticale rotatie ter plaatse van het beschouwde ondersteuningspunt. Hiervoor dienen de verschillende onderdelen van de constructie te worden vrijgemaakt, zoals weergeven in Figuur 7.7 (hierbij is kolom BE niet weergeven, aangezien deze overeen komt met kolom AD).



Figuur 7.6: Voorbeeld toepassing methode verticale rotatiestijfheid



Figuur 7.7: Vrijgemaakte delen AC en AD van de constructie

Voor constructiedeel AC kan met behulp van de vergeet-mij-nietjes (zie Bijlage C) vrij eenvoudig de relatie tussen het buigend moment en de rotatie gelegd worden.

$$\theta_A{}^{AC} = \frac{M_A{}^{AC} \cdot l}{3 \cdot 2EI_{zz}} = \frac{M_A{}^{AC} \cdot l}{6EI_{zz}} \tag{7.12}$$

$$M_A{}^{AC} = \theta_A{}^{AC} \cdot \frac{6EI_{zz}}{l} \rightarrow k_A{}^{AC} = \frac{6EI_{zz}}{l} \tag{7.13}$$

Voor constructiedeel AD is eerst nog een tussenstap vereist in de vorm van de bepaling van M_D. Deze kan bepaald worden met behulp van de vormveranderingsvergelijking voor inklemming D.

$$\theta_D = \frac{M_D \cdot l}{3 \cdot 2EI_{zz}} - \frac{{M_A}^{AC} \cdot l}{6 \cdot 2EI_{zz}} = 0 \tag{7.14}$$

Waaruit het inklemmingsmoment ter plaatse van D kan worden opgelost.

$$M_D = \frac{{M_A}^{AC}}{2} \tag{7.15}$$

Vervolgens wordt op eenzelfde wijze als voor constructiedeel AC de relatie tussen het buigend moment en de rotatie gelegd.

$${\theta_A}^{AD} = \frac{{M_A}^{AD} \cdot l}{3 \cdot 2EI_{zz}} - \frac{{M_A}^{AD} \cdot l}{2 \cdot 6 \cdot 2EI_{zz}} = \frac{3{M_A}^{AD} \cdot l}{24EI_{zz}} \tag{7.16}$$

$${M_A}^{AD} = {\theta_A}^{AD} \cdot \frac{8EI_{zz}}{l} \rightarrow {k_A}^{AD} = \frac{8EI_{zz}}{l} \tag{7.17}$$

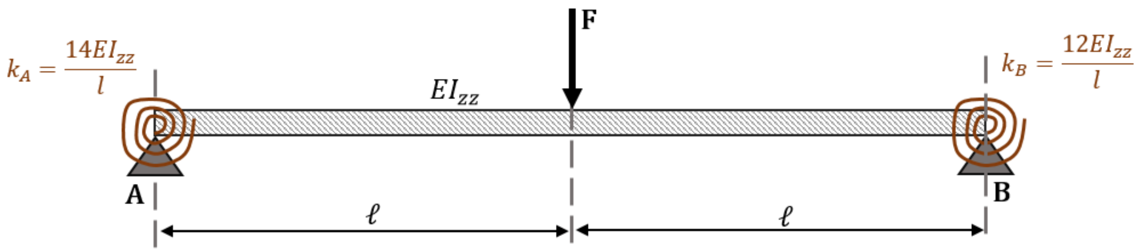
De totale rotatiestijfheid ter plaatse van oplegging A kan vervolgens met het principe van superpositie worden bepaald.

$$k_A = \frac{6EI_{zz}}{l} + \frac{8EI_{zz}}{l} = \frac{14EI_{zz}}{l} \tag{7.18}$$

Voor oplegging B kan op eenzelfde wijze de rotatiestijfheid worden bepaald.

$${M_B}^{BE} = {\theta_B}^{BE} \cdot \frac{4 \cdot 3EI_{zz}}{l} \rightarrow k_B = \frac{12EI_{zz}}{l} \tag{7.19}$$

Hiermee kan de in Figuur 7.6 weergeven constructie worden gereduceerd tot de in Figuur 7.8 weergeven ligger AB.



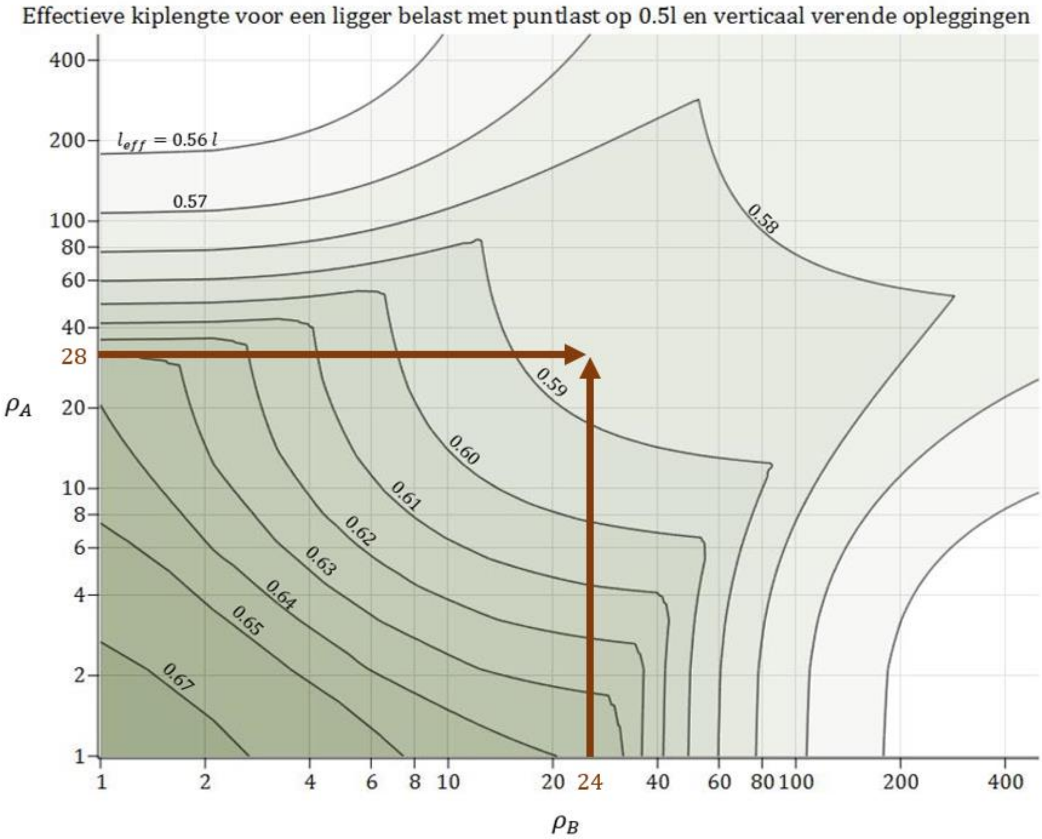
***Figuur 7.8**: Equivalente belastings-configuratie beschouwde constructie voor ligger AB*

Er zijn nu twee vervolgstappen mogelijk: de grafische oplossingsmethode of de Excel Tool. Eerst wordt de grafische methode verder uitgewerkt. Hiervoor dienen eerst de dimensieloze ρ_A en ρ_B te worden bepaald.

$$\rho_A = \frac{k_A \cdot l_{ligger}}{EI_{zz}} = \frac{\frac{14EI_{zz}}{l} \cdot 2l}{EI_{zz}} = 28 \tag{7.20}$$

$$\rho_B = \frac{k_B \cdot l_{ligger}}{EI_{zz}} = \frac{\frac{12EI_{zz}}{l} \cdot 2l}{EI_{zz}} = 24 \tag{7.21}$$

Deze waardes kunnen vervolgens gebruikt worden om met behulp van Figuur 7.3 de effectieve kiplengte te vinden. Deze grafische oplossingsmethode is weergegeven in Figuur 7.9. Met deze methode wordt een effectieve kiplengte ongeveer gelijk aan $0.59\ l$ gevonden.



Figuur 7.9: Toepassing grafische oplossingsmethode voor puntlast halverwege ligger

Om gebruik te kunnen maken van de Excel Tool, dienen de equivalente kopmomenten M_A en M_B te zijn bepaald. Dit kan worden gedaan middels vergelijkingen (7.6) en (7.7) te combineren met $\gamma = 0.5$.

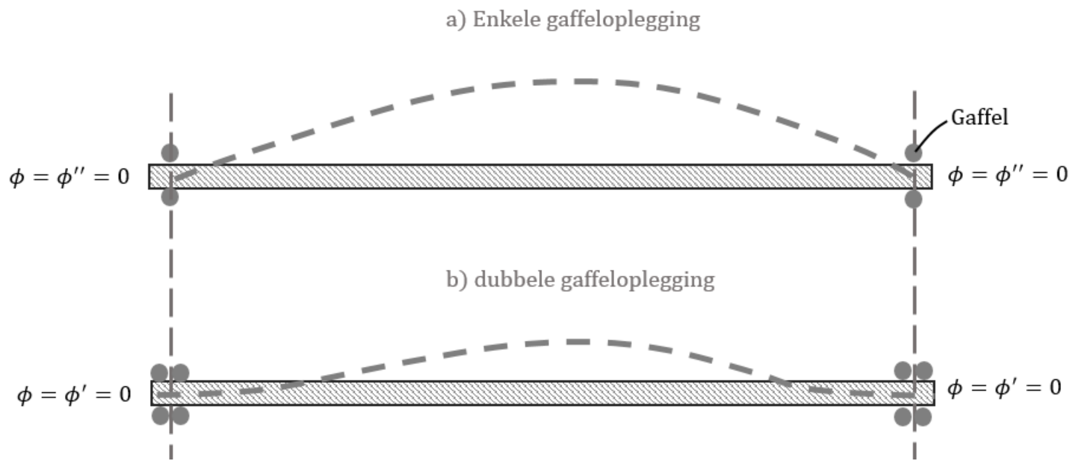
$$M_A = Fl_{ligger} \frac{28 \cdot 24(0.5^3 - 2 \cdot 0.5^2 + 0.5) + 2 \cdot 28(0.5^3 - 3 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.5)}{28(24+4) + 4(24+3)} = \frac{105}{892} Fl_{ligger} \tag{7.22}$$

$$M_B = Fl_{ligger} \frac{28 \cdot 24(-0.5^3 + 0.5^2) + 2 \cdot 24(-0.5^3 + 0.5)}{28(24+4) + 4(24+3)} = \frac{51}{446} Fl_{ligger} \tag{7.23}$$

Voor het gebruik van de Excel Tool moeten ook waardes voor de grootte van de puntlast F en de lengte l van de overspanning ingevoerd worden. Hiervoor zijn in principe geen absolute waardes nodig; relatieve waardes zouden ook volstaan. Stel dat geldt $F = 100\ kN$ en $l = 3\ m \rightarrow l_{ligger} = 6\ m$, dan geeft dat $M_A = \frac{105}{892} \cdot 100\ kN \cdot 6\ m = 70.63\ kNm$ en $M_B = \frac{51}{446} \cdot 100\ kN\ \cdot 6\ m = 68.61\ kN$. Voor deze waardes resulteert de Excel Tool in $l_{eff} = 0.5876\ l = 3.53\ m$. Deze waarde komt overeen met de grafische methode. Middels deze toepassing is hiermee ook aangetoond dat beide methodes equivalent aan elkaar zijn. Het is daarbij belangrijk om te vermelden dat deze methodes slechts aanvullingen zijn op de Excel Tool om tot de gevraagde input te komen; indien de stijfheden en kopmomenten eerder in de toetsing bepaald zijn via een andere methode, dan kunnen die waardes ook gelijk gebruikt worden. Wel dient opgemerkt te worden dat de ontwikkelde methode gebaseerd is op een sinusvormige rotatievorm. De werkelijke rotatievorm zal enigszins afwijken (zie Bijlage H).

7.1.2 De invloed van Type B ondersteuningen

Type B ondersteuningen werken in de horizontale richting (zie Figuur 7.1) en beïnvloeden het horizontale vervormingsgedrag onder invloed van de opgelegde verticale belasting. Hierbij zijn de rotatie ϕ en de horizontale verplaatsing u in het vlak van de ligger van belang aangezien kipinstabiliteit optreedt in de vorm van deze twee verplaatsingsgrootheden. Een Type B ondersteuning kan variëren van scharnierend (een enkele gaffeloplegging, zie Figuur 7.10(a)) tot inklemmend (een dubbele gaffeloplegging, waarbij rotatie ϕ tegengewerkt wordt, zie Figuur 7.10(b)). Een Type B ondersteuning in de vorm van een inklemming biedt weerstand tegen zijwaartse rotatie en –verplaatsing.

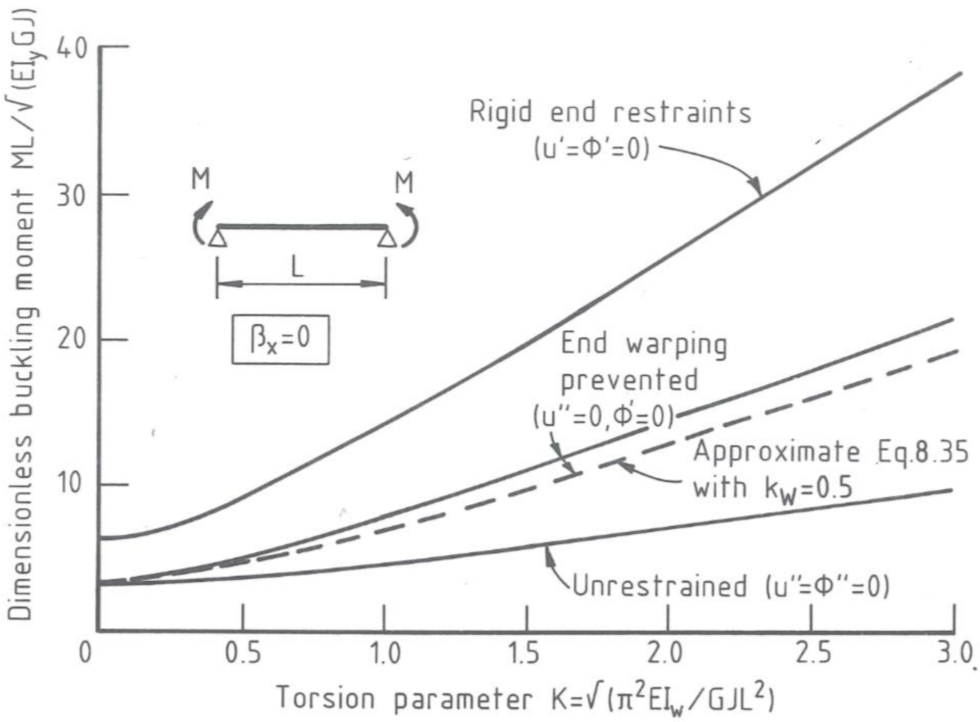


***Figuur 7.10**: a) Bovenaanzicht verplaatsingsvorm met een enkele gaffeloplegging en (b) bovenaanzicht verplaatsingsvorm dubbele gaffeloplegging*

In het tussenliggende gebied kan de ondersteuning gemodelleerd worden met behulp van een horizontale rotatieveer, conform paragraaf 7.1.1. In dit onderzoek is echter geen exacte methode/afleiding gevonden waarmee deze horizontale rotatieveren (die dus niet in hetzelfde vlak als de verticale belasting werken) in rekening kunnen worden gebracht op de kopmomenten en daarmee dus ook op de effectieve kiplengte. Het probleem zit hem in het feit dat de horizontale rotatieveer niet vervangen kan worden door een equivalent verticaal moment; deze kan enkel vervangen worden door een horizontaal moment ter plaatse van de oplegging. Dit resulteert echter in een ligger die in twee richtingen op buiging wordt belast. In het vervolg van deze paragraaf wordt een methode gegeven waarmee het toch mogelijk is de effectieve kiplengte op een veilige wijze te benaderen.

Trahair [6] heeft met behulp van een energiebeschouwing de invloed van de ondersteuningen op het kritieke kipmoment voor een ligger met een constant moment onderzocht. De resultaten zijn weergeven in Figuur 7.11. In deze figuur is het dimensieloze gemaakte kritieke kipmoment uitgezet tegenover de welvings-parameter, die voor rechthoekige smalle doorsneden gelijk aan 0 is. In deze figuur zijn 3 opleggingsopties weergeven: (1) volledig scharnierend (*unrestrained*), (2) verticaal scharnierend en horizontaal ingeklemd (*end warping prevented*) en (3) zowel verticaal als horizontaal ingeklemd (*rigid end restraints*).

Er vallen twee zaken op in Figuur 7.11. Ten eerste valt op dat opleggingsgeval (2) voor een constant moment zo goed als gelijk is aan opleggingsgeval (1) indien de welvings-parameter gelijk aan 0 is en daarmee dus benaderd kan worden met de oplossing voor opleggingsgeval (1). Ten tweede blijkt dat voor deze belastings-configuratie het kritische kipmoment van een ligger met enige vorm van rotatiestijfheid in de opleggingen (kan zowel verticaal als horizontaal zijn) altijd hoger ligt dan het kritische kipmoment van een ligger die aan weerszijden scharnierend is opgelegd. Hieruit volgt dat de effectieve kiplengte die volgt uit de beschouwing van een rotatiestijfheid-loze ligger een veilige benadering oplevert van de daadwerkelijke effectieve kiplengte. Zoals te verwachten viel, groeit het kritieke kipmoment indien de verticale of horizontale rotatiestijfheid van de oplegging toeneemt.



Figuur 7.11: *De invloed van verscheidene opleggingen op het kritieke kipmoment, bepaald door Trahair*

Deze constatering kan onderbouwd worden met behulp van de resultaten van de Eindige Elementen Methode berekeningen die Van Straten heeft uitgevoerd; voor puntlasten en gelijkmatig verdeelde puntlasten blijkt het kritieke kipmoment van een ligger met horizontale rotatiestijfheid te allen tijde hoger te ligger dan het kritieke kipmoment van een ligger zonder horizontale rotatiestijfheid (het geval dat beschouwd wordt in de Excel Tool). Hiermee is een methode vastgesteld waarmee liggers met horizontale rotatiestijfheid (hoogstwaarschijnlijk) veilig getoetst kunnen worden:

> *Het kritieke kipmoment kan veilig benaderd worden door de beschouwde ligger te toetsen zonder daarbij enige horizontale rotatiestijfheid in de opleggingen mee te nemen. Indien het optredende moment in de beschouwde ligger lager is dan het gevonden kritieke kipmoment voor een equivalente ligger zonder horizontale rotatiestijfheid, zal de beschouwde ligger te allen tijde de toetsing doorstaan.*

Wanneer blijkt dat de beschouwde ligger niet door de toetsing komt en het kritieke kipmoment van de equivalente ligger lager is dan het optredende moment, hoeft dit niet te betekenen dat de beschouwde ligger niet voldoet; het gevonden kritieke kipmoment is immers een ondergrens. In dit geval wordt aangeraden gebruikt te maken van FEM-softwarepakketten.

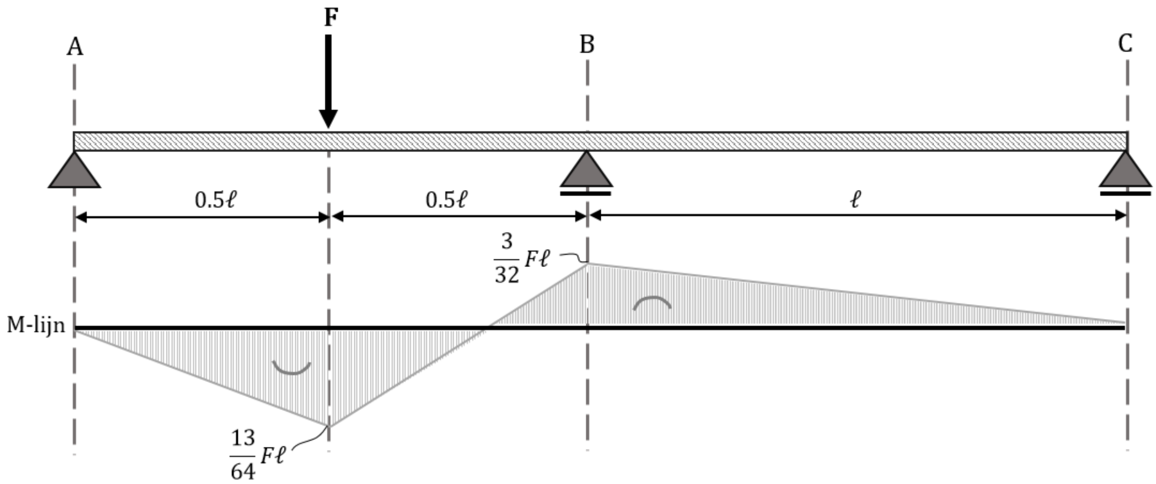
Zo kan de effectieve kiplengte van een ligger die belast wordt met een gelijkmatig verdeelde belasting en aan weerszijden met twee gaffels is opgelegd veilig benaderd worden door de effectieve kiplengte voor slechts één gaffel te gebruiken bij de kipstabiliteitstoetsing: $0.88\ l$. Het daadwerkelijke kritieke kipmoment blijkt voor dubbele gaffelopleggingen 1.5 keer hoger te ligger dan voor enkele gaffelopleggingen (volgens Figuur 6.11 uit het rapport van Van Straten). Indien het maximale moment in de ligger echter al voldoet aan de toetsing voor enkele gaffelopleggingen, hoeft de ligger met twee gaffelopleggingen niet getoetst te worden aangezien deze sowieso voldoet.

7.2 Liggers over meerdere velden

De Excel Tool is ontworpen op basis van een ligger die opgelegd is op twee steunpunten. In de praktijk zullen er echter ook veelvoudig gevallen voorkomen waarbij de ligger op meer dan twee steunpunten is opgelegd. Daarnaast is het ook mogelijk om de kipcapaciteit van de ligger te vergroten door gaffels toe te passen, waardoor de ligger in bepaalde mate extra 'ondersteuningspunten' krijgt. In deze paragraaf wordt omschreven hoe de gevonden methodes toegepast kunnen worden voor deze twee gevallen.

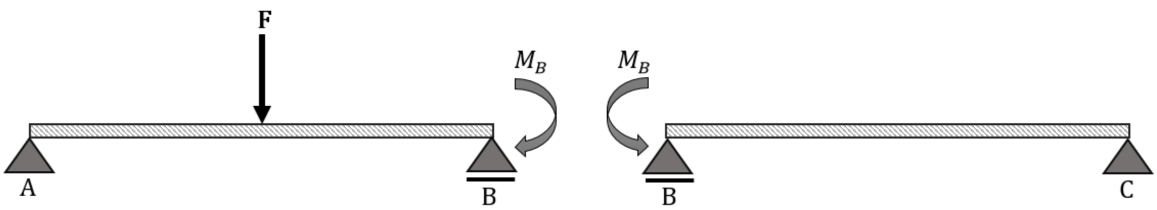
7.2.1 Liggers over meerdere steunpunten

Aan de hand van een voorbeeld wordt besproken hoe meerdere steunpunten in rekening gebracht dienen te worden tijdens de bepaling van de effectieve kiplengte. De beschouwde belastings-configuratie, geometrie en bijbehorende momentenlijn (bepaald middels hoekveranderings-vergelijkingen) zijn gegeven in Figuur 7.12. Een ligger over drie steunpunten wordt op het linker deel van de ligger belast met een puntlast; de ligger dient te worden getoetst op kipstabiliteit.



Figuur 7.12: *Ligger over meerdere (3) steunpunten belast door een puntlast en de bijbehorende momentenlijn*

Deze toetsing kan worden uitgevoerd door in te zien dat de ligger in twee liggers AB en BC kan worden opgedeeld. Hierbij dienen wel de rotatiestijfheden van de opleggingen meegenomen te worden. Zoals gesteld in paragraaf 7.1.1 kan de verticale rotatiestijfheid van het rechter veld in rekening worden gebracht met behulp van een equivalent kopmoment (dit kan zowel direct via een equivalent moment vanuit de momentenlijn als via het vervangen van ligger BC door een verticale rotatieveer en van daaruit het moment te bepalen). Naast de verticale rotatiestijfheid zal het rechter veld ook enige vorm van weerstand bieden tegen zijwaartse verplaatsingen, wat resulteert in een horizontale rotatiestijfheid van liggerdeel BC. Vanuit paragraaf 7.1.2 volgt dat het een veilige benadering is om deze horizontale rotatiestijfheid buiten beschouwing te laten. Hiermee wordt de equivalente constructie gevonden zoals weergegeven in Figuur 7.13.



Figuur 7.13*: Equivalente constructie voor een ligger over 3 steunpunten belast door een puntlast*

Vervolgens dient voor beide velden afzonderlijk de effectieve kiplengte te worden bepaald. Hiervoor zijn in dit rapport meerdere methodes aangeboden. Voor liggerdeel AB kan gebruik worden gemaakt van de hoogtekaarten vanuit paragraaf 3.6 of van de exact gevonden oplossing in vergelijking (3.12). Voor liggerdeel BC kan gebruik worden gemaakt van vergelijking (5.4) of Figuur 5.1. Daarnaast is het uiteraard mogelijk om voor beide liggerdelen gebruik te maken van de Excel Tool. Hiervoor hoeven de exacte waardes van F en l niet noodzakelijk bekend te zijn; het draait enkel om de verhoudingen. Voor $l = 10\ m$ en $F = 50\ kN$ geeft dit $M_B = \frac{3}{32} \cdot 50\ kN \cdot 10\ m = \frac{375}{8} kNm \approx 46.9\ kNm$.

Voor liggerdeel AB geeft de Excel Tool $l_{eff} = 0.6877\ l$ en voor liggerdeel BC $l_{eff} = 0.5317\ l$. Middels deze effectieve kiplengtes kan per veld het kritieke kipmoment worden gevonden middels

$$M_{kip,i} = \frac{\pi}{l_{eff,i}} \sqrt{GI_t EI_{yy}} \tag{7.24}$$

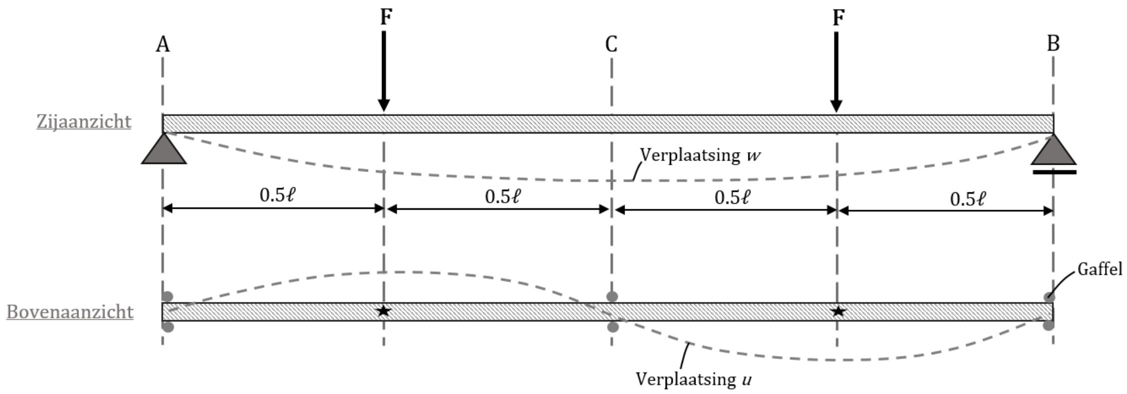
Per veld dient vervolgens te worden getoetst of dit kritieke moment overschreden wordt door het maximaal optredende moment in het beschouwde deel van de ligger. Hiermee is een ondergrens voor het daadwerkelijke kipmoment gevonden (doordat de horizontale rotatiestijfheid in oplegging B ten gevolge van liggerdeel BC buiten beschouwing is gelaten). Via deze methode kan voor iedere constructie op meerdere steunpunten de effectieve kiplengte bepaald worden.

Een constructie over meerdere steunpunten dient te worden terug geleid naar equivalente liggers op twee steunpunten waarbij horizontale rotatiestijfheden buiten beschouwing worden gelaten. Voor iedere equivalente ligger dient de effectieve kiplengte te worden bepaald, waarmee vervolgens het kritieke kipmoment per ligger kan worden gevonden en kan worden gebruikt voor de kipstabiliteitstoetsing.

Hiermee is een veilige benadering gevonden van de optredende effectieve kiplengte. Indien de gevonden effectieve kiplengte resulteert in onvoldoende capaciteit hoeft dit niet te betekenen dat de ligger daadwerkelijk zal kippen; door de verwaarloosde horizontale rotatiestijfheid heeft de ligger nog extra capaciteit. Indien de voorgestelde methode niet tot een bevredigend resultaat leidt, wordt daarom ook aangeraden gebruik te maken van FEM-softwarepakketten.

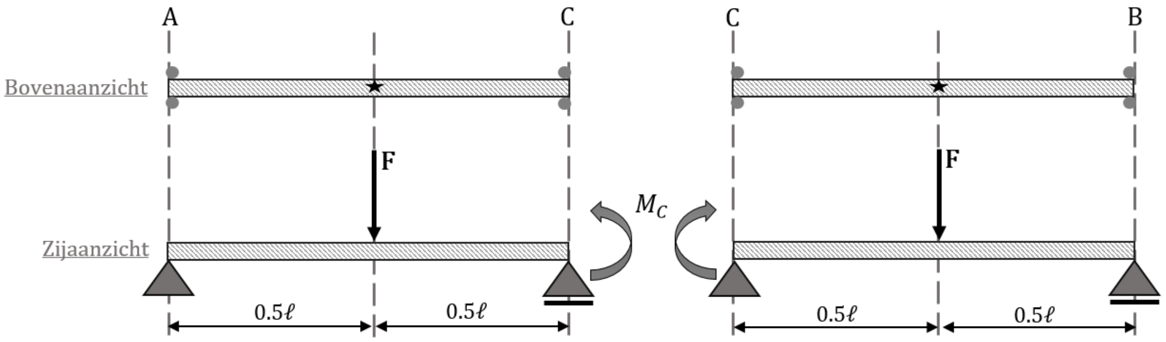
7.2.2 Liggers over meerdere gaffels

Wederom wordt aan de hand van een voorbeeld besproken hoe meer dan 2 gaffelopleggingen verwerkt dienen te worden in de bepaling van de effectieve kiplengte. In Figuur 7.14 is een ligger weergegeven die in het midden ondersteund wordt met een gaffel en op twee plaatsen wordt belast met een puntlast.



***Figuur 7.14**: Ligger belast met twee puntlasten en een gaffel in het midden van de overspanning*

Ter plaatse van de gaffels zijn de rotatie ϕ van de doorsnede en de zijdelingse verplaatsing u gelijk aan 0. Aangezien de gaffel in het midden van de overspanning geen invloed heeft op de verticale krachtenverdeling en de bijbehorende verticale verplaatsingen, kan de momentenlijn bepaald worden zonder daarbij rekening te houden met de aanwezigheid van de gaffel. Hiermee wordt een maximaal moment gelijk aan $\frac{1}{4}F \cdot 2l = \frac{1}{2}Fl$ gevonden en dus ook $M_C = \frac{1}{2}Fl$. Vervolgens wordt op eenzelfde wijze als in paragraaf 7.2.1 de ligger opgesplitst in twee delen AC en CB, zie Figuur 7.15.



Figuur 7.15: *Equivalente opdeling in twee liggers AC en CB, bovenaanzicht en zijaanzicht*

Hierbij wordt de gaffel in punt C gemodelleerd als een gaffel met een verticaal steunpunt (ook wel een gaffeloplegging genoemd), waarop een equivalent moment M_C aangrijpt zodanig dat hetzelfde momentenverloop wordt verkregen. Deze modellering is geoorloofd aangezien uit de verplaatsing gerelateerde differentiaal vergelijkingen ((1.9) en (1.12)) volgt dat de differentiaalvergelijkingen voor de verticale zakking en het kipgedrag ontkoppeld zijn en dat daarmee het verticale steunpunt geen invloed heeft op het kipgedrag (onder voorwaarde dat de momentenlijn equivalent is aan de gehele ligger zonder het verticale steunpunt). De verticale rotatiestijfheid ter plaatse van punt C wordt conform eerdere beschouwingen in rekening gebracht met behulp van een equivalent moment (in de vorm van een verticale rotatieveer of direct via een kopmoment). Doordat gaffels niet volkomen wrijvingsloos zijn en beide velden enige vorm van horizontale weerstand tegen rotatie bieden, is er sprake van enige horizontale rotatiestijfheid tussen de velden. Zoals besproken in paragraaf 7.1.2, is het een veilige aanname om deze horizontale rotatiestijfheid te verwaarlozen. Deze methode wordt verder onderbouwd door Van Straten: uit een Eindige Elementen Methode berekening blijkt voor meerdere gevallen dat de equivalente liggers zonder horizontale en met verticale rotatiestijfheid leiden tot veilige benaderingen van de beschouwde ligger over meerdere gaffels.

Voor beide liggerdelen dient de effectieve kiplengte te worden bepaald. Hierbij kan gebruik worden gemaakt van de aangeleverde grafische en exacte methodes. In dit geval wordt er gebruik gemaakt van de Excel Tool. Indien $F = 80\,kN$ en $l = 6\,m$, wordt gevonden dat $M_C = \frac{1}{2} \cdot 80\,kN \cdot 6\,m = 240\,kNm\,(-)$. Aangezien de belastings-configuratie symmetrisch is ten opzichte van de gaffel wordt volstaan door enkel één veld te beschouwen. Dit resulteert in $l_{eff} = 0.8763\,l$ voor beide velden. Hiermee is een methode beschreven waarmee voor liggers over meerdere gaffels de effectieve kiplengte kan worden bepaald.

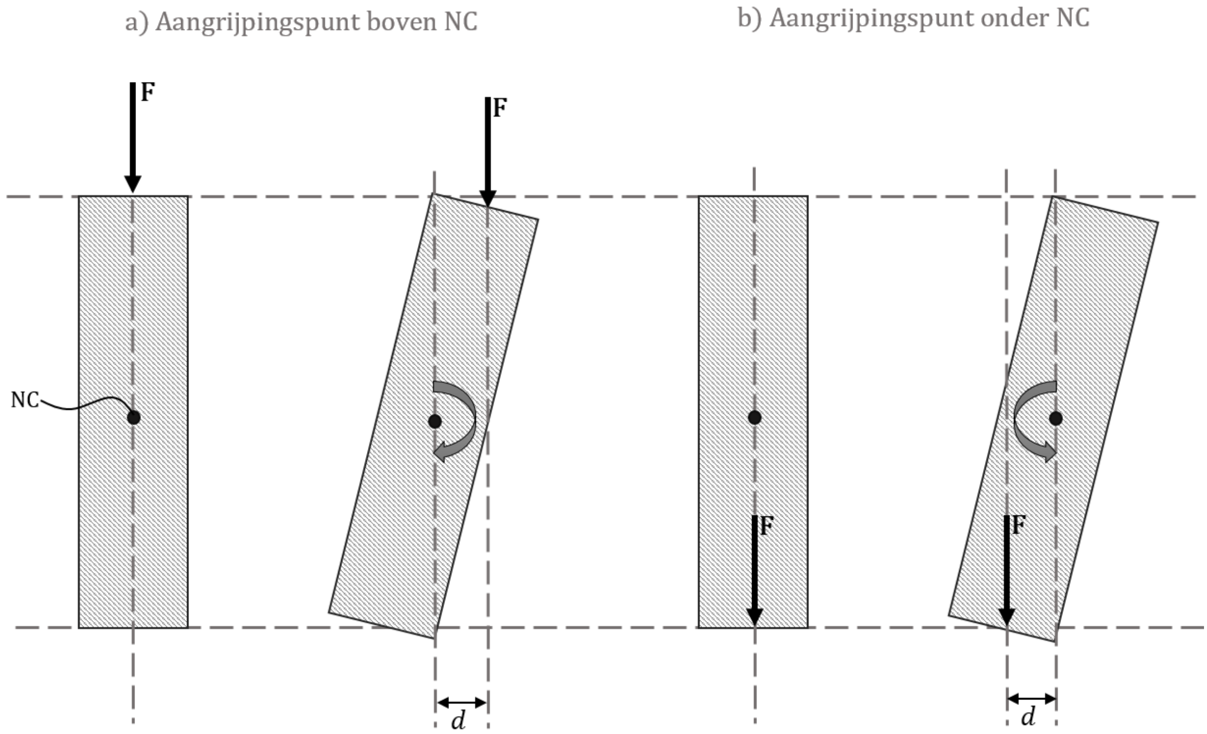
> *Een constructie over meerdere gaffels dient te worden terug geleid naar equivalente liggers op twee steunpunten waarbij horizontale rotatiestijfheden buiten beschouwing worden gelaten en equivalente kopmomenten worden toegevoegd. Voor iedere equivalente ligger dient de effectieve kiplengte te worden bepaald, waarna per equivalente ligger het gevonden kritieke kipmoment dient te worden getoetst aan het optredende moment in die sectie.*

Voor een combinatie van meerdere steunpunten en gaffels kan hetzelfde principe worden gebruikt.

7.3 Aangrijphoogte belasting

Voor de ontwikkelde grafische en exacte oplossingsmethoden is voortdurend aangenomen dat de belasting aangrijpt in het normaalkrachtencentrum. In de praktijk is dit natuurlijk niet altijd het geval; er komen ook gevallen voor waarbij de belasting bovenin of onderin de doorsnede aangrijpt. In deze paragraaf wordt een methode beschreven waarmee ook deze gevallen (waarschijnlijk) veilig kunnen worden benaderd.

Wanneer de belasting in het normaalkrachtencentrum aangrijpt, is de arbeid die verricht wordt ten gevolge van kip gelijk aan het product van de belasting en de verticale zakking. Echter, wanneer de belasting niet in het normaalkrachtencentrum aangrijpt, resulteert de belasting in een moment $F \cdot d$ in het vlak van de snede, waarvan de definities in Figuur 7.16 zijn gegeven. In dit geval verricht dit moment ook arbeid. Dit moment werkt met het kippen mee indien de puntlast boven het NC aangrijpt (Figuur 7.16(a)) en werkt het kippen tegen indien de puntlast onder het NC aangrijpt (Figuur 7.16(b)).



Figuur 7.16: *Aangrijpingspunt van belasting boven en onder NC in initiële en verplaatste situatie*

Hieruit volgt dat een ligger eerder zal kippen als de belasting aangrijpt boven het NC dan wanneer de belasting in het NC aangrijpt. Om deze bijdrage in rekening te brengen, dient de in eerdere hoofdstukken uitgevoerde energiebeschouwing uitgebreid te worden. Deze beschouwing is vanwege de duur van de onderzoeksperiode niet uitgevoerd.

Om toepassing van de Excel Tool voor belastingen die aangrijpen op de uiteinden van de doorsnede mogelijk te maken, wordt voorgesteld om gebruik te maken van de methode die Eurocode 5 (paragraaf 1.4) voorschrijft. Deze schrijft voor dat belastingen die aangrijpen bovenin de doorsnede in de gedrukte zone als volgt in rekening kunnen worden gebracht:

$$l_{eff} = l_{eff,NC} + 2h \tag{7.25}$$

Waarin $l_{eff,NC}$ de kiplengte is voor de situatie waarin de beschouwde belasting aangrijpt in het NC. De toename van de effectieve kiplengte is hiermee gelijk aan tweemaal de liggerhoogte.

Wanneer de belasting aangrijpt onderin de doorsnede in de getrokken zone schrijft de norm het volgende voor:

$$l_{eff} = l_{eff,NC} - 0.5h \tag{7.26}$$

Hiermee resulteert een belasting onder het NC in een reductie van de effectieve kiplengte. Indien de belasting opwaarts werkt, geldt hetzelfde principe; enkel de definities van de begrippen 'boven' en 'onder' het NC dienen hierbij te worden omgedraaid. Deze voorgestelde methode is naar alle waarschijnlijkheid veilig (anders zou deze methode niet in de Eurocode gegeven zijn), alhoewel dit niet kan worden aangetoond. Hiermee is dan ook een mogelijke optie voor vervolgonderzoek gevonden.

Voor belastingen die niet aangrijpen ter plaatse van het normaalkrachtencentrum van de doorsnede wordt aangeraden gebruik te maken van de door de Eurocode 5 voorgestelde methode. Het met behulp van de gevonden effectieve kiplengte bepaalde kritieke kipmoment zal hoogstwaarschijnlijk altijd lager zijn dan het daadwerkelijk optredende kritieke kipmoment, waarmee een veilige benadering is gevonden.

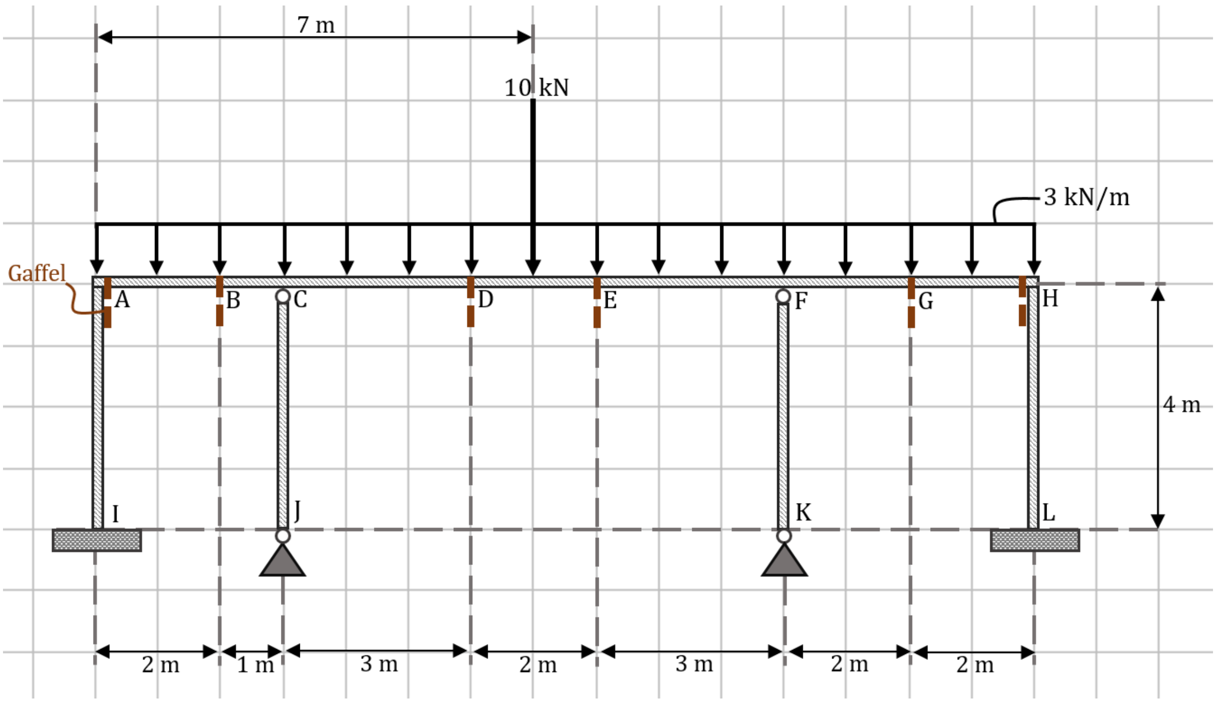
Voor locaties tussen de bovenkant van de doorsnede en het NC wordt aangeraden de belasting te benaderen als aangrijpend op de bovenkant, waarmee de daadwerkelijke invloed van het aangrijpingspunt op de effectieve kiplengte overschat wordt, resulterend in een veilige benadering. Voor locaties tussen de onderkant van de doorsnede en het NC wordt aangeraden de belasting te benaderen als aangrijpend in het NC. Ook hiermee wordt een veilige benadering gevonden. Indien de ligger voldoet aan de veilige benadering, voldoet de ligger in ieder geval ook voor het daadwerkelijke kritieke kipmoment.

Wanneer er meerdere lasten aangrijpen op de ligger, wordt aangeraden de meest negatieve invloed als maatgevend te stellen. Zo wordt voor de belastings-configuratie met 2 puntlasten op 2 verschillende locaties waarin 1 last aangrijpt bovenin de ligger en 1 last onderin de ligger aangeraden de last die boven de ligger aangrijpt als maatgevend te nemen en dus vergelijking (7.25) toe te passen. Deze benadering is waarschijnlijk niet exact, maar daarentegen wel veilig.

7.4 Volledige toepassing toetsingsmethode

Om de voorgestelde methode die gebruik maakt van de gecreëerde Excel Tool te verduidelijken, wordt in deze paragraaf een complete kipstabiliteitstoetsing van een houten constructie uitgevoerd. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de in paragraaf 1.4 omschreven NEN-EN 1995-1-1: Ontwerp en berekening van houtconstructies hoofdstuk 6.3.3.

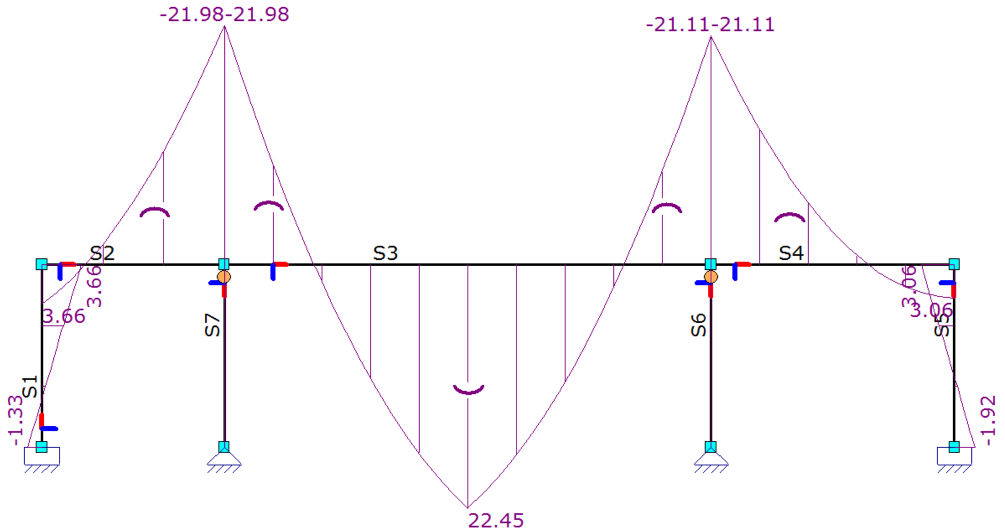
De beschouwde constructie is een houten spant die onderdeel uitmaakt van een halconstructie. Het spant bestaat uit 4 kolommen (waarvan 2 ingeklemd en 2 scharnierend zijn uitgevoerd) en een doorgaande hoofdligger. Op deze hoofdligger zijn op een zestal plaatsen dwarsliggers aangebracht; deze dwarsliggers zijn zodanig verbonden aan de hoofdligger dat de connecties beschouwd kunnen worden als gaffels. De constructie is weergeven in Figuur 7.17.



***Figuur 7.17**: Beschouwde houten halconstructie met een totale overspanning van 15 m*

De verbindingen in A en H zijn star en verbindingen C en F zijn scharnierend uitgevoerd. Verder is gegeven dat de opleggingen in C en F zodanig zijn uitgevoerd dat ze als gaffelopleggingen beschouwd kunnen worden. De ligger AH wordt belast met een gelijkmatig verdeelde belasting ter grootte van 3 kN/m (eigen gewicht etc.) en een puntlast in het midden van overspanning CF met een puntlast ter grootte van 10 kN. Voor beide lasten zijn rekenwaarden gegeven. De gehele constructie wordt uitgevoerd in een GL28h profiel met hoogte 450 mm en breedte 50 mm. Voor de gegeven constructie dient een kipstabiliteitstoetsing te worden uitgevoerd. Deze toetsing is van toepassing op de gehele ligger AH; de vier kolommen dienen te worden getoetst op knik, wat niet beschouwd wordt aangezien knik buiten de scope van dit onderzoek valt.

Om de kipstabiliteitstoetsing voor ligger AH uit te voeren (een ligger over meerdere steunpunten en gaffels), dient deze conform paragraaf 7.2 in equivalente liggers opgedeeld te worden. De opdeling is als volgt: AB, BC, CD, DE, EF, FG en GH. De momentenlijn van de gehele constructie is gevonden met behulp van MatrixFrame en is weergeven in Figuur 7.18. Het maximale moment is 22.45 kNm, ter plaatse van de puntlast. De rekenwaarde van de buigende momenten (inclusief bijbehorend teken) in de relevante punten zijn gegeven in Tabel 7.1.



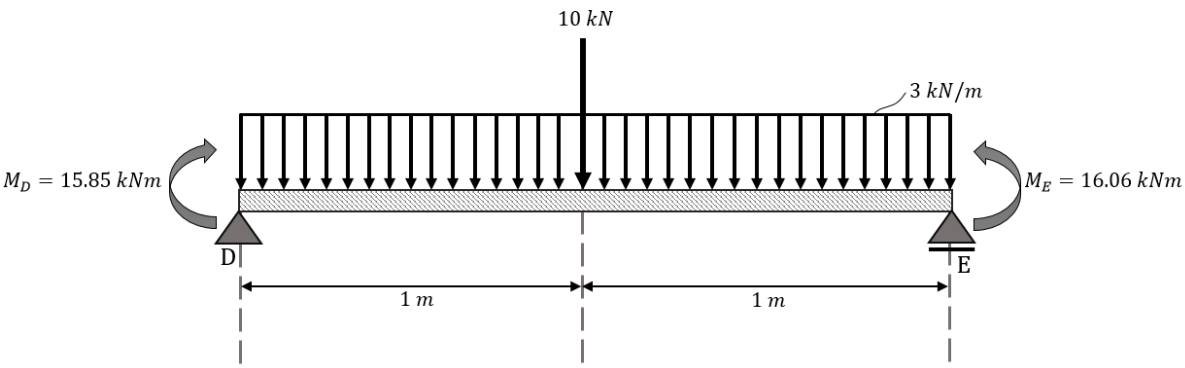
Figuur 7.18: Bijbehorende momentenlijn vanuit MatrixFrame

Tabel 7.1: Rekenwaarde buigende momenten op de relevante locaties

Locatie	Moment (kNm)	Locatie	Moment (kNm)
A	3.66	E	16.06
B	-10.43	F	-21.11
C	-21.98	G	-3.03
D	15.85	H	3.06

Om de toetsing uit te voeren, dienen eerst de materiaaleigenschappen van GL28h bekend te zijn. Vanuit de Quick Reference [18] volgt $E_{0.05} = 10200\ N/mm^2$ en $f_{m,k} = 28\ N/mm^2$. Vanuit het collegedictaat Houtconstructies CT2052 [19] volgt $G_{0.05} \approx \frac{E_{0.05}}{16} = \frac{10200}{16} = 637.5\ N/mm^2$ en dat $f_{m,d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{m,k}}{\gamma_m} = 0.9 \cdot \frac{28}{1.25} = 20.16\ N/mm^2$.

De kipstabiliteitstoetsing dient voor alle zeven equivalente liggers te worden uitgevoerd (alhoewel op voorhand valt te voorspellen dat liggerdeel CF hoogstwaarschijnlijk maatgevend is). Vanwege de repetitieve aard van deze toetsing, wordt hieronder enkel liggerdeel DE volledig uitgewerkt en worden de overige resultaten opgesomd. De equivalente belastings-configuratie op ligger DE is weergegeven in Figuur 7.19, waarin de kopmomenten volgen uit Tabel 7.1.



Figuur 7.19: Equivalente belastings-configuratie ligger DE

Met behulp van paragraaf 1.4 wordt hieronder de kipstabiliteitstoetsing van ligger DE uitgevoerd. De kritische kipspanning $\sigma_{m,crit}$ wordt bepaald via

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{z,crit}}{W_z} = \frac{\pi\sqrt{E_{0.05}I_{yy}G_{0.05}I_t}}{l_{eff}W_z} \tag{7.27}$$

Hierin kan het traagheidsmoment om de zwakke as I_{yy} bepaald worden via

$$I_{yy} = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12} \cdot 450 \ \cdot 50^3 = 4.6875 \ \cdot 10^6 \ mm^4 \tag{7.28}$$

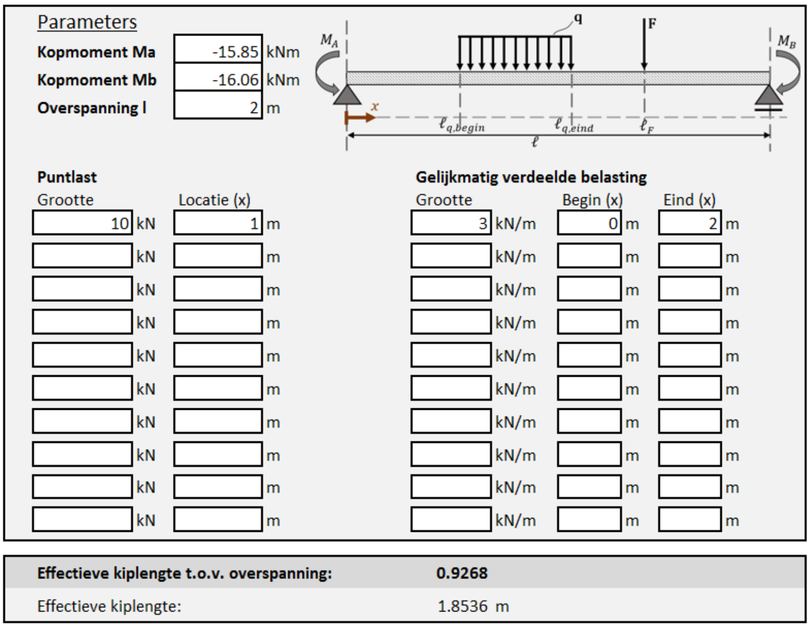
En het torsietraagheidsmoment I_t volgt uit [19]

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{3}hb^3\left(1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.525\left(\frac{b}{h}\right)^5\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 450 \cdot 50^3 \cdot \left(1 - 0.63 \cdot \frac{50}{450} + 0.525 \cdot \left(\frac{50}{450}\right)^5\right) \\ &= 17.4377 \cdot 10^6 \ mm^4 \end{aligned} \tag{7.29}$$

En het weerstandsmoment W_z volgt uit

$$W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6} \cdot 50 \cdot 450^2 = 1.6875 \ \cdot 10^6 \ mm^3 \tag{7.30}$$

De aanvulling op de toetsingsmethode met betrekking tot kipstabiliteit is de gecreëerde Excel Tool. Middels de Excel Tool kan op eenvoudige wijze de effectieve kiplengte voor equivalente ligger DE worden bepaald. Hierbij dient rekening te worden gehouden met de positieve definities van de kopmomenten in de Excel Tool. De ingevoerde input is weergeven in Figuur 7.20.



Figuur 7.20: *Input Excel Tool voor beschouwde ligger DE*

Uit de Excel Tool volgt $l_{eff} = 0.9268 \ l = 1.8536 \ m$. Hiermee kan nu $\sigma_{m,crit}$ volgens vergelijking (7.27) worden bepaald.

$$\sigma_{m,crit} = \frac{\pi\sqrt{10200 \cdot 4.6875 \ \cdot 10^6 \cdot 637.5 \cdot 17.4377 \cdot 10^6}}{1.8536 \cdot 10^3 \cdot 1.6875 \ \cdot 10^6} = 23.15 \ N/mm^2 \tag{7.31}$$

De volgende stap is de bepaling van de relatieve slankheid $\lambda_{rel,m}$.

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} = \sqrt{\frac{28}{23.15}} = 1.10 \tag{7.32}$$

Met $\lambda_{rel,m}$ wordt vervolgens de instabiliteitsfactor k_{crit} gevonden.

$$k_{crit} = \begin{cases} 1 & voor\ \lambda_{rel,m} \leq 0.75 \\ 1.56 - 0.75\lambda_{rel,m} & voor\ 0.75 < \lambda_{rel,m} \leq 1.4 \\ \dfrac{1}{\lambda_{rel,m}{}^2} & voor\ 1.4 < \lambda_{rel,m} \end{cases} \tag{7.33}$$

$$k_{crit} = 1.56 - 0.75 \cdot 1.10 = 0.735$$

Vervolgens kan de kipstabiliteitstoetsing worden uitgevoerd door

$$\begin{aligned} \sigma_{m,d} &\leq k_{crit} f_{m,d} \\ \sigma_{m,d} &\leq 0.735 \cdot 20.16 = 14.82\ N/mm^2 \end{aligned} \tag{7.34}$$

$\sigma_{m,d}$ is de optredende rekenwaarde van de buigspanning, welke kan worden gevonden met behulp van het maximale moment in ligger DE (deze volgt ook uit de Excel Tool). Dit maximale moment is gelijk aan 22.45 kNm, wat ook uit Figuur 7.18 volgt.

$$\sigma_{m,d} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{22.45 \cdot 10^6}{1.6875 \cdot 10^6} = 13.30\ N/mm^2 \tag{7.35}$$

Vervolgens kan een unity check worden uitgevoerd.

$$UC = \frac{\sigma_{m,d}}{k_{crit} f_{m,d}} = \frac{13.30}{14.82} = 0.90 < 1 \tag{7.36}$$

Hiermee is voor equivalente ligger DE aangetoond dat deze zijn stabiliteit zal behouden onder de gegeven belastings-configuratie. Aangezien de gevonden effectieve kiplengte een veilige benadering is van de daadwerkelijke effectieve kiplengte (volgens paragraaf 7.2), zal de unity check voor de daadwerkelijke effectieve kiplengte nog veiliger uitvallen. Deze zelfde toetsing is uitgevoerd voor de overige equivalente liggers en de resultaten zijn weergeven in Tabel 7.2.

Uit Tabel 7.2 volgt dat de unity check voor alle equivalente liggers aan de veilige kant ligt. Zoals verwacht is liggerdeel DE maatgevend en zijn de buitenste liggerdelen AB en GH het veiligst. Hiermee is aangetoond dat ligger AH voor de beschouwde belastings-configuratie in ieder geval niet zal kippen.

Tabel 7.2: *Kipstabiliteitstoetsing voor velden AB tot ten met GH*

	$l_{eff}(l)$	$l_{eff}(m)$	$\sigma_{m,crit}(N/mm^2)$	$\lambda_{rel,m}$	k_{crit}	$k_{crit} \cdot f_{m,d}(N/mm^2)$	$\sigma_{m,d}(N/mm^2)$	UC(-)
AB	0.316	0.632	67.890	0.642	1.000	20.160	6.181	0.307
BC	0.729	0.729	58.900	0.689	1.000	20.160	13.025	0.646
CD	0.312	0.936	45.845	0.782	0.974	19.633	13.025	0.663
DE	0.927	1.854	23.155	1.100	0.735	14.823	13.304	0.898
EF	0.319	0.957	44.858	0.790	0.967	19.504	12.510	0.641
FG	0.533	1.066	40.255	0.834	0.934	18.839	12.510	0.664
GH	0.567	1.133	37.879	0.860	0.915	18.450	1.813	0.098

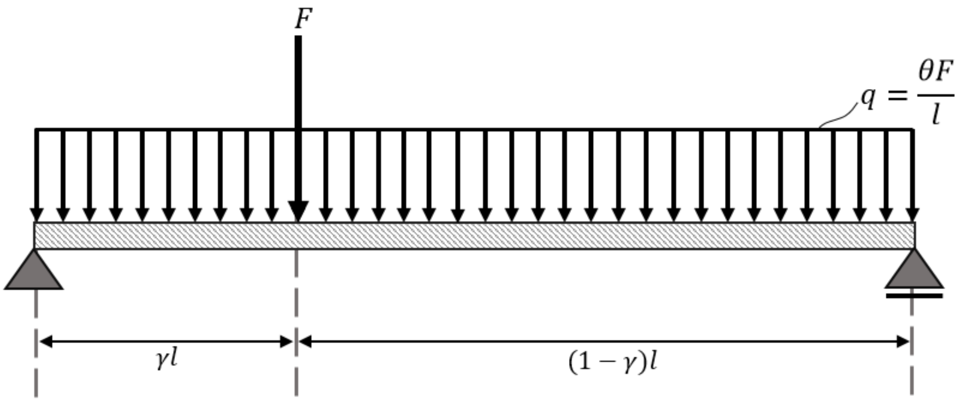
7.5 Specifieke gevallen

In deze paragraaf worden met behulp van de in dit onderzoek gevonden oplossingsmethoden voor de effectieve kiplengte een aantal specifieke gevallen bekeken. Het doel van deze beschouwing is het verkrijgen van meer inzicht in deze gevallen door bijvoorbeeld ontwerpgrafieken op te stellen. De volgende specifieke gevallen worden besproken:

- De combinatie van een gelijkmatig verdeelde belasting en een puntlast.
- Een ligger over 3 steunpunten belast met een enkele puntlast.
- Een uniform lineair toenemende belasting tot aan het midden van de ligger.
- Een uniform lineair afnemende belasting tot aan het eind van de ligger.

7.5.1 Combinatie van q-last en F-last

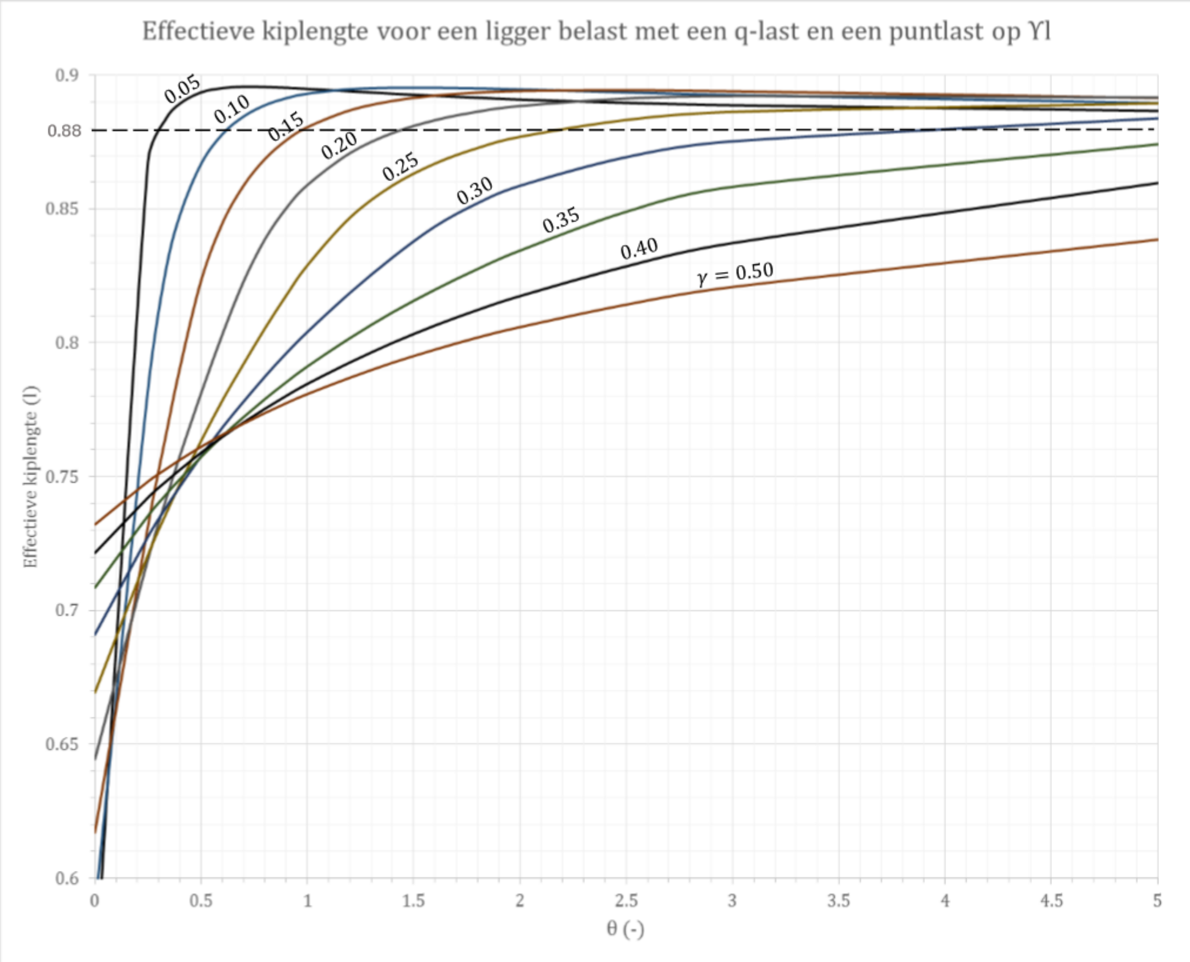
Wanneer een puntlast aangrijpt op een houten ligger, wordt in veel gevallen de invloed van het eigen gewicht van de ligger of de invloed van de puntlast buitenwege gelaten voor de bepaling van de effectieve kiplengte om de complexiteit van het vraagstuk beperkt te houden. Vaak wordt er een veilige aanname gedaan om deze verwaarlozing te compenseren. Met behulp van de Excel Tool is het echter vrij gemakkelijk om ook deze configuratie te beschouwen en dus veel exacter te ontwerpen. In Figuur 7.21 is de belastings-configuratie bestaande uit een gelijkmatig verdeelde belasting en een puntlast op een willekeurige locatie γl vanaf de linker oplegging weergeven.



***Figuur 7.21**: Een ligger belast met een puntlast op willekeurige locatie en een gelijkmatig verdeelde belasting*

Hierbij is de q-last uitgedrukt in $q = \frac{\theta F}{l}$ waarin θ een dimensieloze waarde is die de verhouding tussen de puntlast en de gelijkmatig verdeelde belasting in rekening brengt. Zo resulteert $\theta = 1$ in een gelijkmatige belasting die over de gehele ligger gezien even groot is als de puntlast F ($\frac{F}{l} \cdot l = F$).

In Figuur 7.22 is het verloop van de effectieve kiplengte voor $0 \leq \theta \leq 5$ voor verscheidene waardes van γ geplot. Voor $\theta = 0$ komen de waardes overeen met de in paragraaf 2.2.2 gevonden waardes voor de effectieve kiplengte. Voor $\theta = \infty$ convergeert de effectieve kiplengte naar 0.88, wat gelijk is aan de effectieve kiplengte voor enkel een q-last. Wanneer de q-last vele malen groter is dan de puntlast, valt de invloed van de puntlast dus te verwaarlozen. Echter blijkt uit Figuur 7.22 dat de effectieve kiplengte vaak groter is dan 0.88; blijkbaar resulteert de invloed van de puntlast voor deze gevallen in een lager kritiek kipmoment. Het wordt daarom ook niet aangeraden de invloed van de puntlast te verwaarlozen voor $\theta < 10$. Verder lopen de grafieken zeer steil op voor $\theta < 0.25$. Het wordt daarom dan ook aangeraden, indien Figuur 7.22 wordt toegepast in plaats van de Excel Tool, gebruik te maken van een veilige benadering in de vorm van $l_{eff} = 0.75\ l$.

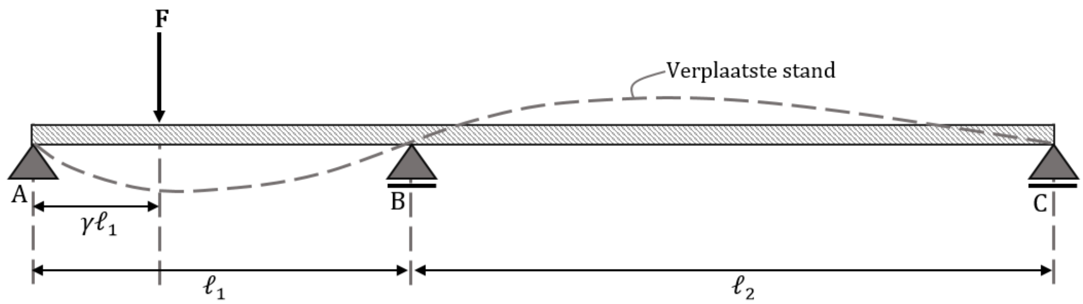


***Figuur 7.22**: Effectieve kiplengte voor een combinatie van een puntlast en een gelijkmatig verdeelde belasting*

Wanneer de puntlast verder naar het midden van de ligger aangrijpt, is de invloed van de puntlast op het equivalente moment en daarmee de effectieve kiplengte groter. Omdat de belastings-configuratie symmetrisch is, kan de oplossing voor $\gamma = 0.75$ gevonden worden door $\gamma = 0.25$ te stellen. Hiermee is een grafische oplossingsmethode gevonden voor de belastings-configuratie bestaande uit een puntlast en een gelijkmatig verdeelde belasting op een ligger die aan weerszijden is opgelegd met gaffelopleggingen.

7.5.2 Ligger over 3 steunpunten belast met puntlast

In de praktijk komen liggers over 3 steunpunten veelvoudig voor. De kipstabiliteitstoetsing is voor deze gevallen mogelijk door gebruik te maken van de in hoofdstuk 4 gevonden analytische oplossing. De in deze paragraaf beschouwde belastings-configuratie is weergeven in Figuur 7.23.



***Figuur 7.23:** Ligger over 3 steunpunten belast met puntlast op linker veld*

Ligger AB kan losgekoppeld worden door een equivalent moment ter plaatse van B in rekening te brengen. Dit steunpuntsmoment kan worden bepaald door in te zien dat de hoekverdraaiingen aan weerszijden van B gelijk aan elkaar moeten zijn en gebruik te maken van de vergeet-mij-nietjes vanuit Bijlage C.

$$\frac{F{l_1}^2}{6EI}(\gamma - \gamma^3) - \frac{M_B l_1}{3EI} = \frac{M_B l_2}{3EI} \tag{7.37}$$

Waaruit M_B wordt opgelost.

$$M_B = \frac{F{l_1}^2(\gamma - \gamma^3)}{2(l_1 + l_2)} \tag{7.38}$$

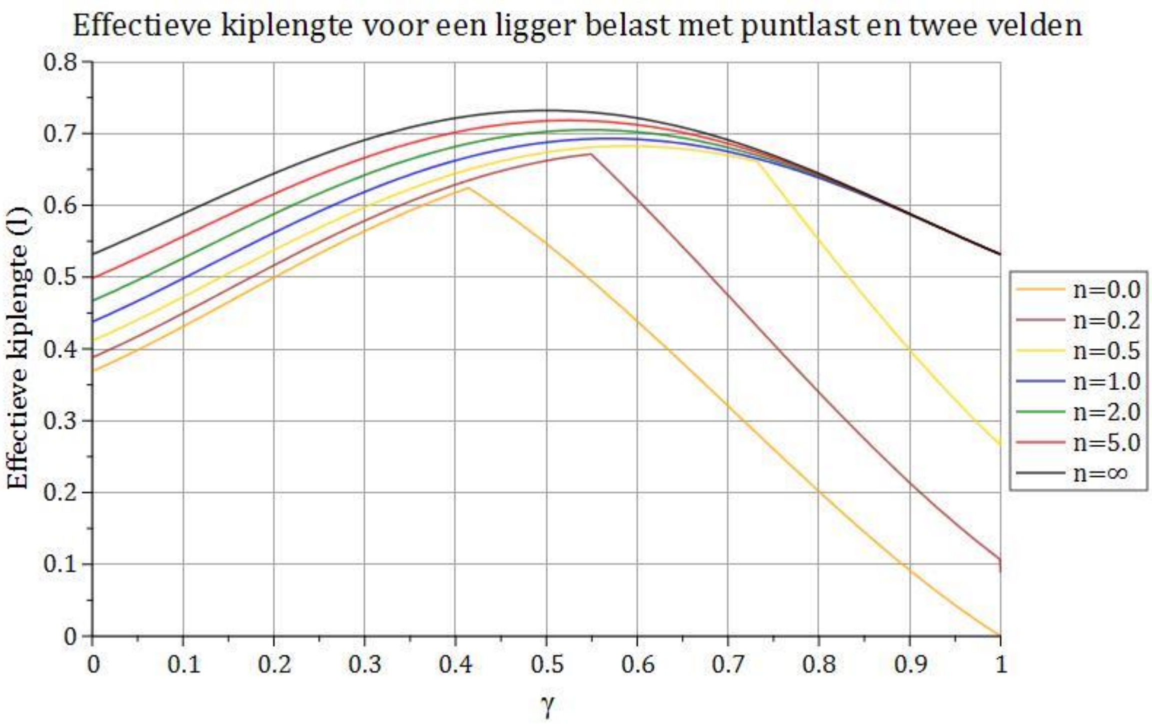
Vervolgens kan M_B uitgedrukt worden met behulp van kopmomentfactor β in $M_B = \beta F l_1$, waarin

$$\beta = \frac{l_1(\gamma - \gamma^3)}{2(l_1 + l_2)} \tag{7.39}$$

Om de invloed van het rechterdeel van de ligger eenvoudig in rekening te brengen, wordt er een dimensieloze waarde *n* ingevoerd die de relatieve grootte van het rechterveld BC ten opzichte van het linkerveld AB uitdrukt: $n = \frac{l_2}{l_1}$. Dit leidt tot

$$\beta = \frac{\gamma - \gamma^3}{2(n+1)} \tag{7.40}$$

De kipstabiliteitstoetsing van liggerdeel BC kan eenvoudig uitgevoerd worden met behulp van de eerder afgeleide effectieve kiplengte gelijk aan $0.53\ l$ (zie Figuur 5.1 voor x=0). De effectieve kiplengte van liggerdeel AB is echter afhankelijk van de locatie van de puntlast en kan voor verschillende waardes van *n* afgelezen worden in Figuur 7.24 (zie Bijlage I.15 voor de bijbehorende Maple code). Uit deze figuur kan herleid worden dat de effectieve kiplengte wordt gereduceerd door liggerdeel BC. Wanneer $n = \infty$ resulteert dat in $\beta = 0$ en komt de effectieve kiplengte overeen met paragraaf 2.2.



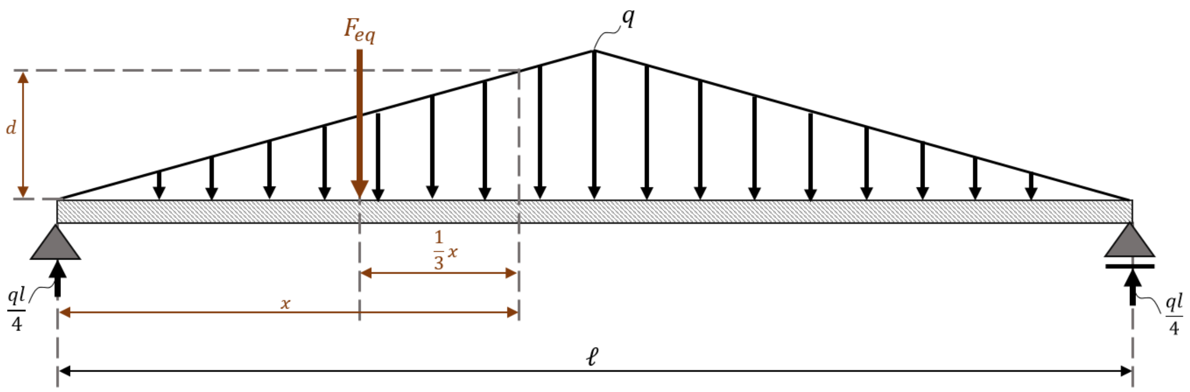
Figuur 7.24: *Effectieve kiplengte voor een ligger over drie steunpunten belast met een puntlast*

Voor afnemende waardes van n neemt de effectieve kiplengte af en voor $n = 0$ is de ligger als het ware eenzijdig ingeklemd (dit resulteert dan ook in $\beta = \frac{1}{8}Fl_1$). Qua principe komt Figuur 7.24 overeen met de in paragraaf 7.1.1 beschouwde gevallen; de rotatiestijfheid ter plaatse van B volgt direct uit de lengtes van liggerdelen AB en BC (indien de buigstijfheden van beide liggers gelijk zijn). De knik van de grafieken van $n = 0, 0.2$ en 0.5 vallen ook eenvoudig te verklaren: hier slaat het maximale moment om van het veldmoment in AB naar het kopmoment in B omdat het moment in B groter wordt ten gevolge van afnemende n.

Hiermee is een grafische oplossingsmethode gevonden om de effectieve kiplengte van het liggerdeel waarop de puntlast aangrijpt te bepalen voor de belastings-configuratie bestaande uit een ligger over 3 steunpunten. De toepasbaarheid van deze grafische oplossingsmethode is afhankelijk van de waarde van n (er is maar een beperkt aantal waardes verwerkt in Figuur 7.24).

7.5.3 Uniform lineair toenemende belasting tot aan midden van overspanning

Met behulp van de Excel Tool is het mogelijk om ook een aantal ongebruikelijke belastings-configuraties te beschouwen. In deze paragraaf wordt een uniform lineair toenemende belasting beschouwd, welke is weergeven in Figuur 7.25. De maximale waarde van de belasting is gelijk aan q.



***Figuur 7.25**: Uniform lineair toenemende belasting*

Deze belasting kan niet direct worden ingevoerd in de Excel Tool; hiervoor dient een vereenvoudiging te worden aangebracht. De q-last wordt opgedeeld in tien velden die zodanig gekozen worden dat de momentenlijn equivalent is aan de daadwerkelijke momentenlijn. Hiervoor dient eerst de daadwerkelijke momentenlijn te worden bepaald. De q-last resulteert in twee even grote oplegreacties ter grootte van $\frac{ql}{4}$. Hiermee kan voor iedere locatie x het bijbehorende buigende moment bepaald worden.

$$M(x) = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2} - F_{eq} \cdot \frac{x}{3} \tag{7.41}$$

Waarin F_{eq} equivalent is aan de totale belasting over het beschouwde deel van de ligger. Voor $x \leq 0.5l$ wordt deze gevonden door

$$\begin{aligned} F_{eq} &= x \cdot d \cdot \frac{1}{2}, \quad d =\cdot \frac{q}{0.5l} \cdot x \\ F_{eq} &= \frac{x^2 q}{l} \end{aligned} \tag{7.42}$$

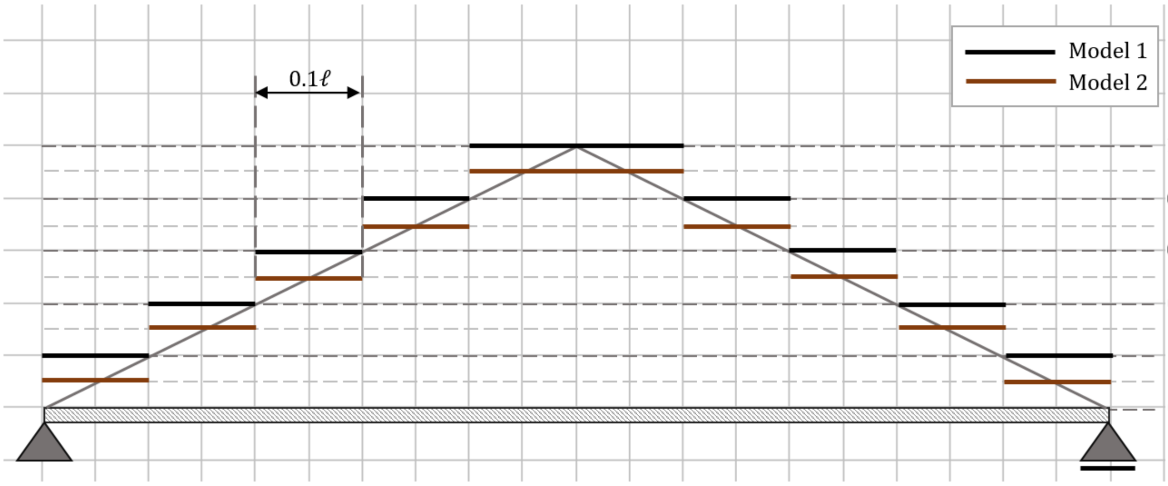
Waarmee uiteindelijk een uitdrukking wordt gevonden voor het moment $M(x)$ voor $x \leq 0.5l$.

$$M(x) = qx\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{3l}\right) \tag{7.43}$$

En op eenzelfde wijze wordt voor $x > 0.5l$ gevonden dat

$$M(x) = q(l-x)\left(\frac{l}{4} - \frac{(l-x)^2}{3l}\right) \tag{7.44}$$

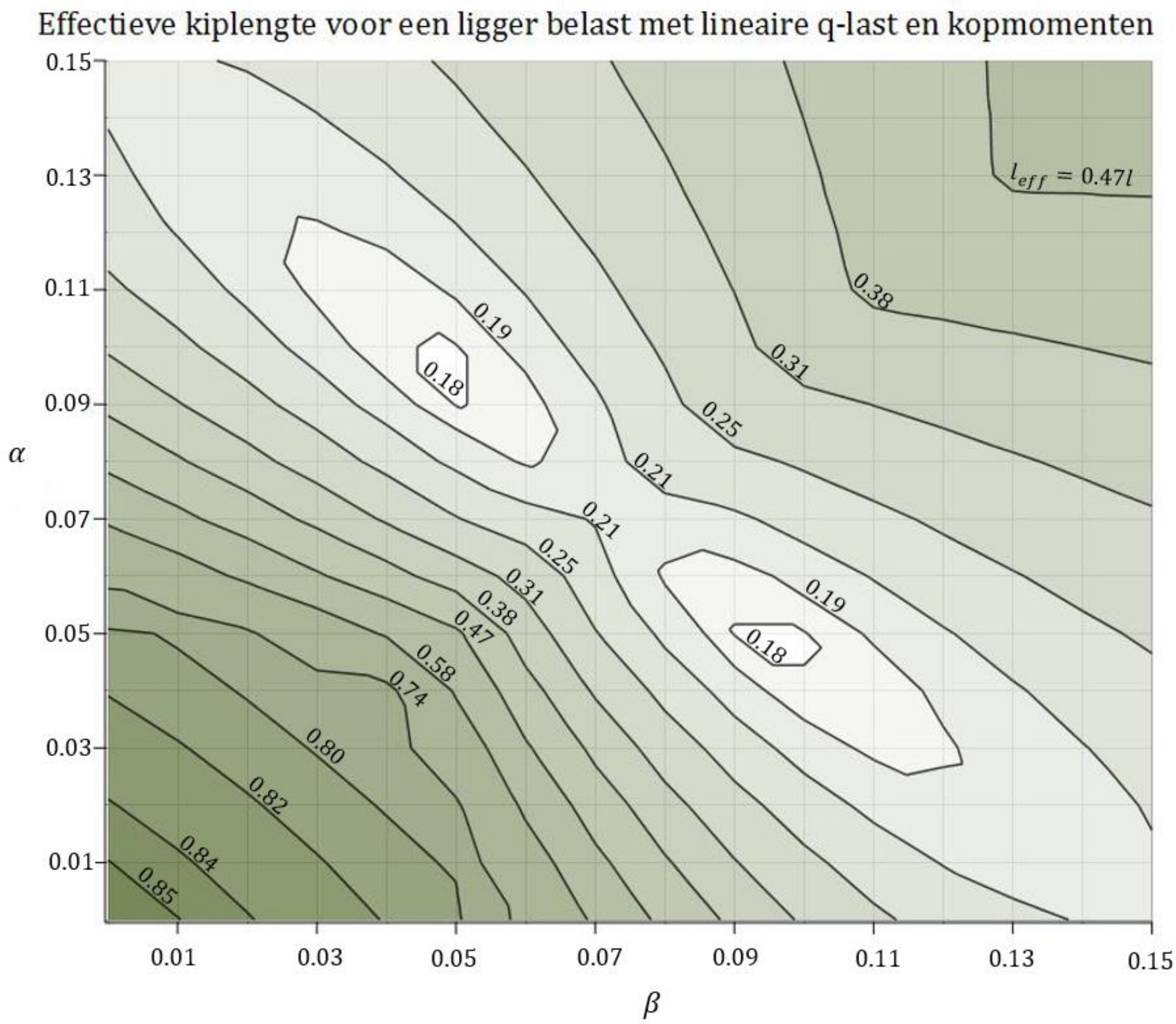
Hiermee wordt het maximaal moment in het midden van de overspanning gevonden welke gelijk is aan $\frac{1}{12}ql^2$. Om deze configuratie in de Excel Tool te verwerken, is een tweetal modellen gecreëerd welke allebei getest zijn. Model 1 bestaat uit een opdeling in 10 belastings-velden waarbij de maximale waarde in een veld de grootte van de belasting voor dat veld bepaalt (hiermee wordt de totale belasting overschat). Model 2 bestaat uit een opdeling in 10 velden waarbij de gemiddelde waarde in een veld de grootte van de belasting voor dat veld bepaalt (hiermee wordt de totale belasting exact weergegeven). Beide modellen zijn weergegeven in Figuur 7.26.



***Figuur 7.26:** Visualisatie van modellen 1 en 2*

Voor $l = 10\,m$ en $q = 10\,kN/m$ zijn beide modellen getest. In Bijlage Q zijn de daadwerkelijke momentenlijnen vergeleken met de momentenlijnen van de equivalente belasting. Het daadwerkelijke maximale moment is $\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10^2 = 83.33\,kNm$. Model 1 resulteert in $94.81\,kNm$ en model 2 in $82.5\,kNm$. Daarbij komt de momentenlijn van model 2 veel dichter bij de daadwerkelijke momentenlijn dan model 1. Alhoewel model 2 tot een kleine onderschatting leidt, is de exactheid vele malen groter dan model 1 en daarom heeft dit model de voorkeur. Ter compleetheid is in Figuur Q.3 de input in de Excel Tool gegeven voor model 2.

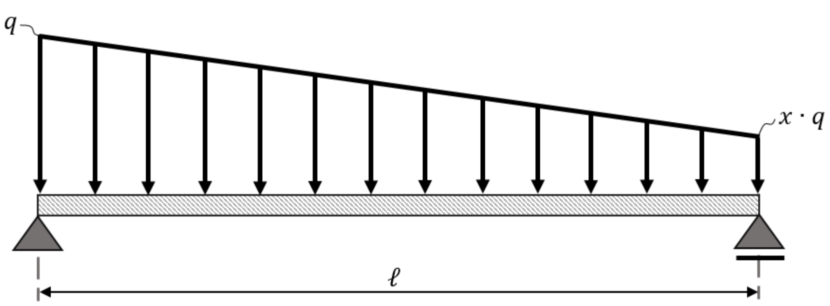
Met behulp van de Excel tool en model 2 wordt voor een uniform lineair toenemende belasting tot aan het midden van de overspanning gevonden dat $l_{eff} = 0.858\,l$. Deze waarde is iets lager dan de effectieve kiplengte behorend bij een gelijkmatig verdeelde belasting. Ter uitbreiding van deze belastings-configuratie is ook het geval met kopmomenten αql^2 en βql^2 onderzocht (positieve definitie conform eerdere beschouwingen). Hierbij is q de maximale waarde van de belasting ter plaatse van het midden van de overspanning. Door voor een groot aantal waardes α en β de Excel Tool toe te passen, is een hoogtekaart gecreëerd waarmee op een grafische wijze de effectieve kiplengte kan worden bepaald voor liggers belast met een uniform lineair toenemende belasting tot een het midden van de overspanning en aan weerszijden kopmomenten. Deze hoogtekaart is weergeven in Figuur 7.27. In deze hoogtekaart zijn de in paragraaf 3.5 beschreven symmetrievlak en omslagvlak terug te vinden. De lijnen in Figuur 7.27 zijn hoekig vanwege het beperkte aantal beschouwde punten.



Figuur 7.27: *Grafische oplossingsmethode ter bepaling van de effectieve kiplengte belast met een uniform lineair toenemende belasting tot aan het midden en kopmomenten*

7.5.4 Uniform lineair afnemende belasting tot aan eind van de ligger

Een variant op de in paragraaf 7.5.3 besproken belastings-configuratie is de uniform lineair afnemende belasting tot aan het eind van de ligger, welke is weergeven in Figuur 7.28. Vanwege de beschikbare tijd voor dit onderzoek is de invloed van de kopmomenten voor dit belastings-geval niet meegenomen (dit kan de lezer daarbij ook zelf uitvoeren via de bijgeleverde Excel Tool).

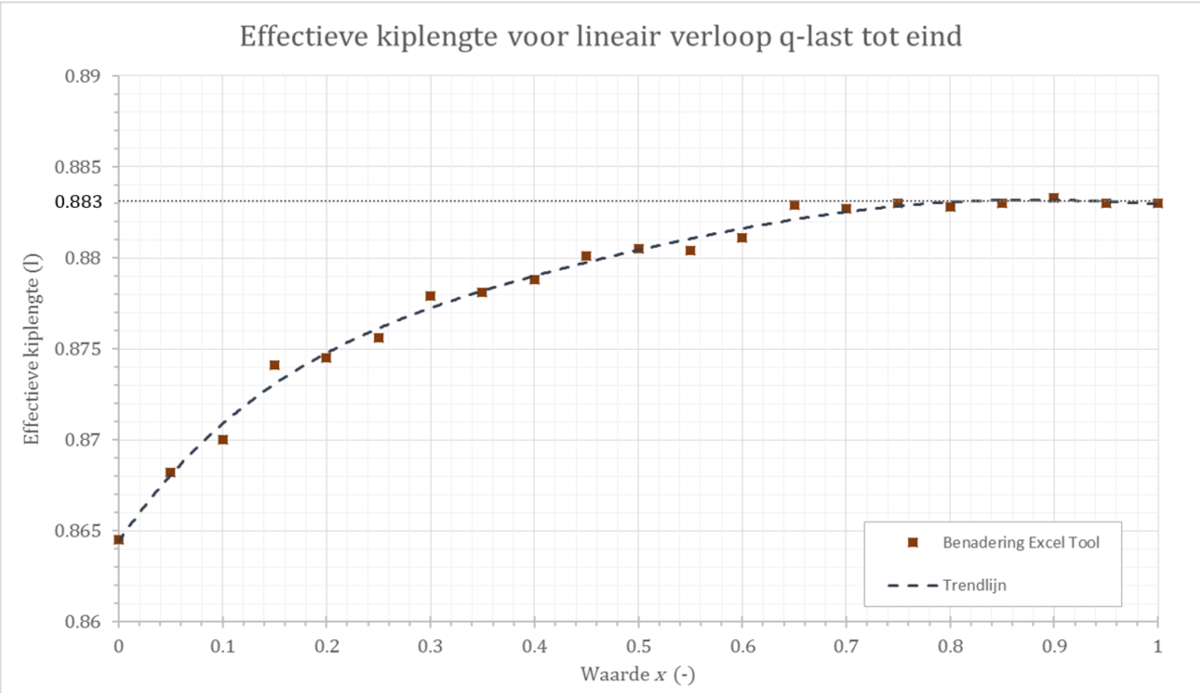


Figuur 7.28*: Weergave van uniform lineair afnemende belasting tot aan het eind van de ligger*

De uniforme belasting verloopt van q naar xq, waarbij $0 \leq x \leq 1$. Voor grotere waardes van x kunnen de definities omgedraaid worden wat resulteert in een waarde onder de 1. Conform de in paragraaf 7.5.3 besproken methode, wordt de belasting opgedeeld in 10 velden waarbij de grootte van de belasting in een veld wordt bepaald door de gemiddelde belasting. De grootte van de belasting per veld valt uit te drukken met behulp van het totale verschil $dq = q - qx = (1-x)q$. Wanneer het nummer van het veld wordt uitgedrukt in j, waarbij het eerste veld wordt omschreven door $j = 0$, resulteert dit in

$$q_j = q - \frac{(1-x)q}{20} - j \cdot \frac{(1-x)q}{10}$$
$$q_j = q\left(1 - \frac{(1-x)(1+2j)}{20}\right) \quad (7.45)$$

Zo leiden $q = 10\ kN/m$ en $x = 0.5$ tot $q_j = [9.75, 9.25, 8.75, 8.25, 7.75, 7.25, 6.75, 6.25, 5.75, 5.25]$. Deze beschouwing is voor verscheidene waardes van x uitgevoerd en verwerkt tot Figuur 7.29. Doordat de belasting wordt opgedeeld in 10 velden wordt een kleine fout gemaakt; de modellering komt niet exact overeen met de beschouwde belastings-configuratie. Dit heeft als gevolg dat de curve niet volledig glad is. Met behulp van een ‘trendlijn’ is geprobeerd deze afwijking te minimaliseren.



Figuur 7.29: *Effectieve kiplengte voor een uniform lineair afnemend verloop q-last tot eind*

Voor $x = 1$ is de oplossing gelijk aan een uniforme belasting waarvoor in paragraaf 6.5 reeds een effectieve kiplengte gelijk aan $0.883\ l$ is gevonden. Voor $x = 0$ is de effectieve kiplengte gelijk aan $0.8645\ l$, wat zeer dicht in de buurt ligt van $0.883\ l$. Omdat het verschil tussen de maximum en minimum waarde klein is, wordt voorgesteld om voor uniform lineair afnemende belastingen tot aan het eind van de ligger een effectieve kiplengte gelijk aan de welbekende $0.88(3)\ l$ aan te nemen. De momentenlijn voor het beschouwde geval komt qua vorm redelijk overeen met een uniforme belasting; het enige verschil is het feit dat de top vanuit het midden naar de zijkant is verschoven. De invloed van de aflopende belasting komt dus niet zo zeer tot uitdrukking in de effectieve kiplengte. Echter, het optredende maximale moment (die ook nodig is voor de toetsing) zal lager ligger vergeleken met een uniforme belasting. Ook voor uniform lineair toenemende belastingen tot aan het midden van de ligger is de effectieve kiplengte ($0.858\ l$, zie paragraaf 7.5.3) te benaderen met $0.88(3)\ l$. Voor dit geval zou dus dezelfde benadering voorgesteld kunnen worden, afhankelijk van de benodigde exactheid van de oplossing.

7.6 Samenvatting

Met behulp van de in dit onderzoek gevonden oplossingsmethoden is in dit hoofdstuk een verdere analyse uitgevoerd van een aantal aspecten zoals rotatiestijfheden in de opleggingen, liggers over meerdere velden en de aangrijphoogte van de belasting.

Ten eerste is beschouwd hoe de verticale of horizontale rotatiestijfheid in de opleggingen het kipgedrag beïnvloedt. Voor verticale rotatiestijfheden is een methode beschreven waarmee deze kunnen worden vervangen door equivalente kopmomenten. Deze kopmomenten kunnen vervolgens als input worden gebruikt voor de Excel Tool. Ook is er een hoogtekaart gecreëerd voor twee belastings-configuraties: een puntlast en een q-last. Met deze hoogtekaart valt de effectieve kiplengte direct af te lezen als functie van de dimensieloze rotatiestijfheden ρ van de opleggingen. Voor horizontale rotatiestijfheden in de opleggingen is geen directe oplossing gevonden. Wel is er een veilige benadering omschreven waarmee het verwaarlozen van de horizontale rotatiestijfheden resulteert in een veilige ondergrens voor het kritieke kipmoment. Voor meer gedetailleerde uitkomsten wordt de lezer doorverwezen naar FEM-softwarepakketen.

Vervolgens zijn liggers over meerdere steunpunten en/of gaffels onderzocht. Door in te zien dat deze liggers opgedeeld kunnen worden in meerdere equivalente liggers, kan de effectieve kiplengte worden bepaald. Hierbij dienen wel de rotatiestijfheden worden meegenomen; dit resulteert in equivalente kopmomenten (conform de theorie behorend bij de verticale rotatiestijfheid). De horizontale rotatiestijfheid ter plaatse van steunpunten of gaffels wordt buiten beschouwing gelaten. De kipstabiliteitstoetsing dient per equivalente ligger te worden uitgevoerd en indien alle equivalente liggers voldoen, kan met vrij grote zekerheid geconcludeerd worden dat de ligger niet onderhevig is aan kipinstabiliteit voor de beschouwde belastings-configuratie.

Gedurende de afleiding van de gevonden oplossingsmethoden is geen rekening gehouden met de aangrijphoogte van de belasting. Deze aangrijphoogte kan zowel een reducerend als een toenemend effect hebben op het kritieke kipmoment. Er wordt voorgesteld om de door Eurocode 5 gebruikte methode toe te passen. Voor belastingen die aangrijpen in het uiteinde van de gedrukte zone geeft dit

$$l_{eff} = l_{eff,NC} + 2h \tag{7.46}$$

En voor belastingen die aangrijpen in het uiteinde van de getrokken zone geeft dit

$$l_{eff} = l_{eff,NC} - 0.5h \tag{7.47}$$

Vervolgens is in paragraaf 7.4 voor een houten halconstructie een volledige kipstabiliteitstoetsing uitgevoerd om het gebruik en de bruikbaarheid van de gecreëerde Excel Tool te verduidelijken. Vervolgens zijn enkele specifieke gevallen beschouwd:

- De combinatie van een gelijkmatig verdeelde belasting en een puntlast.
- Een ligger over 3 steunpunten belast met een enkele puntlast.
- Een uniform lineair toenemende belasting tot aan het midden van de ligger.
- Een uniform lineair afnemende belasting tot aan het eind van de ligger.

Voor elk van deze gevallen is een ontwerpgrafiek gecreëerd waarmee voor een groot aantal belastings-configuraties zonder tussenkomst van de Excel Tool de effectieve kiplengte kan worden afgelezen. Deze grafieken zijn zeer handig gedurende de eerste fase van het ontwerp aangezien de grafieken inzicht bieden in het verloop van de effectieve kiplengte, met als gevolg dat de ingenieur gemakkelijker kan ‘spelen’ met de geometrie van de constructie.

8. Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk worden de gestelde onderzoeksvragen beantwoord en wordt een conclusie getrokken. Vervolgens zullen aanbevelingen worden gedaan voor vervolgonderzoek.

8.1 Conclusies

Aan het begin van dit onderzoek is de volgende onderzoeksvraag gesteld:

> WAT IS DE INVLOED VAN DE (VERSCHILLENDE) KOPMOMENTEN EN DE LOCATIE(S) VAN DE PUNTLAST(EN) OP DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VAN HOUTEN LIGGERS MET EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE EN HOE VALT DEZE TE KWANTIFICEREN?

Om de hoofdvraag te kunnen beantwoorden, is deze opgesplitst in een zestal deelvragen. Deze deelvragen worden hieronder stuk voor stuk beantwoord.

> 1. WAT IS DE THEORIE ACHTER HET FENOMEEN 'KIP' EN HOE KUNNEN DE BIJBEHORENDE OMSCHRIJVENDE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN OPGELOST WORDEN?

Kippen is het roteren uit het vlak van een ligger onder invloed van de daarop aangrijpende belasting ten gevolge van een minieme zijwaartse translatie van het op druk belaste deel van de doorsnede. De differentiaalvergelijking die het fenomeen 'kip' omschrijft, is afgeleid en opgelost voor een constant moment over de gehele lengte van de ligger. Hierbij is het welvings-effect verwaarloosd (een aanname die geldt voor een smalle rechthoekige doorsnede). Deze oplossing is teruggevonden in de Eurocode 5 voor hout. In deze Eurocode wordt gebruik gemaakt van het *effectieve kiplengte* principe.

$$M_{kip} = \frac{\pi}{l_{eff}} \sqrt{GI_t EI_{yy}} \tag{8.1}$$

Hierbij worden verscheidene belastings-configuraties en randvoorwaarden gekoppeld aan het basisgeval met een constant moment over een ligger met aan weerszijden gaffelopleggingen in de vorm van een reductiefactor op de overspanningslengte: de effectieve kiplengte. Omdat de differentiaalvergelijking vaak analytisch niet oplosbaar bleek te zijn, is er gebruik gemaakt van de energiebeschouwing-methode. Hiermee kan voor veel gevallen de effectieve kiplengte gevonden worden.

> 2. WAT IS DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VOOR EEN LIGGER BELAST MET EEN PUNTLAST A) IN HET MIDDEN EN B) OP EEN WILLEKEURIGE LOCATIE OP DE LIGGER?

Met behulp van een energiebeschouwing en de aanname dat de rotatievorm te beschrijven is met behulp van één enkele sinusterm (volgt uit literatuur, verdere analyse omtrent juistheid van deze aanname is uitgevoerd in Bijlage H) is de effectieve kiplengte voor deze gevallen gevonden. Voor de belastings-configuratie met een puntlast in het midden van de overspanning is een effectieve kiplengte gelijk aan $0.7321\ l$ gevonden. Een waarde die ondersteund wordt door onder andere het STEP-dictaat. Voor de belastings-configuratie met een puntlast op een willekeurige locatie γl van de linker oplegging is het verloop van de effectieve kiplengte weergeven in Figuur 2.5. Dit verloop kan veilig en vrij exact benaderd worden via

$$l_{eff} = (0.2\sin(\pi\gamma) + 0.535)l \tag{8.2}$$

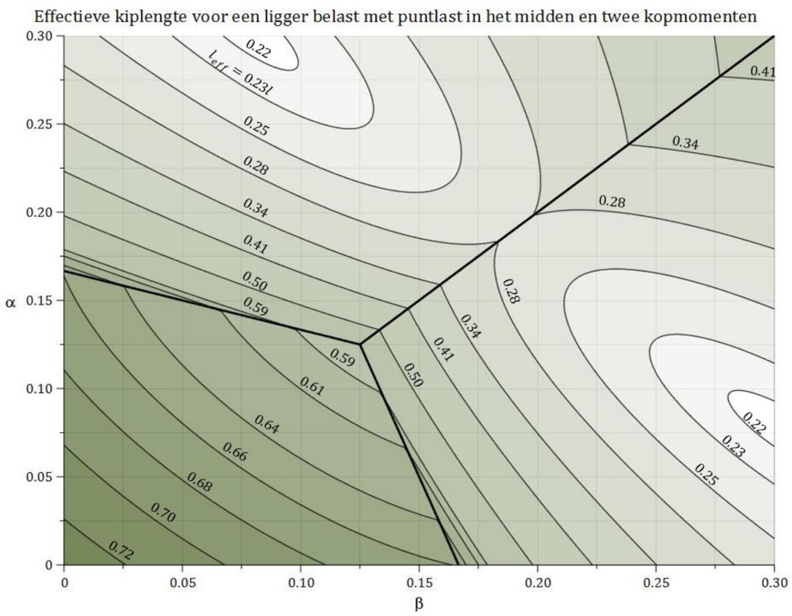
Rondom de opleggingen is de gevonden oplossing (en daarmee de benadering) twijfelachtig doordat de aangenomen rotatievorm hier wellicht niet op gaat. Hier is geen verder onderzoek naar gedaan.

3. Hoe kan de effectieve kiplengte voor een ligger in het midden belast met een puntlast en aan weerszijden verschillende kopmomenten bepaald worden en kan de oplossing grafisch weergegeven worden?

Om deze belastings-configuratie te beschouwen, zijn twee dimensieloze momentfactoren α en β ingevoerd. Door gebruik te maken van de energiebeschouwing is een analytische oplossing gevonden waarmee de effectieve kiplengte voor dit geval kan worden bepaald.

$$l_{eff} = l \cdot \frac{\sqrt{0.2827(\alpha^2+\beta^2)+0.4347\alpha\beta-0.1757(\alpha+\beta)+0.0335}}{\max(|\alpha|,|\beta|,|0.25-0.5\alpha-0.5\beta|)} \quad (8.3)$$

Deze oplossing komt opvallend veel overeen met de door Roeland van Straten [1] gevonden oplossing voor een gelijkmatig verdeelde belasting. Hier is later in het onderzoek aandacht aan besteedt. De gevonden analytische oplossing is geverifieerd met behulp van de beschikbare literatuur. Om de oplossing eenvoudiger en inzichtelijker te maken, is een grafische oplossingsmethode ontwikkeld in de vorm van een hoogtekaart, welke is weergegeven in Figuur 8.1.



Figuur 8.1: Gecreëerde hoogtekaart voor een ligger belast met een puntlast in het midden en twee kopmomenten

In de hoogtekaart zijn een symmetrievlak en een omslagvlak te zien; beiden zijn fysisch onderbouwd in paragraaf 3.6. Wanneer de grootte van de twee kopmomenten onderling duidelijk verschilt, ontstaat een asymmetrische belasting. Voor dit geval wijkt de rotatievorm waarschijnlijk ietwat af van de enkeltermige sinusvorm. In Bijlage H is voor meerdere belastings-configuraties de oplossing met 1 sinusterm en de meer exacte oplossing met 5 sinustermen bepaald. In deze analyse is een maximale (onveilige) afwijking van 6.3% gevonden; de gemiddelde afwijking voor verscheidene belastings-configuraties ligt in de orde 2 tot 3%. De methode met 1 sinusterm compenseert deze kleine onveilige afwijking met zijn eenvoudigheid en continuïteit van de oplossing en in het verdere onderzoek is daarom gebruik gemaakt van 1 sinusterm.

4. Is het mogelijk om naast de twee kopmomenten de locatie van de puntlast te variëren en daarbij een grafische oplossing te verkrijgen?

De oplossing behorend bij deze belastings-configuratie is afhankelijk van 3 variabelen (α, β, γ) en daarom is het niet mogelijk gebleken om een algemene grafische oplossingsmethode te ontwikkelen. Wel zijn er voor specifieke waardes van γ hoogtekaarten ontwikkelen. Deze zijn weergeven in Bijlage

F. Voor de exacte oplossing is een algemeen geldende uitdrukking gevonden. De bijbehorende constanten C_1 tot en met C_5 kunnen worden bepaald met behulp van Tabel 4.1, Figuren 4.4 en 4.5 of via de gevonden benaderingen.

$$l_{eff} = \frac{Fl\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta+C_3\alpha+C_4\beta+C_5}}{M_{max}}l \quad (8.4)$$

$$C_1 = 0.2827, C_2 = 0.4347 \quad (8.5)$$

$$benadering\ C_3 = -0.1773\sin\left(\frac{\pi}{0.95}\gamma\right) \quad (8.6)$$

$$benadering\ C_4 = -0.1773\sin\left(\frac{\pi}{1.18}\gamma\right) \quad (8.7)$$

$$benadering\ C_5 = 0.01675\,[1-\cos(2\pi\gamma)] \quad (8.8)$$

Voor exacte oplossingen wordt aangeraden gebruik te maken van de getabelleerde waardes aangezien de fout voor deze waardes enkel bestaat uit een afrondfout. Voor inzichtelijke oplossingen wordt aangeraden gebruik te maken van de ontwikkelde grafische oplossingsmethode (indien de locatie γ overeenkomt met een van de verwerkte configuraties).

Ter aanvulling op deze belastings-configuratie is ook het geval met 2 puntlasten op locaties γl en δl en 2 kopmomenten beschouwd. Voor dit geval zijn wederom waardes voor C_1 tot en met C_5 getabelleerd. Daarbij zijn voor een beperkt aantal configuraties hoogtekaarten gemaakt (zie Bijlage G). Deze belastings-configuratie is als opstapje naar de beantwoording van deelvraag 5 gebruikt.

5. VALT ER EEN ALGEMENE METHODE TE ONTWIKKELEN WAARMEE VOOR IEDERE BELASTINGS-CONFIGURATIE DE EFFECTIEVE KIPLENGTE BEPAALD KAN WORDEN?

Er is een algemeen verband gevonden waarmee het equivalente moment en daarmee de effectieve kiplengte kan worden bepaald. Dit algemene verband is eerder in het onderzoek al geconstateerd, zie vergelijking (8.4). Om tot een algemene methode te komen, dienden algemene uitdrukkingen te worden gevonden voor C_1 tot en met C_5 en M_{max}. Hierbij zijn de oplossingen van 1, 2, 3 en 4 puntlasten op locaties die omschreven worden door verzameling γ beschouwd en doorzocht op verbanden. Uiteindelijk zijn er uitdrukkingen gevonden waarmee voor iedere mogelijke sommatie van zogenaamde *eenheidspuntlasten* op locaties γ waardes voor C_1 tot en met C_5 en M_{max} bepaald kunnen worden. Deze uitdrukkingen zijn vervolgens verwerkt in Excel. De uitdrukkingen kunnen ook toegepast worden op gelijkmatig verdeelde belastingen door in te zien dat deze benaderd kunnen worden door een sommatie van een grote hoeveelheid eenheidspuntlasten die gelijkmatig zijn verdeeld zijn over de lengte van de ligger. De gevonden uitdrukkingen geven dezelfde oplossing als de oplossing van Van Straten, echter is het met de gevonden oplossingsmethode bijvoorbeeld ook mogelijk om q-lasten over een bepaald deel van de ligger te beschouwen in combinatie met bijvoorbeeld een puntlast.

Ook zijn er fysische onderbouwingen gevonden voor C_1 tot en met C_5. C_1 en C_2 brengen enkel de invloed van de kopmomenten op de effectieve kiplengte in rekening. C_3 en C_4 vormen een kruisterm tussen de kopmomenten en de puntlasten en treden enkel op wanneer beide typen belastingen aanwezig zijn. C_3 en C_4 brengen de invloed van de puntlast(en) in rekening op de verrichte arbeid door de kopmomenten, welke afhankelijk is van de hoekverdraaiing ter plaatse van de opleggingen (deze hoekverdraaiing wordt beïnvloed door de puntlasten). Vice versa beïnvloeden de kopmomenten de verticale verplaatsing w_{kip} (welke volgt uit de momentenlijn) en daarmee de arbeid die wordt verricht door de puntlasten. C_5 brengt enkel de invloed van de puntlasten in rekening.

De input voor de gevonden uitdrukkingen voor C_1 tot en met C_5 en M_{max} is de verzameling γ die de locaties van de equivalente eenheidspuntlasten omvat. Om de oplossingsmethode toepasbaarder te maken, is een systeem gecreëerd die deze verzameling γ automatisch genereert op basis van de ingevoerde belastingen. Dit systeem is vervolgens verwerkt in een Excel Tool. Met behulp van het bijgeleverde Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** kan voor bijna iedere belastings-configuratie de effectieve kiplengte bepaald worden. Let op: voor een correcte werking van het Excel bestand is het essentieel dat Bijlage L gelezen wordt. De gecreëerde Excel Tool kan tot 1000 eenheidspuntlasten verwerken. Wanneer dit niet genoeg blijkt te zijn om de ingevoerde belasting te simuleren, geeft het programma aan om gebruik te maken van '***Excel Tool Aanvulling Bepaling Effectieve Kiplengte'*** waarmee tot 6 keer meer eenheidspuntlasten kunnen worden verwerkt.

Verticale rotatiestijfheden ter plaatse van de opleggingen (in de vorm van rotatieveren of naastgelegen velden van de doorgaande ligger) kunnen worden verwerkt door een equivalent kopmoment toe te voegen ter plaatse van de opleggingen. Voor de bepaling van dit equivalente kopmoment wordt verwezen naar paragraaf 7.1.1. Voor horizontale rotatiestijfheden is geen exacte oplossing gevonden. Wel is er een veilige benadering gevonden door de horizontale rotatiestijfheden buiten beschouwing te laten. Om de aangrijphoogte van de belasting mee te nemen, wordt voorgesteld om gebruik te maken van de door Eurocode 5 beschreven methode.

Met behulp van de Excel Tool zijn in paragraaf 7.5 de volgende specifieke gevallen beschouwd:

- De combinatie van een gelijkmatig verdeelde belasting en een puntlast.
- Een ligger over 3 steunpunten belast met een enkele puntlast.
- Een uniform lineair toenemende belasting tot aan het midden van de ligger.
- Een uniform lineair afnemende belasting tot aan het eind van de ligger.

Voor elk van deze gevallen is een ontwerpgrafiek gecreëerd waarmee voor een groot aantal belastings-configuraties zonder tussenkomst van de Excel Tool de effectieve kiplengte kan worden afgelezen. Deze grafieken zijn zeer handig gedurende de eerste fase van het ontwerp aangezien de grafieken inzicht bieden in het verloop van de effectieve kiplengte, met als gevolg dat de ingenieur gemakkelijker kan 'spelen' met de geometrie van de constructie.

6. Komen de gevonden effectieve kiplengtes overeen met de literatuur?

De in hoofdstuk 2, 3 en 4 beschouwde belastings-configuraties zijn, daar waar mogelijk, vergeleken met de literatuur. De gevonden oplossingen bleken allemaal zo goed als overeen te komen met de in de literatuur gevonden waardes voor de basisgevallen. De belasting-configuraties in hoofdstuk 4 konden niet direct geverifieerd worden met behulp van literatuur, aangezien er voor dit geval geen waardes bekend zijn. Middels een indirecte verificatie (de belasting reduceren tot basisgevallen) is aangetoond dat ook deze oplossingen hoogstwaarschijnlijk correct zijn.

Voor de gecreëerde Excel Tool is in paragraaf 6.5 een uitvoerige verificatie uitgevoerd. De uitkomst van de Excel Tool blijkt voor alle basisgevallen vanuit Bijlagen A en B te kloppen, waaruit geconcludeerd kan worden dat de gevonden methode om de effectieve kiplengte te bepalen voor iedere belastings-configuratie juist is.

HOOFDVRAAG: WAT IS DE INVLOED VAN DE (VERSCHILLENDE) KOPMOMENTEN EN DE LOCATIE(S) VAN DE PUNTLAST(EN) OP DE EFFECTIEVE KIPLENGTE VAN HOUTEN LIGGERS MET EEN RECHTHOEKIGE DOORSNEDE EN HOE VALT DEZE TE KWANTIFICEREN?

De effectieve kiplengte van houten liggers met een rechthoekige doorsnede belast met kopmomenten αFl en βFl en een aantal n puntlasten met grootte F en locaties γ_i kan worden gekwantificeerd via

$$\boldsymbol{l_{eff}} = \frac{\boldsymbol{Fl\sqrt{C_1(\alpha^2+\beta^2)+C_2\alpha\beta+C_3\alpha+C_4\beta+C_5}}}{\boldsymbol{M_{max}}}\boldsymbol{l} \tag{8.9}$$

$$C_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \approx 0.2827 \tag{8.10}$$

$$C_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.4347 \tag{8.11}$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\pi^2}(\gamma_i - 1)\cos(\pi\gamma_i)^2 + \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) + \frac{-\gamma_i{}^3 + 3\gamma_i{}^2 - 2\gamma_i}{3} + \frac{\gamma_i - 1}{\pi^2}\right] \tag{8.12}$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma_i}{\pi^2}\cos(\pi\gamma_i)^2 - \frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i) + \frac{\gamma_i{}^3 - \gamma_i}{3} - \frac{\gamma_i}{\pi^2}\right] \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} C_5 = \frac{1}{6\pi^3}\Bigg[&\sum_{i=1}^{n}\left\{6\pi\cos(\pi\gamma_i)^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j(\gamma_i - 1)) + \gamma_i \cdot \sum_{j=i}^{n}(\gamma_j - 1)\right) - 6\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)\right. \\ &\left.\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(\gamma_j) - \frac{1+2(n-i)}{2}\right)\right\} \\ &+ 2\pi^3\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma_i{}^4 + \left(\sum_{j=i+1\leq n}^{n}(\gamma_j) - (n+2-i)\right)\cdot\gamma_i{}^3 + \gamma_i{}^2\right. \\ &\left.+\left(\sum_{j=i+1\leq n}^{n}(\gamma_j{}^3 - 3\gamma_j{}^3 + \gamma_j)\right)\gamma_i\right\} \\ &+ 2\pi\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{3}{2}\gamma_i{}^2 + \left(\frac{3+6(n-i)}{2} - 3\cdot\sum_{j=i+1\leq n}^{n}(\gamma_j)\right)\gamma_i\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$M_{\gamma_i} = Fl\cdot\left[\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j) + \gamma_i\cdot\left((n-i+1) - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right) - \alpha(1-\gamma_i) - \beta\gamma_i\right] \tag{8.15}$$

Door het gebruik van eenheidspuntlasten op locaties γ_i kan iedere belastings-configuratie gesimuleerd worden als een verzameling eenheidspuntlasten. Deze methode is gebaseerd op een sinusvormige rotatie van de doorsnede en verwerkt tot ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'***. Met deze tool kan voor (bijna) iedere belastings-configuratie de effectieve kiplengte worden bepaald. Door de in hoofdstuk 7 gegeven methodes is het mogelijk om rotatiestijfheden, liggers over meerdere steunpunten en/of gaffels en lasten die niet in het NC aangrijpen veilig mee te nemen in de beschouwing.

In dit rapport zijn voor verscheidene belastings-configuraties ook grafische oplossingsmethoden ontwikkeld in de vorm van hoogtekaarten en grafieken. Deze grafische oplossingen worden aangeraden wanneer inzicht in de kipstabiliteit van belang is en het doel niet zo zeer de exactheid van de oplossing is. Voor praktisch gebruik wordt aangeraden om gebruik te maken van de Excel Tool. Hierbij dient rekening te worden gehouden met de beperkingen die de tool heeft en de afwijkingen die gemaakt worden ten gevolge van de aangenomen rotatievorm. Er is gebleken dat de afwijking gemiddeld van de orde 2 tot 3% aan de onveilige kant is.

8.2 Aanbevelingen voor vervolgonderzoek

Naar aanleiding van het uitgevoerde onderzoek worden de volgende aanbevelingen gedaan voor vervolgonderzoek:

Stabiliteitsfactor k_{crit}

In de kipstabiliteitstoetsing speelt naast de effectieve kiplengte ook de stabiliteitsfactor k_{crit} een grote rol. De stabiliteitsfactor is bepaald met behulp van numerieke simulaties.

$$k_{crit} = \begin{cases} 1 & voor\ \lambda_{rel,m} \leq 0.75 \\ 1.56 - 0.75\lambda_{rel,m} & voor\ 0.75 < \lambda_{rel,m} \leq 1.4 \\ \dfrac{1}{\lambda_{rel,m}{}^2} & voor\ 1.4 < \lambda_{rel,m} \end{cases} \tag{8.16}$$

De gevonden uitdrukking is naar alle waarschijnlijkheid niet exact; deze zal eerder conservatief gekozen zijn aangezien de kipstabiliteitstoetsing volgens de norm moet resulteren in een veilige constructie. In dit onderzoek is de precisie van de effectieve kiplengte verbeterd en is dus een stap gezet naar een exactere en efficiëntere bepaling van het kritieke kipmoment. Echter zal deze precisie teniet worden gedaan indien blijkt dat de uitdrukkingen voor k_{crit} niet van eenzelfde precisie zijn. Uit vervolgonderzoek zal moeten blijken hoe groot de precisie is van stabiliteitsfactor k_{crit} en in hoeverre deze verbeterd kan worden.

Aangrijpingspunt belasting

In dit onderzoek is voorgesteld om gebruik te maken van de methode die Eurocode 5 voorstelt om rekening te houden met het aangrijpingspunt van de belasting. Er is echter niet bekend waar deze methode op gebaseerd is en hoe groot de precisie van deze methode is. Verder wordt in deze methode ook geen uitdrukking gegeven waarmee een aangrijpingspunt tussen het uiteinde van de doorsnede en het normaalkrachtencentrum verwerkt kan worden. In het meest ideale geval zou de invloed van het aangrijpingspunt uitgedrukt kunnen worden in een factor C_6. Of dit zo is, zal moeten blijken uit vervolgonderzoek.

Ook is er nog onderzoek mogelijk naar de situatie waarin er meerdere puntlasten werken op een ligger, waarbij iedere puntlast een ander aangrijpingspunt heeft. Hoe beïnvloeden de aangrijpingspunten van de verschillende belastingen de kipvorm en de effectieve kiplengte? Een mogelijk antwoord zou gevonden kunnen worden in Eindige Elementen Methode simulaties.

Horizontale rotatiestijfheid

In paragraaf 7.1.2 is beschreven dat het verwaarlozen van de horizontale rotatiestijfheid (in het xy-vlak) van een oplegging/gaffel resulteert in een veilige benadering van de effectieve kiplengte. Er is in dit onderzoek geen manier gevonden om een analytische oplossing te vinden voor dit geval. Er zou eventueel vervolgonderzoek uitgevoerd kunnen worden om te onderzoeken in hoeverre deze verwaarlozing afwijkt van de exacte effectieve kiplengte. In theorie zou dit mogelijk moeten zijn met behulp van energiebeschouwingen aangezien een rotatieveer veerenergie bevat; echter is het ook niet uitgesloten dat het antwoord volgt uit Eindige Elementen Methode simulaties.

Andere profieldoorsneden

In dit onderzoek is gefocust op rechthoekige doorsneden. Dit type doorsnede komt zeer vaak voor bij houten liggers en heeft als bijkomend voordeel dat welving buiten beschouwing kan worden gelaten. In de literatuur zijn echter vele gevallen te vinden waarvoor welving wel degelijk een significante invloed heeft op het kipgedrag. Denk hierbij aan I, H, U, T-vormige staalprofielen. Ook blijkt uit de literatuur dat welving ook kan worden meegenomen in de energiebeschouwing. Voor vervolg-onderzoek is er dus de optie om te beschouwen of een uitbreiding naar andere profieldoorsneden mogelijk is en in hoeverre dat leidt tot andere resultaten dan voor een rechthoekige doorsnede. Ook zou het interessant zijn om een doorsnede met variërende elasticiteitsmodulus te beschouwen; bijvoorbeeld een houten ligger die aan de onderkant versterkt is met een staalplaat.

Plastisch vervormingsgedrag

Het uitgevoerde onderzoek heeft zich beperkt tot het lineair-elastische gedrag van (houten) liggers. Constructies ondergaan vaak echter ook nog een plastische vervormingsfase alvorens ze bezwijken. Het is daarbij interessant om te onderzoeken hoe dit plastische vervormingsgedrag het bezwijkmoment ten gevolge van kipinstabiliteit beïnvloedt en in hoeverre gebruik kan worden gemaakt van de plastische capaciteit van een constructie.

Combinatie met normaalkracht

Wanneer normaalkracht mee wordt genomen in de toetsing van de stabiliteit van de ligger, leidt dit tot een aanzienlijke toename van de complexiteit van het vraagstuk. In dit geval kan er naast kipinstabiliteit ook knikinstabiliteit optreden. Het is niet bekend in hoeverre kip en knik elkaar beïnvloeden en voor vervolgonderzoek wordt daarom ook aangeraden om te onderzoeken wat de invloed is van de normaalkracht en daarmee dus potentiële knikinstabiliteit op het kipgedrag van de ligger. Het is niet bekend of dit vraagstuk met energiebeschouwingen opgelost kan worden. Wanneer dit niet mogelijk blijkt te zijn, zou een Eindige Elementen Methode simulatie uitkomst kunnen bieden.

Nawoord

Gedurende de afgelopen acht weken heb ik mij intensief bezig gehouden met het onderzoek naar de effectieve kiplengte van houten liggers. De theoretische achtergrond van het onderwerp, een verweving van exacte wiskunde en toepasbare fysica, lag mij goed, waardoor ik zeer enthousiast en gemotiveerd ben begonnen aan het onderzoek.

Door mezelf continu vragen te stellen over wat ik aan het doen was en hoe ik verder zou kunnen gaan, heb ik mezelf constant kunnen prikkelen en uit kunnen dagen. De gevonden uitdrukking voor de effectieve kiplengte is ontstaan uit een grote verzameling gestelde vragen en leidt op zijn beurt ook weer tot nieuwe vragen, die ik zo veel mogelijk heb proberen te beantwoorden. Op deze wijze denk ik het maximale te hebben gehaald uit de onderzoeksperiode.

Het is meerdere malen voorgekomen dat ik in mijn enthousiasme over het onderzoek meer wilde doen dan mogelijk was in de beschikbare tijd. Gelukkig werd er door beide begeleiders af en toe op de rem getrapt, waarvoor dank.

Ik ben tevreden met het geleverde eindresultaat; zowel de Excel Tool als dit eindrapport voldoen aan mijn vooraf gestelde verwachtingen van en eisen aan de te leveren prestatie. Ik hoop van harte dat U, de lezer, het met mij eens bent.

Literatuurlijst

[1] R. v. Straten, „De effectieve kiplengte van houten liggers - bepaling aan de hand van analytische methoden, energievergelijkingen en EEM berekeningen," Delft, 2012.

[2] American Wood Council, „Designing for lateral-torsional stability in wood members - Technical report no. 14," American Forest & Paper Association, Washington DC, 2003.

[3] M. A. Serna, A. Lopez, I. Puente en D. J. Yong, „Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members," *Journal of Constructional Steel Research,* vol. 62, pp. 566-580, 2006.

[4] NEN-EN 1995-1-1: Ontwerp en berekening van houtconstructies, Delft: Nederlands Normalisatie-Instituut, 2011.

[5] NEN-EN 1993-1-1: Ontwerp en berekening van staalconstructies, Delft: Nederlands Normalisatie-Instituut, 2016.

[6] N. S. Trahair, Flexural-torsional Buckling of Structures, London: E & FN Spon, 1993.

[7] P. A. Kirby en D. A. Nethercot, Design for Structural Stability, St Albans: Granada Publishing Limited, 1979.

[8] W. J. Raven, „Nieuwe blik op kip en knik: stabiliteit en sterkte van staven - proefschrift," Delft, 2006.

[9] C. H. Yoo en S. C. Lee, Stability of structures, principles and applications, Oxford: Elsevier, 2011.

[10] C. Hartsuijker, Toegepaste mechanica deel 2: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen, Nootdorp: Sdu Uitgevers, 2001.

[11] J. W. Welleman, Stabiliteit van het evenwicht: Kip, Delft, 2014.

[12] A. Chajes, Principles of Structural Stability Theory, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1974.

[13] W. F. Chen en E. M. Lui, Structural Stability: Theory and Implementation, New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.

[14] J. W. Welleman, Work, energy methods & influence lines, Zoetermeer: Bouwen met Staal, 2016.

[15] Y. L. Pi, N. S. Trahair en S. Rajasekaran, „Energy equation for beam lateral buckling," *Journal of Structural Engineering,* vol. 118, nr. 6, pp. 1462-1479, 1992.

[16] S. P. Timoshenko en J. M. Gere, Theory of Elastic Stability 2nd Ed., New York: McGraw-Hill, Inc., 1961.

[17] B. S. Choo, STEP Lecture B3 Bending, Timber Engineering STEP 1, Centrum Hout, 1995.

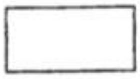
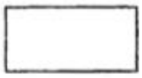
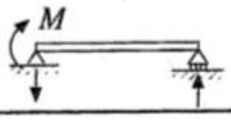
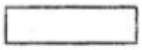
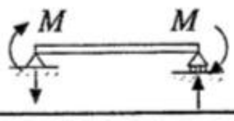
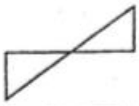
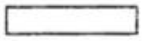
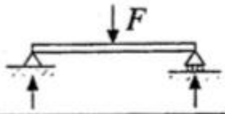
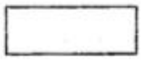
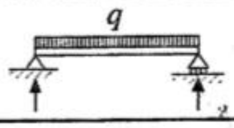
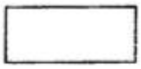
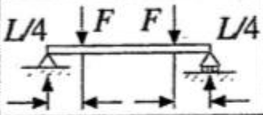
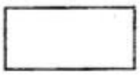
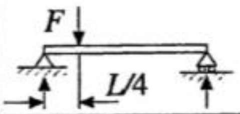
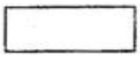
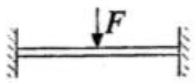
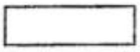
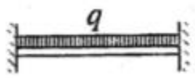
[18] L. A. G. Wagemans, Quick Reference, Delft: Section Structural and Building Engineering, TU Delft, 2014.

[19] P. A. d. Vries en J. W. G. v. d. Kuilen, Collegedictaat CT2052 Deel houtconstructies, Delft, 2010.

[20] A. C. W. M. Vrouwenvelder, Lecture Notes CT5144 Structural Stability, Delft, 2003.

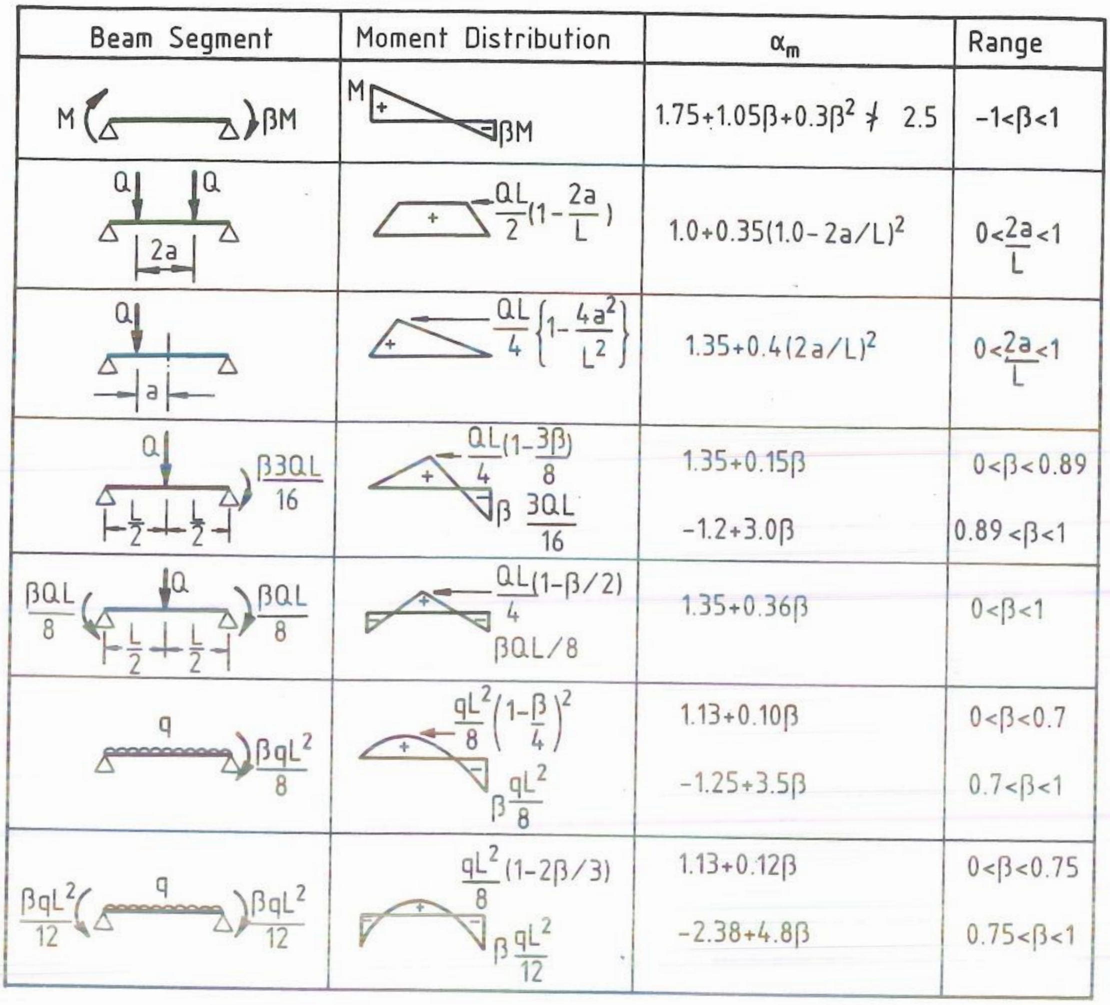
Bijlage A: Basisgevallen STEP-dictaat [17]

Het is niet bekend hoe de waardes uit het STEP-dictaat bepaald zijn.

Beam & Loads	*Actual bending moment*	*m*	*Equivalent uniform moment*
		1,00	
		0,57	
		0,43	
		0,74	
		0,88	
		0,96	
		0,69	
		0,59	
		0,39	

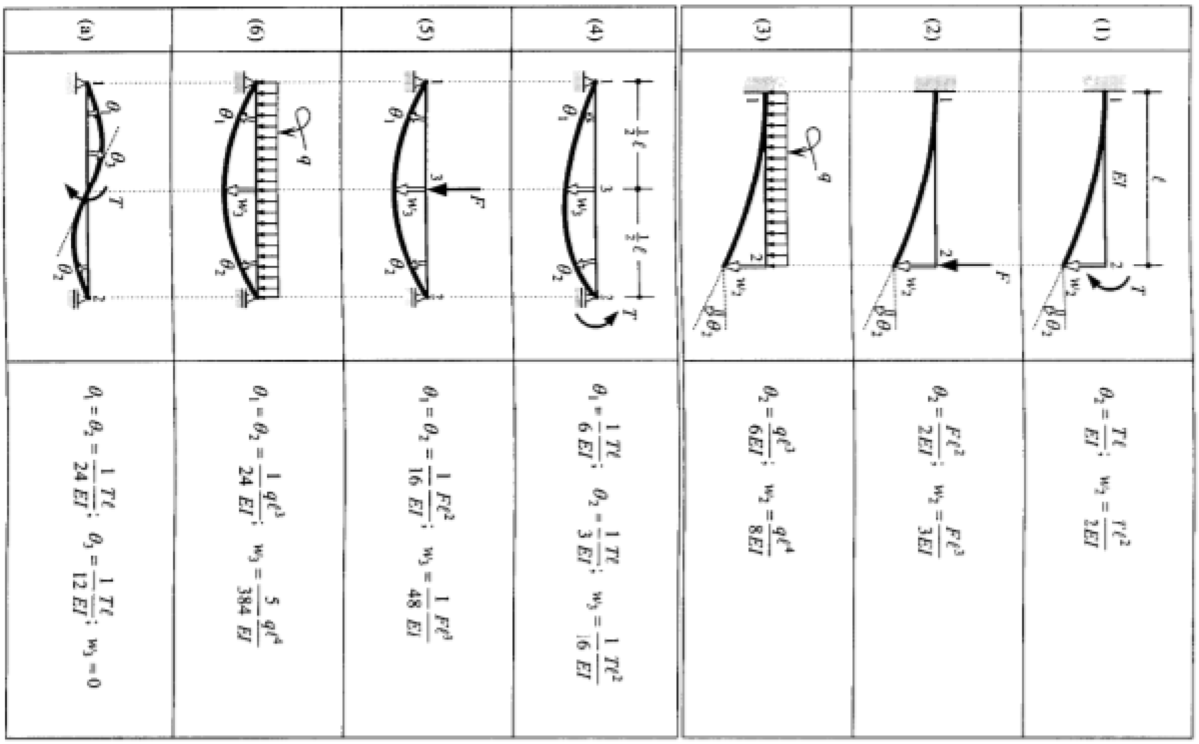
Bijlage B: Basisgevallen Trahair [6]

Voor de basisgevallen die zijn beschouwd door Trahair volgt de effectieve kiplengte uit $\frac{1}{\alpha_m} l$. De gevonden uitdrukkingen zijn benaderingen voor de exacte oplossingen. Deze benaderingen zijn afgeleid door gebruik te maken van energiebeschouwingen en gelden alleen voor dubbel-symmetrische doorsneden.



Beam Segment	Moment Distribution	α_m	Range
M, βM	M, βM	$1.75+1.05\beta+0.3\beta^2 \not> 2.5$	$-1<\beta<1$
Q, Q, $2a$	$\frac{QL}{2}(1-\frac{2a}{L})$	$1.0+0.35(1.0-2a/L)^2$	$0<\frac{2a}{L}<1$
Q, a	$\frac{QL}{4}\left\{1-\frac{4a^2}{L^2}\right\}$	$1.35+0.4(2a/L)^2$	$0<\frac{2a}{L}<1$
Q, $\frac{\beta 3QL}{16}$, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$	$\frac{QL}{4}(1-\frac{3\beta}{8})$; $\beta\frac{3QL}{16}$	$1.35+0.15\beta$ $-1.2+3.0\beta$	$0<\beta<0.89$ $0.89<\beta<1$
$\frac{\beta QL}{8}$, Q, $\frac{\beta QL}{8}$, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$	$\frac{QL}{4}(1-\beta/2)$; $\beta QL/8$	$1.35+0.36\beta$	$0<\beta<1$
q, $\frac{\beta qL^2}{8}$	$\frac{qL^2}{8}\left(1-\frac{\beta}{4}\right)^2$; $\beta\frac{qL^2}{8}$	$1.13+0.10\beta$ $-1.25+3.5\beta$	$0<\beta<0.7$ $0.7<\beta<1$
$\frac{\beta qL^2}{12}$, q, $\frac{\beta qL^2}{12}$	$\frac{qL^2}{8}(1-2\beta/3)$; $\beta\frac{qL^2}{12}$	$1.13+0.12\beta$ $-2.38+4.8\beta$	$0<\beta<0.75$ $0.75<\beta<1$

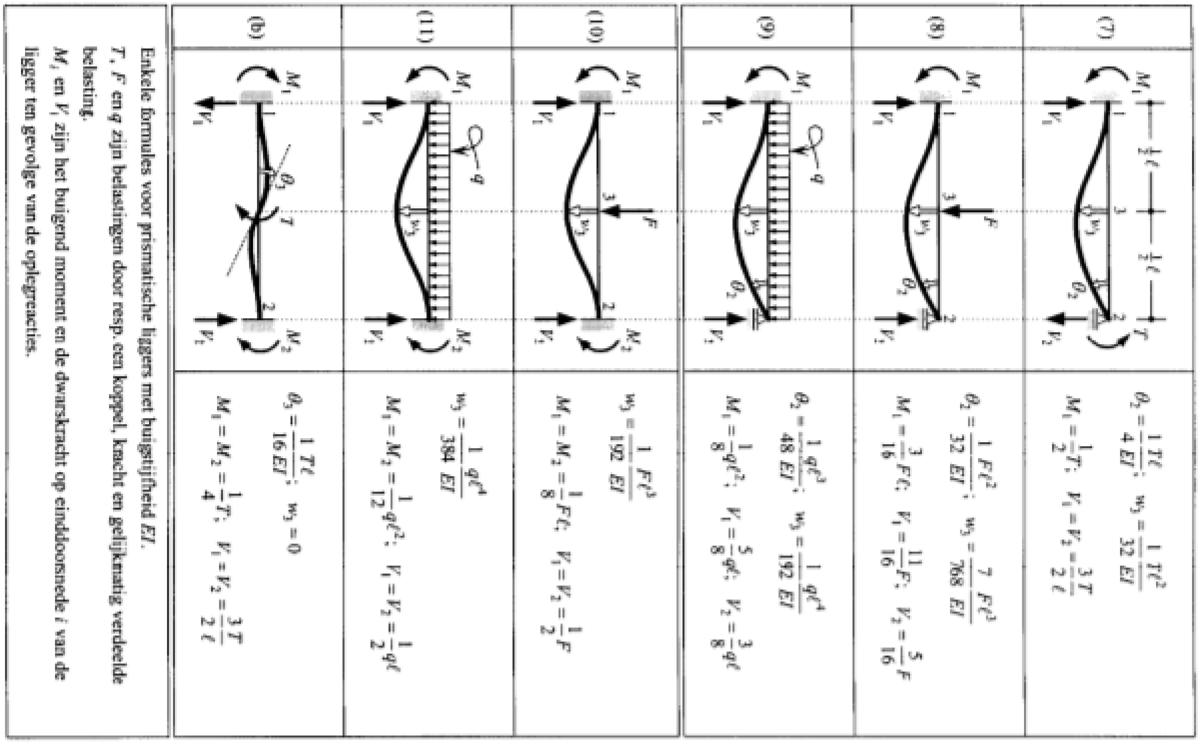
Bijlage C: Vergeet-mij-nietjes



(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

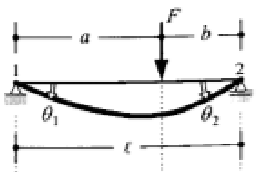
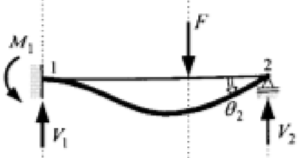
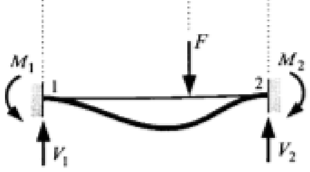
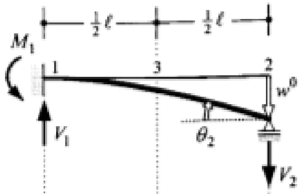
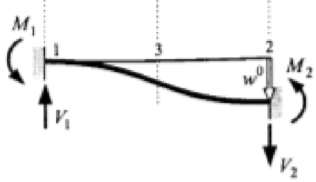
vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) *vergeet-mij-nietjes*

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) *statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)*



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$	
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2-b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2-b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell-a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$	drie bij-de handjes
(e)		$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell+2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell+2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$	
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0;\quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell};\quad w_3 = \frac{5}{16}w^0$	
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0;\quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell};\quad w_3 = \frac{1}{2}w^0$	zettingen

Bijlage D: Vergelijking methoden deelvraag 2

In paragraaf 2.1 is de effectieve kiplengte bepaald voor een ligger die aan weerszijden is opgelegd met een gaffeloplegging en wordt belast met een puntlast in het midden van de overspanning. Om tot deze effectieve kiplengte te komen, moet het moment als een functie van de locatie op de ligger bekend zijn. In het rapport worden hiervoor consequent assen gedefinieerd op de locaties waar de momentenlijnen sprongen vertonen, wat voor deelvraag 2a resulteert in stelsel (2.2). Uiteraard is het ook mogelijk om één x-as te definiëren en van daaruit de momentenlijn in velden op te delen. Door de x_1 – as conform Figuur 2.1 te definiëren, wordt het volgende stelsel verkregen:

$$M_z(x_1) = \begin{cases} M_1 = \frac{1}{2}Fx_1, & 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2} \\ M_2 = \frac{1}{2}Fl - \frac{1}{2}Fx_1, & \frac{l}{2} \leq x_1 \leq l \end{cases} \tag{D.1}$$

Dit stelsel is afhankelijk van enkel x_1 en daarom is ϕ ook alleen een functie van x_1. Beide stelsels zijn equivalent aan elkaar, met als gevolg dat de uitkomst ook gelijk dient te zijn. Met behulp van Maple zijn beide berekeningen uitgevoerd, waarbij de Maple-code van de in deze bijlage omschreven methode hieronder weergegeven is.

> $restart;$

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{3.1416}{l} \cdot x\right)$:

> $\text{theta} := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int\left(\phi^2 \cdot 0.5 \cdot F \cdot x \cdot (l - x), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\text{phi}^2 \cdot (-0.5 \cdot F \cdot x + 0.5 \cdot F \cdot l) \cdot (l - x), x = \frac{l}{2} .. l\right)\right)$:

> $wkip := \frac{\text{theta} \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot 0.5 \cdot F \cdot x}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right)$:

> $U := int\left(\frac{(\phi \cdot 0.5 \cdot F \cdot x)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(\text{phi} \cdot (-0.5 \cdot F \cdot x + 0.5 \cdot F \cdot l))^2}{2 \cdot EIyy}, x = \frac{l}{2} .. l\right)$:

> $m1 := wkip \cdot F - U$:

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy} \cdot int\left(\phi^2, x = 0 .. l\right)$:

> $result := solve(m2 = m1, m0) : result[2];$

$$0.1830260365\ F\ l \tag{1}$$

> $Mmax := \frac{1}{4} \cdot F \cdot l$:

> $leff = \frac{result[2]}{Mmax}$

$$leff = 0.7321041460 \tag{2}$$

>

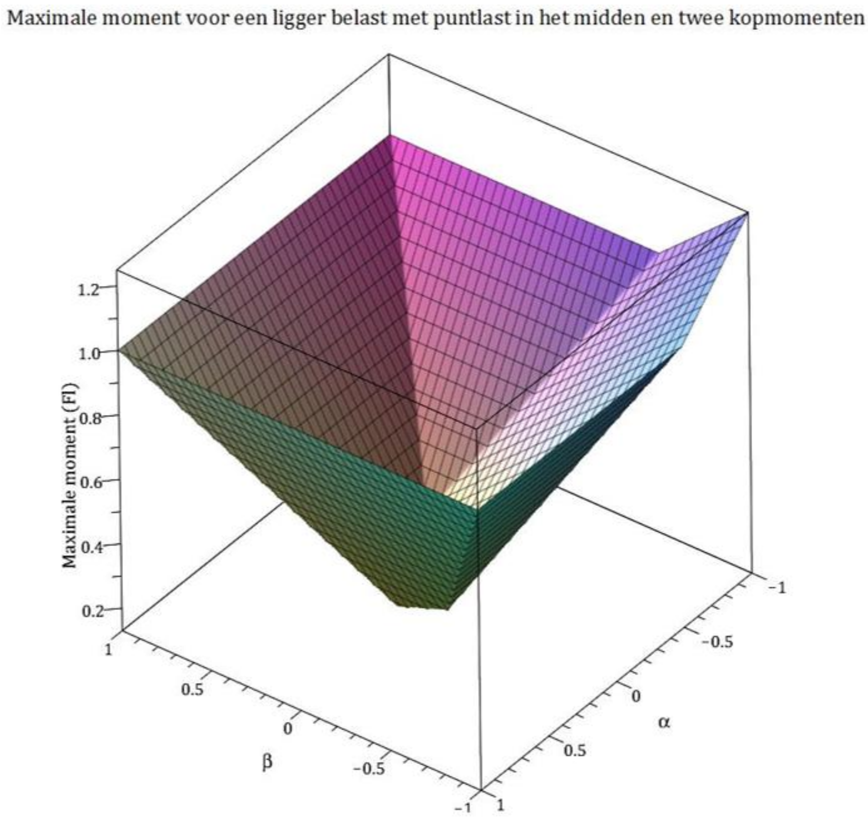
Beide methoden leiden tot $l_{eff} = 0.7321$, waarmee aangetoond is dat het niet uitmaakt welke assen gedefinieerd zijn (wat volkomen logisch is). In het rapport is ervoor gekozen om de meer-assige methode toe te passen, omdat deze voor meer ingewikkelde gevallen leidt tot een eenvoudige beschrijving van het momentenverloop over de ligger.

Bijlage E: Momentenverloop deelvraag 3

Om tot een beter begrip van de in paragraaf 3.5 omschreven grafische methode te komen, is het noodzakelijk om het verloop van het maximale moment over de ligger als functie van α en β te analyseren (het maximale moment bepaalt immers mede de effectieve kiplengte). Het maximale moment kan volgens vergelijking (3.5) bepaald worden als

$$M_{max} = Fl \cdot \max(|\alpha|, |\beta|, |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|) \qquad \text{(E.1)}$$

Het maximale moment over de ligger als functie van α en β is in 3D weergegeven in Figuur E.1.

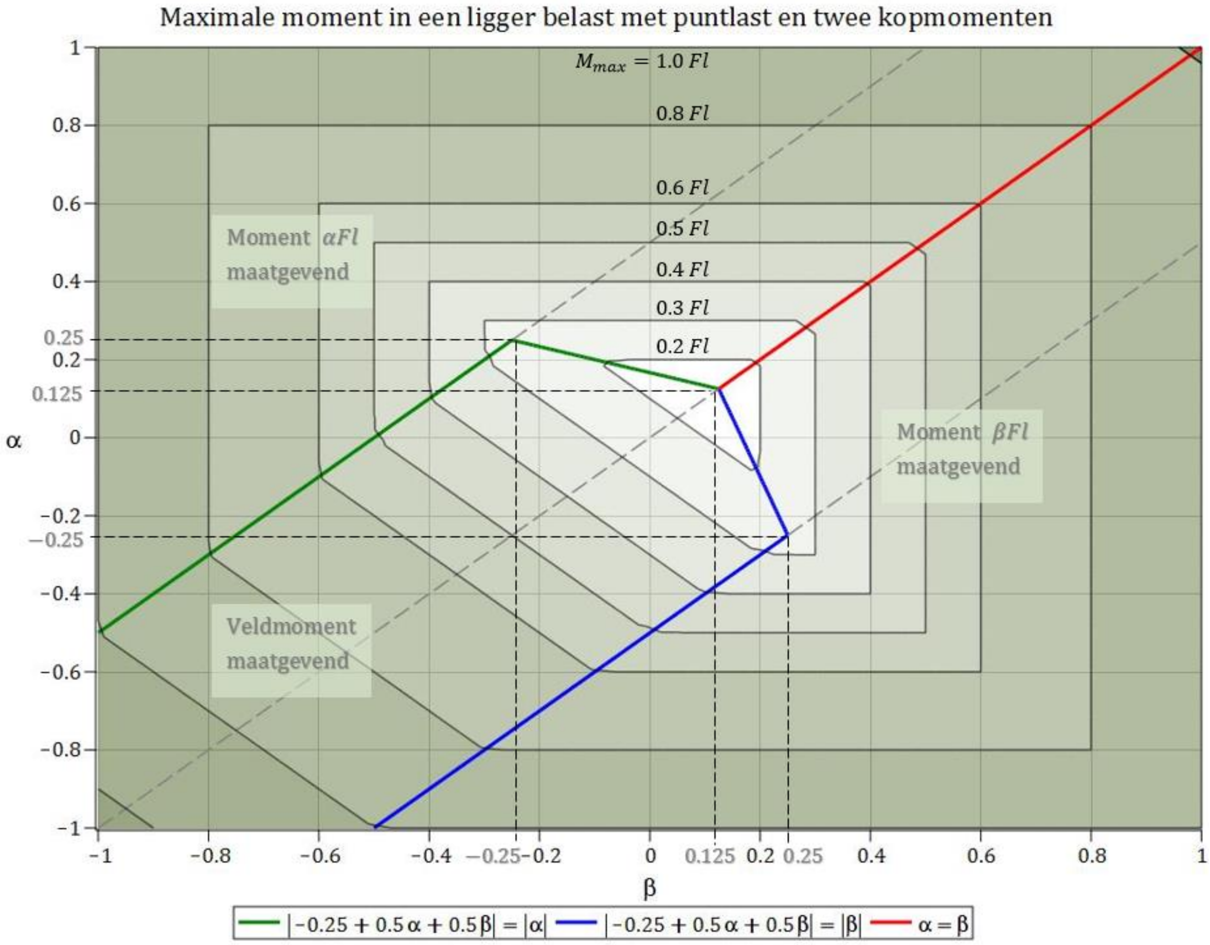


Figuur E.1: *Maximale moment voor een ligger belast met een puntlast in het midden en twee kopmoment in 3D*

In deze figuur zijn al enige omslagpunten te zien. Dit zijn de locaties waarop de grootste twee termen vanuit vergelijking (E.1) gelijk aan elkaar zijn en daarmee dus een omslagpunt vormen voor de term die het maximale moment bepaalt. Hiervoor zijn de volgende opties mogelijk:

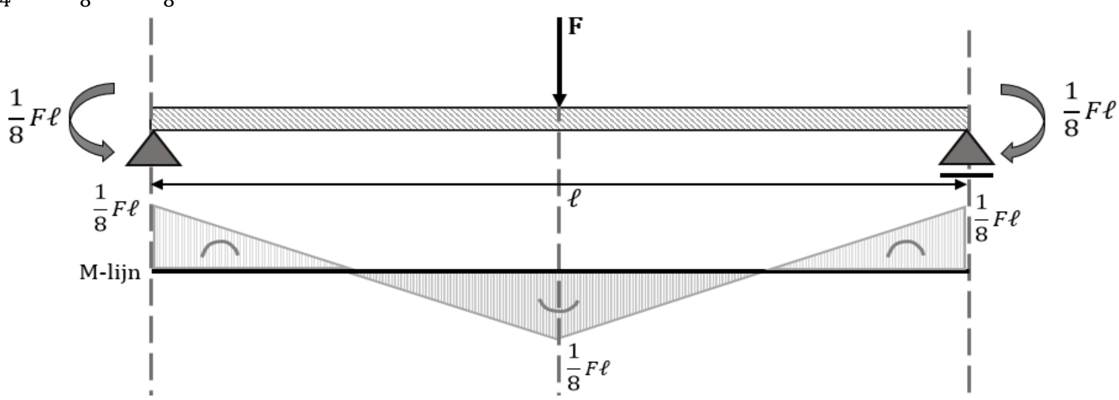
$$\begin{aligned} |\alpha| &= |\beta| \\ |\alpha| &= |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta| \\ |\beta| &= |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta| \end{aligned} \qquad \text{(B.2)}$$

Om tot een duidelijker beeld van het verloop van het maximale moment te komen, is er een contourplot van Figuur E.1 gecreëerd, welke wordt weergegeven in Figuur E.2. In deze contourplot zijn de drie hierboven gegeven opties uitgezet. De knikken in de lijnen $|\alpha| = |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|$ en $|\beta| = |0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta|$ in respectievelijk $\alpha = 0.25$; $\beta = -0.25$ en $\alpha = -0.25$; $\beta = 0.25$ zijn logisch te verklaren: invullen van deze waardes van α en β geeft $|0.25 - 0.5\alpha - 0.5\beta| = 0$ en deze waardes vormen daarmee het omslagpunt tussen negatieve en een positieve inhoud van de 'absolute waarde'-tekens.



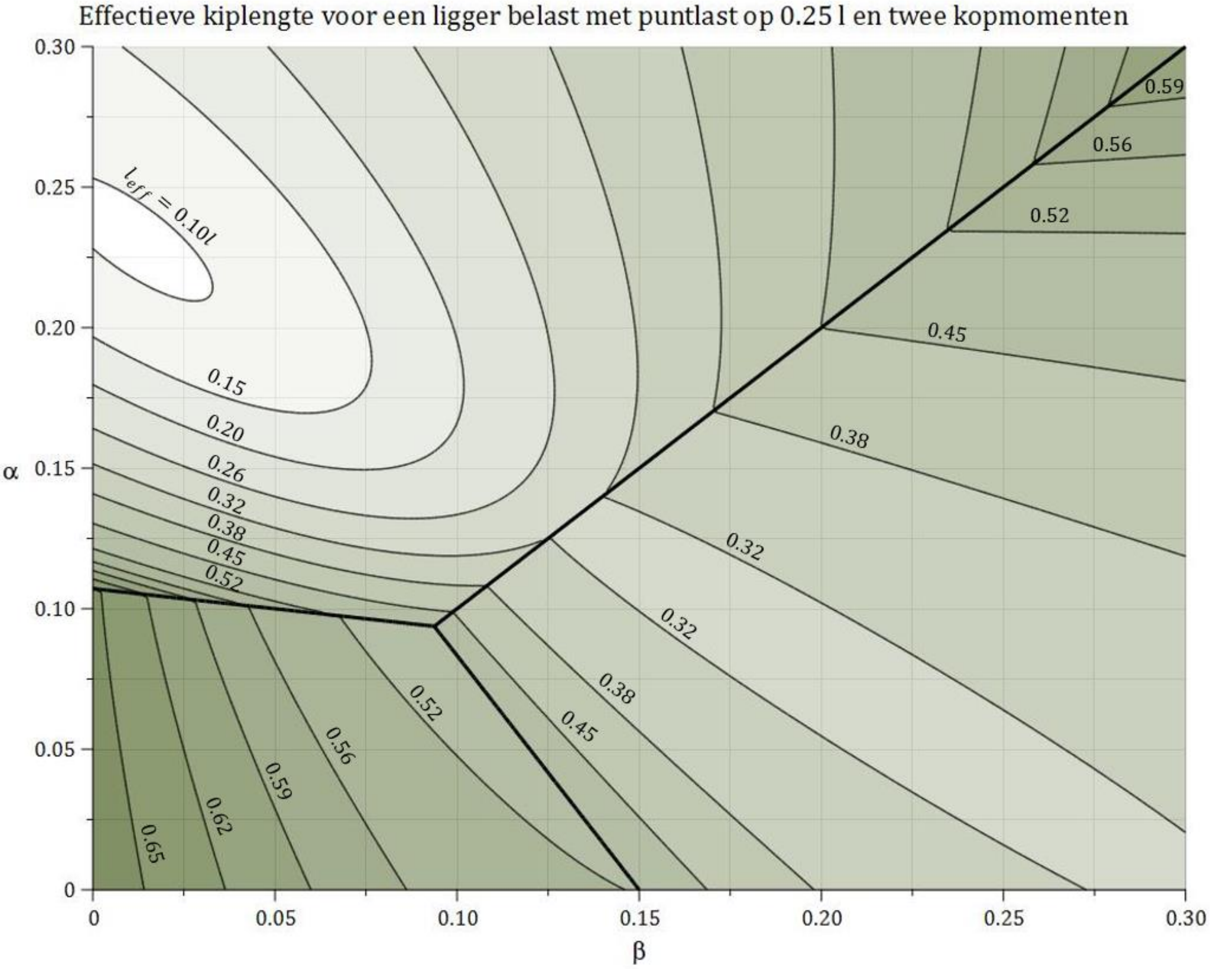
Figuur E.2: Contourplot van maximale moment in een ligger belast met een puntlast in het midden en aan weerszijden een kopmoment

Middels de drie vergelijkingen kunnen zogenaamde maximale moment 'zones' opgesteld worden (zie Figuur E.2): de vergelijkingen omschrijven de raakvlakken van de zones en het snijpunt van de drie vergelijkingen omschrijft de situatie waarin alle drie de termen van vergelijking (E.1) gelijk aan elkaar zijn. Dit snijpunt wordt algebraïsch gevonden voor $\alpha = \beta = 0.125$. Voor deze waardes wordt aan alle drie de vergelijkingen voldaan. Het snijpunt kan ook beredeneerd worden met behulp van Figuur E.3. Enkel een puntlast in het midden leidt tot een maximaal moment gelijk aan $\frac{1}{4}Fl$. Wanneer aan weerszijden een kopmoment gelijk aan $\frac{1}{8}Fl$ aangrijpt, reduceert het moment onder de puntlast tot $\frac{1}{4}Fl - \frac{1}{8}Fl = \frac{1}{8}Fl$, waarmee het veldmoment gelijk is aan de kopmomenten.

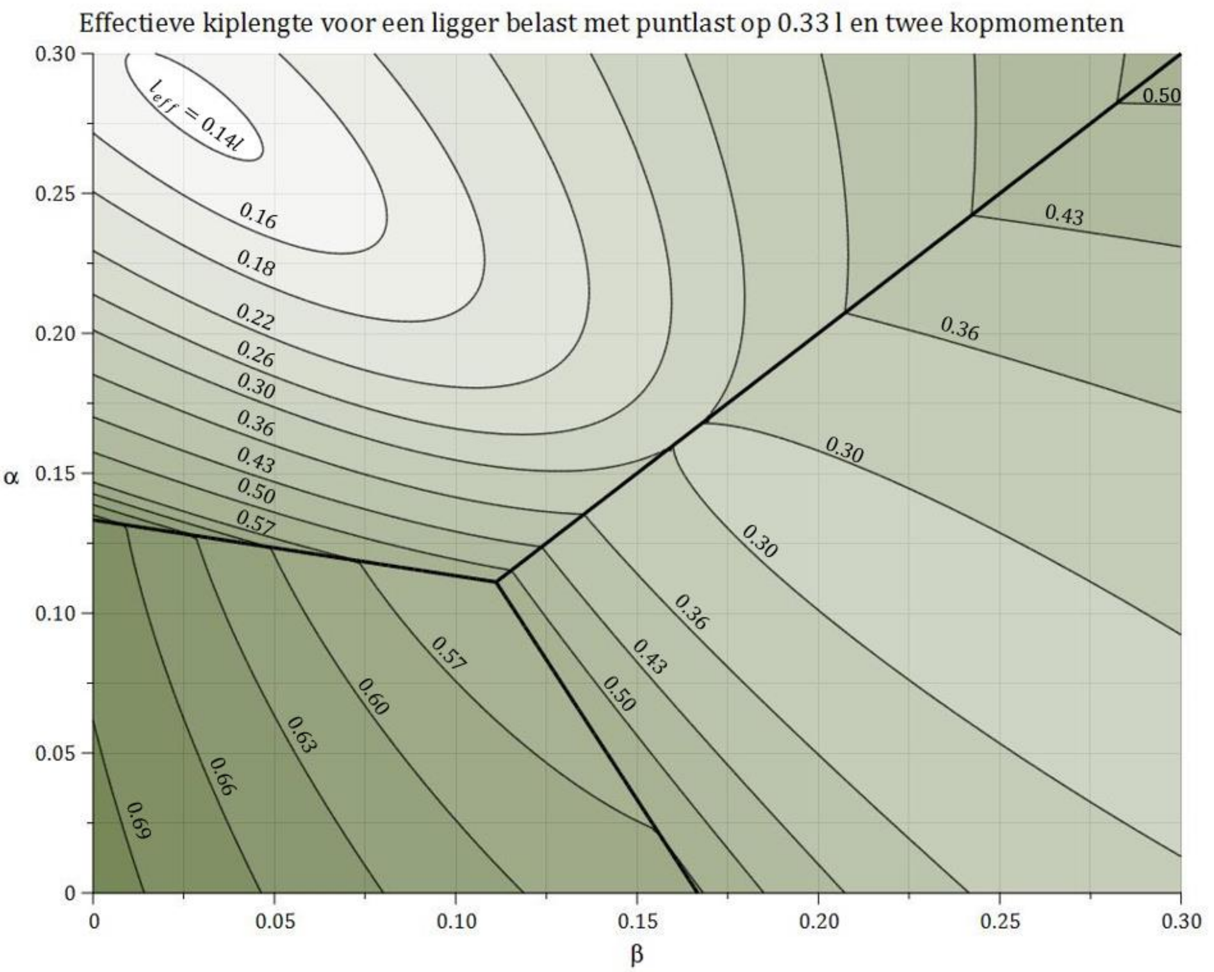


Figuur E.3: Momentenverloop van een ligger in het middel belast met een puntlast en aan weerszijden een kopmoment gelijk aan 1/8 Fl

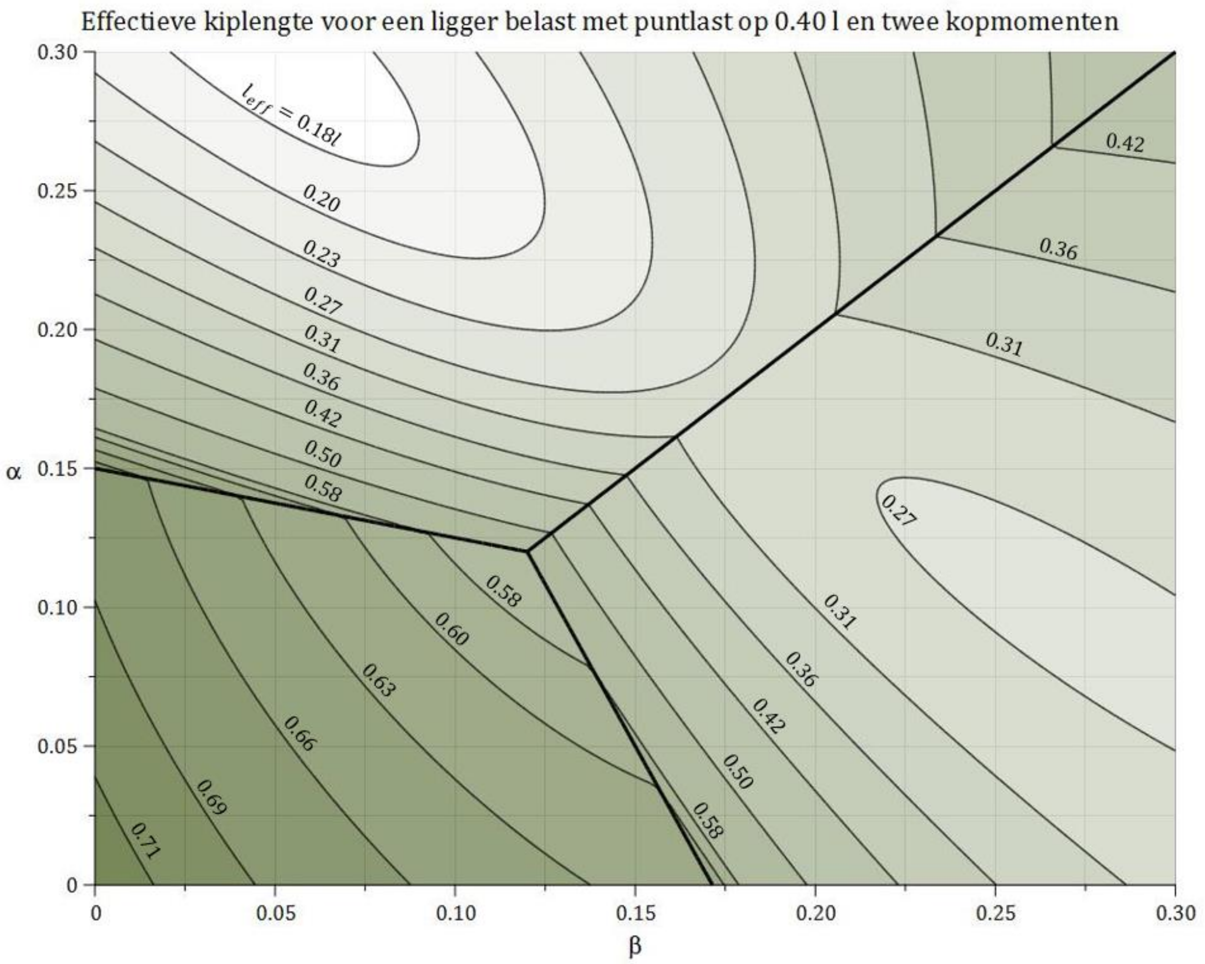
Bijlage F: Hoogtekaarten paragraaf 4.3



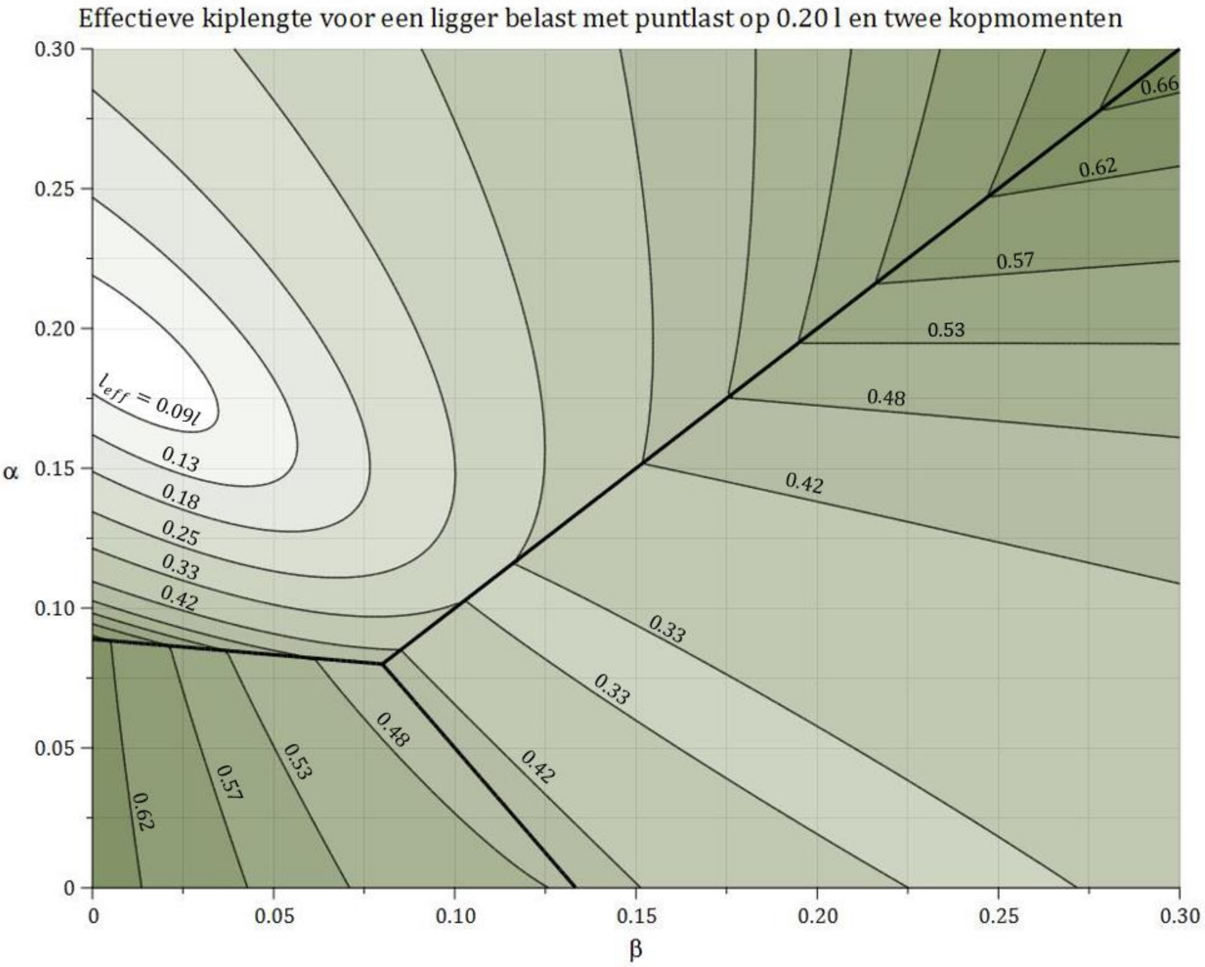
Figuur F.1: *Contourplot ter bepaling van de effectieve kiplengte voor een puntlast op 0.25l en aan weerszijden kopmomenten*



Figuur F.2: *Contourplot ter bepaling van de effectieve kiplengte voor een puntlast op 0.33l en aan weerszijden kopmomenten*

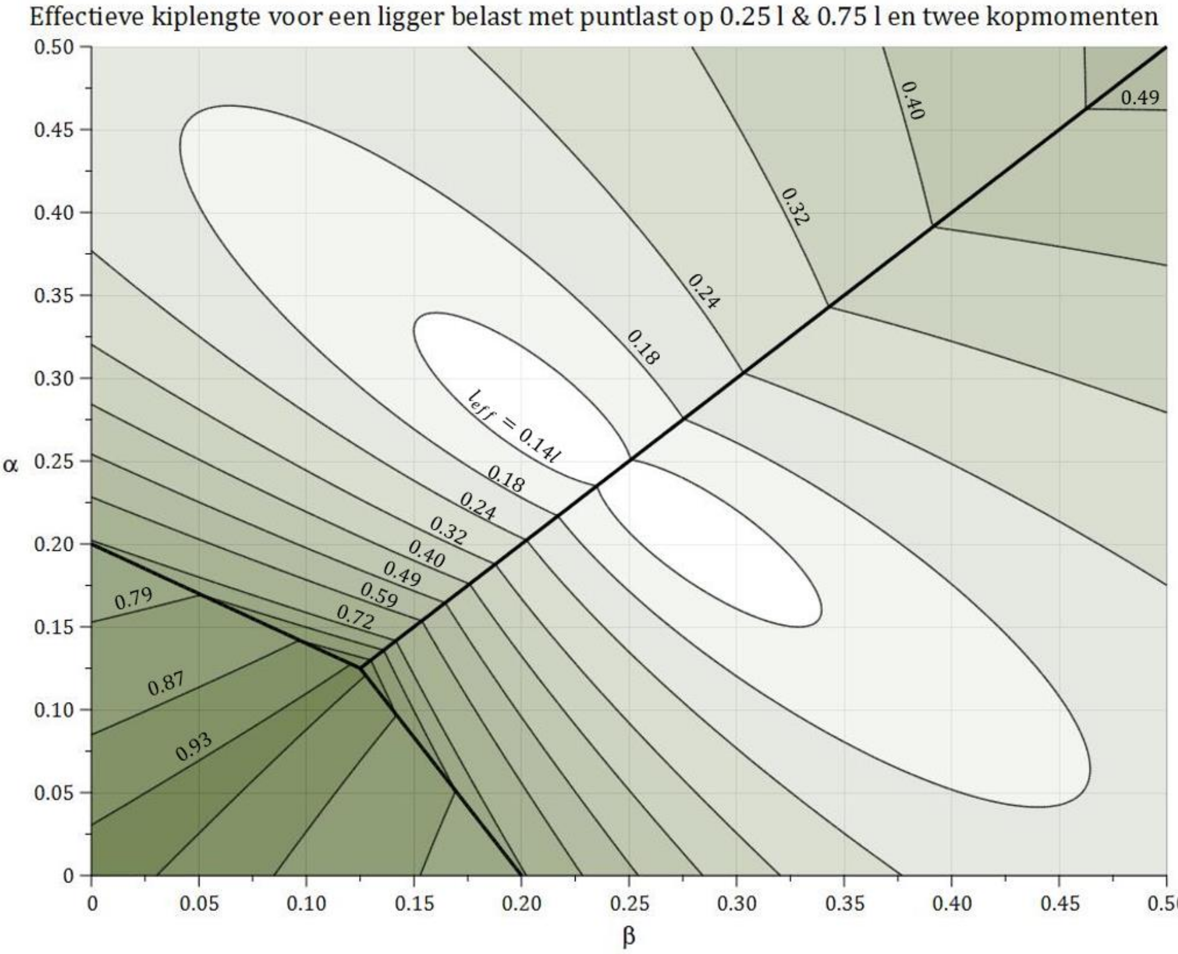


Figuur F.3: *Contourplot ter bepaling van de effectieve kiplengte voor een puntlast op 0.40l en aan weerszijden kopmomenten*

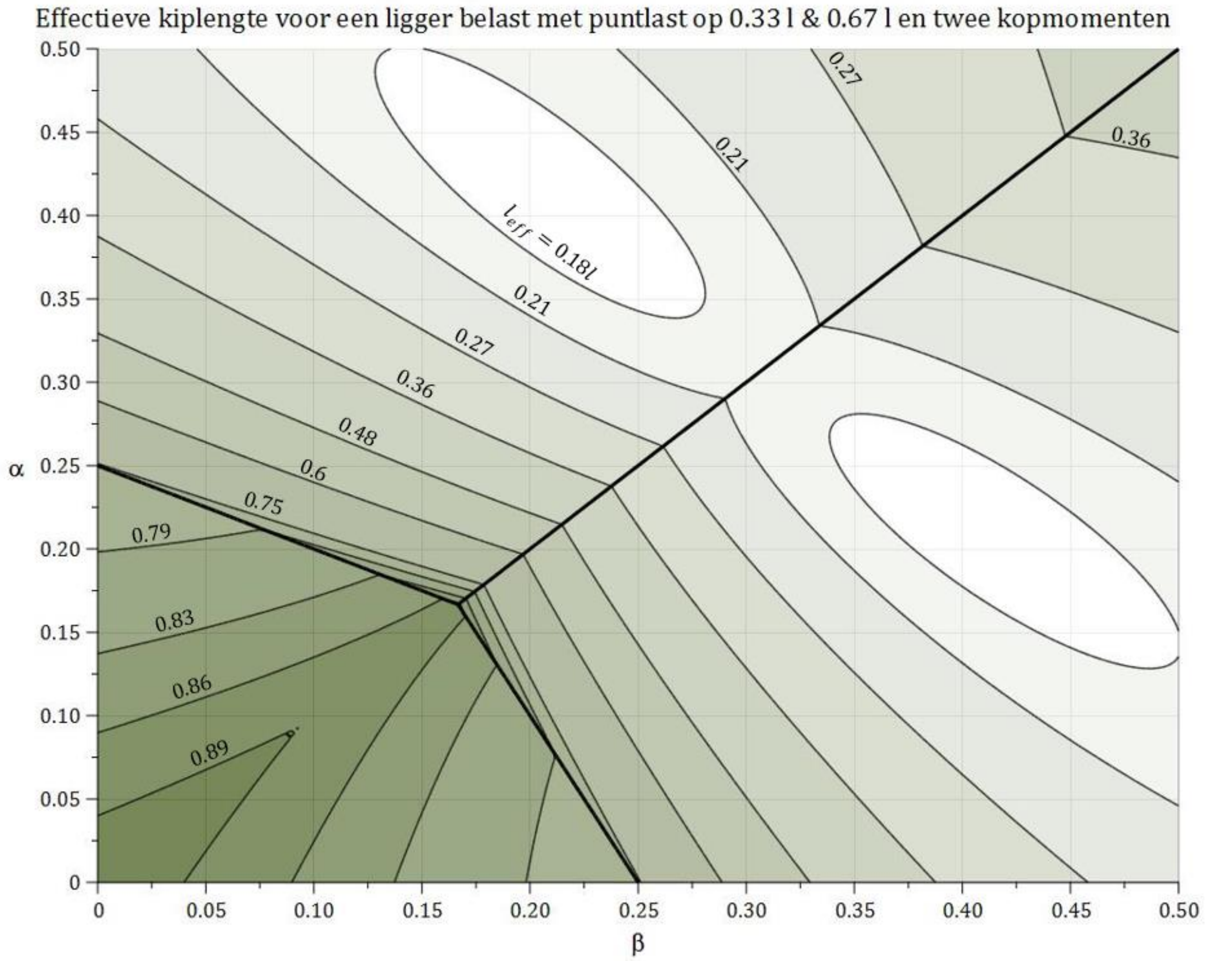


Figuur F.4: *Contourplot ter bepaling van de effectieve kiplengte voor een puntlast op 0.20l en aan weerszijden kopmomenten*

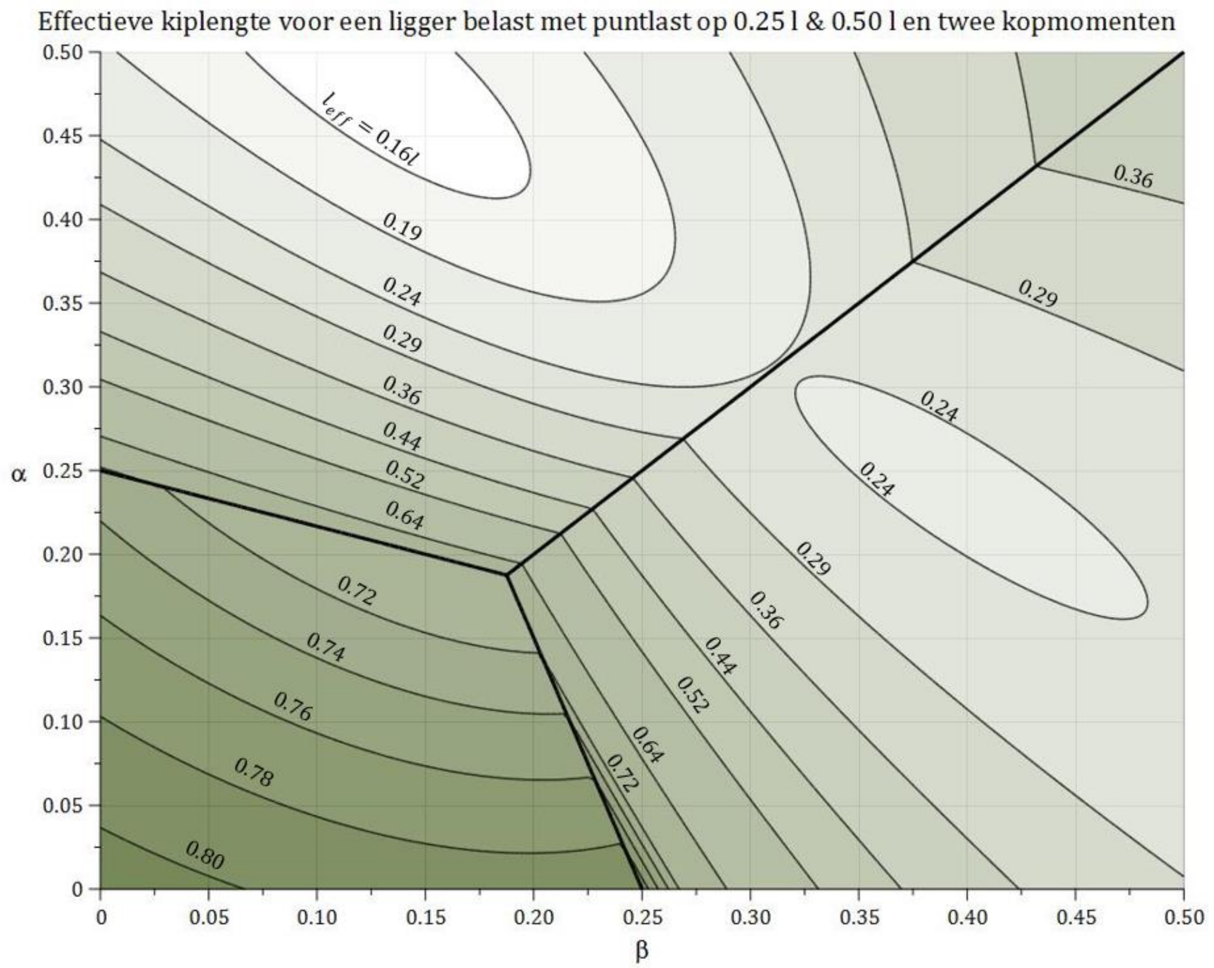
Bijlage G: Hoogtekaarten paragraaf 4.5



__Figuur G.1__: Grafische oplossing in de vorm van een contourplot voor een ligger belast met een puntlast op 0.25l, 0.75l en twee kopmomenten



Figuur G.2: Grafische oplossing in de vorm van een contourplot voor een ligger belast met een puntlast op 0.33l, 0.67l en twee kopmomenten



Figuur G.3: *Grafische oplossing in de vorm van een contourplot voor een ligger belast met een puntlast op 0.25l, 0.50l en twee kopmomenten*

Bijlage H: Beschouwing meerdere sinustermen

Om tot de oplossingen van de verschillende belastings-configuraties te komen, moet er een aanname gedaan worden voor de verplaatste vorm van de ligger direct na het kippen. Deze aanname is nodig om vervolgens met behulp van een energiebeschouwing het equivalente moment en daaruit de effectieve kiplengte te bepalen. In hoofdstuk 2 tot en met 4 is de volgende aanname gedaan voor de rotatievorm:

$$\phi = a\,\sin(\frac{\pi}{l}x) \tag{H.1}$$

Deze rotatievorm voldoet aan de in vergelijking (2.20) gestelde randvoorwaarden. De enkeltermige sinusvorm is hoogstwaarschijnlijk echter niet de exacte rotatievorm van de gekipte ligger voor de meeste belastings-configuraties. Met name voor asymmetrische belastingen zal de rotatievorm naar alle waarschijnlijkheid ook asymmetrisch zijn en kan daarmee dus niet beschreven worden met een enkeltermige sinus. Voor complexere asymmetrische belastingen kan de rotatievorm benaderd worden met behulp van een trigonometrische reeks:

$$\phi = a\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + c\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) + d\sin\left(\frac{4\pi}{l}x\right) + e\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) + \cdots \tag{H.2}$$

Waarin $a, b, c\ etc.$ onbekende (en onbepaalde) constanten zijn die afhankelijk zijn van de belastings-configuratie. Met behulp van deze trigonometrische reeks kan een breed scala aan rotatievormen weergegeven worden. Daarentegen leidt de uitgebreidere vorm tot een complexe analyse, waarbij niet meer gebruik gemaakt kan worden van de in paragraaf 2.1.3 beschreven versimpeling. In deze versimpeling wordt een willekeurige belastings-configuratie vergeleken met het basisgeval met een constant moment over de gehele ligger. Omdat voor zowel het basisgeval als het beschouwde geval dezelfde enkeltermige sinusvorm is aangenomen, vallen enkele termen in de vergelijking tegen elkaar weg. Dit is echter niet het geval wanneer voor het beschouwde geval een trigonometrische reeks als rotatievorm wordt aangenomen, welke dus niet gelijk is aan de aangenomen rotatievorm van het basisgeval.

Om tot de effectieve kiplengte te komen, dient er dus gebruik te worden gemaakt van een andere beschouwingsmethode, namelijk de potentiële energie vergelijkingen gegeven bij stelsel (1.31) (waar tot nu toe enkel gebruik is gemaakt van het principe van energiebehoud). Zoals omschreven in paragraaf 1.5 is een systeem in evenwicht wanneer de verzameling afgeleiden van de totale systeem-energie naar de constanten die dat systeem bepalen (in dit geval dus $a, b, c, etc.$) gelijk is aan de nulvector. Om deze methode te verduidelijken, zal de beschouwing eenmalig uitgewerkt worden voor het basisgeval met een enkele puntlast in het midden van de overspanning. Daarna zal de potentiële energie methode gebruikt worden om een aantal asymmetrische belastings-configuraties te bekijken. Gedurende deze analyse zal gebruik gemaakt worden van een trigonometrische reeks bestaande uit 5 sinustermen. Het meenemen van een zesde term resulteert in gelijke resultaten en een explosief toenemende rekentijd, zie Figuur H.3.

Beschouwing puntlast in het midden van de overspanning

Deze belastings-configuratie is symmetrisch en daarom worden er geen grote verschillen verwacht met de eerder uitgevoerde analyse. De eerste vijf sinustermen worden meegenomen, waarbij door de symmetrie van de belasting vooraf gesteld kan worden dat de tweede en vierde term gelijk zijn aan 0. Deze twee termen zijn immers asymmetrisch ten opzichte van het aangrijppunt van de puntlast. Dit leidt tot de volgende aanname van de rotatievorm ϕ:

$$\phi = a\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) + c\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) \tag{H.3}$$

Met behulp van stelsel (1.31) wordt de verzameling vergelijkingen gevonden waarvoor het systeem in evenwicht is.

$$\frac{\delta(\mathcal{U}+\mathcal{V}))}{\delta a} = \frac{\delta(\mathcal{U}+\mathcal{V}))}{\delta b} = \frac{\delta(\mathcal{U}+\mathcal{V}))}{\delta c} = 0 \tag{H.4}$$

Voor de oplossing zijn twee mogelijkheden: triviaal en non-triviaal. Wanneer het stelsel alleen maar triviale oplossingen heeft (alleen maar de oplossing $a = b = c = 0$), zal de ligger niet kippen voor de gegeven belasting. Zodra het stelsel echter ook een non-triviale oplossing heeft (een oplossing waarvoor $a, b, c \neq 0$), is er naast de onverplaatste toestand een andere oplossing mogelijk: de gekipte toestand. De waarde van de belasting waarvoor naast triviale ook non-triviale oplossingen gevonden kunnen worden, is de kritische kipbelasting.

Voor $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ worden conform de eerder uitgevoerde beschouwingen de volgende uitdrukkingen gevonden:

$$\mathcal{U} = \int_0^l \frac{(\phi M_z)^2}{2EI_{yy}}dx + \frac{GI_t}{2}\int_0^l \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{H.5}$$

$$\mathcal{V} = -F \cdot w_{kip} \tag{H.6}$$

Uitwerken van stelsel (H.4) zal leiden tot het volgende stelsel, waarin de verschillende termen met behulp van Maple zijn bepaald (zij Bijlage I.10 voor de bijbehorende code).

$$A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{H.7}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-0.0167 l^3 F^2}{EI_{yy}} + \frac{0.5 GI_t \pi^4}{l^3} & \frac{0.0079 l^3 F^2}{EI_{yy}} & \frac{-0.0023 l^3 F^2}{EI_{yy}} \\ \frac{0.0079 l^3 F^2}{EI_{yy}} & \frac{-0.0111 l^3 F^2}{EI_{yy}} + \frac{40.5 GI_t \pi^4}{l^3} & \frac{-0.0067 l^3 F^2}{EI_{yy}} \\ \frac{-0.0023 l^3 F^2}{EI_{yy}} & \frac{-0.0067 l^3 F^2}{EI_{yy}} & \frac{-0.0107 l^3 F^2}{EI_{yy}} + \frac{312.5 GI_t \pi^4}{l^3} \end{bmatrix} \tag{H.8}$$

Vanuit de lineaire algebra volgt dat er alleen non-triviale oplossingen bestaan wanneer de determinant van de symmetrische matrix A gelijk is aan nul.

$$\det(A) = 0 \tag{H.9}$$

De determinant zal een functie zijn van de puntlast F, waarmee bovenstaande vergelijking opgelost kan worden. Omdat de determinant nul stellen een hogere-graads vergelijking oplevert, resulteert dit in meerdere oplossingen voor F. Voor de gevonden waardes van F is er naast de onverplaatste toestand een andere evenwicht mogelijk: de gekipte toestand. De laagste gevonden waarde voor F is de kritische kipbelasting. Deze kan vervolgens omgerekend worden naar het kritische kipmoment, waarna de effectieve kiplengte bepaald kan worden.

$$M_{0,kritisch} = \frac{\pi}{l_{eff}}\sqrt{GI_t EI_{yy}} \rightarrow l_{eff} = \frac{\pi}{M_{0,kritisch}}\sqrt{GI_t EI_{yy}} \tag{H.10}$$

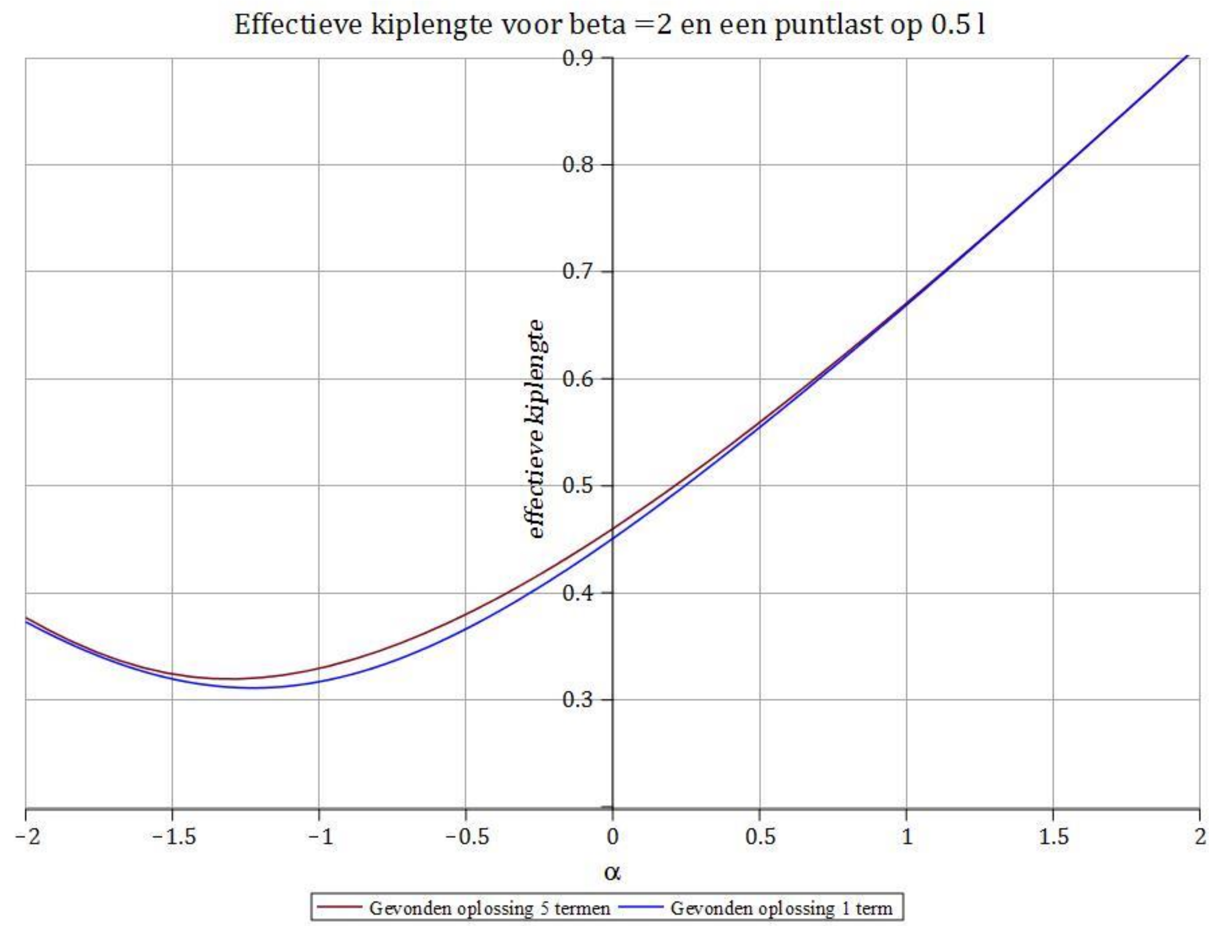
Dit resulteert voor het geval van een puntlast halverwege de overspanning in $l_{eff} = 0.7332\, l$, waar de analyse in paragraaf 2.1 resulteert in in $l_{eff} = 0.7321\, l$. Deze twee waardes komen (zoals voorspeld) bijna exact overeen. De afwijking van de in paragraaf 2.1 gevonden waarden ten opzichte van de zo goed als exacte waarde is

$$\frac{0.7332\, l - 0.7321\, l}{0.7332\, l} \cdot 100\% = 0.15\% \qquad \text{(H.11)}$$

Dezelfde analyse kan uitgevoerd worden voor complexere belastings-configuraties. Hierbij wordt dezelfde methode gebruikt, maar zullen enkel de Maple codes gegeven worden. De waardes van a, b en c zijn onbepaald en ook niet te bepalen met deze methode.

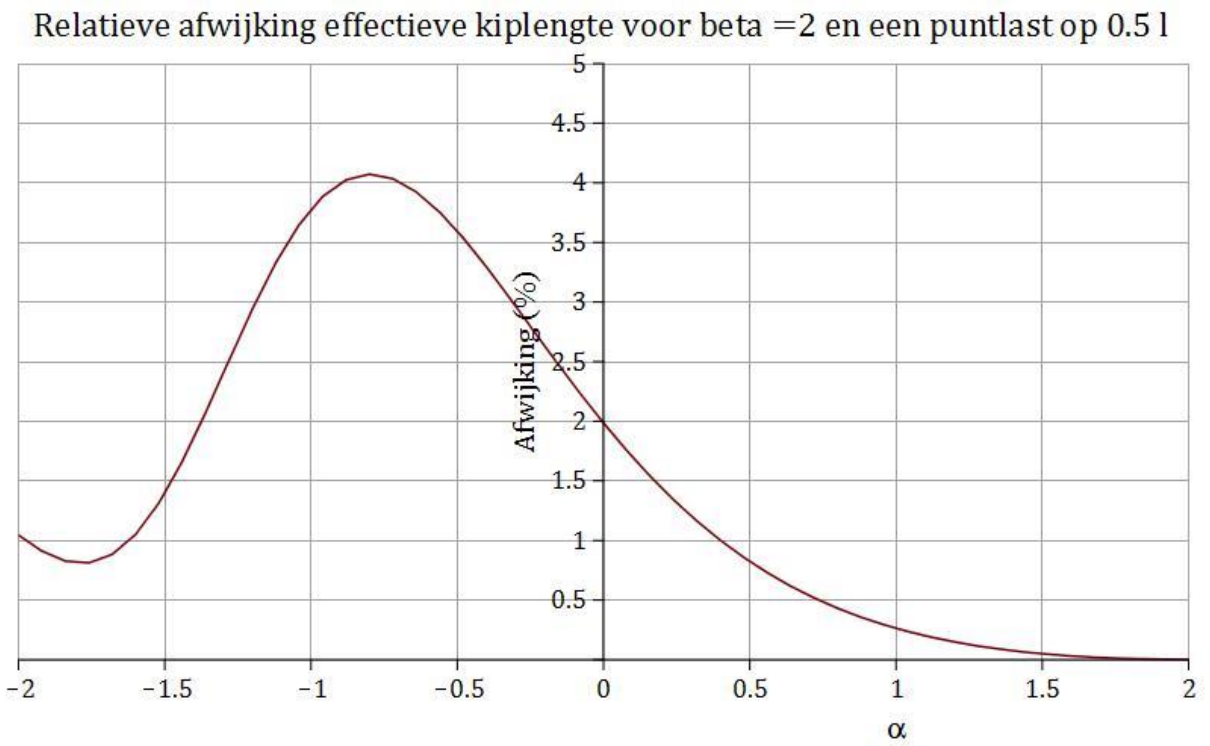
Beschouwing puntlast in het midden en $\beta = 2$

In deze paragraaf wordt de gevonden oplossing voor de belastings-configuratie behorend bij hoofdstuk 3 vergeleken met de gevonden oplossing voor een rotatieterm bestaande uit een vijftal sinustermen. Om tot een 2-dimensionale vergelijking van de oplossingen te komen, wordt β gelijk gesteld aan 2. Dit is in verhouding met de puntlast een groot kopmoment. Wanneer voor α een waarde veel kleiner dan 2 en uiteindelijk zelfs kleiner dan 0 wordt genomen, ontstaat een zeer asymmetrische belastings-configuratie. Omdat voor het bepalen van de effectieve kiplengte de determinant van een matrix opgelost moet worden, is ervoor gekozen de berekening in de vorm van een loop voor 50 punten uit te voeren. De bijbehorende Maple code kan vonden worden in Bijlage I.11. Het verloop van de effectieve kiplengte bepaald met één sinusterm en vijf sinustermen voor $\gamma = 0.5, \beta = 2.0$ en $-2 \leq \alpha \leq 2$ is weergegeven in Figuur H.1.



***Figuur H.1**: Effectieve kiplengte voor zowel de oplossing met 1 sinusterm als met 5 sinustermen*

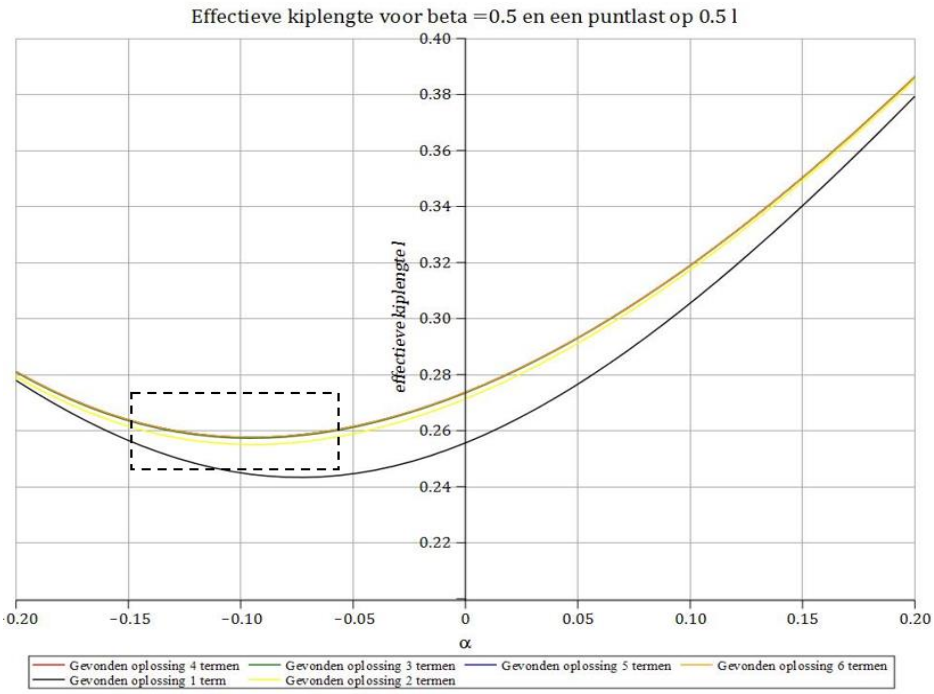
In Figuur H.1 kan gezien worden dat de oplossing voor 1 sinusterm de exactere oplossing met 5 sinustermen goed benadert. Vooral voor $\alpha \geq 1$ is de oplossing met 1 sinusterm exact. Dit valt te verklaren doordat de belastings-configuratie dan zo goed als symmetrisch is, waardoor de benadering van een enkeltermige sinusvorm de exacte kipvorm goed weergeeft. Voornamelijk voor negatieve waardes van α wijkt de oplossing met 1 sinusterm enigszins af van de exactere oplossing met 5 sinustermen. Dit is het resultaat van de asymmetrische belastings-configuratie die ontstaat voor deze waardes van α (negatief) en β (positief). Toch blijkt de eenvoudige benadering van de rotatievorm met behulp van een enkele sinusterm voor de belastings-configuraties behorend bij hoofdstuk 3 goed te benaderen. Wel moet er een kanttekening geplaatst worden aan de methode met 1 sinusterm: de effectieve kiplengte ligt altijd onder de exacte kiplengte, waardoor het kritisch kipmoment volgens vergelijking (H.10) te veel wordt gereduceerd. De oplossing met 1 sinusterm is dus onveiliger dan de methode met 5 sinustermen. Hier dient rekening mee gehouden te worden tijdens het gebruik. De relatieve afwijking van de oplossing met 1 sinusterm ten opzichte van de exactere oplossing met 5 sinustermen is weergegeven in Figuur H.2.



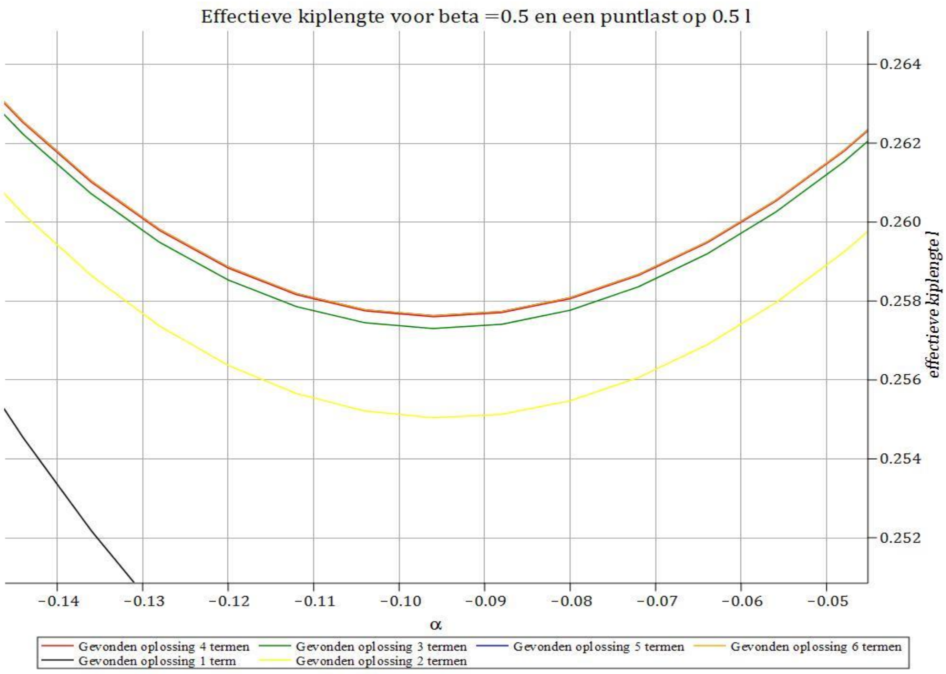
Figuur H.2: Relatieve afwijking van de vereenvoudigde methode met een enkele sinusterm t.o.v. de exactere methode met 5 sinustermen

De zojuist omschreven bevindingen worden bevestigd door het verloop van de relatieve afwijking. Voor redelijk symmetrische belastingen is de methode met 1 sinusterm exact, voor asymmetrische belastingen vertoont deze methode kleine afwijkingen. Opvallend genoeg neemt de afwijking naarmate α negatiever wordt weer af. Blijkbaar resulteert een grote positieve β tezamen met een grote negatieve α ook in een vorm van symmetrie. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat de absolute momentenlijn voor dit geval symmetrisch is (de invloed van de puntlast is voor grote kopmomenten zo goed als verwaarloosbaar). De maximale afwijking voor de beschouwde belastings-configuratie is ongeveer 4% ter plaatse van $\alpha = -0.75$. Gemiddeld genomen is de afwijking van de orde 1 tot 3%. Het grote nadeel van de exactere methode met 5 sinustermen is echter de complexiteit en rekentijd. Daarbij kan er geen continue oplossing gevonden worden, waar dat voor 1 sinusterm wel het geval is.

De toepassing van de oplossing met 5 sinustermen is daarmee echter zeer beperkt en daarom is in dit onderzoek gebruik gemaakt van de versimpelde oplossingsmethode met 1 sinusterm. Dit aspect dient echter tijdens het gebruik van de gecreëerde hoogtekaarten wel gerealiseerd te worden. In deze paragraaf is de exacte oplossing benaderd met behulp van 5 sinustermen, echter is hier geen verklaring voor gegeven. Om dit te verklaren is de situatie met $\beta = 0.5$ bekeken voor meerdere sinustermen en de positie waar de maximale afwijking optreedt nader geanalyseerd. Deze analyse is te vinden in Figuur H.3 en in meer detail in Figuur H.4. Uit deze figuren volgt dat de oplossing voor toenemend aantal sinustermen convergeert. Vanaf 4 termen blijkt de oplossing niet meer te veranderen. Voor nauwkeurigheid zijn voor de in deze bijlage uitgevoerde analyse 5 sinustermen mee genomen.



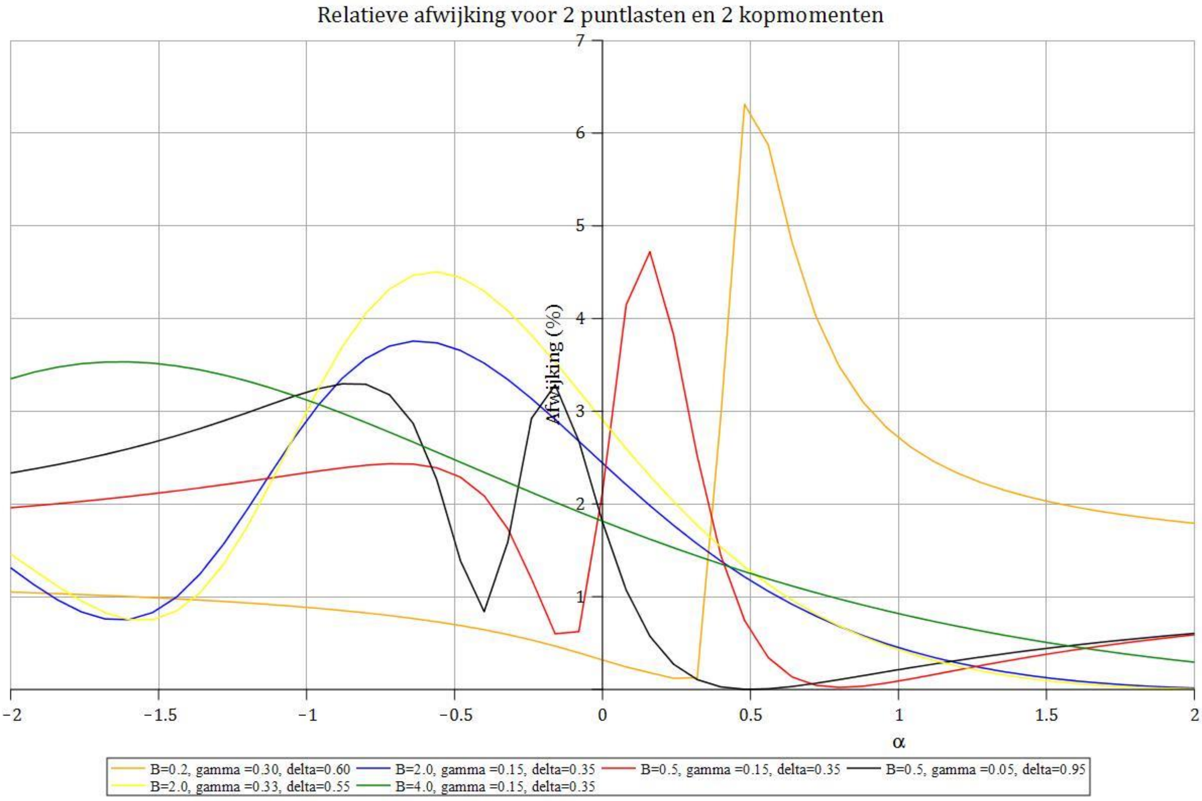
***Figuur H.3**: Vergelijking oplossingen effectieve kiplengte*



***Figuur H.4**: Vergelijking oplossingen effectieve kiplengte detail*

Beschouwing 2 puntlasten en 2 kopmomenten

Deze paragraaf beschouwt de belastings-configuraties behorend bij paragraaf 4.5, waarin een ligger aan weerszijden belast wordt met een kopmoment en op de ligger twee even grote puntlasten aangrijpen. De parameters behorend bij deze belastings-configuratie kunnen zodanig gekozen worden dat een zeer asymmetrische belasting wordt gesimuleerd. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door beide puntlasten aan één zijde van de ligger te plaatsen en daarbij twee verschillende kopmomenten aan te laten grijpen. Voor een zestal verschillende belastings-configuratie zijn de oplossingen met 1 sinusterm en met 5 sinustermen vergeleken en de resultaten zijn te vinden in Figuur H.5 (zie Bijlage



***Figuur H.5**: Relatieve afwijking van de oplossing met 1 sinusterm t.o.v. de oplossing met 5 sinustermen*

I.12 voor de bijbehorende Maple codes). Deze zes belastings-configuraties zijn zodanig gekozen dat een breed scala aan belastingen geverifieerd kan worden. De maximaal gevonden afwijking van de oplossing met 1 sinusterm is 6.3%. Deze afwijking vindt plaats voor $\alpha = 0.5, \beta = 0.2, \gamma = 0.30$ en $\delta = 0.60$. Vreemd genoeg is de afwijking niet het grootste voor de meest asymmetrische belastings-configuratie. Hier is geen verklaring voor gevonden. Deze configuratie is voor de zekerheid gecontroleerd met 6 sinustermen, wat resulteerde in dezelfde afwijking. Verder blijkt de afwijking voor $\alpha, \beta \gg 0$ en voor $\alpha, \beta \ll 0$ klein te zijn, waar het gebied met redelijk kleine kopmomenten tot de wat grotere afwijkingen leidt. De gemiddelde maximum fout van de beschouwde belastings-configuraties is 4.35 %. De gemiddelde afwijking van de methode met 1 sinusterm is van de orde 2 tot 3%, waarmee een redelijk correcte benadering van de effectieve kiplengte gevonden is. Zoals eerder vermeld, compenseert de methode met 1 sinusterm deze onveilige afwijking (deze oplossing resulteert altijd in lagere kritische kipmomenten) met zijn eenvoudigheid en continuïteit van de oplossing.

Bijlage I: Maple codes

Bijlage I.1: Uitwerking deelvraag 2a

> $restart;$

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{3.1416}{l} \cdot x\right) : \text{psi} := a \cdot \left(\sin\left(\frac{3.1416}{l} \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)\right) :$

> $\text{theta} := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int\left(\phi^2 \cdot 0.5 \cdot F \cdot x \cdot (l - x), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\psi^2 \cdot (0.25 \cdot F \cdot l - 0.5 \cdot F \cdot x) \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right)\right) :$

> $wkip := \frac{\text{theta} \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot 0.5 \cdot F \cdot x}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi \cdot 0.5 \cdot F \cdot x)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(\text{psi} \cdot (0.25 \cdot F \cdot l - 0.5 \cdot F \cdot x))^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right):$

> $m1 := wkip \cdot F - U:$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy} \cdot int\left(\phi^2, x = 0 .. l\right) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := \frac{1}{4} \cdot F \cdot l :$

> $leff := \frac{result[2]}{Mmax}$

$$leff := 0.7321041460 \quad (1)$$

>

Bijlage I.2: Uitwerking deelvraag 2b

> *restart*;

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l} \cdot x\right) : \text{psi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l} \cdot (x + g \cdot l)\right) :$

> $\text{theta} := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int\left(\phi^2 \cdot ((1-g) \cdot F \cdot x \cdot (l-x)), x = 0..g \cdot l\right) + int\left(\psi^2 \cdot (F \cdot g \cdot l \cdot (1-g) - F \cdot g \cdot x) \cdot (l - g \cdot l - x), x = 0..l \cdot (1-g)\right)\right) :$

> $wkip := \text{theta} \cdot l \cdot g - int\left(\frac{\phi^2 \cdot (1-g) \cdot F \cdot x}{EIyy} \cdot (g \cdot l - x), x = 0..g \cdot l\right) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi \cdot (1-g) \cdot F \cdot x)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0..g \cdot l\right) + int\left(\frac{(\text{psi} \cdot (F \cdot g \cdot l \cdot (1-g) - F \cdot g \cdot x))^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0..l \cdot (1-g)\right) :$

> $m1 := wkip \cdot F - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\, EIyy} \cdot int\left(\phi^2, x = 0..l\right) :$

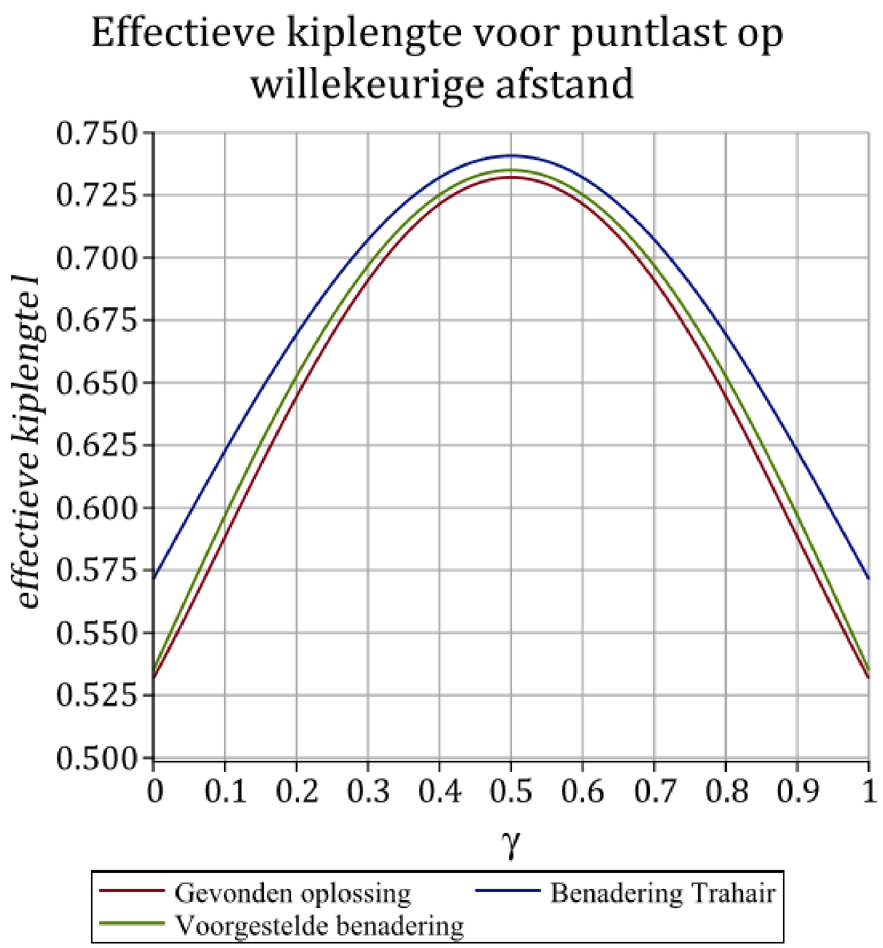
> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F \cdot g \cdot l \cdot (1-g) :$

> $leff := \frac{result[2]}{Mmax} : simplify(leff); with(plots) : m2 := \frac{1}{1.35 + 0.4 \cdot (2 \cdot (g - 0.5))^2} : m3 := 0.2 \sin(\text{Pi} \cdot g) + 0.535 :$

$$-\frac{1}{6} \frac{1}{\pi^{3/2} g (-1+g)} \left(\sqrt{6} \left(6 g \pi (-1+g) \cos(g\pi)^2 + (-6g+3) \cos(g\pi) \sin(g\pi) + 2\left(g^2\pi^2 - \pi^2 g - \frac{3}{2}\right) \pi g (-1+g)\right)^{1/2}\right) \tag{1}$$

> *D1* := *plot*([*leff*, *m2*, *m3*], *g* = 0 ..1, *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *gridlines* = *true*, *labels* = [gamma, *effectieve kiplengte* (*l*)], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *vertical*], *size* = [800, 500], *view* = [0 ..1, 0.5 ..0.75], *legend* = ["Gevonden oplossing", "Benadering Trahair", "Voorgestelde benadering"], *legendstyle* = [*location* = *bottom*], *title* = "Effectieve kiplengte voor puntlast op willekeurige afstand", *titlefont* = ["Cambria Math", 18], *tickmarks* = [10, 10])


Effectieve kiplengte voor puntlast op willekeurige afstand
effectieve kiplengte l
0.750
0.725
0.700
0.675
0.650
0.625
0.600
0.575
0.550
0.525
0.500
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
γ
Gevonden oplossing
Benadering Trahair
Voorgestelde benadering

>
>
>

Bijlage I.3: Uitwerking deelvraag 3

> $restart;$

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l} \cdot x\right) : \text{psi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l} \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right)\right) :$

> $M1 := -alfa \cdot F \cdot (l - x) - bet \cdot F \cdot x + 0.5 \cdot F \cdot x :$

> $M2 := -(alfa \cdot F \cdot 0.5 \cdot l - alfa \cdot F \cdot x) - (bet \cdot F \cdot 0.5 \cdot l + bet \cdot F \cdot x) + 0.25 \cdot F \cdot l - 0.5 \cdot F \cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int\left(\phi^2 \cdot M1 \cdot (l - x), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\psi^2 \cdot M2 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right)\right) :$

> $thetab := \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{thetaa \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{\psi^2 \cdot M2}{EIyy} \cdot x, x = 0 .. \frac{l}{2}\right)\right) :$

> $wkip := \frac{thetaa \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi \cdot M1)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(\text{psi} \cdot M2)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) :$

> $dA := F \cdot wkip - alfa \cdot F \cdot l \cdot thetaa - bet \cdot F \cdot l \cdot thetab :$

> $m1 := dA - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy} \cdot int(\phi^2, x = 0 .. l) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F \cdot l \cdot \max(\text{abs}(alfa), \text{abs}(bet), \text{abs}(0.5 \cdot (0.5 - alfa - bet))) :$

> $leff := \frac{result[1]}{Mmax} : y4 := \text{abs}(-0.25 + 0.5 \cdot alfa + 0.5 \cdot bet) - \text{abs}(alfa) : y5 := \text{abs}(-0.25 + 0.5 \cdot alfa + 0.5 \cdot bet) - \text{abs}(bet) : y3 := bet :$

>

> $with(plots) :$

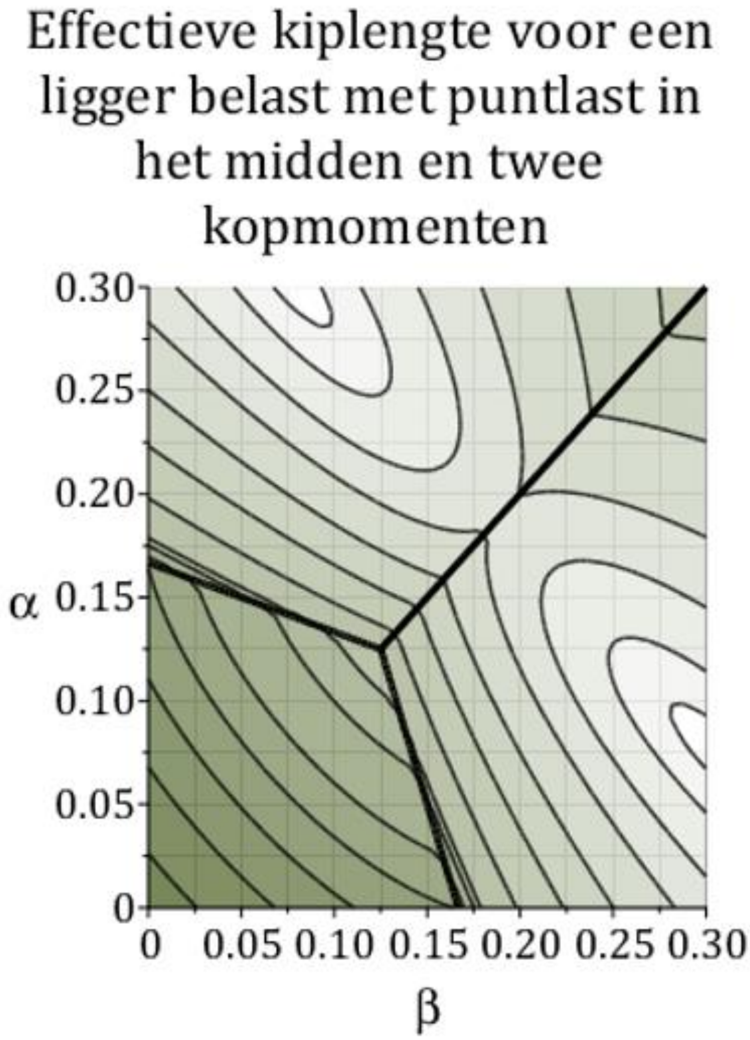
> *D1* := *contourplot*(*leff*, *bet* = 0 ..0.3, *alfa* = 0 ..0.3 , *filledregions* = *true*, *coloring* = ["White", "DarkOliveGreen"], *tickmarks* = [10, 10], *transparency* = .2, *legendstyle* = [*location* = *right*], *axis*[1] = [*location* = *low*, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *axis*[2] = [*location* = *low*, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *contours* = [0.223, 0.23, 0.25, 0.283, 0.34, 0.41, 0.5, 0.59, 0.61, 0.64, 0.66, 0.68, 0.7, 0.72] , *size* = [800, 800],) :

$D2 := contourplot\left(y4,\ bet = 0 .. \frac{1}{8}, alfa = 0 .. 0.3, contours = [0], color = \text{"Black"}, thickness = 3\right) :$

$D3 := contourplot\left(y5,\ bet = \frac{1}{8} .. 0.3, alfa = 0 .. \frac{1}{8}, contours = [0], color = \text{"Black"}, thickness = 3\right) :$

$D4 := plot\left(y3,\ bet = \frac{1}{8} .. 0.3, color = \text{"Black"},\ thickness = 3\right) :$

display({*D1*, *D2*, *D3*, *D4*}, *size* = [1000, 800], *labels* = [beta , alpha], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *horizontal*], *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *legendstyle* = [*font* = ["Cambria Math", 14]], *title* = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast in het midden en twee kopmomenten", *titlefont* = ["Cambria Math", 18], *axis* = [*gridlines* = 12, *tickmarks* = [10, *subticks* = 1]]);



> $plot3d(leff, bet = -1 .. 1, alfa = -1 ..1, labels = [\text{beta}, \text{alpha}, effectieve\ kiplengte], labelfont = [\text{"Cambria Math"}, 16], labeldirections = [horizontal, horizontal, vertical], axesfont = [\text{"Cambria Math"}, 14], title = \text{"Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast in het midden en twee kopmomenten"}, titlefont = [\text{"Cambria Math"}, 18]) :$

> $y1 := bet - 0.5 : y2 := bet + 0.5 : y3 := bet : y4 := \text{abs}(-0.25 + 0.5 \cdot alfa + 0.5 \cdot bet) - \text{abs}(alfa) : y5 := \text{abs}(-0.25 + 0.5 \cdot alfa + 0.5 \cdot bet) - \text{abs}(bet) : yy := \frac{Mmax}{F \cdot l} :$

$D1 := contourplot(yy, bet = -1 ..1, alfa = -1 ..1, filledregions = true, coloring = [\text{"White"}, \text{"DarkOliveGreen"}], tickmarks = [10, 10], transparency = .4, legendstyle = [location = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2]) :$

$D2 := contourplot(leff, bet = -1 ..1, alfa = -1 ..1 , filledregions = true, coloring = [\text{"White"}, \text{"DarkOliveGreen"}], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.20, 0.25, 0.35, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9], size = [800, 800]) :$

$D3 := plot\left(y1,\ bet = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{4}, color = \text{"Blue"}, thickness = 3\right):$

$D4 := plot\left(y2,\ bet = -1 .. -\frac{1}{4}, color = \text{"Green"}, thickness = 3\right):$

$D5 := plot\left(y3,\ bet = \frac{1}{8} .. 1, color = \text{"Red"}, legend = [typeset(\text{alpha} = \text{beta})], thickness = 3\right):$

$D6 := contourplot\left(y4,\ bet = -\frac{1}{4} .. \frac{1}{8}, alfa = \frac{1}{8} .. \frac{1}{4}, contours = [0], color = \text{"Green"}, legend = typeset\left(\text{abs}(-0.25 + 0.5\cdot\text{alpha} + 0.5\cdot\text{beta}) = \text{abs}(\text{alpha})\right), thickness = 3\right):$

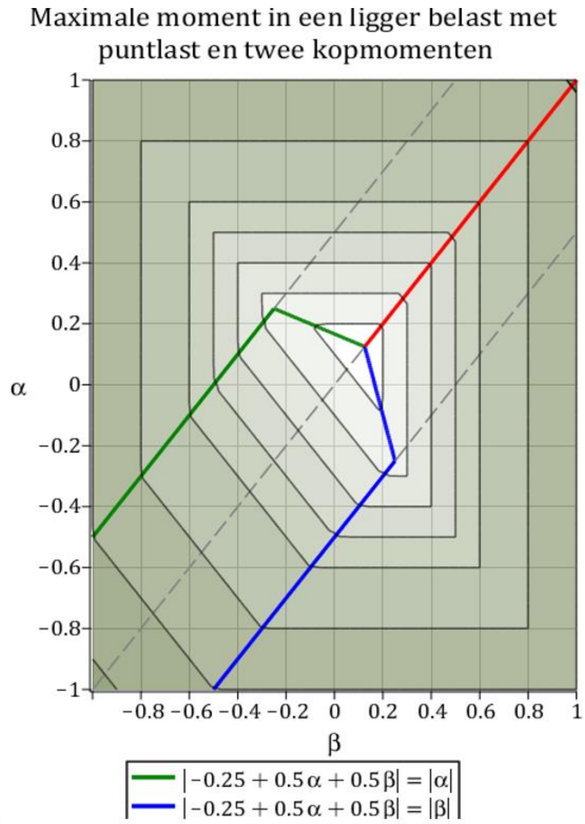
$D7 := contourplot\left(y5,\ bet = \frac{1}{8} .. \frac{1}{4}, alfa = -\frac{1}{4} .. \frac{1}{8}, contours = [0], color = \text{"Blue"}, legend = typeset\left(|-0.25 + 0.5\cdot\text{alpha} + 0.5\cdot\text{beta}| = |\text{beta}|\right), thickness = 3\right):$

> $D3b := plot\left(y1,\ bet = \frac{1}{4} .. 1, color = \text{"Gray"},\ thickness = 1, linestyle = dash\right):$

$D4b := plot\left(y2,\ bet = -\frac{1}{4} .. \frac{1}{2}, color = \text{"Gray"}, thickness = 1, linestyle = dash\right):$

$D5b := plot\left(y3, bet = -1 .. \frac{1}{8}, color = \text{"Gray"}, thickness = 1, linestyle = dash\right):$

> display({D1, D3, D3b, D4, D5, D6, D7, D3b, D4b, D5b}, labels = [beta, alpha], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal, horizontal], axesfont = ["Cambria Math", 14], size = [1000, 800], legendstyle = [font = ["Cambria Math", 14]], title = "Maximale moment in een ligger belast met puntlast en twee kopmomenten", titlefont = ["Cambria Math", 18]);



Bijlage I.4: Uitwerking deelvraag 4

> restart;

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\text{Pi}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)\right) : \text{psi} := a\cdot\sin\left(\text{Pi}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) :$

> $M1 := -alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x + (1-g)\cdot F\cdot x :$

> $M2 := -(alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-g) - alfa\cdot F\cdot x) - (bet\cdot F\cdot g\cdot l + bet\cdot F\cdot x) + F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\left(int(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l) + int(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..(l\cdot(1-g)))\right) :$

> $thetab := \frac{1}{l\cdot(1-g)}\cdot\left(thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot x, x=0..(l\cdot(1-g))\right)\right) :$

> $wkip := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi\cdot M1)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{(\text{psi}\cdot M2)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(l\cdot(1-g))\right) :$

> $dA := F\cdot wkip - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab :$

> $m1 := dA - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy}\cdot int(\text{phi}^2, x=0..l) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F\cdot l\cdot\max(\text{abs}(alfa), \text{abs}(bet), \text{abs}(g\cdot(1-g) - alfa\cdot(1-g) - bet\cdot g)) :$

> $leff := \frac{result[2]}{Mmax} : k := \frac{result[2]}{F\cdot l} : alfa := A : bet := B : g := G : simplify(k^2);$

$$\frac{1}{6}\frac{1}{\pi^3}\Big(-6\left(-G^2+(A-B+1)G-A\right)\pi\cos(\pi G)^2 + 6\sin(\pi G)\left(A-B-G+\frac{1}{2}\right)\cos(\pi G) + 2\Big(\left(G^4+(-A+B-2)G^3+(3A+1)G^2+(-2A-B)G+A^2+AB+B^2\right)\pi^2 - \frac{3}{2}G^2+\left(3A-3B+\frac{3}{2}\right)G-\frac{3}{2}A^2+(3B-3)A-\frac{3}{2}B^2\Big)\pi\Big) \quad \textbf{(1)}$$

>

> with(plots) :

>

> with(plots) : $g := 0.2 :$
$y1 := \text{abs}((g-alfa)\cdot(1-g) - bet\cdot g) - \text{abs}(alfa) : y2 := \text{abs}((g-alfa)\cdot(1-g) - bet\cdot g) - \text{abs}(bet) : y3 := bet :$

> #D1_25 :=contourplot(leff, bet = 0 ..0.3, alfa = 0 ..0.3 , filledregions = true, coloring = ["White", "DarkOliveGreen"], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.10, 0.15, 0.20, 0.26, 0.32, 0.38, 0.45, 0.52, 0.56, 0.59, 0.62, 0.65, 0.67] , size = [800, 800]) :
#D1_33 :=contourplot(leff, bet = 0 ..0.3, alfa = 0 ..0.3 , filledregions = true, coloring = ["White", "DarkOliveGreen"], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location

```
= low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.14, 0.155, 0.18, 0.22, 0.26, 0.30, 0.36,
0.43, 0.50, 0.57, 0.60, 0.63, 0.66, 0.69] , size = [800, 800]) :
#D1_40 :=contourplot(leff, bet = 0 ..0.3, alfa = 0 ..0.3 , filledregions = true, coloring = ["White",
"DarkOliveGreen"], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location
= right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location
= low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.18, 0.20, 0.23, 0.27, 0.31, 0.36, 0.42,
0.50, 0.58, 0.60, 0.63, 0.66, 0.69, 0.71] , size = [800, 800]) :
D1_20 := contourplot(leff, bet = 0 ..0.3, alfa = 0 ..0.3 , filledregions = true, coloring = ["White",
"DarkOliveGreen"], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location
= right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location
= low, gridlines = [10, majorlines = 1]], contours = [0.09, 0.13, 0.18, 0.25, 0.33, 0.42, 0.483,
0.528, 0.57, 0.62, 0.66] , size = [800, 800]) :
```

$$D2 := contourplot\left(y1,\ bet = 0\,..\left(\frac{g\cdot(1-g)}{2}\right), alfa = 0\,..0.3, contours = [0], color = \text{"Black"}, thickness = 3\right):$$

$$D3 := contourplot\left(y2,\ bet = \left(\frac{g\cdot(1-g)}{2}\right)..0.3, alfa = 0\,..\left(\frac{g\cdot(1-g)}{2}\right), contours = [0], color = \text{"Black"}, thickness = 3\right):$$

$$D4 := plot\left(y3,\ bet = \left(\frac{g\cdot(1-g)}{2}\right)..0.3, color = \text{"Black"},\ thickness = 3\right):$$

```
> display({D1_20, D2, D3, D4}, size = [1000, 800], labels = [beta , alpha], labelfont
= ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal, horizontal], axesfont
= ["Cambria Math", 14], legendstyle = [font = ["Cambria Math", 14]], title
= "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast op 0.20 l en twee kopmomenten",
titlefont = ["Cambria Math", 18], axis = [gridlines = 12, tickmarks = [10, subticks = 1]]) :
>
>
>
```

Bijlage I.5: Uitwerking deelvraag 4 (2 puntlasten + 2 kopmomenten)

> restart;

> $\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) : \text{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+g\cdot l)\right) : \text{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+d\cdot l)\right) :$

> $M1 := (2-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x :$

> $M2 := (2-g-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-g) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot g\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$

> $M3 := (g - g\cdot d + d - d^2)\cdot F\cdot l - (g+d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-d) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot d\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int\left(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)\right) + int\left(\text{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$

> $wkipg := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$

> $wkipd := thetaa\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$

> $thetab := \frac{1}{l\cdot(1-d)}\cdot\left(wkipd + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot x, x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$

> $U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-d)\cdot l\right) :$

> $m1 := wkipg\cdot F + wkipd\cdot F - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy}\cdot int\left(\phi^2, x=0..l\right) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F\cdot l\cdot\max\left(\text{abs}(alfa), \text{abs}(bet), \text{abs}(g\cdot(2-g-d) - alfa\cdot(1-g) - bet\cdot g), \text{abs}(g - g\cdot d + d - d^2 - alfa\cdot(1-d) - bet\cdot d)\right) :$

> $leff := \frac{result[2]}{Mmax} : k := \frac{result[2]}{F\cdot l} : g := G : d := \text{D} : alfa := A : bet := B : simplify(k^2);$

$$\frac{1}{6}\frac{1}{\pi^3}\Big(-6\pi\left((1-\text{D})G - \text{D}^2 + (A-B+1)\text{D} - A\right)\cos(\pi\text{D})^2 + 6\sin(\pi\text{D})\left(A-B-\text{D}-G+\frac{1}{2}\right)\cos(\pi\text{D}) - 6\left(-G^2 + (A-B-\text{D}+2)G - A\right)\pi\cos(\pi G)^2 + 6\sin(\pi G)\left(A-B-\text{D}-G+\frac{3}{2}\right)\cos(\pi G) + 2\pi\Big(\big(G^4 + (-A+B+\text{D}-3)G^3 + (3A+1)G^2 + (\text{D}^3 - 3\text{D}^2 - 2A - B + 2\text{D})G + \text{D}^4 + (-A+B-2)\text{D}^3 + (3A+1)\text{D}^2 + (-2A-B)\text{D} + A^2 + AB + B^2\big)\pi^2 - \frac{3}{2}G^2 + \left(-3\text{D} + \frac{9}{2} + 3A - 3B\right)G \qquad (1)$$

$$-\frac{3}{2}\,D^2+\left(\frac{3}{2}+3\,A-3\,B\right)D-\frac{3}{2}\,A^2+(3\,B-6)\,A-\frac{3}{2}\,B^2\Big)\Big)$$

```
> with(plots) : y1 := bet : y2 := abs(g·(2 − g − d) - alfa·(1 − g) − bet·g) − abs(alfa) : y3 :=
    abs(g·(2 − g − d) - alfa·(1 − g) − bet·g) − abs(bet) : y4 := abs(g − g·d + d − d^2 − alfa
    ·(1 − d) − bet·d) − abs(alfa) : y5 := abs(g − g·d + d − d^2 − alfa·(1 − d) − bet·d)
     − abs(bet) :
  #D1 :=contourplot(leff, bet = 0 ..0.5, alfa = 0 ..0.5 , filledregions = true, coloring = ["White",
    "DarkOliveGreen"], tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location
    = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location
    = low, gridlines = [10, majorlines = 1]] , size = [800, 800], contours = [0.16, 0.19, 0.24,
    0.29, 0.36, 0.44, 0.52, 0.64, 0.72, 0.74, 0.76, 0.78, 0.80]) :
  #D2:=plot(y1, bet = 0.1875 ..0.5, color = "Black", thickness = 3) :
  #D3:=contourplot(y2, bet = 0 ..0.1875, alfa = 0 ..0.5, contours = [0], color = "Black", thickness
    = 3) :
  #D4:=contourplot(y3, bet = 0.1875 ..0.3, alfa = 0 ..0.1875, contours = [0], color = "Black",
    thickness = 3) :
  #D5:=contourplot(y4, bet = 0 ..0.1875, alfa = 0 ..0.5, contours = [0], color = "Black", thickness
    = 3) :
  #D6:=contourplot(y5, bet = 0.1875 ..0.25, alfa = 0 ..0.5, contours = [0], color = "Black",
    thickness = 3) :
  #display( {D1, D2, D5, D6}, size = [1000, 800], labels = [beta , alpha], labelfont
    = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal, horizontal], axesfont
    = ["Cambria Math", 14], legendstyle = [ font = ["Cambria Math", 14]], title
    = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast op 0.25 l & 0.50 l en twee
    kopmomenten", titlefont = ["Cambria Math", 18], axis = [gridlines = 12, tickmarks = [10,
    subticks = 1]]) :
>
```

Bijlage I.6: Aantonen juistheid C3, C4

> $c3 := -\frac{1}{\pi^2}(x-1)\cos(\mathrm{Pi}\cdot x)^2 + \frac{1}{\pi^3}\cdot\sin(\mathrm{Pi}\cdot x)\cdot\cos(\mathrm{Pi}\cdot x) + \frac{(-x^3+3\cdot x^2-2\cdot x)}{3} + \frac{(x-1)}{\pi^2}$:

> $intc3 := int(c3, x = 0..1); evalf(intc3)$

$$intc3 := -\frac{1}{12}\,\frac{\pi^2+3}{\pi^2}$$

$$-0.1086636292 \quad \textbf{(1)}$$

> $c4 := \frac{x}{\pi^2}\cos(\mathrm{Pi}\cdot x)^2 - \frac{1}{\pi^3}\cdot\sin(\mathrm{Pi}\cdot x)\cdot\cos(\mathrm{Pi}\cdot x) + \frac{x^3-x}{3} - \frac{x}{\pi^2}$:

> $intc4 := int(c4, x = 0..1); evalf(intc4);$

$$intc4 := -\frac{1}{12}\,\frac{\pi^2+3}{\pi^2}$$

$$-0.1086636292 \quad \textbf{(2)}$$

>

Bijlage I.7: Uitwerking 2 puntlasten

> *restart*;

> $\mathrm{phi} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) : \mathrm{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot(x+g\cdot l)\right) : \mathrm{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot(x+d\cdot l)\right) :$

> $M1 := (1-g)\cdot F\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot x :$

> $M2 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot F\cdot x :$

> $M3 := F\cdot g\cdot l - F\cdot g\cdot d\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot F\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot d\cdot x :$

> $\mathrm{theta} := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int\left(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)\right) + int\left(\mathrm{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$

> $wkipg := \mathrm{theta}\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$

> $wkipd := \mathrm{theta}\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$

> $U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-d)\cdot l\right) :$

> $m1 := wkipg\cdot F + wkipd\cdot F - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\,EIyy}\cdot int\left(\phi^2, x=0..l\right) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F\cdot l\cdot\max\left(\mathrm{abs}(g\cdot(2-d-g)), \mathrm{abs}(g-g\cdot d+d-d^2)\right) :$

> $leff := \frac{result[1]}{Mmax} : simplify(leff^2)$

$$\frac{1}{6}\left(6\,\pi\,(-1+d)\,(d+g)\cos(\pi\,d)^2 - 6\left(d+g-\frac{1}{2}\right)\sin(\pi\,d)\cos(\pi\,d) + 6\,g\,\pi\,(-2+d+g)\cos(g\,\pi)^2 - 6\left(d+g-\frac{3}{2}\right)\sin(g\,\pi)\cos(g\,\pi) + 2\,\pi\left((g^4+(d-3)\,g^3+g^2+(d^3-3\,d^2+2\,d)\,g+d^2\,(-1+d)^2)\,\pi^2 - \frac{3}{2}\,g^2 + \left(-3\,d+\frac{9}{2}\right)g - \frac{3}{2}\,d^2 + \frac{3}{2}\,d\right)\right) \Big/ \left(\pi^3\max(|g\,(-2+d+g)|, |(-1+d)\,(d+g)|)^2\right) \quad (1)$$

>

>

Bijlage I.8: Uitwerking 3 puntlasten

> $restart:$

> $\text{phi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) : \text{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+g\cdot l)\right) : \text{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+d\cdot l)\right) : et := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+e\cdot l)\right) :$

> $M1 := (3-g-d-e)\cdot F\cdot x :$

> $M2 := (3-g-d-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (2-g-d-e)\cdot F\cdot x :$

> $M3 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l - F\cdot d\cdot x + (1-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-e)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-e)\cdot F\cdot x :$

> $M4 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot g\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l - F\cdot d\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot d\cdot x + (1-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-e)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-e)\cdot F\cdot l\cdot(e-d) - F\cdot e\cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\Big(int\big(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l\big) + int\big(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)\big) + int\big(\text{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(e-d)\big) + int\big(et^2\cdot M4\cdot(l-e\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-e)\big)\Big) :$

> $wkipg := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$

> $wkipd := thetaa\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$

> $wkipe := thetaa\cdot e\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(e\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((e-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot((e-d)\cdot l-x), x=0..(e-d)\cdot l\right)\right) :$

> $U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(e-d)\cdot l\right) + int\left(\frac{et^2\cdot M4^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-e)\cdot l\right) :$

> $m1 := wkipg\cdot F + wkipd\cdot F + wkipe\cdot F - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\,EIyy}\cdot int(\phi^2, x=0..l) :$

> $result := solve(m2=m1, m0) :$

> $leff := \frac{result[1]}{l\cdot F} : g := G : d := \text{D} : e := E : simplify(leff^2)$

$$\frac{1}{6}\frac{1}{\pi^3}\Big(6\,\pi\,(E-1)\,(E+\text{D}+G)\cos(\pi E)^2 - 6\sin(\pi E)\left(\text{D}+E+G-\frac{1}{2}\right)\cos(\pi E) + 6\,((\text{D}-1)\,G+\text{D}\,(\text{D}+E-2))\,\pi\cos(\pi\text{D})^2 - 6\left(\text{D}+E+G-\frac{3}{2}\right)\sin(\pi\text{D})\cos(\pi\text{D}) + 6\,G\,\pi\,(\text{D}+E+G-3)\cos(G\pi)^2 - 6\sin(G\pi)\,\big(\text{D}+E \tag{1}$$

Bijlage I.9: Uitwerking 4 puntlasten

> restart;

$$\text{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) : \text{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+g\cdot l)\right) : \text{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+d\cdot l)\right) : et := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+e\cdot l)\right) : dzet := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot(x+f\cdot l)\right) :$$

$$M1 := (4-g-d-e-f)\cdot F\cdot x :$$

$$M2 := (4-g-d-e-f)\cdot F\cdot g\cdot l + (3-g-d-e-f)\cdot F\cdot x :$$

$$M3 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l - F\cdot d\cdot x + (1-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-e)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-e)\cdot F\cdot x + (1-f)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-f)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-f)\cdot F\cdot x :$$

$$M4 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot g\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l - F\cdot d\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot d\cdot x + (1-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-e)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-e)\cdot F\cdot l\cdot(e-d) - F\cdot e\cdot x + (1-f)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-f)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-f)\cdot(e-d)\cdot F\cdot l + (1-f)\cdot F\cdot x :$$

$$M5 := F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot(d-g)\cdot l - F\cdot g\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot g\cdot(f-e)\cdot l - F\cdot g\cdot x + (1-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-d)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l - F\cdot d\cdot(e-d)\cdot l - F\cdot d\cdot(f-e)\cdot l - F\cdot d\cdot x + (1-e)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-e)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-e)\cdot F\cdot l\cdot(e-d) - F\cdot l\cdot e\cdot(f-e) - F\cdot e\cdot x + (1-f)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-f)\cdot(d-g)\cdot F\cdot l + (1-f)\cdot(e-d)\cdot F\cdot l + (1-f)\cdot(f-e)\cdot F\cdot l - F\cdot f\cdot x :$$

$$thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\Big(int(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l) + int(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)) + int(\text{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(e-d)) + int(et^2\cdot M4\cdot(l-e\cdot l-x), x=0..l\cdot(f-e)) + int(dzet^2\cdot M5\cdot(l-f\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-f))\Big) :$$

$$wkipg := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$$

$$wkipd := thetaa\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$$

$$wkipe := thetaa\cdot e\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(e\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((e-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot((e-d)\cdot l-x), x=0..(e-d)\cdot l\right)\right) :$$

$$wkipf := thetaa\cdot f\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(f\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((f-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot((f-d)\cdot l-x), x=0..(e-d)\cdot l\right) + int\left(\frac{et^2\cdot M4}{EIyy}\cdot((f-e)\cdot l-x), x=0..(f-e)\cdot l\right)\right) :$$

$$U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\text{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(e-d)\cdot l\right) + int\left(\frac{et^2\cdot M4^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(f-e)\cdot l\right) + int\left(\frac{dzet^2\cdot M5^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-f)\cdot l\right) :$$

$$m1 := wkipg\cdot F + wkipd\cdot F + wkipe\cdot F + wkipf\cdot F - U :$$

$$> m2 := \frac{(m0)^2}{2\,EIyy} \cdot int\left(\phi^2, x = 0..l\right):$$

$$> result := solve(m2 = m1, m0):$$

$$> leff := \frac{result[2]}{l \cdot F}: g := G: d := D: e := E: f := F: simplify\left(leff^2\right);$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{\pi^3}\Big(6\,\pi\,(F-1)\,(F+D+E+G)\cos(\pi F)^2 - 6\left(D+E+F+G - \frac{1}{2}\right)\sin(\pi F)\cos(\pi F) + 6\,\pi\,((E-1)\,G + (E-1)\,D + E\,(E+F-2))\cos(\pi E)^2 - 6\left(D+E+F+G-\frac{3}{2}\right)\sin(\pi E)\cos(\pi E) + 6\,\pi\,((D-1)\,G + D\,(D+E+F-3))\cos(\pi D)^2 - 6\sin(\pi D)\left(D+E+F+G-\frac{5}{2}\right)\cos(\pi D) + 6\,G\,\pi\,(D+E+F+G-4)\cos(G\pi)^2 - 6\left(D+E+F+G-\frac{7}{2}\right)\sin(G\pi)\cos(G\pi) + 2\,\pi\Big(\big(G^4 + (D+E+F-5)\,G^3 + G^2 + (D^3+E^3+F^3-3\,D^2-3\,E^2-3\,F^2+2\,D+2\,E+2\,F)\,G + D^4 + (E+F-4)\,D^3 + D^2 + (E^3+F^3-3\,E^2-3\,F^2+2\,E+2\,F)\,D + E^4 + (F-3)\,E^3 + E^2 + (F^3-3\,F^2+2\,F)\,E + F^2\,(F-1)^2\big)\,\pi^2 - \frac{3}{2}\,G^2 + \left(\frac{21}{2} - 3\,D - 3\,E - 3\,F\right)G - \frac{3}{2}\,D^2 + \left(-3\,F - 3\,E + \frac{15}{2}\right)D - \frac{3}{2}\,E^2 + \left(\frac{9}{2} - 3\,F\right)E + \frac{3}{2}\,F - \frac{3}{2}\,F^2\Big)\Big) \tag{1}$$

$$>$$

Bijlage I.10: Uitwerking deelvraag 2 hogere termen

> restart;

> $\text{phi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + b\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + c\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) : \text{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + b\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + c\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) :$

> $\text{theta} := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int\left(\phi^2\cdot 0.5\cdot F\cdot x\cdot(l-x), x=0..\frac{l}{2}\right) + int\left(\psi^2\cdot(0.25\cdot F\cdot l - 0.5\cdot F\cdot x)\cdot\left(\frac{l}{2} - x\right), x=0..\frac{l}{2}\right)\right) :$

> $wkip := \frac{\text{theta}\cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2\cdot 0.5\cdot F\cdot x}{EIyy}\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right), x=0..\frac{l}{2}\right) : dphi := diff(\text{phi}, x\$2) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi\cdot 0.5\cdot F\cdot x)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..\frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(\text{psi}\cdot(0.25\cdot F\cdot l - 0.5\cdot F\cdot x))^2}{2\cdot EIyy}, x=0..\frac{l}{2}\right) + \frac{G\cdot It}{2}\cdot int\left(dphi^2, x=0..l\right) :$

> $m1 := U - wkip\cdot F :$

> $difa := diff(m1, a) :$

> $difb := diff(m1, b) :$

> $difc := diff(m1, c) :$

> $eq1 := difa = 0 : eq2 := difb = 0 : eq3 := difc : eq := [eq1, eq2, eq3] : var := [a, b, c] :$

> $with(LinearAlgebra) :$
$M, Q := GenerateMatrix(eq, var);$

$$M, Q := \left[\left[-\frac{0.01674924063\, l^3 F^2}{EIyy} + \frac{0.5000000000\, G\, It\, \pi^4}{l^3}, \frac{0.007915717478\, l^3 F^2}{EIyy}, -\frac{0.002286762826\, l^3 F^2}{EIyy}\right], \left[\frac{0.007915717478\, l^3 F^2}{EIyy}, -\frac{0.01112028599\, l^3 F^2}{EIyy} + \frac{40.50000000\, G\, It\, \pi^4}{l^3}, \frac{0.006728359859\, l^3 F^2}{EIyy}\right], \left[-\frac{0.002286762826\, l^3 F^2}{EIyy}, \frac{0.006728359859\, l^3 F^2}{EIyy}, -\frac{0.01066996963\, l^3 F^2}{EIyy} + \frac{312.5000000\, G\, It\, \pi^4}{l^3}\right]\right], \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $det := Determinant(M, method = algnum) :$

> $result := solve(det = 0, F) :$

> $Fval := \left[\frac{result[1]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}, \frac{result[2]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}, \frac{result[3]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}, \frac{result[4]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}, \frac{result[5]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}, \frac{result[6]\cdot l^3}{\text{sqrt}(G\cdot It\cdot EIyy)}\right] :$

> $Fvalabs := [\text{abs}(Fval[1]), \text{abs}(Fval[2]), \text{abs}(Fval[3]), \text{abs}(Fval[4]), \text{abs}(Fval[5]), \text{abs}(Fval[6])] :$

> $leff := \min(Fvalabs)\cdot 0.25 :$

> $mfactor := \frac{3.1416^2}{leff} :$

Bijlage I.11: Uitwerking deelvraag 3 met beschouwing hogere termen

> $restart; bet := 2 :$

> $$\text{phi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + b\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + c\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + d\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) + e\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\text{Pi}}{l}\cdot x\right) :$$

$$\text{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + b\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + c\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + d\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) + e\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) :$$

> $M1 := -alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x + 0.5\cdot F\cdot x :$

> $M2 := -(alfa\cdot F\cdot 0.5\cdot l - alfa\cdot F\cdot x) - (bet\cdot F\cdot 0.5\cdot l + bet\cdot F\cdot x) + 0.25\cdot F\cdot l - 0.5\cdot F\cdot x :$

> $$thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int\left(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..\frac{l}{2}\right) + int\left(\psi^2\cdot M2\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right), x=0..\frac{l}{2}\right)\right) :$$

> $$thetab := \frac{2}{l}\cdot\left(\frac{thetaa\cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right), x=0..\frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot x, x=0..\frac{l}{2}\right)\right) :$$

> $$wkip := \frac{thetaa\cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right), x=0..\frac{l}{2}\right) : dphi := diff(\text{phi}, x\$2) :$$

> $$U := int\left(\frac{(\phi\cdot M1)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..\frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(\text{psi}\cdot M2)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..\frac{l}{2}\right) + \frac{G\cdot It}{2}\cdot int(dphi^2, x=0..l) :$$

> $dA := F\cdot wkip - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab :$

> $m1 := U - dA :$

> $difa := diff(m1, a) :$

> $difb := diff(m1, b) :$

> $difc := diff(m1, c) :$

> $difd := diff(m1, d) :$

> $dife := diff(m1, e) :$

> $eq1 := difa = 0 : eq2 := difb = 0 : eq3 := difc = 0 : eq4 := difd = 0 : eq5 := dife = 0 :$
$eq := [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5] : var := [a, b, c, d, e] : EIyy := 1 : G := 1 : It := 1 : l := 1 :$

> $with(LinearAlgebra) :$
$M, Q := GenerateMatrix(eq, var) :$

> **for** i **from** 0 **to** 50 **do**
$alfa := -1 + 0.04\cdot i :$
$aalfa[i] := alfa :$
$det := Determinant(M, method = algnum) :$
$result := solve(det = 0, F) :$
$Mmax := \max(\text{abs}(alfa), \text{abs}(bet), \text{abs}(0.5\cdot(0.5 - alfa - bet))) :$
$V := select(type, [result], positive)[\ ] :$
$ff := \min(V) : mfactor[i] := \dfrac{\pi^2}{ff\cdot Mmax}$: **od**:

> $mfac := convert((mfactor, list)) : aaa := convert((aalfa, list)) :$

> $$\text{phi} := B\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot x\right) : \text{psi} := B\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}}{l}\cdot\left(x+\frac{l}{2}\right)\right) : alfa := A : F := ffff :$$

$$> M1 := -alfa \cdot F \cdot (l - x) - bet \cdot F \cdot x + 0.5 \cdot F \cdot x :$$

$$> M2 := -(alfa \cdot F \cdot 0.5 \cdot l - alfa \cdot F \cdot x) - (bet \cdot F \cdot 0.5 \cdot l + bet \cdot F \cdot x) + 0.25 \cdot F \cdot l - 0.5 \cdot F \cdot x :$$

$$> thetaa := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int\left(\phi^2 \cdot M1 \cdot (l - x), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\psi^2 \cdot M2 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right)\right) :$$

$$> thetab := \frac{2}{l} \cdot \left(\frac{thetaa \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{\psi^2 \cdot M2}{EIyy} \cdot x, x = 0 .. \frac{l}{2}\right)\right) :$$

$$> wkip := \frac{thetaa \cdot l}{2} - int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right) :$$

$$> U := int\left(\frac{(\phi \cdot M1)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) + int\left(\frac{(psi \cdot M2)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. \frac{l}{2}\right) :$$

$$> dA := F \cdot wkip - alfa \cdot F \cdot l \cdot thetaa - bet \cdot F \cdot l \cdot thetab :$$

$$> m1 := dA - U :$$

$$> m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy} \cdot int(\phi^2, x = 0 .. l) :$$

$$> result := solve(m2 = m1, m0) :$$

$$> Mmax := F \cdot l \cdot \max(\mathrm{abs}(alfa), \mathrm{abs}(bet), \mathrm{abs}(0.5 \cdot (0.5 - alfa - bet))) :$$

$$> m := \frac{result[1]}{Mmax} :$$

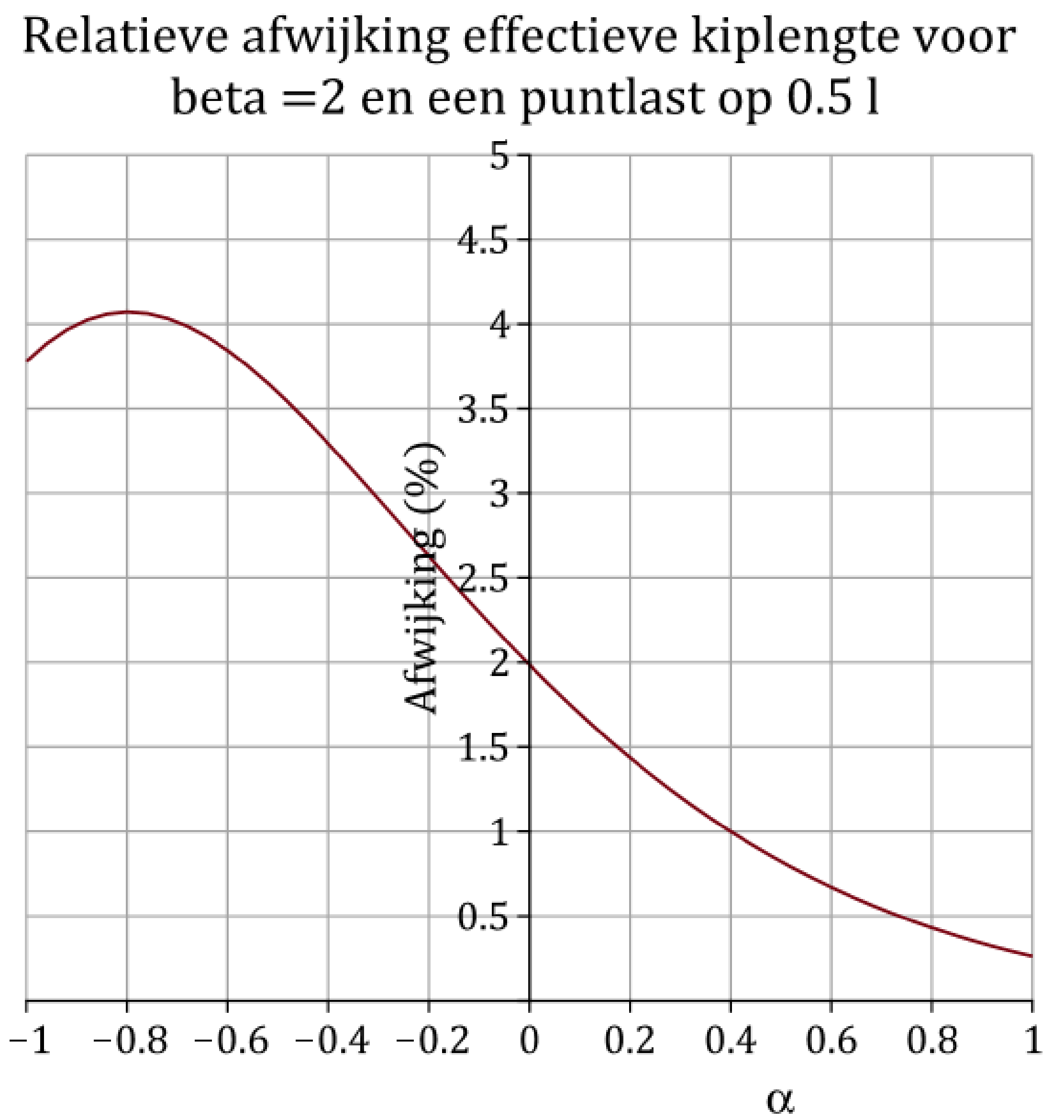
> *D2* := *plot*(*m*, *A* = −1 ..1, *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *gridlines* = *true*, *labels* = [alpha, *effectieve kiplengte* (*l*)], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *vertical*], *size* = [800, 500], *view* = [−1 ..1, 0.2 ..0.9], *legend* = ["Gevonden oplossing 1 term "], *legendstyle* = [*location* = *bottom*], *title* = "Effectieve kiplengte voor" beta "=2 en een puntlast op 0.5 l" , *titlefont* = ["Cambria Math", 18], *tickmarks* = [10, 10], *color* = "Blue") :

D3 := *plot*(*aaa*, *mfac*, *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *gridlines* = *true*, *labels* = [alpha, *effectieve kiplengte* (*l*)], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *vertical*], *size* = [800, 500], *view* = [−1 ..1, 0.2 ..0.9], *legend* = ["Gevonden oplossing 5 termen"], *legendstyle* = [*location* = *bottom*], *title* = "Effectieve kiplengte voor beta =2 en een puntlast op 0.5 l", *titlefont* = ["Cambria Math", 18], *tickmarks* = [10, 10]) :

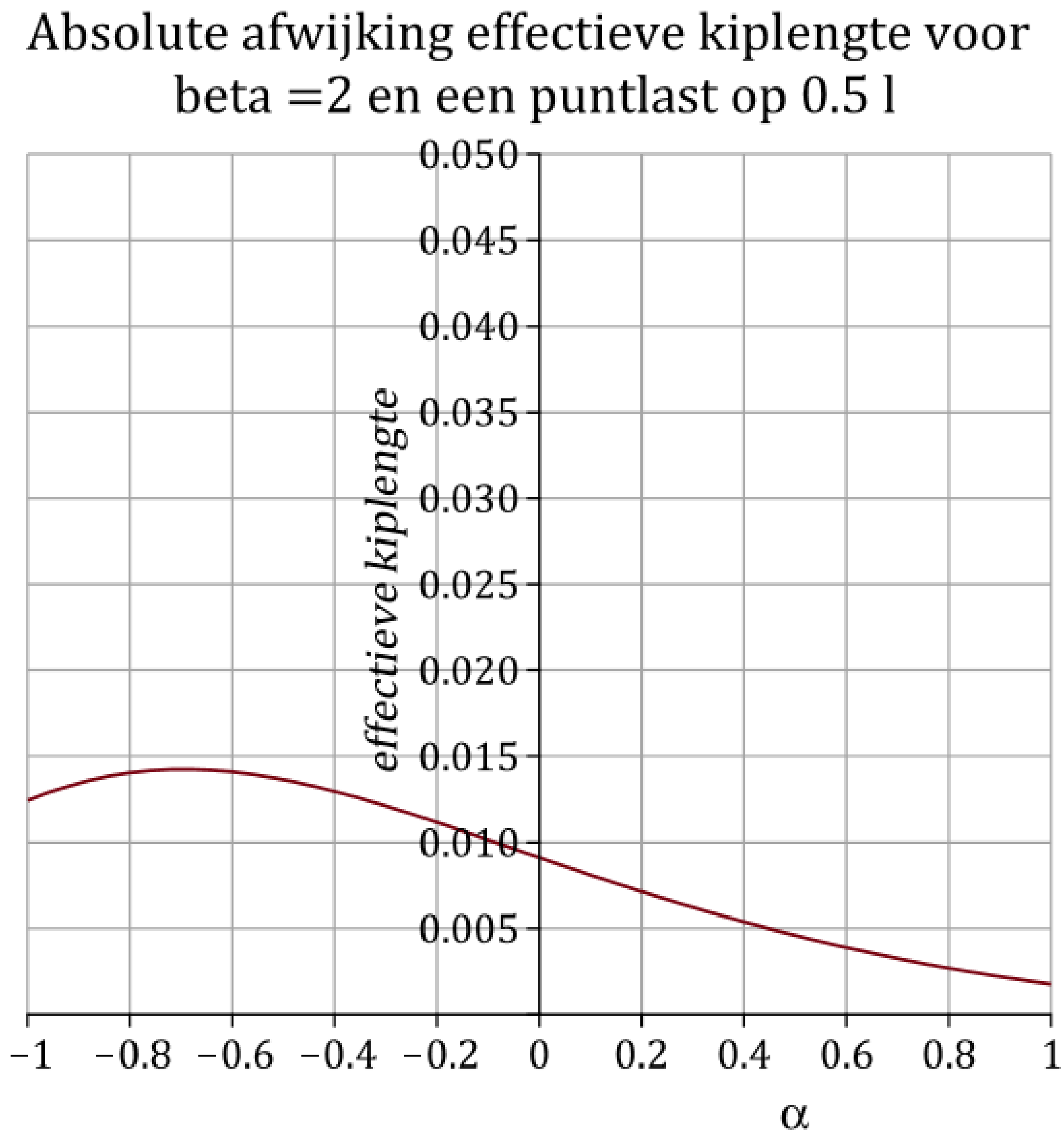
> *with*(*plots*) :

> *display*({*D2*, *D3*}, *size* = [900, 700])

```
> for i from 0 to 50 do
  vijfterm := mfactor[i] : A := -1 + 0.04·i :
  eenterm := m : verschilabs[i] := vijfterm − eenterm :
  verschil[i] := abs(vijfterm − eenterm) / vijfterm · 100 : od:
> verschill := convert( (verschil, list) ) : verschill : verschillabs := convert( (verschilabs, list) ) :
> D3 := plot(aaa, verschill, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    "Afwijking (%)"], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..5], title
    = "Relatieve afwijking effectieve kiplengte voor beta =2 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10]);
```



```
> D3 := plot(aaa, verschillabs, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l)], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [-1..1, 0..0.05], title
    = "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =2 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10]);
```




```
>
>
>
```

Bijlage I.12: Uitwerking deelvraag 4 met 2 puntlasten en vergelijking meerdere termen

$$> restart; bet := 0.5 : g := 0.15 : d := 0.35 :$$

$$> \mathrm{phi} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) + b\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) + c\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) + dd\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) + e\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) :$$

$$\mathrm{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) + b\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) + c\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) + dd\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) + e\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) :$$

$$\mathrm{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+d\cdot l)}{l}\right)\right) + b\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+d\cdot l)}{l}\right)\right) + c\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+d\cdot l)}{l}\right)\right) + dd\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+d\cdot l)}{l}\right)\right) + e\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\mathrm{Pi}}{l}\cdot\left(\frac{(x+d\cdot l)}{l}\right)\right) :$$

$$> M1 := (2-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> M2 := (2-g-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-g) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot g\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> M3 := \left(g - g\cdot d + d - d^2\right)\cdot F\cdot l - (g+d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-d) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot d\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int\left(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)\right) + int\left(\mathrm{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$$

$$> wkipg := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) : dphi := diff(\mathrm{phi}, x\$2) :$$

$$> wkipd := thetaa\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$$

$$U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-d)\cdot l\right) + \frac{G\cdot It}{2}\cdot int\left(dphi^2, x=0..l\right) :$$

$$> thetab := \frac{1}{l\cdot(1-d)}\cdot\left(wkipd + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot x, x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$$

$$> dA := F\cdot wkipg + F\cdot wkipd - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab :$$

$$> m1 := U - dA :$$

$$> difa := diff(m1, a) :$$

$$> difb := diff(m1, b) :$$

$$> difc := diff(m1, c) :$$

$$> difd := diff(m1, dd) :$$

$$> dife := diff(m1, e) :$$

$$> eq1 := difa = 0 : eq2 := difb = 0 : eq3 := difc = 0 : eq4 := difd = 0 : eq5 := dife = 0 :$$

$$eq := [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5] : var := [a, b, c, dd, e] : EIyy := 1 : G := 1 : It := 1 : l := 1 :$$

> $with(LinearAlgebra):$
> $M, Q := GenerateMatrix(eq, var):$

> **for** i **from** 0 **to** 50 **do**
> $alfa := -2 + 0.08 \cdot i:$
> $aalfa[i] := alfa:$
> $det := Determinant(M, method = algnum):$
> $result := solve(det = 0, F):$
> $Mmax := \max\big(\mathrm{abs}(alfa), \mathrm{abs}(bet), \mathrm{abs}(g \cdot (2 - g - d) - alfa \cdot (1 - g) - bet \cdot g), \mathrm{abs}\big(g - g \cdot d + d - d^2 - alfa \cdot (1 - d) - bet \cdot d\big)\big):$
> $V := select(type, [result], positive)[\ ]:$
> $ff := \min(V) : mfactor[i] := \dfrac{\pi^2}{ff \cdot Mmax}$: **od**:

> $mfac := convert((mfactor, list)) : aaa := convert((aalfa, list)):$

> $\mathrm{phi} := B \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l} \cdot x\right) : \mathrm{psi} := B \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l} \cdot \left(\frac{(x + g \cdot l)}{l}\right)\right) : \mathrm{zeta} := B \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l} \cdot \left(\frac{(x + d \cdot l)}{l}\right)\right) : alfa := A : F := ffff : :$

> $M1 := (2 - g - d) \cdot F \cdot x - alfa \cdot F \cdot (l - x) - bet \cdot F \cdot x :$

> $M2 := (2 - g - d) \cdot F \cdot g \cdot l + (1 - g - d) \cdot F \cdot x - alfa \cdot F \cdot l \cdot (1 - g) + alfa \cdot F \cdot x - bet \cdot F \cdot g \cdot l - bet \cdot F \cdot x :$

> $M3 := (g - g \cdot d + d - d^2) \cdot F \cdot l - (g + d) \cdot F \cdot x - alfa \cdot F \cdot l \cdot (1 - d) + alfa \cdot F \cdot x - bet \cdot F \cdot d \cdot l - bet \cdot F \cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy \cdot l} \cdot \left(int(\phi^2 \cdot M1 \cdot (l - x), x = 0 .. g \cdot l) + int(\psi^2 \cdot M2 \cdot (l - g \cdot l - x), x = 0 .. l \cdot (d - g)) + int(\mathrm{zeta}^2 \cdot M3 \cdot (l - d \cdot l - x), x = 0 .. l \cdot (1 - d))\right):$

> $wkipg := thetaa \cdot g \cdot l - int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot (g \cdot l - x), x = 0 .. g \cdot l\right):$

> $wkipd := thetaa \cdot d \cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1}{EIyy} \cdot (d \cdot l - x), x = 0 .. g \cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2 \cdot M2}{EIyy} \cdot ((d - g) \cdot l - x), x = 0 .. (d - g) \cdot l\right)\right):$

> $thetab := \frac{1}{l \cdot (1 - d)} \cdot \left(wkipd + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2 \cdot M3}{EIyy} \cdot x, x = 0 .. l \cdot (1 - d)\right)\right):$

> $U := int\left(\frac{\phi^2 \cdot M1^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. g \cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2 \cdot M2^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. (d - g) \cdot l\right) + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2 \cdot M3^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 .. (1 - d) \cdot l\right):$

> $m1 := wkipg \cdot F + wkipd \cdot F - alfa \cdot F \cdot l \cdot thetaa - bet \cdot F \cdot l \cdot thetab - U:$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy} \cdot int(\phi^2, x = 0 .. l):$

> $result := solve(m2 = m1, m0):$

> $Mmax := F \cdot l \cdot \max\big(\mathrm{abs}(alfa), \mathrm{abs}(bet), \mathrm{abs}(g \cdot (2 - g - d) - alfa \cdot (1 - g) - bet \cdot g), \mathrm{abs}\big(g - g \cdot d$

```
    + d − d^2 − alfa·(1 − d) − bet·d)) :
> m := result[1] / Mmax :
> D2 := plot(m, A =−2 ..2, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [−2 ..2, 0.2 ..1], legend
    = ["Gevonden oplossing 1 term "], legendstyle = [location = bottom], title
    = "Effectieve kiplengte voor" beta "=0.5 en een puntlast op 0.15 & 0.35 l" , titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], color = "Blue") :
  D3 := plot(aaa, mfac, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [−2 ..2, 0.2 ..1], legend
    = ["Gevonden oplossing 5 termen"], legendstyle = [location = bottom], title
    = "Effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.15 & 0.35 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10]) :
> with(plots) :
> display( {D2, D3}, size = [900, 600]) :
> for i from 0 to 50 do
  vijfterm := mfactor[i] : A := −2 + 0.08·i :
  eenterm := m : verschilabs[i] := vijfterm − eenterm :
  verschil[i] := abs(vijfterm − eenterm) / vijfterm ·100 : od:
> verschill := convert( (verschil, list) ) : verschill : verschillabs := convert( (verschilabs, list) ) :
> D3 := plot(aaa, verschill, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    "Afwijking (%)"], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [−2 ..2, 0 ..15], title
    = "Relatieve afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.15 & 0.35 l",
    titlefont = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10]) :
> D3 := plot(aaa, verschillabs, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [−2 ..2, 0 ..0.05], title
    = "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.15 & 0.35 l",
    titlefont = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10]) :
> verschill;
[1.959225021, 1.980808464, 2.003715071, 2.028038968, 2.053874347, 2.081311453,        (1)
    2.110428600, 2.141281501, 2.173884681, 2.208182482, 2.244003328, 2.280986484,
    2.318464339, 2.355270107, 2.389423659, 2.417607854, 2.434292374, 2.430268933,
    2.390242900, 2.289146956, 2.087735840, 1.733111522, 1.191133150, 0.6000325013,
    0.6230043616, 2.131705232, 4.148404890, 4.719236525, 3.826062477, 2.515896033,
    1.442995494, 0.7439111399, 0.3427635972, 0.1358556291, 0.04533733302,
    0.02170299096, 0.03537114697, 0.06907628492, 0.1128252709, 0.1608620156,
    0.2098986488, 0.2580901278, 0.3044413444, 0.3484568400, 0.3899358212,
    0.4288485562, 0.4652621744, 0.4992960225, 0.5310954864, 0.5608147825,
    0.5886080720]
>
```

```
> loc := [-0.2, -0.192, -0.184, -0.176, -0.168, -0.160, -0.152, -0.144, -0.136, -0.128,
    -0.120, -0.112, -0.104, -0.096, -0.088, -0.080, -0.072, -0.064, -0.056, -0.048,
    -0.040, -0.032, -0.024, -0.016, -0.008, 0., 0.008, 0.016, 0.024, 0.032, 0.040, 0.048,
    0.056, 0.064, 0.072, 0.080, 0.088, 0.096, 0.104, 0.112, 0.120, 0.128, 0.136, 0.144, 0.152,
    0.160, 0.168, 0.176, 0.184, 0.192, 0.200] :
> vijfterm := [0.2811028958, 0.2776129747, 0.2743952154, 0.2714557969, 0.2687993777,
    0.2664290050, 0.2643460890, 0.2625504339, 0.2610403305, 0.2598127000, 0.2588632750,
    0.2581868078, 0.2577772859, 0.2576281542, 0.2577325129, 0.2580833035, 0.2586734650,
    0.2594960627, 0.2605443851, 0.2618120179, 0.2632928881, 0.2649812890, 0.2668718864,
    0.2689597090, 0.2712401271, 0.2737088239, 0.2763617603, 0.2791951336, 0.2822053391,
    0.2853889275, 0.2887425661, 0.2922630003, 0.2959470215, 0.2997914347, 0.3037930352,
    0.3079485852, 0.3122547988, 0.3167083295, 0.3213057637, 0.3260436162, 0.3309183330,
    0.3359262927, 0.3410638164, 0.3463271737, 0.3517125966, 0.3572162889, 0.3628344426,
    0.3685632476, 0.3743989080, 0.3803376538, 0.3863757543] :
  D5 := plot(loc, vijfterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
    = "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 5 termen "],
    legendstyle = [location = bottom], color = "Blue") :

> vierterm := [0.2810748549, 0.2775844677, 0.2743663186, 0.2714265991, 0.2687699771,
    0.2663995093, 0.2643166116, 0.2625210922, 0.2610112436, 0.2597839858, 0.2588350486,
    0.2581591771, 0.2577503526, 0.2576020091, 0.2577072366, 0.2580589660, 0.2586501239,
    0.2594737636, 0.2605231627, 0.2617918950, 0.2632738769, 0.2649633921, 0.2668550976,
    0.2689440136, 0.2712255035, 0.2736952445, 0.2763491916, 0.2791835384, 0.2821946762,
    0.2853791530, 0.2887336343, 0.2922548638, 0.2959396327, 0.2997847457, 0.3037869978,
    0.3079431529, 0.3122499258, 0.3167039714, 0.3213018780, 0.3260401626, 0.3309152726,
    0.3359235896, 0.3410614360, 0.3463250845, 0.3517107692, 0.3572146960, 0.3628330587,
    0.3685620498, 0.3743978750, 0.3803367674, 0.3863749965] :
  D4 := plot(loc, vierterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
    = "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 4 termen "],
    legendstyle = [location = bottom], color = "Red") :

> drieterm := [0.2808389368, 0.2773385039, 0.2741107339, 0.2711619638, 0.2684970044,
    0.2661190462, 0.2640296268, 0.2622286564, 0.2607145084, 0.2594841588, 0.2585333671,
    0.2578568839, 0.2574486743, 0.2573021320, 0.2574102920, 0.2577660137, 0.2583621433,
    0.2591916445, 0.2602477016, 0.2615237929, 0.2630137384, 0.2647117278, 0.2666123270,
    0.2687104687, 0.2710014339, 0.2734808222, 0.2761445163, 0.2789886442, 0.2820095360,
    0.2852036849, 0.2885677073, 0.2920983037, 0.2957922262, 0.2996462473, 0.3036571341,
    0.3078216271, 0.3121364225, 0.3165981616, 0.3212034214, 0.3259487132, 0.3308304811,
    0.3358451063, 0.3409889139, 0.3462581816, 0.3516491493, 0.3571580334, 0.3627810370,
    0.3685143636, 0.3743542316, 0.3802968863, 0.3863386106] :
  D3 := plot(loc, drieterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
    effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
    vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
    = "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
    = ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 3 termen "],
```

```
legendstyle = [location = bottom], color = "Green") :
```

```
> tweeterm := [0.2792834658, 0.2757132778, 0.2724157632, 0.2693979682, 0.2666654521,
0.2642221698, 0.2620704097, 0.2602107998, 0.2586423682, 0.2573626678, 0.2563679402,
0.2556533147, 0.2552130283, 0.2550406432, 0.2551292616, 0.2554717215, 0.2560607663,
0.2568891887, 0.2579499432, 0.2592362328, 0.2607415650, 0.2624597897, 0.2643851118,
0.2665120901, 0.2688356256, 0.2713509335, 0.2740535151, 0.2769391205, 0.2800037130,
0.2832434277, 0.2866545360, 0.2902334101, 0.2939764896, 0.2978802533, 0.3019411940,
0.3061557976, 0.3105205279, 0.3150318143, 0.3196860440, 0.3244795592, 0.3294086564,
0.3344695900, 0.3396585769, 0.3449718060, 0.3504054459, 0.3559556576, 0.3616186035,
0.3673904612, 0.3732674348, 0.3792457653, 0.3853217423] :
D2 := plot(loc, tweeterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
= "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
= ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 2 termen "],
legendstyle = [location = bottom], color = "Yellow") :
```

```
> eenterm := [0.2779204713, 0.2739110710, 0.2701101436, 0.2665266085, 0.2631693461,
0.2600471211, 0.2571684930, 0.2545417272, 0.2521746945, 0.2500747697, 0.2482487320,
0.2467026628, 0.2454418529, 0.2444707160, 0.2437927136, 0.2434102953, 0.2433248549,
0.2435367048, 0.2440450707, 0.2448481059, 0.2459429240, 0.2473256500, 0.2489914879,
0.2509347988, 0.2531491931, 0.2556276255, 0.2583624986, 0.2613457604, 0.2645690100,
0.2680235883, 0.2717006720, 0.2755913552, 0.2796867234, 0.2839779216, 0.2884562098,
0.2931130133, 0.2979399613, 0.3029289207, 0.3080720205, 0.3133616715, 0.3187905785,
0.3243517492, 0.3300384975, 0.3358444444, 0.3417635154, 0.3477899344, 0.3539182177,
0.3601431657, 0.3664598519, 0.3728636142, 0.3793500428] :
D1 := plot(loc, eenterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
= "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
= ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 1 term "],
legendstyle = [location = bottom], color = "Black") :
```

```
> zesterm := [0.2811036662, 0.2776138094, 0.2743961153, 0.2714567614, 0.2688004047,
0.2664300931, 0.2643472335, 0.2625516301, 0.2610415715, 0.2598139820, 0.2588645897,
0.2581881475, 0.2577786430, 0.2576295208, 0.2577338810, 0.2580846655, 0.2586748149,
0.2594973932, 0.2605456910, 0.2618132939, 0.2632941293, 0.2649824919, 0.2668730474,
0.2689608258, 0.2712411975, 0.2737098472, 0.2763627344, 0.2791960590, 0.2822062155,
0.2853897551, 0.2887433460, 0.2922637336, 0.2959477090, 0.2997920786, 0.3037936367,
0.3079491458, 0.3122553203, 0.3167088140, 0.3213062130, 0.3260440321, 0.3309187171,
0.3359266474, 0.3410641432, 0.3463274744, 0.3517128730, 0.3572165428, 0.3628346751,
0.3685634663, 0.3743991014, 0.3803378301, 0.3863759157] :
D6 := plot(loc, zesterm, axesfont = ["Cambria Math", 14], gridlines = true, labels = [alpha,
effectieve kiplengte (l) ], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal,
vertical], size = [800, 500], view = [-1 ..1, 0 ..1], title
= "Absolute afwijking effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
= ["Cambria Math", 18], tickmarks = [10, 10], legend = ["Gevonden oplossing 6 termen "],
legendstyle = [location = bottom], color = "Orange") :
```

```
> with(plots) : display({D1, D2, D3, D4, D5, D6}, size = [1000, 800], view = [-0.2 ..0.2, 0.2
..0.4], title = "Effectieve kiplengte voor beta =0.5 en een puntlast op 0.5 l", titlefont
= ["Cambria Math", 18]);
```

Bijlage I.13: Verdere analyse verticale rotatiestijfheid puntlast

> restart;

> $leff := \dfrac{\mathrm{sqrt}(0.2827\cdot(a^2+b^2)+0.4347\cdot a\cdot b-0.1757\cdot(a+b)+0.0335)}{\max(\mathrm{abs}(a),\mathrm{abs}(b),\mathrm{abs}(0.25-0.50\cdot a-0.5\cdot b))}$:

> $eq1 := 2\cdot MA+MB-F\cdot l\cdot(2\cdot g-3\cdot g^2+g^3)+\dfrac{6}{pho1}\cdot MA=0$:

> $eq2 := 2\cdot MB+MA-F\cdot l\cdot(g-g^3)+\dfrac{6}{pho2}\cdot MB=0$:

> $oplossing := solve(\{eq1, eq2\}, \{MA, MB\}); assign(oplossing)$:

$$oplossing := \left\{MA=\frac{F\,l\,g\,pho1\,(g^2\,pho2+2\,g^2-2\,g\,pho2-6\,g+pho2+4)}{pho1\,pho2+4\,pho1+4\,pho2+12}, MB=-\frac{F\,l\,g\,pho2\,(g^2\,pho1+2\,g^2-g\,pho1-2)}{pho1\,pho2+4\,pho1+4\,pho2+12}\right\} \quad (1)$$

> $g := 0.5 : a := \dfrac{MA}{F\cdot l} : b := \dfrac{MB}{F\cdot l}$:

>

> with(plots) : plot3d(leff, pho1 = 0 ..100, pho2 = 0 ..100) :

> contourplot(leff, pho1 = 1 ..500, pho2 = 1 ..500, axis[1] = [mode = log, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [mode = log, gridlines = [10, majorlines = 1]], filledregions = true, coloring = ["White", "DarkOliveGreen"], transparency = .3, legendstyle = [location = right], size = [850, 700], labels = [rho[A], rho[B]], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal, horizontal], axesfont = ["Cambria Math", 14], legendstyle = [font = ["Cambria Math", 14]], title = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast op 0.5l en verticaal verende opleggingen", titlefont = ["Cambria Math", 16], contours = [0.56, 0.57, 0.58, 0.59, 0.60, 0.61, 0.62, 0.63, 0.64, 0.65, 0.67]) :

> *restart*;

> $leff := \dfrac{\mathrm{sqrt}\left(0.2827\cdot\left(a^2+b^2\right)+0.4347\cdot a\cdot b-0.1312\cdot a-0.1069\cdot b+0.0158\right)}{\max(\mathrm{abs}(a),\mathrm{abs}(b),\mathrm{abs}(-a\cdot(1-g)-b\cdot g+g\cdot(1-g)))}$:

> $eq1 := 2\cdot MA+MB-F\cdot l\cdot\left(2\cdot g-3\cdot g^2+g^3\right)+\dfrac{6}{pho1}\cdot MA=0$:

> $eq2 := 2\cdot MB+MA-F\cdot l\cdot\left(g-g^3\right)+\dfrac{6}{pho2}\cdot MB=0$:

> $oplossing := solve(\{eq1, eq2\}, \{MA, MB\}); assign(oplossing);$

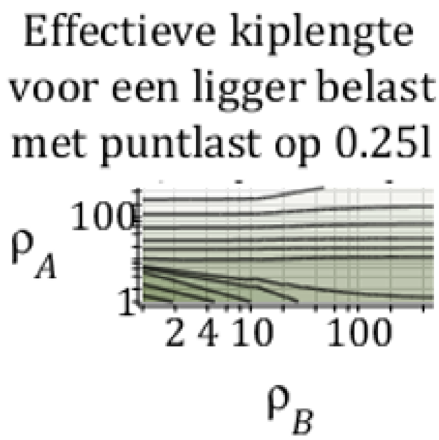
$$oplossing := \left\{MA=\frac{F\,l\,g\,pho1\,\left(g^2\,pho2+2\,g^2-2\,g\,pho2-6\,g+pho2+4\right)}{pho1\,pho2+4\,pho1+4\,pho2+12}, MB=-\frac{F\,l\,g\,pho2\,\left(g^2\,pho1+2\,g^2-g\,pho1-2\right)}{pho1\,pho2+4\,pho1+4\,pho2+12}\right\} \quad (1)$$

> $g := 0.25 : a := \dfrac{MA}{F\cdot l} : b := \dfrac{MB}{F\cdot l}$:

>

> *with*(*plots*) : *plot3d*(*leff*, *pho1* = 0 ..100, *pho2* = 0 ..100) :

> *contourplot*(*leff*, *pho2* = 1 ..500, *pho1* = 1 ..500, *axis*[1] = [*mode* = log, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *axis*[2] = [*mode* = log, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *filledregions* = *true*, *coloring* = ["White", "DarkOliveGreen"], *transparency* = .3, *legendstyle* = [*location* = *right*], *size* = [200, 200], *labels* = [rho[*B*] , rho[*A*]], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *horizontal*], *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *legendstyle* = [*font* = ["Cambria Math", 14]], *title* = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast op 0.25l en verticaal verende opleggingen", *titlefont* = ["Cambria Math", 16], *contours* = [0.27, 0.28, 0.30, 0.34, 0.40, 0.47, 0.53, 0.54, 0.56, 0.60, 0.62],);



>

>

Bijlage I.14: Verdere analyse verticale rotatiestijfheid q-last

> $eq1 := 8 \cdot MA + 4 \cdot MB - q \cdot l^2 + \frac{24}{rho\_a} \cdot MA = 0$:

> $eq2 := 8 \cdot MB + 4 \cdot MA - q \cdot l^2 + \frac{24}{rho\_b} \cdot MB = 0$:

> $solve(\{eq1, eq2\}, \{MA, MB\})$:

>

> $leff :=$
$(\mathrm{sqrt}(0.2827 \cdot (alf^2 + bet^2) + 0.4347 \cdot alf \cdot bet - 0.1086 \cdot (alf + bet) + 0.0122)) /$
$(\max(\mathrm{Heaviside}(0.5 - \mathrm{abs}(alf - bet)) \cdot (0.5 \cdot (alf - bet + 0.5)^2 - alf), \mathrm{abs}(bet),$
$\mathrm{abs}(alf)))$:

> $alf := \frac{1}{12} \frac{rho\_a \cdot (rho\_b + 6)}{rho\_a \cdot (rho\_b + 4) + 4(rho\_b + 3)}$:

> $bet := \frac{1}{12} \frac{rho\_b \cdot (rho\_a + 6)}{rho\_b \cdot (rho\_a + 4) + 4(rho\_a + 3)}$:

> *plot3d*(*leff*, *rho_a* = 1 ..200, *rho_b* = 1 ..200, *axis*[1] = [*mode* = log], *axis*[2] = [*mode* = log]) :

> *contourplot*(*leff*, *rho_a* = 1 ..500, *rho_b* = 1 ..500, *axis*[1] = [*mode* = log, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *axis*[2] = [*mode* = log, *gridlines* = [10, *majorlines* = 1]], *filledregions* = *true*, *coloring* = ["White", "DarkOliveGreen"], *transparency* = .3, *legendstyle* = [*location* = *right*], *contours* = [0.393, 0.40, 0.41, 0.43, 0.46, 0.50, 0.56, 0.63, 0.69, 0.78, 0.82, 0.83, 0.84, 0.85], *size* = [850, 700], *labels* = [rho[*A*], rho[*B*]], *labelfont* = ["Cambria Math", 16], *labeldirections* = [*horizontal*, *horizontal*], *axesfont* = ["Cambria Math", 14], *legendstyle* = [*font* = ["Cambria Math", 14]], *title* = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met q-last en verticaal verende opleggingen", *titlefont* = ["Cambria Math", 16]) :

>

Bijlage I.15: Ligger over 3 steunpunten met puntlast

> $restart;$

> $bet := \frac{l\cdot(g-g^3)}{2(l+n\cdot l)} : alfa := 0 :$

> $simplify(bet) :$

> $\mathrm{phi} := a\cdot \sin\left(\mathrm{Pi}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)\right) : \mathrm{psi} := a\cdot\sin\left(\mathrm{Pi}\cdot\left(\frac{(x+g\cdot l)}{l}\right)\right) :$

> $M1 := -alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x + (1-g)\cdot F\cdot x :$

> $M2 := -(alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-g) - alfa\cdot F\cdot x) - (bet\cdot F\cdot g\cdot l + bet\cdot F\cdot x) + F\cdot g\cdot l\cdot(1-g) - F\cdot g\cdot x :$

> $thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\left(int(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l) + int(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..(l\cdot(1-g)))\right) :$

> $thetab := \frac{1}{l\cdot(1-g)}\cdot\left(thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot x, x=0..(l\cdot(1-g))\right)\right) :$

> $wkip := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$

> $U := int\left(\frac{(\phi\cdot M1)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{(\mathrm{psi}\cdot M2)^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(l\cdot(1-g))\right) :$

> $dA := F\cdot wkip - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab :$

> $m1 := dA - U :$

> $m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy}\cdot int(\mathrm{phi}^2, x=0..l) :$

> $result := solve(m2 = m1, m0) :$

> $Mmax := F\cdot l\cdot \max(\mathrm{abs}(alfa), \mathrm{abs}(bet), \mathrm{abs}(g\cdot(1-g) - alfa\cdot(1-g) - bet\cdot g)) :$

> $leff := \frac{result[1]}{Mmax} :$

> $n := 1 :$

> $n1 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Blue"}, legend = [\text{"n=1.0"}]) :$

> $n := 2 :$

> $n2 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Green"}, legend = [\text{"n=2.0"}]) :$

> $n := 5 :$

> $n5 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Red"}, legend = [\text{"n=5.0"}]) :$

> $n := 10^8 :$

> $ninf := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Black"}, legend = [\text{"n=}\infty\text{"}]) :$

> $n := 0.5 :$

> $n05 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Gold"}, legend = [\text{"n=0.5"}]) :$

> $n := 0.2 :$

> $n02 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Brown"}, legend = [\text{"n=0.2"}]) :$

> $n := 0. :$

> $n0 := plot(leff, g=0..1, color = \text{"Orange"}, legend = [\text{"n=0.0"}]) :$

>

> plots[display](n0, n02, n05, n1, n2, n5, ninf, tickmarks = [10, 10], transparency = .2, legendstyle = [location = right], axis[1] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], axis[2] = [location = low, gridlines = [10, majorlines = 1]], size = [800, 500], view = [0..1, 0..0.8], labels = [gamma , "Effectieve kiplengte (l)"], labelfont = ["Cambria Math", 16], labeldirections = [horizontal, vertical], axesfont = ["Cambria Math", 14], legendstyle = [font = ["Cambria Math", 14]], title = "Effectieve kiplengte voor een ligger belast met puntlast en twee velden", titlefont = ["Cambria Math", 18], axis = [gridlines = 12, tickmarks = [10, subticks = 1]]) :

Bijlage J: Excel sheets bepaling c_3, c_4 en c_5

In paragraaf 5.2 zijn uitdrukkingen gevonden om, afhankelijk van de verzameling γ, constanten C_3, C_4 en C_5 te bepalen. Naarmate de complexiteit van de belastings-configuratie toeneemt, zullen de uitdrukkingen steeds groter en complexer worden. Met behulp van Excel kunnen somreeksen op een redelijk eenvoudige wijze berekend worden en daarom zijn de uitdrukkingen voor C_3, C_4 en C_5 verwerkt in Excel-sheets. Deze bijlage geeft toelichting op de gecreëerde sheets, die in het bijgeleverde Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** te vinden zijn (sheets '*C3, C4, C5 en coef C5*').

Bepaling C_3

C_3 wordt bepaald via vergelijking (5.19). Om tot een uitgebreid model te komen, kunnen tot 1000 termen aan de verzameling γ toegevoegd worden. Wanneer enkel 5 termen nodig zijn, dienen de overige 995 termen gelijk te worden gesteld aan 1, waardoor deze 995 puntlasten dus aangrijpen op het uiteinde van de ligger en daarmee geen invloed hebben op de buigende momenten en dus ook niet op het kipgedrag van de ligger.

Om in Excel tot een overzichtelijke berekening te komen, is vergelijking (5.19) opgedeeld in meerdere onderdelen.

$$C_3 = \sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{\underbrace{-\frac{1}{\pi^2}(\gamma_i-1)}_{\text{cosA}}\ \underbrace{\cos(\pi\gamma_i)^2}_{\text{cosB}}}_{\text{cosTOT}} + \underbrace{\frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)}_{\text{sincosTOT}} + \underbrace{\underbrace{\frac{-\gamma_i{}^3+3\gamma_i{}^2-2\gamma_i}{3}}_{\text{restA}} + \underbrace{\frac{\gamma_i-1}{\pi^2}}_{\text{restB}}}_{\text{restTOT}}\right]$$

In deze bijlage wordt voor de verzameling γ een honderdtal waarden aangenomen die gelijkmatig verdeeld zijn over de lengte van de ligger en dus daarmee een gelijkmatig verdeelde belasting representeren. De indeling van de Excel-sheet om C_3 is weergegeven door Figuur J.1.

Bepaling constante C3			**C3 =**	-10.867			
gamma	**cosA**	**cosB**	**cosTOT**	**sincosTOT**	**restA**	**restB**	**restTOT**
0.005	0.100815	0.999753	0.10079	0.000507	-0.00331	-0.10081	-0.10412
0.015	0.099801	0.997781	0.09958	0.001518	-0.00978	-0.0998	-0.10958
0.025	0.098788	0.993844	0.09818	0.002523	-0.01605	-0.09879	-0.11484
0.035	0.097775	0.987958	0.096598	0.003518	-0.02212	-0.09777	-0.1199
0.045	0.096762	0.980147	0.094841	0.004499	-0.02801	-0.09676	-0.12477
0.055	0.095749	0.97044	0.092918	0.005462	-0.0337	-0.09575	-0.12945
0.065	0.094735	0.958877	0.09084	0.006404	-0.0392	-0.09474	-0.13394
0.075	0.093722	0.945503	0.088615	0.007321	-0.04452	-0.09372	-0.13824
0.085	0.092709	0.930371	0.086254	0.008209	-0.04965	-0.09271	-0.14236
0.095	0.091696	0.91354	0.083768	0.009064	-0.05459	-0.0917	-0.14629
0.105	0.090682	0.895078	0.081168	0.009884	-0.05936	-0.09068	-0.15004
0.115	0.089669	0.875056	0.078466	0.010664	-0.06395	-0.08967	-0.15362
0.125	0.088656	0.853553	0.075673	0.011403	-0.06836	-0.08866	-0.15702
0.135	0.087643	0.830656	0.072801	0.012096	-0.0726	-0.08764	-0.16024
0.145	0.08663	0.806454	0.069863	0.012742	-0.07666	-0.08663	-0.16329
0.155	0.085616	0.781042	0.06687	0.013337	-0.08055	-0.08562	-0.16617
0.165	0.084603	0.754521	0.063835	0.01388	-0.08427	-0.0846	-0.16888
0.175	0.08359	0.726995	0.06077	0.014368	-0.08783	-0.08359	-0.17142
0.185	0.082577	0.698574	0.057686	0.014799	-0.09122	-0.08258	-0.1738
0.195	0.081564	0.669369	0.054596	0.015172	-0.09445	-0.08156	-0.17601

***Figuur J.1**: Excel-sheet ter bepaling van C3, waarbij alleen de eerste 20 termen weergeven zijn*

De uiteindelijke waarde voor C_3 kan hiermee gevonden worden door de met groen weergegeven kolommen te sommeren.

Bepaling C_4

Op een zelfde wijze is een Excel sheet voor de bepaling van constante C_4 gecreëerd. Hiervoor is vergelijking (5.20) opgedeeld in meerdere onderdelen.

$$C_4 = \sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{\underbrace{\frac{\gamma_i}{\pi^2}}_{\text{cosA}}\quad\underbrace{\cos(\pi\gamma_i)^2}_{\text{cosB}}}_{\text{cosTOT}} - \underbrace{\frac{1}{\pi^3}\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)}_{\text{sincosTOT}} + \underbrace{\underbrace{\frac{{\gamma_i}^3-\gamma_i}{3}}_{\text{restA}} - \underbrace{\frac{\gamma_i}{\pi^2}}_{\text{restB}}}_{\text{restTOT}}\right]$$

Hiermee is uiteindelijk de door Figuur J.2. weergegeven Excel sheet gemaakt.

Bepaling constante C4			**C4 =**	-10.867			
gamma	**cosA**	**cosB**	**cosTOT**	**sincosTOT**	**restA**	**restB**	**restTOT**
0.005	0.000507	0.999753	0.000506	-0.00051	-0.00167	-0.00051	-0.00217
0.015	0.00152	0.997781	0.001516	-0.00152	-0.005	-0.00152	-0.00652
0.025	0.002533	0.993844	0.002517	-0.00252	-0.00833	-0.00253	-0.01086
0.035	0.003546	0.987958	0.003504	-0.00352	-0.01165	-0.00355	-0.0152
0.045	0.004559	0.980147	0.004469	-0.0045	-0.01497	-0.00456	-0.01953
0.055	0.005573	0.97044	0.005408	-0.00546	-0.01828	-0.00557	-0.02385
0.065	0.006586	0.958877	0.006315	-0.0064	-0.02158	-0.00659	-0.02816
0.075	0.007599	0.945503	0.007185	-0.00732	-0.02486	-0.0076	-0.03246
0.085	0.008612	0.930371	0.008013	-0.00821	-0.02813	-0.00861	-0.03674
0.095	0.009626	0.91354	0.008793	-0.00906	-0.03138	-0.00963	-0.04101
0.105	0.010639	0.895078	0.009522	-0.00988	-0.03461	-0.01064	-0.04525
0.115	0.011652	0.875056	0.010196	-0.01066	-0.03783	-0.01165	-0.04948
0.125	0.012665	0.853553	0.01081	-0.0114	-0.04102	-0.01267	-0.05368
0.135	0.013678	0.830656	0.011362	-0.0121	-0.04418	-0.01368	-0.05786
0.145	0.014692	0.806454	0.011848	-0.01274	-0.04732	-0.01469	-0.06201
0.155	0.015705	0.781042	0.012266	-0.01334	-0.05043	-0.0157	-0.06613
0.165	0.016718	0.754521	0.012614	-0.01388	-0.0535	-0.01672	-0.07022
0.175	0.017731	0.726995	0.012891	-0.01437	-0.05655	-0.01773	-0.07428
0.185	0.018744	0.698574	0.013094	-0.0148	-0.05956	-0.01874	-0.0783
0.195	0.019758	0.669369	0.013225	-0.01517	-0.06253	-0.01976	-0.08229

***Figuur J.2**: Excel sheet ter bepaling van C4, waarbij alleen de eerste 20 termen weergeven zijn*

C_4 wordt wederom gevonden door de met groen weergegeven kolommen te sommeren conform vergelijking (5.20).

Bepaling C_5

Constante C_5 wordt gevonden met behulp van vergelijking (5.21). Om de Excel sheet overzichtelijk te houden is ervoor gekozen deze vergelijking op te delen in drie delen: $C_{5,sincos}$, $C_{5,rest,2\pi^3}$ en $C_{5,rest,2\pi}$. Daarbij zijn ook deze drie delen onderverdeeld in kleinere stukjes. Hieronder zijn alle onderdelen uit de Excel sheet weergegeven. Indien de lezer nog vragen heeft bij de verwerking van de ingewikkelde somreeksen, wordt verwezen naar het bijgeleverde Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'***. Met behulp van dit bestand kunnen de verschillende relaties eenvoudig gevisualiseerd worden door de formules behorend bij verschillende cellen te beschouwen.

$$C_{5,sincos} = \frac{1}{6\pi^3}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{\underbrace{\underbrace{6\pi\cos(\pi\gamma_i)^2}_{\text{cosA}} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j(\gamma_i-1))}_{\text{somAcos}}\right.}_{\text{somAcosTOT}} + \left.\underbrace{\gamma_i\cdot\sum_{j=i}^{n}(\gamma_j-1)}_{\text{somBcosTOT}}\right)}_{\text{cosTOT}} - \underbrace{\underbrace{6\sin(\pi\gamma_i)\cos(\pi\gamma_i)}_{\text{sincosA}} \cdot \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(\gamma_j) - \frac{1+2(n-i)}{2}}_{\text{sincosB}}\right)}_{\text{sincosTOT}}\right\}\right]$$

$$C_{5,rest,2\pi^3} = \frac{1}{6\pi^3}\left[2\pi^3\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left\{\underbrace{\gamma_i^{\,4}}_{\text{R1\_4}} + \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{j=i+1\leq n}^{n}(\gamma_j)}_{\text{somR1\_3}} - (n+2-i)\right)\cdot\gamma_i^{\,3}}_{\text{R1\_3}} + \underbrace{\gamma_i^{\,2}}_{\text{R1\_2}} + \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{j=i+1\leq n}^{n}\underbrace{(\gamma_j^{\,3}-3\gamma_j^{\,3}+\gamma_j)}_{\text{R1\_1term}}}_{\text{R1\_1som}}\right)\gamma_i}_{\text{R1\_1}}\right\}}_{\text{R1\_TOT}}\right]$$

$$C_{5,rest,2\pi} = \frac{1}{6\pi^3}\left[2\pi\sum_{i=1}^{n}\left\{\underbrace{\underbrace{-\frac{3}{2}\gamma_i^{\,2}}_{\text{R2\_2}} + \underbrace{\left(\underbrace{\frac{3+6(n-i)}{2}}_{\text{R2\_1A}} - \underbrace{3\cdot\underbrace{\sum_{j=i+1\leq n}^{n}(\gamma_j)}_{\text{R2\_1som}}}_{\text{R2\_1B}}\right)\gamma_i}_{\text{R2\_1}}}_{\text{R2\_TOT}}\right\}\right]$$

De uitwerking van $C_{5,sincos}$ in Excel is weergegeven in Figuur J.3.

Bepaling C5		C5 =	121.8651							
n =	100									
gamma	**i**	**sincosA**	**sincosB**	**sincosTOT**	**cosA**	**gamma-1**	**somAcos**	**somAcosTOT**	**somBcosTOT**	**cosTOT**
0.005	1	-0.09423	-49.5	4.664498	18.84491	-0.995	-0.00498	0	-0.25	-4.71123
0.015	2	-0.28232	-48.5	13.69276	18.80773	-0.985	-0.01478	-0.004925	-0.735075	-13.9177
0.025	3	-0.4693	-47.5	22.29191	18.73352	-0.975	-0.02438	-0.0195	-1.2005	-22.8549
0.035	4	-0.65443	-46.5	30.43098	18.62258	-0.965	-0.03378	-0.043425	-1.646575	-31.4722
0.045	5	-0.83697	-45.5	38.08229	18.47533	-0.955	-0.04298	-0.0764	-2.0736	-39.722
0.055	6	-1.01621	-44.5	45.22151	18.29237	-0.945	-0.05198	-0.118125	-2.481875	-47.5602
0.065	7	-1.19144	-43.5	51.8278	18.07441	-0.935	-0.06078	-0.1683	-2.8717	-54.9462
0.075	8	-1.36197	-42.5	57.88379	17.82232	-0.925	-0.06938	-0.226625	-3.243375	-61.8434
0.085	9	-1.52712	-41.5	63.37566	17.53708	-0.915	-0.07778	-0.2928	-3.5972	-68.2192
0.095	10	-1.68625	-40.5	68.29313	17.21983	-0.905	-0.08598	-0.366525	-3.933475	-74.0453
0.105	11	-1.83872	-39.5	72.62949	16.87181	-0.895	-0.09398	-0.4475	-4.2525	-79.2975
0.115	12	-1.98394	-38.5	76.38152	16.49441	-0.885	-0.10178	-0.535425	-4.554575	-83.9565
0.125	13	-2.12132	-37.5	79.54951	16.0891	-0.875	-0.10938	-0.63	-4.84	-88.0074
0.135	14	-2.25033	-36.5	82.13716	15.6575	-0.865	-0.11678	-0.730925	-5.109075	-91.4398
0.145	15	-2.37047	-35.5	84.15151	15.20129	-0.855	-0.12398	-0.8379	-5.3621	-94.248
0.155	16	-2.48124	-34.5	85.60284	14.72229	-0.845	-0.13098	-0.950625	-5.599375	-96.431
0.165	17	-2.58223	-33.5	86.50457	14.22238	-0.835	-0.13778	-1.0688	-5.8212	-97.9922
0.175	18	-2.67302	-32.5	86.87314	13.70354	-0.825	-0.14438	-1.192125	-6.027875	-98.9395
0.185	19	-2.75326	-31.5	86.72781	13.16781	-0.815	-0.15078	-1.3203	-6.2197	-99.2853
0.195	20	-2.82264	-30.5	86.09059	12.61731	-0.805	-0.15698	-1.453025	-6.396975	-99.0459

Figuur J.3: *Excel sheet ter bepaling van C5sincos, waarbij enkel de eerste twintig termen weergegeven zijn*

Middels de in Figuur J.3. weergegeven sheet wordt $C_{5,sincos}$ bepaald door de met groen weergegeven kolommen bij elkaar op te tellen en te delen door $6\pi^3$. De uitwerking van de gehele $C_{5,rest}$ term in Excel is weergegeven in Figuur J.4.

R1_4	somR1_3	R1_3	R1_2	R1_1term	R1_1som	R1_1	R1_TOT	R2_2	R2_1A	R2_1som	R2_1B	R2_1	R2_TOT
6.25E-10	49.995	-6.4E-06	0.000025	0.009925	24.99132	0.124957	0.124975	-3.8E-05	298.5	49.995	149.985	0.742575	0.742538
5.06E-08	49.98	-0.00017	0.000225	0.029328	24.962	0.37443	0.374486	-0.00034	295.5	49.98	149.94	2.1834	2.183063
3.91E-07	49.955	-0.00077	0.000625	0.048141	24.91386	0.622846	0.622705	-0.00094	292.5	49.955	149.865	3.565875	3.564938
1.5E-06	49.92	-0.00206	0.001225	0.066368	24.84749	0.869662	0.868827	-0.00184	289.5	49.92	149.76	4.8909	4.889063
4.1E-06	49.875	-0.00429	0.002025	0.084016	24.76347	1.114356	1.112091	-0.00304	286.5	49.875	149.625	6.159375	6.156338
9.15E-06	49.82	-0.00768	0.003025	0.101091	24.66238	1.356431	1.351782	-0.00454	283.5	49.82	149.46	7.3722	7.367663
1.79E-05	49.755	-0.01243	0.004225	0.1176	24.54478	1.595411	1.587228	-0.00634	280.5	49.755	149.265	8.530275	8.523938
3.16E-05	49.68	-0.0187	0.005625	0.133547	24.41123	1.830843	1.817802	-0.00844	277.5	49.68	149.04	9.6345	9.626063
5.22E-05	49.595	-0.02666	0.007225	0.148939	24.26229	2.062295	2.042916	-0.01084	274.5	49.595	148.785	10.68578	10.67494
8.15E-05	49.5	-0.03644	0.009025	0.163782	24.09851	2.289359	2.262027	-0.01354	271.5	49.5	148.5	11.685	11.67146
0.000122	49.395	-0.04816	0.011025	0.178083	23.92043	2.511645	2.474629	-0.01654	268.5	49.395	148.185	12.63308	12.61654
0.000175	49.28	-0.06193	0.013225	0.191846	23.72858	2.728787	2.680257	-0.01984	265.5	49.28	147.84	13.5309	13.51106
0.000244	49.155	-0.07782	0.015625	0.205078	23.52351	2.940438	2.878485	-0.02344	262.5	49.155	147.465	14.37938	14.35594
0.000332	49.02	-0.09591	0.018225	0.217785	23.30572	3.146272	3.068924	-0.02734	259.5	49.02	147.06	15.1794	15.15206
0.000442	48.875	-0.11623	0.021025	0.229974	23.07575	3.345983	3.251222	-0.03154	256.5	48.875	146.625	15.93188	15.90034
0.000577	48.72	-0.13883	0.024025	0.241649	22.8341	3.539285	3.425061	-0.03604	253.5	48.72	146.16	16.6377	16.60166
0.000741	48.555	-0.16372	0.027225	0.252817	22.58128	3.725911	3.590162	-0.04084	250.5	48.555	145.665	17.29778	17.25694
0.000938	48.38	-0.1909	0.030625	0.263484	22.3178	3.905614	3.746276	-0.04594	247.5	48.38	145.14	17.913	17.86706
0.001171	48.195	-0.22037	0.034225	0.273657	22.04414	4.078166	3.89319	-0.05134	244.5	48.195	144.585	18.48428	18.43294
0.001446	48	-0.25211	0.038025	0.28334	21.7608	4.243356	4.030721	-0.05704	241.5	48	144	19.0125	18.95546

Figuur J.4*: Excel sheet ter bepaling van C5rest, waarbij enkel de eerste 20 termen weergegeven zijn*

$C_{5,rest}$ kan vervolgens bepaald worden door de kolom R1_TOT te sommeren en te vermenigvuldigen met $2\pi^3$ en kolom R2_TOT te sommeren en te vermenigvuldigen met 2π. $C_{5,rest}$ wordt hiermee gevonden door deze twee waardes bij elkaar op te tellen en te delen door $6\pi^3$. C_5 kan nu bepaald worden via $C_5 = C_{5,sincos} + C_{5,rest}$.

Bepaling somAcosTOT

Naast de gegeven drie sheets ter bepaling van C_3, C_4 en C_5, is er ook nog een extra sheet gecreëerd ter bepaling van somAcosTOT (welke nodig is voor de Excel sheet weergeven in Figuur J.3). Deze term is representatief voor de volgende term in de somreeks behorend bij uitdrukking voor C_5:

$$\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j(\gamma_i - 1)) \tag{J.1}$$

Daar waar alle overige sommaties 1-dimensionaal zijn, is deze sommatie 2-dimensionaal. Voor iedere waarde van i moet voor alle waardes $j < i$ de waarde van deze vermenigvuldiging bepaald worden, waarna deze per i gesommeerd worden. Deze sommatie per i is uiteindelijk weer input voor de Excel sheet weergeven in Figuur J.3. Dit resulteert voor 100 puntlasten in een 100x100 matrix, waarbij de waardes boven de diagonaal gelijk aan 0 zijn. Deze procedure is weergeven door Figuur J.5.

Aanvulling term SOMACOSTOT									
0.005									
0.015	-0.00493								
0.025	-0.00488	-0.01463							
0.035	-0.00483	-0.01448	-0.02413						
0.045	-0.00478	-0.01433	-0.02388	-0.03343					
0.055	-0.00473	-0.01418	-0.02363	-0.03308	-0.04253				
0.065	-0.00468	-0.01403	-0.02338	-0.03273	-0.04208	-0.05143			
0.075	-0.00463	-0.01388	-0.02313	-0.03238	-0.04163	-0.05088	-0.06013		
0.085	-0.00458	-0.01373	-0.02288	-0.03203	-0.04118	-0.05033	-0.05948	-0.06863	
0.095	-0.00453	-0.01358	-0.02263	-0.03168	-0.04073	-0.04978	-0.05883	-0.06788	-0.07693

Figuur J.5*: Excel sheet ter bepaling van somAcosTOT, waarbij enkel de eerste 10 termen zijn weergegeven*

Bijlage K: Excel sheet bepaling M_{max}

Naast de drie sheets waarmee C_3, C_4 en C_5 bepaald kunnen worden, bevat Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** ook een sheet (*'Mmax'*) waarmee het maximale moment in de ligger bepaald wordt. Om deze sheet te creëren is uitdrukking (5.32) opgedeeld in een aantal onderdelen.

$$M_{\gamma_i} = Fl \cdot \left[\underbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j)}_{\text{Term2}} \quad + \quad \underbrace{\gamma_i \cdot \left(\underbrace{(n-i+1)}_{\text{nterm}} - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j \right)}_{\text{Term1}} \quad - \alpha(1-\gamma_i) - \beta\gamma_i}_{\text{Mi}} \right]$$

Vervolgens zijn deze onderdelen stapsgewijs verwerkt in Excel, zoals weergegeven in Figuur K.1**.**

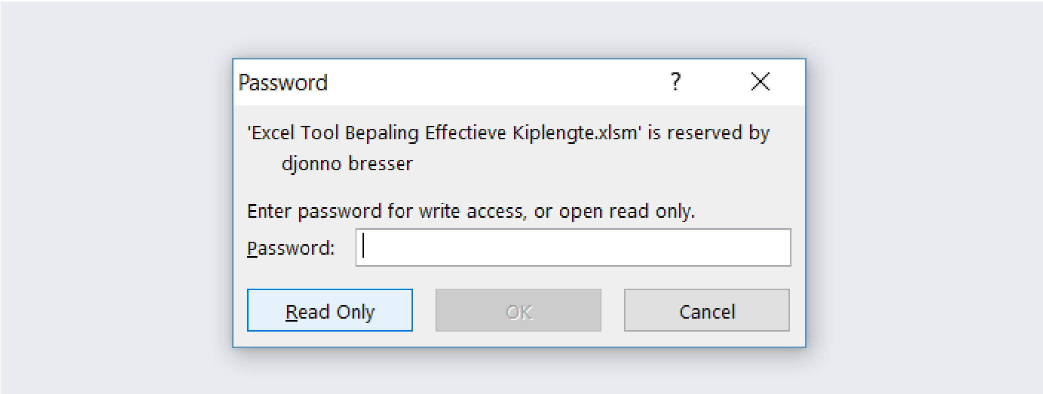
					alfa =	**0**	Fl		
Bepaling Mmax		n =	100		**beta =**	**0**	Fl	Maximaal moment	12.5 Fl
gamma	**i**	**nterm**	**Term1**	**Term2**	**Mi**	**Mabs**			
0.005	1	100	0.25	0	0.25	0.25			
0.015	2	99	0.735	0.005	0.74	0.74			
0.025	3	98	1.2	0.02	1.22	1.22			
0.035	4	97	1.645	0.045	1.69	1.69			
0.045	5	96	2.07	0.08	2.15	2.15			
0.055	6	95	2.475	0.125	2.6	2.6			
0.065	7	94	2.86	0.18	3.04	3.04			
0.075	8	93	3.225	0.245	3.47	3.47			
0.085	9	92	3.57	0.32	3.89	3.89			
0.095	10	91	3.895	0.405	4.3	4.3			
0.105	11	90	4.2	0.5	4.7	4.7			
0.115	12	89	4.485	0.605	5.09	5.09			
0.125	13	88	4.75	0.72	5.47	5.47			
0.135	14	87	4.995	0.845	5.84	5.84			
0.145	15	86	5.22	0.98	6.2	6.2			
0.155	16	85	5.425	1.125	6.55	6.55			
0.165	17	84	5.61	1.28	6.89	6.89			
0.175	18	83	5.775	1.445	7.22	7.22			
0.185	19	82	5.92	1.62	7.54	7.54			
0.195	20	81	6.045	1.805	7.85	7.85			

Figuur K.1*: Excel sheet ter bepaling van het maximale moment in de ligger, waarbij enkel de eerste 20 termen zijn weergegeven*

In deze figuur is voor de verzameling γ een gelijkmatig verdeelde verzameling gekozen die een q-last simuleert. Het maximale moment in de ligger volgt uit het maximale absolute moment ter plaatse van één van de eenheidspuntlasten uit verzameling γ. M_{max} wordt vervolgens rechtsboven in de sheet weergegeven, als functie van de grootte van de eenheidspuntlast F en de overspanningslengte.

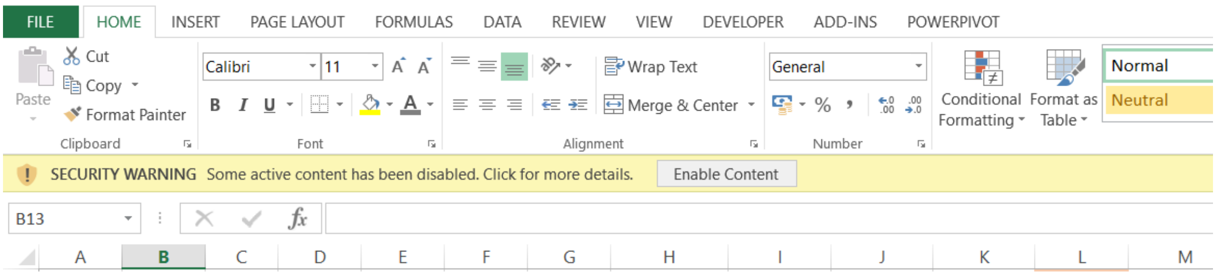
Bijlage L: Toelichting openen Excel Tool

In deze bijlage wordt een korte handleiding uitgereikt waarin verduidelijkt wordt hoe de Excel bestand ***'Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte'*** geopend dient te worden. Om te verzekeren dat het systeem niet aangepast kan worden, is het bestand op 'read-only' gezet. Dit houdt in dat gebruikers het originele bestand enkel kunnen bewerken en niet opslaan (behalve wanneer zij het wachtwoord hebben waarmee toegang wordt verkregen tot aanpassing). Hiermee blijft het gecreëerde systeem intact. Doordat het Excel bestand een 'read-only' bestand is, verschijnt bij het openen de volgende melding:



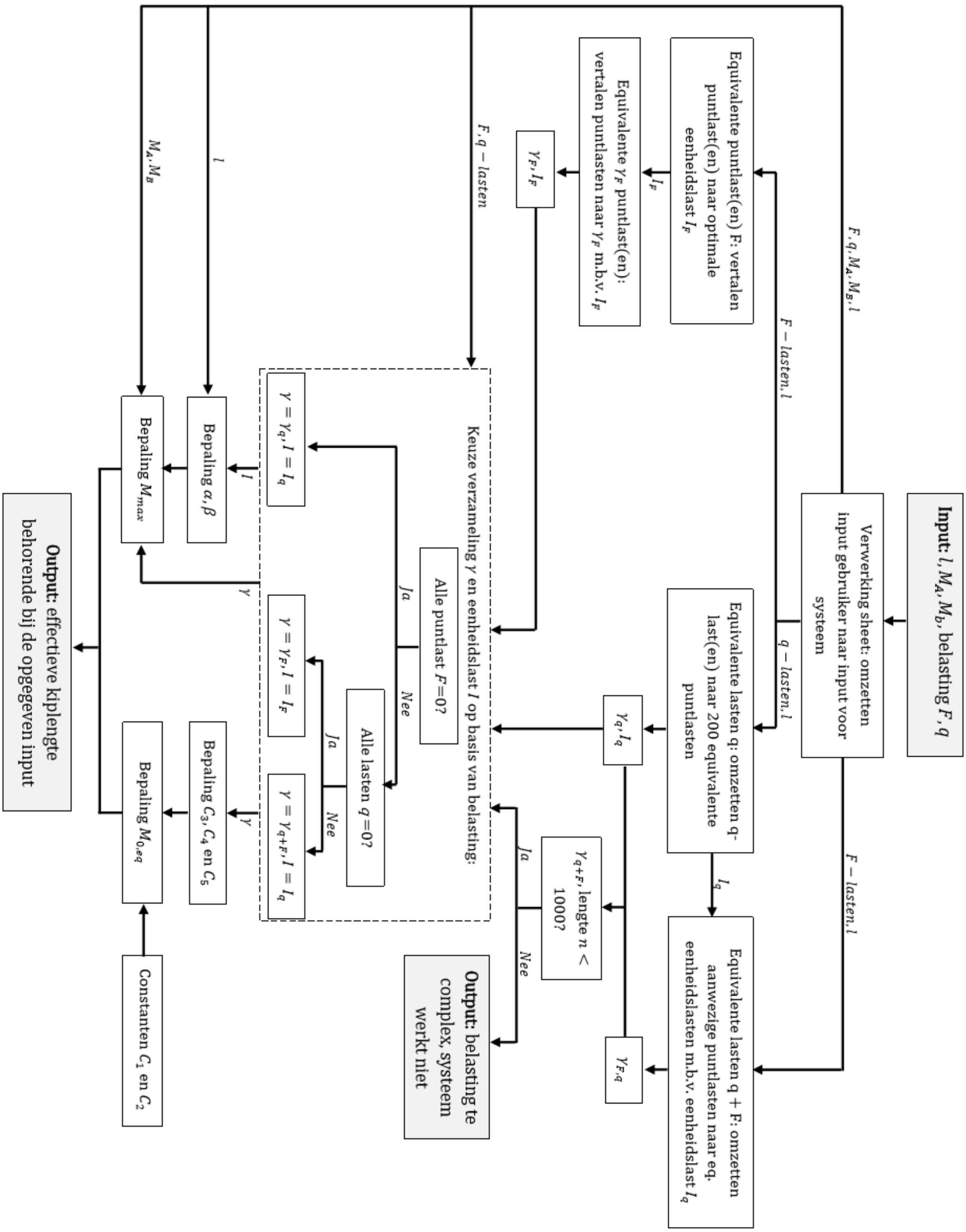
De optie '***Read Only***' dient ingedrukt te worden. Indien de gebruiker het wachtwoord tot zijn beschikking heeft kan deze in dit scherm ingevoerd worden.

Om de Excel Tool te laten functioneren, is het essentieel dat de Macro's niet geblokkeerd worden door de standaard veiligheid procedures van Excel. Wanneer het bestand voor het eerst geopend wordt, kan de volgende melding weergegeven worden (in dit geval in het Engels, dergelijke melding wordt ook verkregen in de Nederlandse versie):



In het geval dat deze melding weergegeven wordt, dient de optie ***'Enable Content'*** gebruikt te worden. Anders zullen de Macro's en daarmee de hele Excel Tool **NIET** werken.

Bijlage M: Flowchart gecreëerde Excel Tool



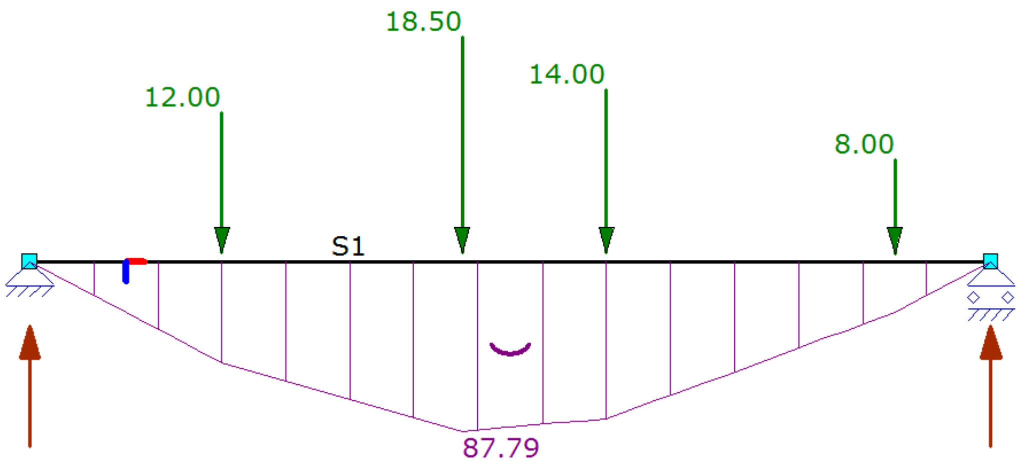
Bijlage N: Verificatie omzetting naar verzameling γ

In deze bijlage wordt het in paragraaf 6.2 beschreven systeem om een willekeurige belastings-configuratie om te zetten naar een verzameling γ getest en geverifieerd. Deze verificatie kan uitgevoerd worden door in te zien dat een equivalente puntlastenverdeling hetzelfde momentenverloop en hetzelfde maximale moment moet geven als de beschouwde originele belastings-configuratie. Indien dat zo is, is bepalen van de effectieve kiplengte voor de verzameling puntlasten op locatie γ equivalent aan bepalen van de effectieve kiplengte voor de beschouwde belastings-configuratie. In deze bijlage is deze verificatie voor een viertal situaties uitgevoerd.

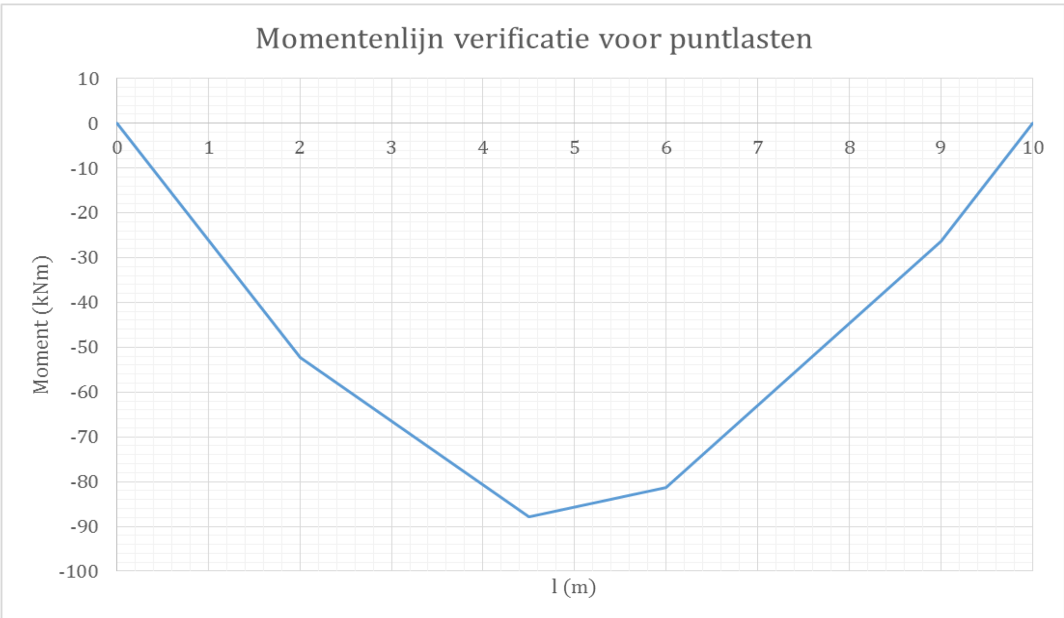
Geval met enkel puntlasten

Voor deze verificatie zijn de volgende willekeurige parameters toegepast:

- $l = 10\ m$
- $F_1 = 12\ kN$ op 2 m van linker oplegging.
- $F_2 = 18.5\ kN$ op 4.5 m
- $F_3 = 14\ kN$ op 6 m
- $F_4 = 8\ kN$ op 9 m



***Figuur N.1**: Momentenlijn voor enkel puntlasten vanuit MatrixFrame*



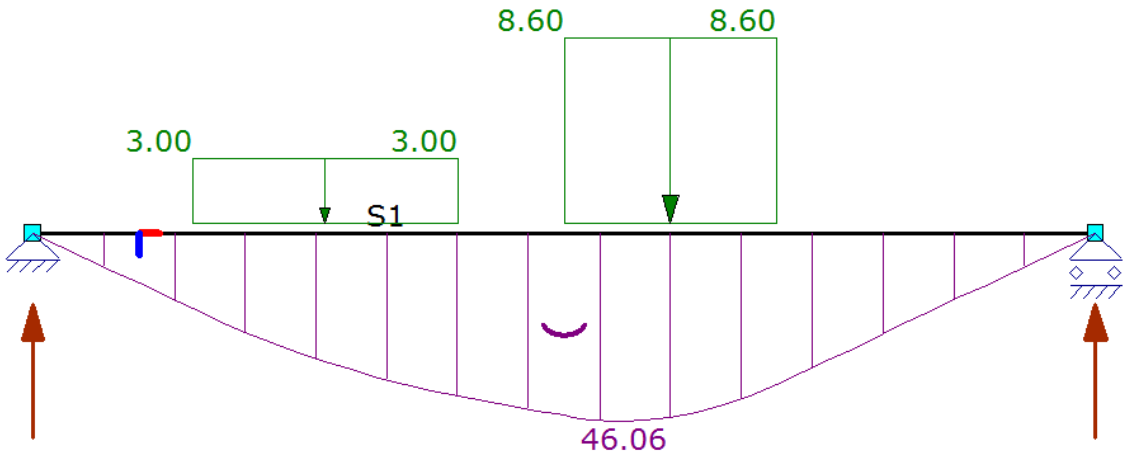
***Figuur N.2**: Momentenlijn voor enkel puntlasten vanuit Excel Tool*

Ter vergelijking zijn deze parameters ook ingevoerd in MatrixFrame. De momentenlijnen zijn te vinden in Figuren N.1 en N.2. Uit de Excel Tool volgt een maximaal moment gelijk aan 87.7875 kNm. Voor enkel puntlasten komen de momentenlijnen overeen.

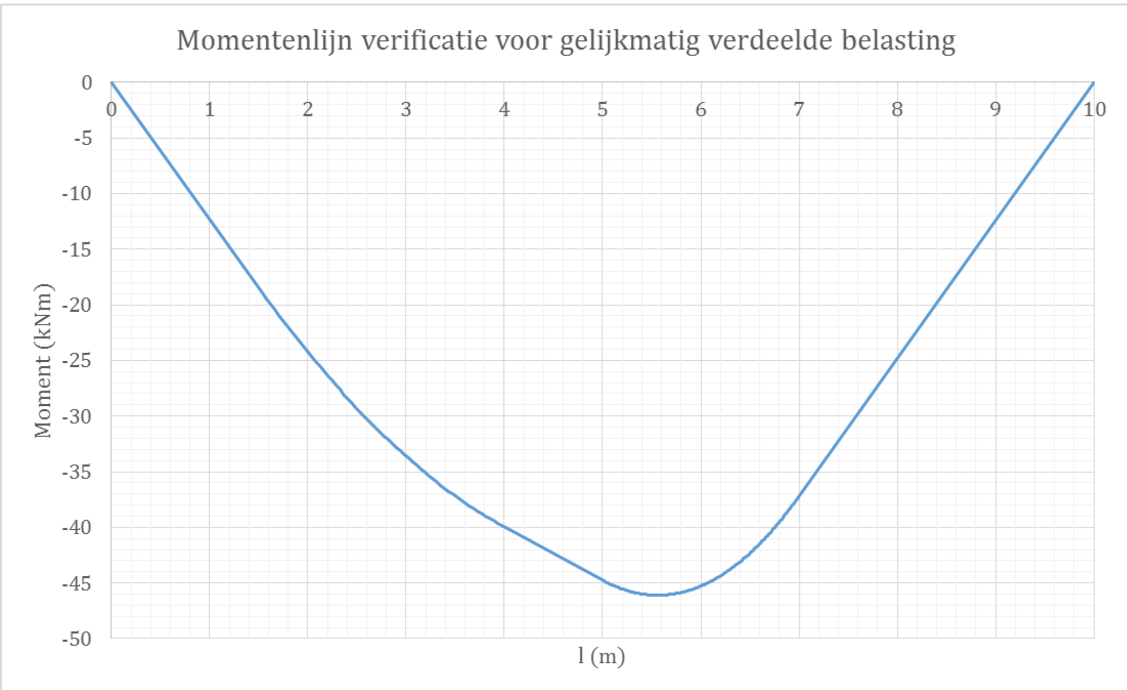
Geval met enkel gelijkmatig verdeelde belastingen

Voor deze verificatie zijn de volgende willekeurige parameters gebruikt:

- $l = 10\ m$
- $q_1 = 3\frac{kN}{m}$ voor 1.5 tot 4 m vanaf de linker oplegging
- $q_2 = 8.6\frac{kN}{m}$ voor 5 tot 7 m vanaf de linker oplegging



***Figuur N.3**: Momentenlijn voor enkel gelijkmatig verdeelde belastingen vanuit MatrixFrame*



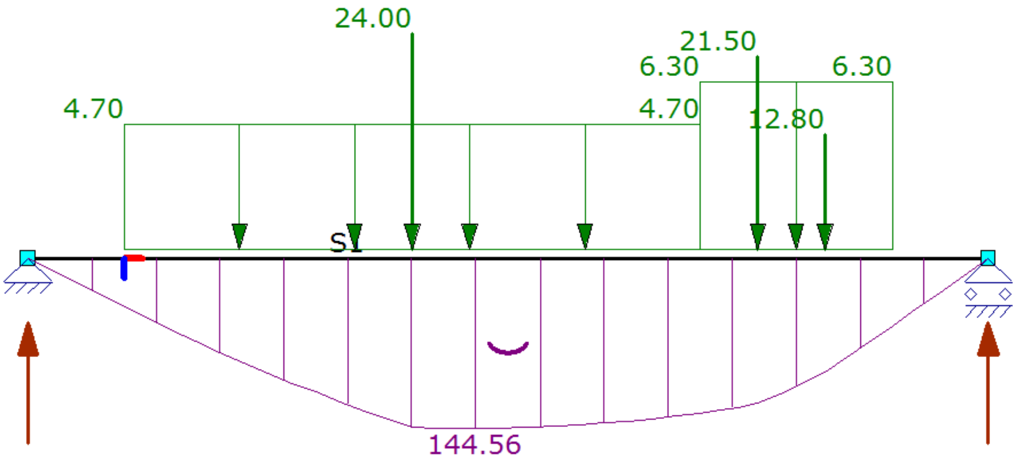
***Figuur N.4**: Momentenlijn voor enkel gelijkmatig verdeelde belastingen vanuit Excel Tool*

De momentenlijnen zijn weergeven in Figuren N.3 en N.4. Vanuit de Excel Tool volgt een maximaal moment gelijk aan 46.10 kN, wat zo goed als gelijk is aan de exacte waarde (door de opdeling in 200 puntlasten wordt een fout geïntroduceerd). De momentenlijnen komen overeen voor enkel q-lasten.

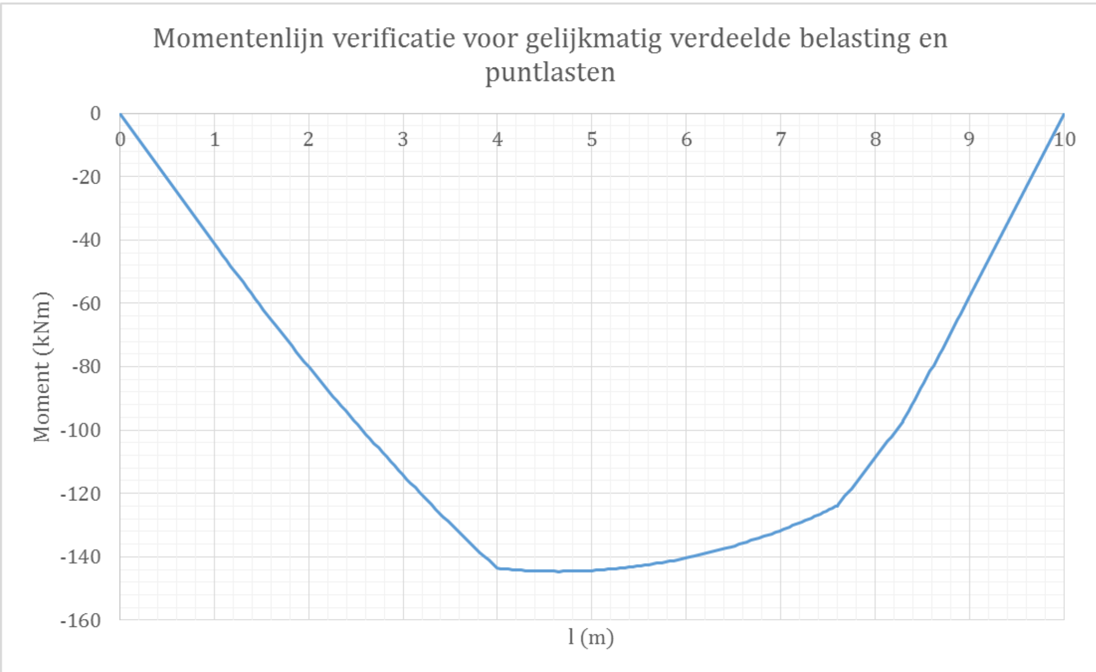
Geval met combinatie van puntlasten en gelijkmatig verdeelde belastingen

Voor deze verificatie zijn de volgende willekeurige parameters gebruikt:

- $l = 10\ m$
- $F_1 = 24\ kN$ op 4 m van linker oplegging.
- $F_2 = 21.5\ kN$ op 7.6 m
- $F_3 = 12.8\ kN$ op 8.3 m
- $q_1 = 4.7 \frac{kN}{m}$ voor 1 tot 7 m vanaf de linker oplegging
- $q_2 = 6.3 \frac{kN}{m}$ voor 7 tot 9 m vanaf de linker oplegging



***Figuur N.5**: Momentenlijn voor combinatie puntlasten en q-lasten vanuit MatrixFrame*



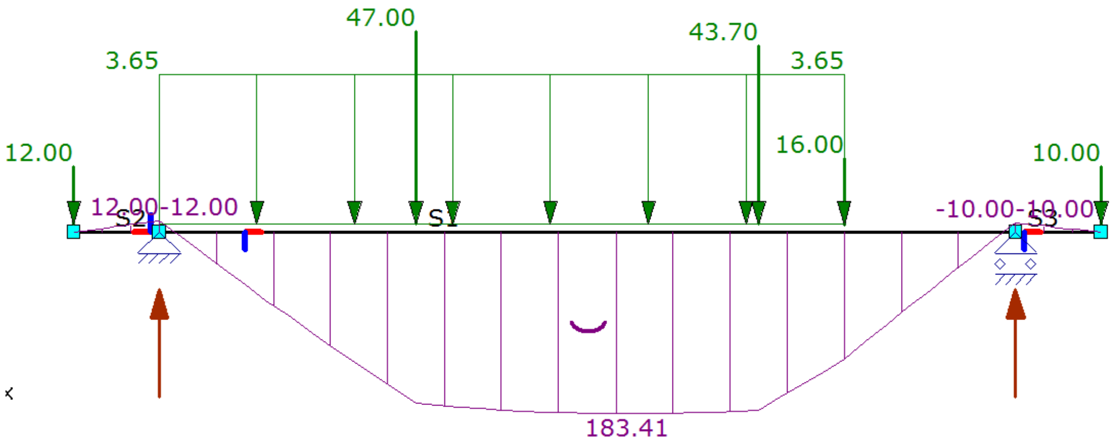
***Figuur N.6:** Momentenlijn voor combinatie puntlasten en q-lasten vanuit Excel Tool*

De momentenlijnen vanuit MatrixFrame en de Excel Tool zijn weergegeven in Figuren N.5 en N.6. Het maximale moment vanuit de Excel Tool is gelijk aan 144.62 kNm, waaruit geconcludeerd kan worden dat beide momentenlijnen gelijk aan elkaar zijn.

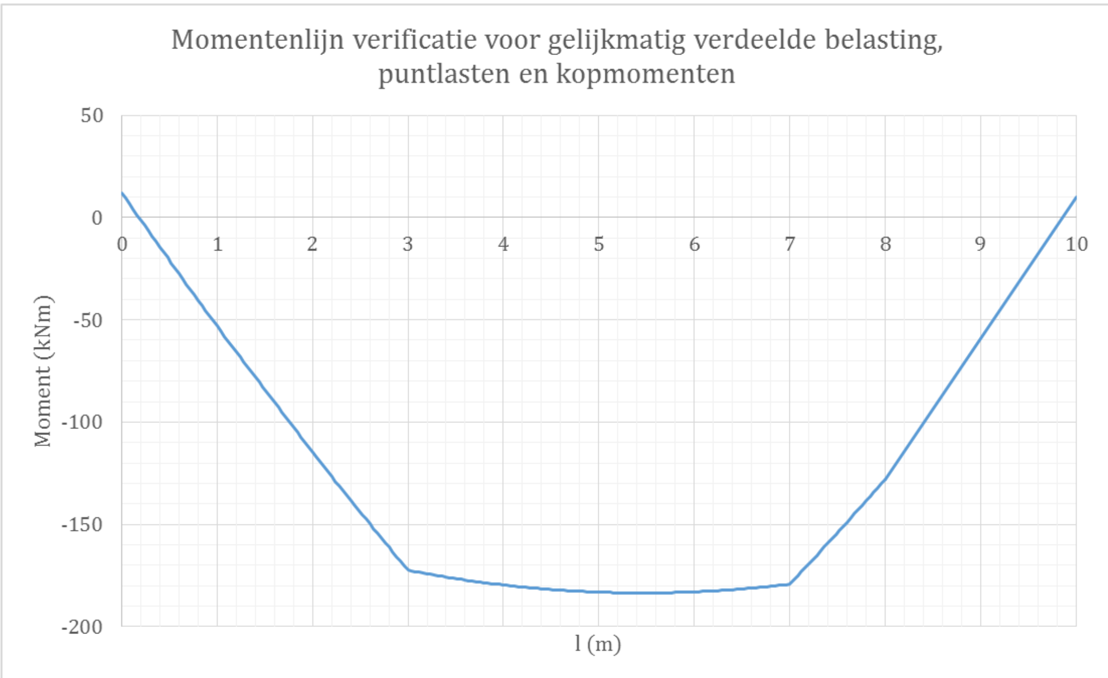
Geval met combinatie puntlasten, gelijkmatig verdeelde belastingen en kopmomenten

Voor deze verificatie zijn de volgende willekeurige parameters gebruikt:

- $l = 10\ m$
- $F_1 = 47\ kN$ op 3 m van linker oplegging.
- $F_2 = 43.7\ kN$ op 7 m
- $F_3 = 16\ kN$ op 8 m
- $q_1 = 3.65 \frac{kN}{m}$ voor 0 tot 8 m vanaf de linker oplegging
- $M_A = 12\ kNm$
- $M_B = 10\ kNm$



***Figuur N.7**: Momentenlijn voor een combinatie van puntlasten, gelijkmatig verdeelde belastingen en kopmomenten vanuit MatrixFrame*



***Figuur N.8**: Momentenlijn voor een combinatie van puntlasten, gelijkmatig verdeelde belastingen en kopmomenten vanuit Excel Tool*

De momentenlijnen vanuit MatrixFrame en vanuit de Excel Tool zijn weergegeven in Figuren N.7 en N.8. Het maximale moment vanuit de Excel Tool is gelijk aan 183.50 kNm.

Beide momentenlijnen zijn gelijk. Voor alle vier de beschouwde belastings-configuraties komen de momentenlijnen en maximale momenten vanuit MatrixFrame en de Excel Tool overeen, waaruit met grote zekerheid kan worden geconcludeerd dat de omzetting van een willekeurige belastings-configuratie naar een equivalente verzameling puntlasten correct is uitgevoerd. Hiermee is de werking van het eerste deel van het systeem bewezen.

Ook is onderzocht of de Excel Tool overeen komt met de Maple oplossingen. Dit is gedaan voor de belastings-configuratie met 2 puntlasten en 2 kopmomenten (vanuit paragraaf 4.5). De volgende parameters zijn hiervoor gebruikt:

- $l = 1\ m$
- $\gamma = 0.3, \delta = 0.8$
- $F = 1\ kN$
- $\alpha = 0.75\ (M_A = \alpha F l = 0.75\ kNm)$
- $\beta = 0.5\ (M_A = \beta F l = 0.5\ kNm)$

Voor deze parameters geeft de Excel Tool een effectieve kiplengte gelijk aan $0.524347\ l$. De Maple code geeft $l_{eff} = 0.524347\ l$. De uitkomsten komen exact overeen, waarmee is aangetoond dat de Excel Tool en de Maple berekeningen equivalent aan elkaar zijn.

$$> \mathit{restart};$$

$$> \mathrm{phi} := a \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot x\right) : \mathrm{psi} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot(x+g\cdot l)\right) : \mathrm{zeta} := a\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l}\cdot(x+d\cdot l)\right) :$$

$$> M1 := (2-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot(l-x) - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> M2 := (2-g-d)\cdot F\cdot g\cdot l + (1-g-d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-g) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot g\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> M3 := (g - g\cdot d + d - d^2)\cdot F\cdot l - (g+d)\cdot F\cdot x - alfa\cdot F\cdot l\cdot(1-d) + alfa\cdot F\cdot x - bet\cdot F\cdot d\cdot l - bet\cdot F\cdot x :$$

$$> thetaa := \frac{1}{EIyy\cdot l}\cdot\left(int(\phi^2\cdot M1\cdot(l-x), x=0..g\cdot l) + int(\psi^2\cdot M2\cdot(l-g\cdot l-x), x=0..l\cdot(d-g)) + int(\mathrm{zeta}^2\cdot M3\cdot(l-d\cdot l-x), x=0..l\cdot(1-d))\right) :$$

$$> wkipg := thetaa\cdot g\cdot l - int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(g\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) :$$

$$> wkipd := thetaa\cdot d\cdot l - \left(int\left(\frac{\phi^2\cdot M1}{EIyy}\cdot(d\cdot l-x), x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2}{EIyy}\cdot((d-g)\cdot l-x), x=0..(d-g)\cdot l\right)\right) :$$

$$> thetab := \frac{1}{l\cdot(1-d)}\cdot\left(wkipd + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2\cdot M3}{EIyy}\cdot x, x=0..l\cdot(1-d)\right)\right) :$$

$$> U := int\left(\frac{\phi^2\cdot M1^2}{2\cdot EIyy}, x=0..g\cdot l\right) + int\left(\frac{\psi^2\cdot M2^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(d-g)\cdot l\right) + int\left(\frac{\mathrm{zeta}^2\cdot M3^2}{2\cdot EIyy}, x=0..(1-d)\cdot l\right) :$$

$$> m1 := wkipg\cdot F + wkipd\cdot F - alfa\cdot F\cdot l\cdot thetaa - bet\cdot F\cdot l\cdot thetab - U :$$

$$> m2 := \frac{(m0)^2}{2\ EIyy}\cdot int(\phi^2, x=0..l) :$$

$$> result := solve(m2 = m1, m0) :$$

$$> Mmax := F\cdot l\cdot \max\left(\mathrm{abs}(alfa), \mathrm{abs}(bet), \mathrm{abs}(g\cdot(2-g-d) - alfa\cdot(1-g) - bet\cdot g), \mathrm{abs}(g - g\cdot d + d - d^2 - alfa\cdot(1-d) - bet\cdot d)\right) :$$

$$> m := \frac{result[2]}{Mmax} :\ g := 0.3 : d := 0.8 : alfa := 0.75 : bet := 0.5 : simplify(m)$$

$$0.5243468689$$

Bijlage O: Visual Basic Codes

Om tot de Excel Tool te komen, is gebruik gemaakt van Microsoft Visual Basic for Applications: de programmeercode voor Excel waarmee de meer complexere taken uitgevoerd kunnen worden. Via zogenaamde Macro's worden bepaalde handelingen geautomatiseerd. In de Excel Tool zijn de volgende Macro's toegepast:

Sorteer F: Zodra de gebruiker de berekening laat uitvoeren, moeten de ingevoerde locaties van de puntlasten gesorteerd worden. Dit dient pas te gebeuren als de gebruiker op de knop drukt (anders zal de berekening constant blijven lopen). Verder ontkoppelt deze macro de ingevoerde waarden van hun cel, waardoor tijdens het sorteren enkel de waardes en niet de bijbehorende cellen worden meegenomen.

```
Sub SorteerF()
'
' SorteerF Macro
'

'
    Worksheets("Verwerking").Activate
    Range("J2:J11").Select
    Selection.Copy
    Range("M2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Range("I2:I11").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    Range("N2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Range("M2:N11").Select
    Application.CutCopyMode = False
    ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort.SortFields.Add Key:=Range( _
        "N2:N11"), SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:= _
        xlSortNormal
    With ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort
        .SetRange Range("M1:N11")
        .Header = xlYes
        .MatchCase = False
        .Orientation = xlTopToBottom
        .SortMethod = xlPinYin
        .Apply
    End With
    Worksheets("Verwerking").Activate
End Sub
```

SorteerQ: Ook de q-lasten worden op dezelfde wijze gesorteerd en ontkoppeld.

```
Sub SorteerQ()
'
' SorteerQ Macro
'

'
    Worksheets("Verwerking").Activate
    Range("Q1:S11").Select
    Selection.Copy
    Range("U1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    ActiveWindow.ScrollColumn = 4
    Range("U2:W11").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Range("U1:W11").Select
    ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort.SortFields.Add Key:=Range( _
        "U2:U11"), SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:= _
        xlSortNormal
    With ActiveWorkbook.Worksheets("Verwerking").Sort
        .SetRange Range("U1:W11")
        .Header = xlYes
        .MatchCase = False
        .Orientation = xlTopToBottom
        .SortMethod = xlPinYin
        .Apply
    End With
    Range("R17").Select
    Worksheets("Verwerking").Activate
End Sub
```

Copyab: De berekening en de output dienen pas te veranderen wanneer op de knop gedrukt wordt. Deze Macro kopieert de waardes voor de kopmomenten naar de berekening.

```
Sub copyab()
'
' copyab Macro
'

'
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("E3").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("B2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("E4").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("B3").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
End Sub
```

Copyl: Hetzelfde geldt voor de overspanningslengte.

```
Sub copyl()
'
' copyl Macro
'

'
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("E5").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("B1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

End Sub
```

SorteerGamma: Wanneer de verzameling γ eenmaal vastgesteld is, dient deze gesorteerd te worden. Deze Macro sorteert deze verzameling als de berekening in gang is gezet.

```
Sub SorteerGamma()
'
' SorteerGamma Macro
' Sorteert de definitieve gamma
'

'
    Worksheets("gamma").Activate
    Columns("G:G").Select
    Selection.Copy
    Range("H1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Application.CutCopyMode = False
    Columns("H:H").Select
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Add Key:=Range("H1"), _
        SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:=xlSortNormal
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Add Key:=Range("H1"), _
        SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:=xlSortNormal
    Range("H2:H1001").Select
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort.SortFields.Add Key:=Range("H2"), _
        SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:=xlSortNormal
    With ActiveWorkbook.Worksheets("gamma").Sort
        .SetRange Range("H2:H1001")
        .Header = xlGuess
        .MatchCase = False
        .Orientation = xlTopToBottom
        .SortMethod = xlPinYin
        .Apply
    End With
    Range("L16").Select
    Worksheets("Bep eff kip").Activate
End Sub
```

InvoegenLeff: Wanneer de berekening klaar is, dient de bepaalde effectieve kiplengte terug gevoerd te worden naar het gebruikersscherm. Deze Macro kopieert de bepaalde waarde.

```
Sub InvoegenLeff()
'
' InvoegenLeff Macro
'

'
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("C13").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("H31").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("C14").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("H32").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

End Sub
```

CopyC en Mmax: Op eenzelfde wijze worden de waardes voor C_1 tot en met C_5 en M_{max} terug gekoppeld naar het gebruikersscherm.

```
Sub Mmax()
'
' Mmax Macro
'

'
    Sheets("Mmax").Select
    ActiveSheet.ChartObjects(1).Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("V12").Select
    ActiveSheet.Paste
End Sub
```

```
Sub copyc()

    Sheets("Verwerking").Select
    Range("B5:B9").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("AA6:AA10").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Sheets("Mmax").Select
    Range("Q1").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("AA3").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    Sheets("Verwerking").Select
    Range("B16").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bep eff kip").Select
    Range("AA4").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False

End Sub
```

Vervolgens worden al deze Macro's aan de knop *Voer berekening uit* gekoppeld. Wanneer deze knop gebruikt wordt, worden de gecreëerde Macro's op de ingevoerde volgorde uitgevoerd.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
    Application.ScreenUpdating = False
    ActiveSheet.ChartObjects(1).Delete
    copyab
    copyl
    SorteerF
    SorteerQ
    SorteerGamma
    InvoegenLeff
    copyc
    Mmax
    Range("T2").Select

End Sub
```

Hierbij wordt het updaten van het scherm in de tussentijd uitgezet, zodat de gebruiker enkel de uitkomst en niet de gehele berekening op zijn of haar scherm te zien krijgt.

Voor de compleetheid is er ook een knop gecreëerd waarmee alle velden geleegd kunnen worden. Hiervoor is de Macro *LeegVelden* gemaakt.

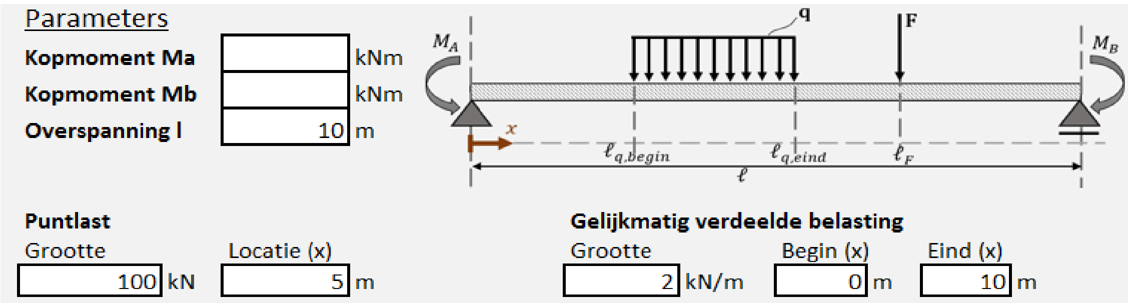
```
Sub LeegVelden()
'
' LeegVelden Macro
'

'
    Application.ScreenUpdating = False
    Range("E3:E5").Select
    Selection.ClearContents
    Range("C10:C28").Select
    Selection.ClearContents
    Range("E10:E28").Select
    Selection.ClearContents
    Range("H10:H28").Select
    Selection.ClearContents
    Range("J10:J28").Select
    Selection.ClearContents
    Range("L10:L28").Select
    Selection.ClearContents
    Range("H31:H32").Select
    Selection.ClearContents
    Range("AA3:AA10").Select
    Selection.ClearContents
    Range("Q2").Select
End Sub
```

Deze Macro is vervolgens gekoppeld aan de knop *Leeg alle velden*.

```
Private Sub CommandButton2_Click()
    LeegVelden
End Sub
```

Bijlage P: Voorbeeld beperking Excel Tool

Zoals omschreven in paragraaf 6.4, heeft de gecreëerde Excel Tool een aantal beperkingen. Een van die beperkingen is het beperkte aantal beschikbare equivalente eenheidspuntlasten. Deze beperking is noodzakelijk aangezien de rekentijd van de Tool explosief toeneemt voor meer dan 1000 eenheidspuntlasten. In het Excel bestand ***Excel Tool Aanvulling Bepaling Effectieve Kiplengte*** is de mogelijkheid ingebouwd om tot 2500 eenheidspuntlasten mee te nemen in de berekening. De rekentijd van dit bestand bedraagt (afhankelijk van de gebruikte computer) meerdere minuten, daar waar het Excel bestand ***Excel Tool Bepaling Effectieve Kiplengte*** slechts enkele seconden nodig heeft. Daarom wordt aangeraden het laatst genoemde bestand als de standaard te gebruiken en enkel wanneer het aantal equivalente eenheidspuntlasten de 1000 passeert, gebruik te maken van het aanvullende bestand. Om de beperking en de daarop volgende aanpak te verduidelijken, is hieronder een voorbeeld uitgewerkt. De gebruikte parameters zijn weergegeven in Figuur O.1**.**



Figuur O.1*: Gebruikte parameters voorbeeld beperking Excel Tool*

De gelijkmatig verdeelde belasting wordt verdeeld in 200 eenheidspuntlasten. Conform vergelijking (5.24) kan de grootte I_q van de eenheidspuntlasten bepaald worden:

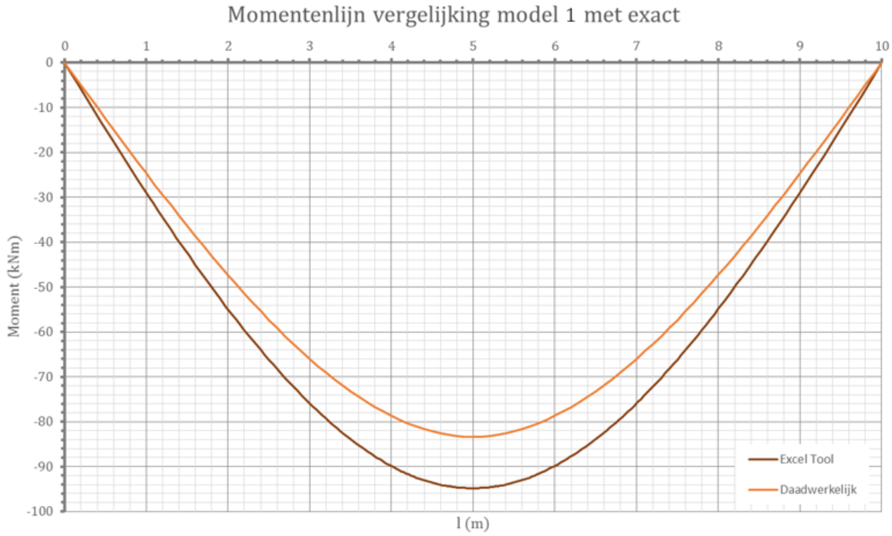
$$I_q = \frac{ql}{200} = \frac{2\ kN/m \cdot 10\ m}{200} = 0.1\ kN \tag{O.1}$$

De volgende stap in het systeem is het bepalen van het aantal equivalente eenheidspuntlasten voor de puntlast voor 100 kN.

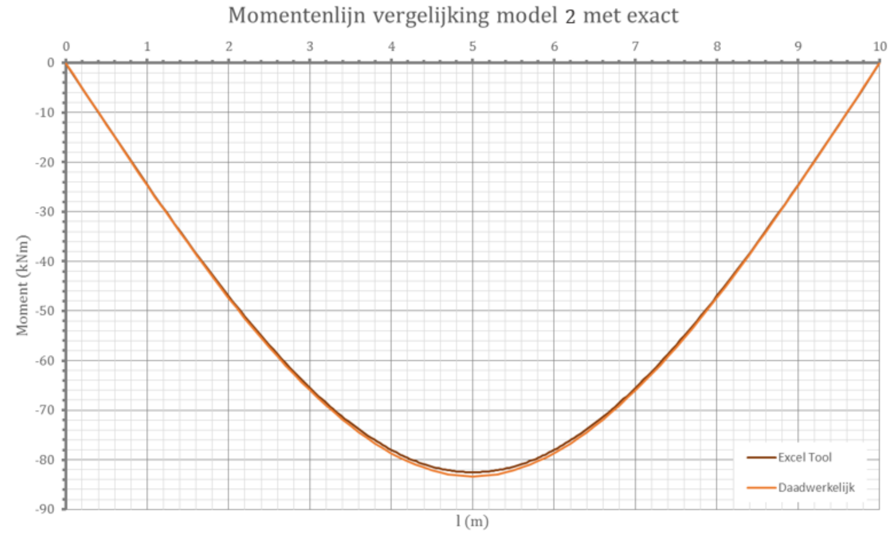
$$aantal\ I_q = \frac{100\ kN}{0.1\ kN} = 1000 \tag{O.2}$$

Hiermee is het totale aantal equivalente eenheidspuntlasten gelijk aan $200 + 1000 = 1200 > 1000$. Het systeem geeft de volgende melding: *de belastings-configuratie kan met behulp van dit model niet goed geschematiseerd worden en daarom is de output onbruikbaar. Probeer aanvullend bestand*. Om voor deze belastings-configuratie tot de effectieve kiplengte te bepalen, dient dus gebruik te worden gemaakt van het Excel bestand ***Excel Tool Aanvulling Bepaling Effectieve Kiplengte***. Met behulp van dit bestand en de in Figuur O.1 weergeven parameters wordt uiteindelijk een effectieve kiplengte gelijk aan $0.745\ l$ gevonden. Een andere mogelijke aanpak is het vergroten van de q-last zodanig dat er niet meer dan 1000 eenheidspuntlasten worden gebruikt (let op: dit is een benadering!). Dit is het geval voor $q = 2.5\ kN/m$ (dit geeft een eenheidspuntlast ter grootte van 0.125 kN). Hiermee kan de puntlast weergegeven worden door 800 eenheidspuntlasten, waardoor het totale aantal puntlasten gelijk is aan 1000. Dit levert een effectieve kiplengte gelijk aan $0.748\ l$, wat hoger (en dus ook veiliger is) en dan voor het eerder beschouwde geval. Wel moet er in de verdere kipstabiliteitstoetsing opgelet worden dat het berekende moment vanuit de Excel Tool niet representatief is voor het daadwerkelijke moment en daarom wordt aangeraden om het daadwerkelijke moment met behulp van andere Tools te bepalen, waarna de toetsing uitgevoerd kan worden met de gevonden veilige effectieve kiplengte.

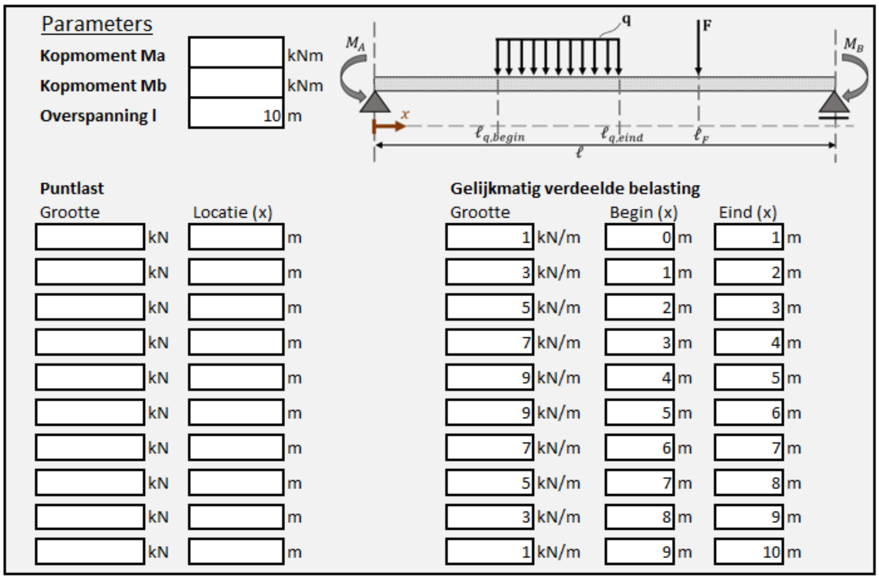
Bijlage Q: Figuren paragraaf 7.5.3



***Figuur Q.1**: Momentenlijn vergelijking model 1 met exact*



***Figuur Q.2**: Momentenlijn vergelijking model 2 met exact*



***Figuur Q.3**: Input in Excel Tool behorend bij model 2*