

Delft, juni 2010

Stijfheidsmatrix van asymmetrische profielen

Eindrapportage van Bachelor Eindwerk

Naam: Vroukje Bron
Studienr: 1324314
Begeleiders: Dr.ir.P.C.J. Hoogenboom
Ir. R. Abspoel

Voorwoord

Dit rapport bevat de resultaten van een onderzoek naar de stijfheidsmatrix van een ligger met een asymmetrische doorsnede. Het onderzoek is onderdeel van het bachelor eindwerk voor de studie Civiele Techniek aan de TU Delft. Bij dit onderzoek ben ik 9 weken lang begeleid door de docenten, Dr.ir.P.C.J. Hoogenboom en Ir. R. Abspoel. Ik wil ze allebei dan ook erg bedanken voor hun hulp.

Het rapport is opgebouwd uit twee delen, het onderzoek naar een ligger met een rechthoekige doorsnede en die met een T-doorsnede. De delen hebben allebei hun eigen beschrijving, onderzoeksmethode en conclusies.

Delft, juni 2010

Vroukje Bron

Samenvatting

Het doel van dit onderzoek is het controleren van de stijfheidsmatrix welke is verkregen via differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden, voor een ligger met een asymmetrische doorsnede. Het is onzeker of deze analytisch bepaalde stijfheidsmatrix nauwkeurig is voor liggers met een asymmetrische doorsnede. Daarom is in dit onderzoek een ligger met een T-doorsnede gemodelleerd in het eindige-elementenprogramma ANSYS. Via dit programma wordt de stijfheidsmatrix numeriek bepaald, zodat de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix hiermee kan worden gecontroleerd.

Eerst is een ligger met een rechthoekige doorsnede bekeken, hiervoor wordt de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix betrouwbaar geacht. De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix wordt vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Afwijkingen tussen deze twee geven de onnauwkeurigheden van het numerieke model aan. De verplaatsingen worden alleen via de hoekpunten van de ligger aan het model opgelegd. Om lokale vervormingen die hierdoor ontstaan, tegen te gaan is de E-modulus aan beide liggeruiteinden vergroot. Ongeacht de grootte van de E-modulus of het aantal elementen waar deze op is toegepast komen de verschillen gemiddeld niet onder de 3%.

Bij de ligger met de T-doorsnede wordt de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix gecontroleerd met de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix. De verplaatsingen worden opgelegd via alle knopen (± 90 punten) van een liggeruiteinde, dit voorkomt het ontstaan van lokale vervormingen. De verschillen tussen de numeriek en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix zijn erg klein. Het meenemen van de afschuifstijfheid, de vergrote wringstijfheid (welke ontstaat door het verhinderen van welving) en het corrigeren van het dwarskrachtencentrum, brengen het verschil terug tot minder dan 0,2%. Wat gelijk is aan de nauwkeurigheid van de eindige-elementen modellering. Hieruit kan geconcludeerd worden dat de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix betrouwbaar is voor de onderzochte T-ligger. Het verkleinen van de elementgrootte van het model is niet verder mogelijk vanwege beperkingen van de gebruikte personal computer. Door de manier van opleggen van de verplaatsingen, is het niet mogelijk tegelijkertijd wringstijfheid en buigstijfheid te meten, zonder welving te verhinderen.

Als vervolg onderzoek zou gekeken kunnen worden naar liggers met een andere doorsnedeform. Dit zal meer inzicht kunnen geven in de verschillen tussen de numerieke en de analytische bepaalde stijfheidsmatrix. De ontwikkelde methode voor het opleggen van de verplaatsingen bij het numerieke model kan gebruikt worden voor het onderzoeken van andere stijfheidsmatrices, zoals voor liggers die kunnen kippen of knikken.

Inhoudsopgave

Voorwoord.....	2
Samenvatting.....	3
Inhoudsopgave	5
1. Inleiding	6
2. Methode	10
3. Numerieke rechthoekige ligger	11
3.1 Uitgangspunten	11
3.2 Methode	11
3.3 Resultaten.....	13
3.4 Conclusie.....	15
4. Numerieke T-Ligger	16
4.1 Uitgangspunten	16
4.2 Methode	16
4.3 Resultaten.....	20
4.4 Verklaring afwijkingen	22
5. Conclusie.....	28
6. Aanbevelingen	30
Bronnen	31
Bijlage 1: Procentuele afwijkingen stijfheidsmatrices, rechthoekige doorsnede	
Bijlage 2: De analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor de T-ligger	
Bijlage 3: Script, opleggen verplaatsing	
Bijlage 4: Script, aflezen kracht	
Bijlage 5: Stijfheidsmatrix met afschuifvervorming	
Bijlage 6: Numeriek bep. stijfheidsmatrix T-ligger, grove elementen	
Bijlage 7: Berekening DC	

1. Inleiding

In dit onderzoek wordt een zo nauwkeurig mogelijk numeriek model van een ligger met een asymmetrische doorsnede gemaakt. Hiermee zal een stijfheidsmatrix, welke verkregen is via differentiaal vergelijkingen, worden getoetst.

Een stijfheidsmatrix, is een verzameling getallen welke het verband tussen vervormingen en de krachten weergeeft. Een stijfheidsmatrix kan analytisch worden opgesteld door het oplossen van een differentiaalvergelijking met randvoorwaarden. Voor liggers met een profiel waarvan de doorsnede symmetrisch is, wordt deze analytische bepaalde stijfheidsmatrix betrouwbaar geacht. Echter, voor liggers met een asymmetrisch doorsnede (zoals een L- of T- profiel) is de nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix onzeker. Dit komt doordat het dwarskrachtencentrum niet samenvalt met het normaalkrachtencentrum (NC); wat bij een symmetrische doorsnede wel het geval is. Hierdoor kan bij een asymmetrische doorsnede torsie ontstaan. De nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix van de asymmetrische doorsnede is te controleren met behulp van een nauwkeurig 3D model berekend met een eindige-elementenmethode.

Dit onderzoek zal zich beperken tot het bekijken van één bepaalde asymmetrische doorsnede. Het numerieke 3D model hiervoor wordt gemaakt met behulp van het eindige elementen programma ANSYS. In de rest van dit hoofdstuk wordt dieper ingegaan op de bovenstaande onderdelen.

Probleemstelling

In voorgaand onderzoek bleken er grote afwijkingen, bij een asymmetrische doorsnede, te bestaan tussen de analytisch verkregen stijfheidsmatrix en de stijfheidsmatrix bepaald met behulp van eindige-elementenmethoden. Waar de afwijkingen door ontstonden bleef onduidelijk. Hierdoor was het niet mogelijk conclusies te trekken over de betrouwbaarheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. In dit onderzoek wordt een zo nauwkeurig mogelijk numeriek model van een ligger met een asymmetrische doorsnede gemaakt, zodat de analytisch afgeleide stijfheidsmatrix hieraan kan worden getoetst. Kortweg is het doel van dit onderzoek:

Het toetsen van de stijfheidsmatrix voor een ligger met een asymmetrische doorsnede.

Rechthoekige doorsnede

Om tot dit nauwkeurige numerieke model te komen, wordt eerst een symmetrische doorsnede onderzocht. Hierbij wordt de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Aangezien de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix betrouwbaar wordt geacht voor symmetrische doorsneden. Afwijkingen tussen deze stijfheidsmatrices geven de onnauwkeurigheden van het numerieke model aan. Voor de mogelijke onnauwkeurigheden die naar voren komen, worden oplossingen gezocht alvorens de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor de asymmetrische doorsnede wordt gecontroleerd.

Theorie

De analytisch verkregen stijfheidsmatrix is opgesteld door het oplossen van differentiaal vergelijkingen met randvoorwaarden. De differentiaal vergelijkingen zijn opgesteld door het combineren van de zo genoemde constitutieve, statische en kinematische betrekkingen. Aan deze betrekkingen liggen de Wet van Hooke en het principe van Bernoulli ten grond slag. Het numerieke model zal aan dezelfde wetmatigheden moeten voldoen en zich dus ook lineair elastisch moeten gedragen. De afleiding van de stijfheidsmatrix is te vinden in het boek *“Numerical Mechanics, The displacement method”* geschreven door ir. A.W.M. Kok.





Figuur 1- Liggers met krachten en momenten

De matrix bestaat uit 12 x 12 elementen. Dit komt doordat beide uiteinden van de ligger 6 vrijheidsgraden hebben $u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y$ en φ_z . Deze zijn weergegeven in Figuur 1.

Figuur 2 toont de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix uit het dictaat van ir. A.W.M. Kok.

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & 6 \frac{EI_z}{L^2} & -12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 12 \frac{EI_y}{L^3} & e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & -6 \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & -12 \frac{EI_y}{L^3} & -e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & -6 \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & \frac{GI_w}{L} + e_z^2 12 \frac{EI_z}{L^3} + e_y^2 12 \frac{EI_y}{L^3} & -e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & -e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & -e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & -\frac{GI_w}{L} - e_z^2 12 \frac{EI_z}{L^3} - e_y^2 12 \frac{EI_y}{L^3} & e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & -e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -6 \frac{EI_y}{L^2} & -e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & 4 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 6 \frac{EI_y}{L^2} & e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & 2 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 4 \frac{EI_z}{L} & -6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 2 \frac{EI_z}{L} & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -6 \frac{EI_z}{L^2} & 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -12 \frac{EI_y}{L^3} & -e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & 6 \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 12 \frac{EI_y}{L^3} & e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & 6 \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & -e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & -\frac{GI_w}{L} - e_z^2 12 \frac{EI_z}{L^3} - e_y^2 12 \frac{EI_y}{L^3} & e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & -e_z 12 \frac{EI_z}{L^3} & e_y 12 \frac{EI_y}{L^3} & \frac{GI_w}{L} + e_z^2 12 \frac{EI_z}{L^3} + e_y^2 12 \frac{EI_y}{L^3} & e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & -e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -6 \frac{EI_y}{L^2} & -e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & 2 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 6 \frac{EI_y}{L^2} & e_y 6 \frac{EI_y}{L^2} & 4 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 2 \frac{EI_z}{L} & -6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & e_z 6 \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 4 \frac{EI_z}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{bmatrix}$$

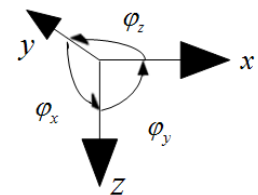
Figuur 2- Stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming¹

Relevant onderzoek

In het bachelor eindwerk² van J.R. van Noort is de stijfheidsmatrix van een profiel met een U-doorsnede onderzocht. Dit onderzoek stuitte op grote afwijkingen (>100%) tussen de stijfheidsmatrix bepaald via het numerieke model en de analytische stijfheidsmatrix. Als mogelijk oorzaken voor de afwijkingen kwamen naar voren:

1. te weinig elementen in het numerieke model
2. te grove krachtsinleiding in het model
3. welving

Het meenemen van de afschuifvervorming en het aanpassen van de dwarscontractie bleken niet de oorzaak te zijn, deze hadden een verwaarloosbare invloed.



Figuur 3 –Definitie hoekverdraaiing

¹ Kok, A.W.M. (1991), *Numerical Mechanics, The displacement method*, TU Delft, Bladzijde 60

² Noort, J.R. van (2009). *Stijfheidsmatrix van asymmetrische profielen*. Bachelor-eindwerk, TU Delft. Online: http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/BSc_projects/eindrapport_van_noort.pdf

Afschuifvervorming

Bij zowel de asymmetrische als de symmetrische doorsnede wordt bij het analytisch bepalen van de stijfheidsmatrix afschuifvervorming niet mee genomen. Dit wordt gedaan omdat de vormfactor k (welke nodig is voor het bepalen van de stijfheidsmatrix met afschuifvervorming) niet betrouwbaar wordt geacht. Het verwaarlozen van de afschuifvervorming zal de stijfheden maar nihil beïnvloeden als het gaat om een ligger met een lange lengte, volgens het voorgaande onderzoek van J.R. van Noort.

Afbakening

In dit onderzoek wordt de dwarscontractie niet gevarieerd, omdat dit in het voorgaande onderzoek een verwaarloosbaar effect bleek te hebben. Er is gekozen voor materiaaleigenschappen in overeenstemming met het eerder genoemde onderzoek.

$$E\text{-modulus} = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

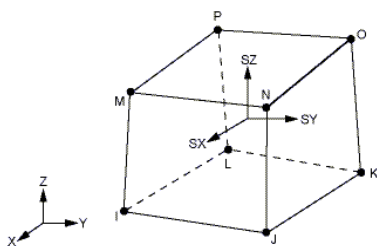
$$\nu = 0.27$$

In dit onderzoek wordt de stijfheidsmatrix van één bepaalde asymmetrische doorsnede uitgewerkt. Er is gekozen voor een T-doorsnede, omdat deze een verticale symmetrieas heeft. De doorsnede heeft gelijkenissen met een stalen profiel. Andere asymmetrische doorsneden van liggerprofielen zullen buiten beschouwing blijven.

Eindige-elementenmethode

De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix wordt opgesteld met behulp van een eindige-elementenmethode. Het model wordt gemaakt in het computer programma ANSYS. Het programma deelt de ligger (voor het programma een volume) op in elementen. De elementen zijn aan elkaar verbonden via knopen. Er zijn verschillende typen elementen, die verschillen in vorm en in de positie van de knopen. In dit onderzoek wordt het massieve element SOLID 45 gebruikt. SOLID 45 heeft een *brick* vorm (zoals te zien in Figuur 3) en alleen knopen op de

hoekpunten. De elementen worden zo klein mogelijk gekozen, zodat het model zo nauwkeurig mogelijk is.



Figuur 3 - ANSYS volume element, type SOLID 45

2. Methode

Wanneer de ligger in ANSYS gemodelleerd is en verdeeld is in elementen, wordt de vervorming aangebracht. Om de stijfheidsmatrix te bepalen, wordt er een eenheidsverplaatsing opgelegd in de richting van een van de vrijheidsgraden. Op deze manier is de reactiekracht direct gelijk aan de stijfheid, zie bijvoorbeeld de vergelijking hieronder waarbij $U_1=1$ en $U_2=0$.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \end{bmatrix}$$

Een van de 12 verplaatsingen wordt opgelegd aan de gemodelleerde ligger. De krachten die door de vervorming ontstaan vormen samen één kolom van de stijfheidsmatrix. Op deze manier worden alle 12 vervormingen afgelopen om de matrix te vullen. Doordat de ligger symmetrisch is, komen in de linker en de rechter helft van de stijfheidsmatrix dezelfde elementen voor. Bij het vergelijken van de stijfheidmatrices is daarom alleen de linker helft bekeken. Afwijkingen tussen dezelfde elementen zullen namelijk gelijk zijn.

De vervormingen worden aan de ligger opgelegd door de knopen van de elementen aan het uiteinde van de ligger een verplaatsing te geven. De knopen aan het andere uiteinde van de ligger worden vast gezet zodat de gewenste vervorming ontstaat. Het vast zetten van de knopen gebeurt in ANSYS door in te voeren dat de verplaatsing 0 is. De reactiekrachten worden vervolgens berekend door de krachten in deze knopen bij elkaar op te tellen. Of zoals bij de momenten, door de kracht maal de afstand tot het normaalkrachtencentrum bij elkaar op te tellen. De gevonden stijfheden worden vergeleken met de analytisch afgeleide stijfheden. Het verschil hier tussen wordt uitgedrukt als percentage van de stijfheid.

$$\text{Percentage} = \frac{\text{analytisch bep. stijfheid} - \text{numeriek bep. stijfheid}}{\text{numeriek bep. stijfheid}}$$

3. Numerieke rechthoekige ligger

Als eerste onderdeel van het onderzoek is begonnen met het modelleren van een ligger met een rechthoekige doorsnede. De stijfheidsmatrix voor een ligger met een symmetrische doorsnede wordt betrouwbaar geacht. Afwijkingen tussen de numerieke en analytisch bepaalde stijfheidsmatrix zullen het gevolg zijn van onnauwkeurigheden van het numerieke model, waardoor dit een goede toets voor het model vormt.

3.1 Uitgangspunten

Bij de symmetrische doorsnede is gekozen voor een ligger met de onderstaande afmetingen en eigenschappen. De oorsprong van het assenstelsel ligt in het zwaartepunt, wat tevens het normaalkrachten- en dwarskrachtencentrum is bij deze doorsnede, zie Figuur 4.

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$b = 100 \text{ mm}$$

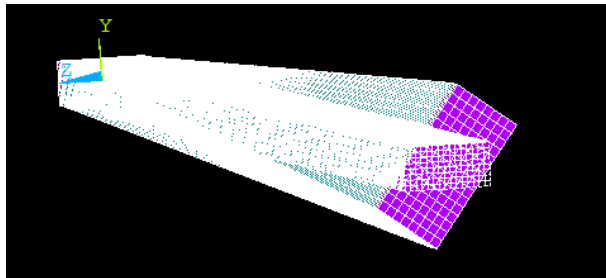
$$L = 3000 \text{ mm}$$

$$I_z = 6.6667 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 1.6667 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_w = 4.58 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

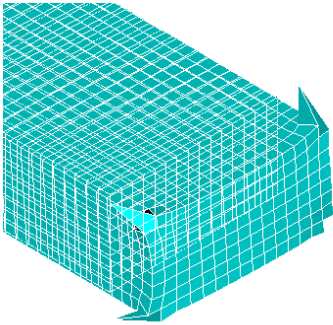
$$G = 78740.157 \text{ N/mm}^2$$



Figuur 4 - Numeriek model, Rechthoekige doorsnede onder wringend moment

3.2 Methode

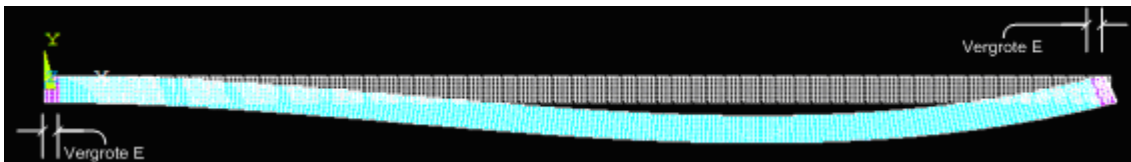
Zoals beschreven, worden de verplaatsingen opgelegd aan de ligger door knopen aan de uiteinden een verplaatsing te geven. De knopen die hiervoor worden gekozen zijn de hoekpunten van de rechthoek. Uit het eerder genoemde onderzoek bleek dat dit onbedoelde vervormingen tot gevolg had, zoals te zien in Figuur 5. Als oplossing hiervoor worden de eerste paar rijen elementen, aan beide liggeruiteinden, voorzien van een hogere E-modulus. Hierdoor worden de verplaatsingen meer gelijkmatig het model in geleid en ontstaan er geen onbedoelde vervormingen.



Figuur 5 -Onbedoelde vervorming bij opleggen verplaatsing op hoekpunt

Het vergroten van de E-modulus heeft wel effect op de krachten die ontstaan door de opgelegde vervormingen en daarmee op de stijfheidsmatrix. Welke E-modulus voldoende is om het inleiden van de krachten voldoende te verbeteren, maar de resultaten niet te veel beïnvloed is onderzocht. Dit is gedaan door te variëren in E-modulus en het aantal rijen elementen waarop deze worden toegepast.

Er is gekeken naar $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$, $E=1 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$, $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$, respectievelijk 100 keer, 50 keer en 25 keer zo groot dan de E-modulus van de rest van de ligger. In Tabel 1 staan deze op de verticale as.



Figuur 6- Vergrote E-modulus aan beide uiteinden van de ligger

Het toepassen van deze vergrote E-modulus is gedaan aan beide kanten van de ligger, op de eerste 2, 3 en 4 rijen elementen. In Figuur 6 is te zien hoe de eerste 3 rijen elementen van de ligger een andere materiaaleigenschap hebben. De elementen in dit model hebben een afmeting van 12,5 mm x 12,5 mm. Het aantal rijen elementen waarvoor de vergrote E-modulus is toegepast staat op de horizontale as in Tabel 1 op blz. 14. Het variëren van deze onderdelen levert 9 stijfheidsmatrices op. Bij dit onderzoek zijn niet alle 144 elementen van de stijfheidsmatrix onderzocht. Er is gekeken naar 3 elementen behorende bij de vervormingen:

$$u_x = 1, u_y = 1, \varphi_x = 1.$$

3.3 Resultaten

De numeriek verkregen stijfheidsmatrices zijn vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Het verschil is uitgedrukt in procenten. De ligger waarvoor over de gehele lengte $E=2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ is toegepast en dus geen verstevigde liggeruiteinden heeft, is hieronder weergegeven in Matrix 1.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61.83\% & - & - & - \\ - & -65.67\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & -13.73\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 1- Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met $E=2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

In het numerieke model van Matrix 1 ontstaan bij het opleggen van de verplaatsingen de onbedoelde vervormingen zoals getoond in Figuur 5. De stijfheden die bij dat model gevonden worden wijken dan ook tussen de 10-70 % af van de analytisch afgeleide stijfheden.

De drie matrices waarbij er drie rijen met elementen aan de liggeruiteinden een vergrote E-modulus hebben staan hieronder. De rest van de matrices met procentuele afwijkingen staan in Bijlage 1.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.48\% & - & - & - \\ - & -0.46\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 3.49\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 2- Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 3 element rijen met $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.42\% & - & - & - \\ - & 3.97\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 4.04\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 3- Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 3 rijen $E=1 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.74\% & - & - & - \\ - & 6.23\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 4.33\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 4- Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 3 element rijen met $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

De afwijking tussen de numeriek afgeleide stijfheidsmatrix en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix zijn kleiner bij het toepassen van verstevigde liggeruiteinden. Te zien is ook dat de procentuele afwijkingen per element in de stijfheidsmatrix (dwarskracht, normaalkracht of torsie) verschillend veranderen door het aanpassen van de E-modulus. Element [1.1] heeft bij $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$ een grotere afwijking dan bij $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$. Terwijl element [2.2] de kleinste afwijking bij $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$ heeft.

Het gemiddelde van de absolute procentuele afwijkingen van de 9 matrices staan hieronder in Tabel 1 .

	Evergroot is toegepast op 2 rijen	Evergroot is toegepast op 3 rijen	Evergroot is toegepast op 4 rijen
$E_{\text{vergroot}}=2 \cdot 10^7$	6,43%	3,76%	3,99%
$E_{\text{vergroot}}=1 \cdot 10^7$	4,04%	3,14%	5,43%
$E_{\text{vergroot}}=5 \cdot 10^6$	3,28%	3,14%	3,58%

Tabel 1 -Gemiddelde absolute procentuele afwijking tussen de numerieke en analytische stijfheidsmatrix

De afzonderlijke afwijkingen liggen tussen de 0.1 en 10 %. Het verschilt per element van de stijfheidsmatrix wanneer deze zijn kleinste afwijking heeft. Hierdoor zijn de gemiddelde procentuele afwijkingen overal tussen de 3 en 7 %.

3.4 Conclusie

Het inleiden van de krachten kan worden verbeterd door het toepassen van stijvere elementen aan de liggeruiteinden. De procentuele afwijking tussen de numerieke en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix van de ligger zonder verstevigde liggeruiteinden zit tussen de 10- 70 %, zoals te zien in Matrix 1. Dit is significant meer dan de afwijkingen tussen de 0.1 en 10 %, welke gevonden worden bij het toepassen van verstevigde liggeruiteinden. Er treden bij de verstevigde ligger uiteinden geen onbedoelde vervormingen op.

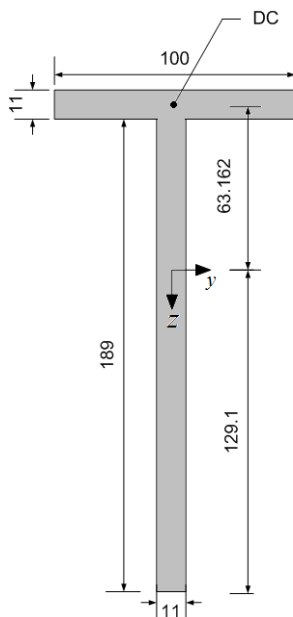
Bij het toepassen van verstevigde liggeruiteinden, met als doel een betere krachtsinleiding, kan een nauwkeurigheid van niet meer dan enkele procenten (0-8%) bereikt worden. Het variëren van het aantal verstevigde rijen elementen en het vergroten van de E-modulus beïnvloeden allebei de nauwkeurigheid. Gemiddeld over de stijfheidsmatrix wordt de procentuele afwijking niet minder dan de 3%.

4. Numerieke T-Ligger

De stijfheidsmatrix voor een asymmetrische doorsnede wordt bepaald met behulp van het eindige elementen programma ANSYS. Hiermee wordt de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix vergeleken. Daarna wordt bekeken wat de invloed is van verschillende fenomenen op de gevonden afwijkingen tussen de stijfheidsmatrices.

4.1 Uitgangspunten

Bij de asymmetrische doorsnede is gekozen voor een T-ligger met de onderstaande afmetingen en eigenschappen. De oorsprong van het assenstelsel ligt in het zwaartepunt.



$$h = 200 \text{ mm}$$

$$I_z = 9.3763 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$I_y = 1.33935 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$L = 3000 \text{ mm}$$

$$I_w^3 = 128620 \text{ mm}^4$$

$$t_{\text{lijf}} = 11 \text{ mm}$$

$$G = 78740.157 \text{ N/mm}^2$$

$$t_{\text{flens}} = 11 \text{ mm}$$

$$\Delta z_{DC} = -63.162 \text{ mm}$$

$$\Delta z_{NC} = 129.102076 \text{ mm}$$

$$\Delta y_{DC} = 0 \text{ mm}$$

$$\Delta y_{NC} = 0 \text{ mm}$$

De analytisch afgeleide stijfheidsmatrix van deze T-doorsnede is weergegeven in Bijlage 2.

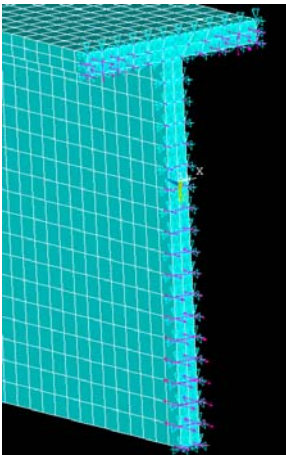
4.2 Methode

De analytisch bepaalde stijfheidsmatrix wordt vergeleken met de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix. Alvorens er iets kan worden gezegd over de nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix, moet eerst de nauwkeurigheid van de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix worden bepaald. Dit wordt gedaan door de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix nogmaals af te leiden maar deze keer wordt het numerieke model opgebouwd uit dubbel zo

grote elementen. Het verschil tussen de twee numeriek bepaalde stijfheidsmatrices geeft de fout die ontstaat door de element grootte van het numerieke model. Het verschil tussen de numeriek en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor betrouwbare elementen uit de stijfheidsmatrix (bijv. element [1.1], stijfheid door normaalkracht vervorming) toont aan of via het numerieke model een betrouwbare stijfheidsmatrix is bepaald.

Verplaatsingen opleggen

In tegenstelling tot de rechthoekige doorsnede, zijn bij de T-doorsnede de verplaatsingen aan alle knopen van de elementen van het liggeruiteinde opgelegd, zoals te zien in Figuur 7. Dit zijn ongeveer 90 knopen, in plaats van 4.



Figuur 7 -Steunpunten op alle knopen in het liggeruiteinde van het numerieke model.

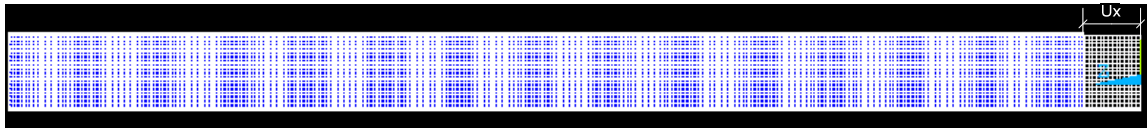
Hierdoor wordt voorkomen dat er ongewenste verplaatsingen optreden zoals te zien in Figuur 5 op pagina 12. De verplaatsingen zijn aangebracht met behulp van scripts, welke elke knoop de gewenste verplaatsing geeft afhankelijk van zijn afstand tot het zwaartepunt. Een van de scripts is toegevoegd in Bijlage 3.

Doordat de verplaatsingen op alle knopen van het liggeruiteinde zijn opgelegd, ontstaan er ook reactiekrachten in al deze knopen. Het uitlezen van de krachten en momenten was daardoor niet meer mogelijk via de standaard ANSYS functies. De krachten en momenten zijn berekend via scripts. Een van de scripts is toegevoegd in Bijlage 4.

³ Bepaald door R. Nirmalsingh gebruikmakend van het programma ShapeDesigner.

Steunpunten

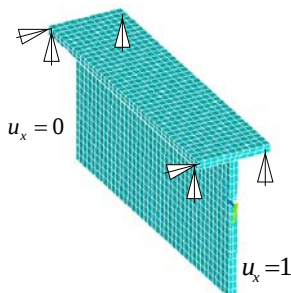
De vervormingen die aan het model worden opgelegd moeten overeenkomen met de uitgangspunten van de analytisch bepaalde matrix. De gekozen steunpunten die aan het model worden opgelegd, mogen deze vervormingen niet verhinderen. Zo is bijvoorbeeld vervorming in z-richting deels vrij gelaten bij het opleggen van een eenheidsverplaatsing in x-richting ($u_x = 1$). Zodat het vergroten van de liggerdoorsnede door het indrukken van de ligger op kan treden, te zien in Figuur 8.



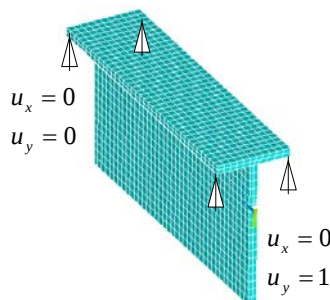
Figuur 8 - Vervormde ligger met de verplaatsing $u_x = 1$

Bij meerdere vervormingen was een dergelijk uitgangspunt van toepassing. De steunpunten beïnvloeden de stijfheid welke gevonden wordt. (Voor wringing wordt hier dieper op ingegaan in hoofdstuk 4.4.1) De steunpunten staan hieronder getekend per opgelegde vervorming. In x-richting zijn altijd alle knopen van een liggeruiteinde vast gezet. Voor het opleggen van de vervormingen zijn ook altijd alle knopen van een liggeruiteinde verplaatst (bijv bij $u_z = 1$ zijn alle knopen aan een liggeruiteinde 1 mm verplaatst in z-richting). De verplaatsingen die naast figuren zijn geschreven gelden voor alle knopen van het liggeruiteinde waar ze naast staan. Een steunpunt welke op een enkele knoop van het liggeruiteinde werkt, staat als pijltje aangegeven in de figuur.

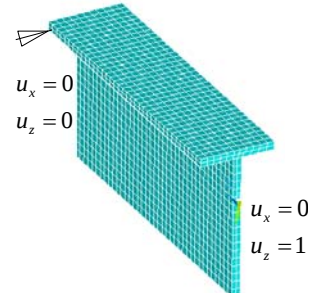
$$u_x = 1$$

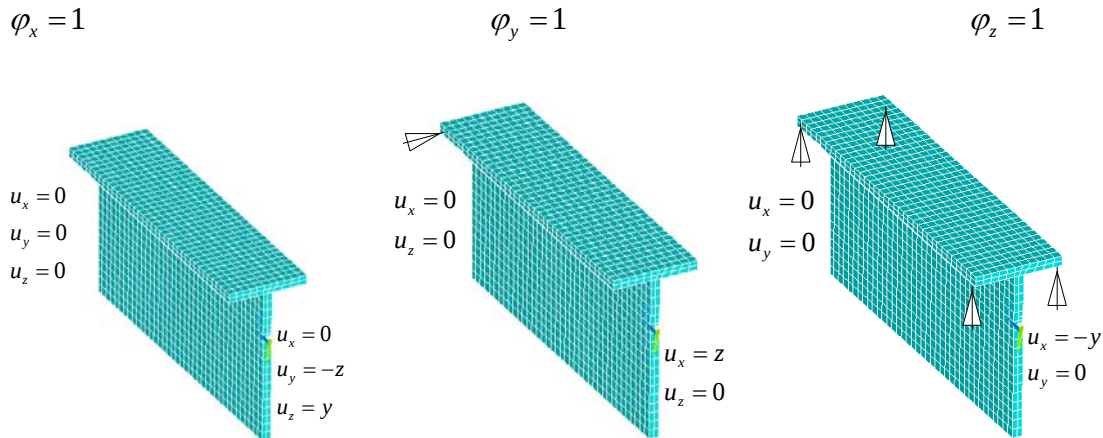


$$u_y = 1$$



$$u_z = 1$$





Figuur 9 - Oplegreacties ingevoerd ANSYS per opgelegde vervorming, de liggerlengte is niet in verhouding.

Afschuifvervorming

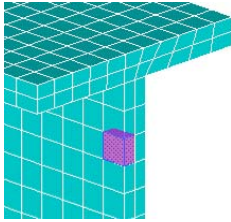
Eerst wordt de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix waarbij afschuifvervorming is verwaarloosd vergeleken met de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix. Dit wordt gedaan omdat de vormfactor k welke de doorsnede reduceert, en nodig is voor het bepalen van de afschuifvervorming, niet betrouwbaar wordt geacht. De factor k staat in de onderstaande formules, de toepassing hiervan is te zien in Bijlage 5. De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, van de ligger met de T-doorsnede, wordt daarom eerst vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix waarbij afschuifvervorming niet is meegenomen. Uit deze vergelijking volgen de verschillen tussen de numeriek en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix, welke het gevolg zijn van onnauwkeurigheden in het numerieke model, of in de analytische afleiding. Vervolgens wordt de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix waarbij afschuifvervorming wel is mee genomen. De verandering die hierdoor ontstaat in de afwijking tussen de matrices, is het gevolg van het meenemen van de afschuifvervorming. Door vervolgens de vormfactor k te variëren, kan worden bekeken welke formule voor de vormfactor het meest nauwkeurig is voor deze T-doorsnede.

Vergelijking 1- Onderdeel van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix met afschuifvervorming uit Bijlage 5

$$\frac{1}{\lambda_y} = \frac{L^2}{12EI_z} + \frac{1}{k_y GA}$$

$$\frac{1}{\lambda_z} = \frac{L^2}{12EI_y} + \frac{1}{k_z GA}$$

4.3 Resultaten



Figuur 10 - fijne elementen

Het numerieke model met de kleinste elementen geeft de meest nauwkeurige stijfheidsmatrix. ANSYS heeft een beperkt aantal knopen waarmee het programma kan rekenen. De kleinste elementen voor de T-ligger hebben hierdoor de afmeting 10.5 x 5.5 x 10.5 mm (dX,dY,dZ),

te zien in Figuur 10. De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix welke is verkregen bij deze element grootte is voor de helft afgebeeld in

Matrix 5.

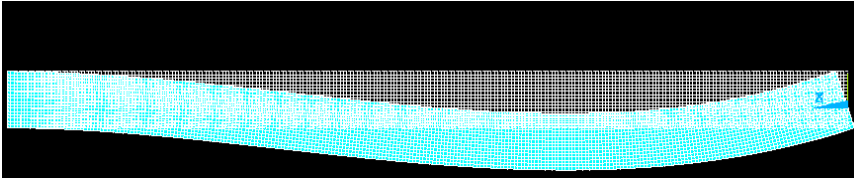
$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 211933,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 4908 & 0,01 \\ 0,00 & 83,21 & 0,00 & 5206,44 & -150,46 & 124810,17 \\ 0,00 & -0,01 & 1164,67 & 16,72 & -1747007,76 & -7,53 \\ 0,00 & 5203,23 & 16,75 & 3940286,54 & -34524,85 & 7804847,05 \\ -0,03 & 7,53 & -1747007,58 & -25085,52 & 3513950994 & 11428,91 \\ -0,01 & 124810,17 & -0,02 & 7809659,70 & -225677,64 & 249754400,10 \\ -211933,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 4908,00 & 2,46 \\ 0,00 & -83,21 & 0,00 & -5206,44 & -0,02 & -124810,17 \\ 0,00 & 0,01 & -1164,67 & -16,72 & 1747007,76 & 7,54 \\ 0,00 & -5203,23 & -16,75 & -3940286,54 & 34525,49 & -7804847,06 \\ 0,03 & 7,54 & -1747007,58 & -25085,52 & 1727072289,00 & 11182,40 \\ 0,01 & 124810,17 & -0,03 & 7809659,70 & -225675,70 & 124676120,70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

Matrix 5 - Numeriek bepaalde stijfheidsmatrix van ligger met T-doorsnede

4.3.1 Grize elementen

De grijze elementen in Matrix 5 zouden volgens de theorie nul moeten zijn. Door onnauwkeurigheden van het model zijn deze elementen niet nul, terwijl ze dit wel zijn in de analytische bepaalde stijfheidsmatrix. Er is gewerkt met 10 significante cijfers. De grootste afwijkingen in de 5^e kolom als gevolg van hoekverdraaiing φ_y , zijn de stijfheden welke ontstaan doordat er een normaalkracht is. De normaalkracht ontstaat door het opleggen van de hoekverdraaiing, want om $\varphi_y = 1$ op te leggen, krijgen de knopen in één liggeruiteinde een verplaatsing opgelegd in x-richting. Zoals te zien in Figuur 11 bij het rechter liggeruiteinde. Dit

zorgt voor een grote drukkracht boven het NC en een trekkracht onder het NC. De resultanten van deze krachten zijn $6 \cdot 10^6$ N, met een verschil er tussen van 4908 N wat overeenkomt met de grootte van de stijfheid voor F_x . Dat is een zeer klein percentage (0,08 %) van de resultante.



Figuur 11- Zijaanzicht van de vervormde ligger $\varphi_y = 1$.

Door de normaalkracht ontstaan de buigende momenten. Dit is ook de reden waarom de buigende momenten niet nul zijn bij $\varphi_z = 1$. Op de waarden in kolom van φ_x wordt ingegaan in paragraaf 4.4.1. De rest van dit rapport zal zijn gericht op de elementen van de matrix welke niet nul zijn.

4.3.2 Procentuele afwijking

De analytisch bepaalde stijfheidsmatrix is vergeleken met de numeriek verkregen stijfheidsmatrix. De afwijkingen uitgedrukt in een percentage van de stijfheid zijn te zien in Tabel 2.

	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
F_{x1}	0,00%	-100,00%	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y1}	-100,00%	0,17%	0,00%	1,11%	-100,00%	0,17%
F_{z1}	-100,00%	-100,00%	2,22%	-100,00%	2,22%	-100,00%
M_{x1}	-100,00%	1,17%	-100,00%	-5,89%	-100,00%	1,17%
M_{y1}	-100,00%	-100,00%	2,22%	-100,00%	1,64%	-100,00%
M_{z1}	-100,00%	0,17%	-100,00%	1,11%	-100,00%	0,11%
F_{x2}	0,00%	-100,00%	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y2}	-100,00%	0,17%	-100,00%	1,11%	-100,00%	0,17%
F_{z2}	-100,00%	-100,00%	2,22%	-100,00%	2,22%	-100,00%
M_{x2}	-100,00%	1,17%	-100,00%	-5,89%	-100,00%	1,17%
M_{y2}	-100,00%	-100,00%	2,22%	-100,00%	3,40%	-100,00%
M_{z2}	-100,00%	0,17%	-100,00%	1,11%	-100,00%	0,27%

Tabel 2 - Procentuele afwijking van analytische bepaalde matrix t.o.v. numeriek bepaalde matrix

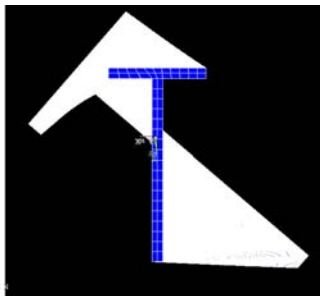
De elementen welke nul zijn in de analytische matrix, maar niet in de numerieke matrix hebben -100 procent afwijking, ongeacht de grootte van deze niet-nul waarde. Om te zorgen dat dit geen verkeerd beeld geeft, zijn deze waarden grijs gemaakt.

Te zien is dat de meeste afwijkingen tussen de 0 en de 2,5 % liggen. Dit is erg weinig. Voor een constructeur is de nauwkeurigheid van 2,5 % voldoende. De kleine afwijking geeft ook aan dat er geen grote verschillen zitten tussen de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix voor de onderzochte doorsnede. De afwijking van 0.00% van de stijfheid onder normaalkracht vervorming geeft aan dat met het numerieke model een betrouwbare stijfheidsmatrix is bepaald voor de T-doorsnede.

4.4 Verklaring afwijkingen

4.4.1 Welving

De grootste procentuele afwijking (-5,89%) tussen de numeriek en de analytisch afgeleide stijfheid, treedt op bij het opleggen van wringing ($\varphi_x = 1$). De vervormde ligger is te zien in Figuur 12.



Figuur 12 - Vervormde ligger met $\varphi_x = 1$

De afwijking zou kunnen komen doordat de ligger gaat welven. Welving is het vervormen van de doorsnede waardoor de liggeruiteinden zich verplaatsen in langs richting. Informatie over welving is te vinden in *Aantekeningen over wringing*⁴. Welving kan bij de analytisch afgeleide matrix vrij optreden, maar bij het numerieke model van de bovenstaande resultaten zijn de liggeruiteinden in x-richting vast gezet. Hierdoor wordt welving verhinderd en is de

⁴ Hoogenboom, P.C.J. (2008), *Aantekeningen over wringing*, Gouda: Betonvereniging online: http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/dictaatwringing_21okt2008.pdf

wringstijfheid groter. De mate waarmee de wringstijfheid vergroot, is te berekenen met de factor f , vergelijking (1.1) en (1.2). De formules⁴, zijn afgeleid door Dr. Ir. P. C. J. Hoogenboom.

$$L_c = \sqrt{\frac{E \cdot C_w}{G \cdot J}} \quad (1.1)$$

$$f = \frac{L}{L - 2 \cdot L_c} = 1.0515 \quad (1.2)$$

Wanneer de wringstijfheid ($G \cdot I_w$) uit de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix wordt vermenigvuldigd met de factor f , dan zal de torsiestijfheid voor verhinderde welving worden gevonden. Wanneer de via ANSYS gevonden stijfheid wordt vergeleken met de nieuwe torsiestijfheid, dan wijkt dit nog maar -1,48% af, in plaats van -5,89%. Het verschil in stijfheid lijkt inderdaad te komen door het verhinderen van welving. In de rest van dit rapport zal -1,48% afwijking worden gebruikt.

Bij het numerieke model waarbij welving wordt verhinderd wijken de stijfheid voor de dwarskracht en het buigend moment 1,11 % af. Dit zit in dezelfde orde van grootte als de rest van de afwijkingen van de matrix uit Tabel 2 op blz. 21. De buigstijfheden lijken niet beïnvloed door de spanningen welke ontstaan bij het verhinderen van welving.

Om dezelfde stijfheid als in de analytisch afgeleide matrix te vinden, zou welving vrij op moeten kunnen treden. Hiervoor is het nodig dat het model vrij kan vervormen in x-richting. Dit is gedaan door 1 knoop in x-richting vast te zetten. Het resultaat staat in de Tabel 3 in de rechterkolom. In de linkerkolom staan de waarden uit Tabel 2. Met -procent afwijking- wordt de procentuele afwijking van de analytisch ten opzichte van de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix bedoeld, net zoals in de voorgaande tabellen.

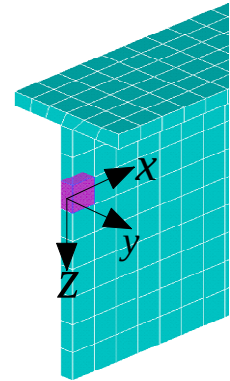
	Verhinderde welving		Welving vrij	
	Stijfheid $\varphi_x = 1$	% afwijking	Stijfheid $\varphi_x = 1$	% afwijking
F_{x1}	-0,00015	-100,00%	0,00	0,00%
F_{y1}	5206,44	1,11%	0,00	∞ %
F_{z1}	16,72	-100,00%	0,00	0,00%
M_{x1}	3940286,54	-5,89%	3437709,62	7,87%
M_{y1}	-25085,52	-100,00%	-0,03	-100,00%
M_{z1}	7809659,70	1,11%	0,00	∞ %

Tabel 3 - Wringstijfheid bepaald met numeriek model, variatie in het verhinderen van welving

In de rechterkolom, waarbij welving vrij op kan treden, is te zien dat de stijfheid die voor M_{x1} wordt gevonden kleiner is. Deze wringstijfheid ligt dicht in de buurt van $G \cdot I_w / L$, dit komt doordat er geen buigstijfheid is. Deze zou er wel moeten zijn volgens de analytische afleiding. Dat er geen buigstijfheid is komt doordat momenten om de z- en de y- as ontstaan door normaalkracht (kracht in x-richting) te vermenigvuldigen met hun afstand tot het normaalkrachten centrum. Er is alleen geen normaalkracht, doordat er geen oplegreacties in x-richting zijn. Bij het opleggen van $\varphi_x = 1$ ontstaat daardoor geen normaalkracht en dus ook geen buigend moment. Het is niet mogelijk om welving vrij op te laten treden en tegelijkertijd buigstijfheid te krijgen, wanneer de verplaatsingen via de knooppunten van het liggeruiteinde aan de ligger op worden gelegd.

4.4.2 Element grootte

De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix heeft een bepaalde onnauwkeurigheid, doordat het numeriek model rekent met elementen van 10.5 mm, terwijl deze blokken er in de werkelijkheid niet zijn. Om te onderzoeken wat de fout is door deze elementgrootte, is er een tweede model onderzocht. Dat model heeft elementen met ribben welke twee keer zo lang zijn als die van het voorgaande model. De elementen zijn 21 x 11 x 21 mm (dx,dy,dz). Numeriek is er een deel van de stijfheidsmatrix bepaald met dit model met de grove elementen. De stijfheden die zijn gevonden zijn afgebeeld in Bijlage 6. De procentuele afwijking tussen de numeriek bepaalde stijfheidsmatrices met de grove elementen en die met de fijne elementen is te zien in Tabel 4.



Figuur 13 - grove elementen

	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
F_{x1}	0,00%					
F_{y1}		0,06%		-0,12%		0,06%
F_{z1}			0,05%		0,05%	
M_{x1}		-0,20%		2,32%		-0,20%
M_{y1}			0,05%		0,04%	
M_{z1}		0,06%		-0,11%		0,05%

Tabel 4 - Procentuele verschil tussen de numeriek bepaalde stijfheid met grove en de fijne elementen

De positieve percentages in de tabel, betekenen dat de stijfheid bepaald met het grove numerieke model dichtbij de analytische stijfheid ligt dan de stijfheid bepaald met het fijne model. Dit komt doordat een model met fijnere elementen zich minder stijf gedraagt dan een model met grove elementen. En de via ANSYS bepaalde stijfheid is minder groot dan de analytisch bepaalde stijfheid. De verschillen tussen de numeriek bepaalde stijfheden, waarbij de elementgrootte verschillen, is zeer klein. Op wringing na zijn de verschillen maximaal 0.2 %. De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, zal maar weinig nauwkeuriger worden wanneer er voor nog kleinere elementen wordt gekozen.

4.4.3 Afschuifvervorming

Bij het analytisch bepalen van de stijfheidsmatrix, die vergeleken is met de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, is afschuifvervorming niet meegenomen, omdat de vormfactor k (welke nodig is voor het bepalen van de stijfheidsmatrix met afschuifvervorming) niet betrouwbaar wordt geacht. Daarbij bleek in het voorgaande onderzoek² dat afschuifvervormingen een verwaarloosbare invloed hebben. Het niet meenemen van de afschuifvervorming in de analytische afleiding van de stijfheidsmatrix, zou voor afwijkingen tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix kunnen zorgen. Om dit te controleren is de analytisch afgeleide stijfheidsmatrix waarbij afschuifvervorming wél is mee genomen (te zien in Bijlage 5) ook vergeleken met de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix. De procentuele afwijking tussen deze twee stijfheidsmatrices wordt weergegeven in Tabel 5.

	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
F_{x1}	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y1}	-100,00%	0,01%	-100,00%	0,96%	-100,00%	0,01%
F_{z1}	-100,00%	-100,00%	0,03%	-100,00%	0,03%	-100,00%
M_{x1}	-100,00%	1,02%	-100,00%	-1,49%	-100,00%	1,02%
M_{y1}	-100,00%	-100,00%	0,03%	-100,00%	0,00%	-100,00%
M_{z1}	-100,00%	0,01%	-100,00%	0,96%	-100,00%	0,00%
F_{x2}	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y2}	-100,00%	0,01%	-100,00%	0,96%	-100,00%	0,01%
F_{z2}	-100,00%	-100,00%	0,03%	-100,00%	0,03%	-100,00%
M_{x2}	-100,00%	1,02%	-100,00%	-1,49%	-100,00%	1,02%
M_{y2}	-100,00%	-100,00%	0,03%	-100,00%	0,07%	-100,00%
M_{z2}	-100,00%	0,01%	-100,00%	0,96%	-100,00%	0,04%

Tabel 5 - Procentuele afwijking tussen de analytische en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, met afschuifvervorming

Als voor vormfactor $k = 0.65$ wordt gekozen, dan worden de bovenstaande afwijkingen gevonden. Deze waarde voor k geeft de kleinste verschillen tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrices. Wanneer de T-ligger wordt gezien als een I-profiel. Dan geldt voor bepaling van de vormfactor de vergelijking (2.1). Hieruit volgt $k=0,65$.

$$\eta = \frac{A}{A_{ijf}} \qquad k = \frac{1}{\eta} \qquad (2.1)$$

De procentuele afwijkingen tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrices worden kleiner bij het mee nemen van afschuifvervorming.

4.4.4 Dwarskrachtencentrum

Zoals te zien in Tabel 5, is de procentuele afwijking voor meerdere stijfheden 0,01%. Echter voor de stijfheid van M_{x1} is de afwijking 1,02 %. Een torsiemoment ontstaat doordat de dwarskracht aangrijpt in het dwarskrachtencentrum. De vergelijking die erbij hoort is $M_{x1} = -F_{y1} \cdot e_z$.

Waarbij e_z de afstand is tussen het normaalkrachtencentrum en het dwarskrachtencentrum (DC). De numerieke waarde voor de afstand e_z is te berekenen door M_{x1} te delen door F_{y1} . De uitkomst hiervan staat in de onderste rij van Tabel 6.

	u_y	φ_z
F_{y1}	83,21	124810
M_{x1}	5203,23	7804847
e_z	-62,53 mm	-62,53 mm

Tabel 6 - Deel v d numeriek bepaalde stijfheidsmatrix

Bij de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix is uitgegaan van een e_z van -63,16 mm, de berekening staat in Bijlage 7. Het verschil in e_z zou kunnen komen doordat de locatie van het dwarskrachtencentrum bij de analytische afleiding berekend is voor een platte doorsnede.

Terwijl de doorsnede in het numerieke 3D model wel een diepte (ligger lengte) heeft. Wanneer bij de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor e_z de afstand -62,53 mm wordt ingevuld, worden de volgende afwijkingen tussen de analytische en de numerieke bepaalde stijfheden gevonden.

Het verschil wordt voor bijna alle elementen terug gebracht tot minder 0,1 %.

	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
F_{x1}	0,00%	-100,00%	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y1}	-100,00%	0,01%	0,00%	-0,05%	-100,00%	0,01%
F_{z1}	-100,00%	-100,00%	0,04%	-100,00%	0,04%	-100,00%
M_{x1}	-100,00%	0,01%	-100,00%	-1,65%	-100,00%	0,01%
M_{y1}	-100,00%	-100,00%	0,04%	-100,00%	0,01%	-100,00%
M_{z1}	-100,00%	0,01%	-100,00%	-0,05%	-100,00%	0,00%
F_{x2}	0,00%	-100,00%	0,00%	-100,00%	-100,00%	-100,00%
F_{y2}	-100,00%	0,01%	-100,00%	-0,05%	-100,00%	0,01%
F_{z2}	-100,00%	-100,00%	0,04%	-100,00%	0,04%	-100,00%
M_{x2}	-100,00%	0,01%	-100,00%	-1,65%	-100,00%	0,01%
M_{y2}	-100,00%	-100,00%	0,04%	-100,00%	0,09%	-100,00%
M_{z2}	-100,00%	0,01%	-100,00%	-0,05%	-100,00%	0,04%

Tabel 7 - Procentuele afwijking tussen analytische en numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, wanneer afschuifvervorming, het verhinderen van welving en de verschuiving van het DC worden meegenomen.

5. Conclusie

De ontwikkelde aanpak blijkt geschikt om analytisch bepaalde stijfheidsmatrices te controleren met ANSYS. De numeriek bepaalde stijfheidsmatrix, van een asymmetrische T-doorsnede, verschilt maar enkele procenten van de analytische bepaalde stijfheidsmatrix. Voor praktische toepassing is dit verschil verwaarloosbaar. Een belangrijke conclusie is derhalve dat de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix betrouwbaar is voor de onderzochte T-ligger.

Om theoretische redenen is de oorzaak voor de enkele procenten verschil onderzocht. De volgende aspecten zijn hierbij beschouwd:

- 1) Rekennauwkeurigheid
- 2) De elementgrootte
- 3) Het verhinderen van welving aan de uiteinden
- 4) Het in rekening brengen van de afschuifvervorming
- 5) Positie van het dwarskrachtencentrum

Rekennauwkeurigheid

De elementensoftware ANSYS representeert getallen met ongeveer 16 cijfers. Bij het numeriek oplossen van de vergelijkingen wordt de nauwkeurigheid minder. Uit de berekening van de stijfheid van de ligger door normaalkracht vervorming, blijkt dat de stijfheidsresultaten ongeveer 10 significante cijfers hebben. De fout die hierdoor ontstaat is verwaarloosbaar ten opzichte van de geconstateerde verschillen.

Element grootte

De fout die ontstaat door de grootte van de elementen van het gebruikte numerieke model is erg klein, tussen de 0 en 0,2 %. Het verkleinen van de elementen van het model zal de numeriek gevonden stijfheid niet dichter bij de analytische verkregen stijfheid brengen. Dit komt doordat een model met kleinere elementen zich minder stijf zal gedragen en de numeriek gevonden stijfheidsmatrix is minder stijf dan de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix.

Welving

Het verschil in stijfheid tussen de numeriek bepaalde wringstijfheid en de analytische bepaalde wringstijfheid in de onderzochte T-ligger komt deels door het verhinderen van welving. Bij de in dit onderzoek bekeken ligger zorgt het verhinderen van welving voor een grotere wringstijfheid van een ongeveer procent 5%. Het verhinderen van welving lijkt geen effect te hebben op de dwarskracht en de buigingsstijfheid van de bekeken ligger.

Het is niet mogelijk welving op te laten treden in het numerieke model en tegelijkertijd de buigstijfheid te berekenen, wanneer de verplaatsingen aan het uiteinde van de ligger worden opgelegd. Immers, om welving vrij op te laten treden moeten de uiteinden van de ligger in x-richting vrij gelaten worden. Doordat de uiteinden in x-richting kunnen verplaatsen ontstaan er geen buigende momenten.

Afschuifvervorming

Door het meenemen van afschuifvervorming worden de verschillen tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrices van ongeveer 2 % verkleind tot ongeveer 1 %. Bij de onderzochte T-doorsnede, komt de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix inclusief afschuifvervorming, het dichtst bij de numeriek bepaalde stijfheden in de buurt wanneer de vormfactor k wordt berekend via de formule (2.1) welke oorspronkelijk gebruikt wordt voor het bepalen van de vormfactor k voor een I-profiel.

Dwarskrachtencentrum

Een andere reden voor een deel van de afwijkingen kan zijn, het afwijking van de locatie van het dwarskrachtencentrum in het numerieke 3D model t.o.v. de locatie berekend bij een platte doorsnede. Dit verschil in locatie is slechts 0,7 mm.

De verschillen tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheidsmatrices kunnen voor bijna alle elementen worden teruggebracht tot minder dan 0,2 % als zowel de wringstijfheid, de afschuifstijfheid en de plaats van het dwarskrachtencentrum heel weinig worden gecorrigeerd. Dit is gelijk aan de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmodellering.

6. Aanbevelingen

In dit onderzoek zijn de verschillen tussen ANSYS en de theoretische stijfheidsmatrix erg klein. Echter, er is alleen gekeken naar een T-doorsnede. Het onderzoeken van liggers met een andere doorsnede vorm zal meer inzicht kunnen geven in de verschillen tussen de numeriek en de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. De stijfheidsmatrix voor een dubbel asymmetrische doorsnede is daarbij erg interessant omdat hierbij nog meer termen in de stijfheidsmatrix ongelijk aan nul zijn.

Het blijkt goed mogelijk om met ANSYS, analytisch bepaalde stijfheden te controleren op een paar procent nauwkeurig. De hierbij ontwikkelde aanpak zou ook gebruikt kunnen worden voor het onderzoeken van andere stijfheidsmatrices zoals voor liggers die kunnen kippen of knikken. (Of andere fenomenen waar de waarden nu nog niet nauwkeurig bekend van zijn)

Geconcludeerd is dat wringstijfheid niet kan worden gevonden met de ontwikkelde aanpak, zonder welving te verhinderen. Onderzocht zou kunnen worden hoeveel de wringstijfheid vergroot door het verhinderen van welving. In dit onderzoek is geprobeerd daar meer inzicht in te krijgen door welving geheel of gedeeltelijk vrij op te laten treden. Echter de vergroting van de wringstijfheid kan hier niet uit worden bepaald. Voor het onderzoeken van de toename van de wringstijfheid door het verhinderen van welving zal dan ook een nieuwe aanpak moeten worden bedacht.

Bronnen

Hartsuijker, C. (2001) *Toegepaste Mechanica, deel 2: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen*, Den Haag: Academic Service

Hoogenboom, P.C.J. (2008), *Aantekeningen over wringing*, Gouda: Betonvereniging
online: http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/dictaatwringing_21okt2008.pdf

Kok, A.W.M. (1991), *Numerical Mechanics The displacement method*, TUDelft

Noort, J.R. van (2009). *Stijfheidsmatrix van asymmetrische profielen*. Bachelor-eindwerk, TU Delft.
Online: http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/BSc_projects/eindrapport_van_noort.pdf

Bijlagen

Bijlage 1: Procentuele afwijkingen tussen stijfheidsmatrices, rechthoekige doorsnede

Bijlage 2: Analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor de T-doorsnede

Bijlage 3: Script, opleggen verplaatsing

Bijlage 4: Script, aflezen kracht

Bijlage 5: Stijfheidsmatrix met afschuifvervorming

Bijlage 6: Numeriek bepaalde stijfheidsmatrix T-ligger, grove elementen

Bijlage 7: Berekening e_z

Bijlage 1: Procentuele afwijkingen stijfheidsmatrices, rechthoekige doorsnede.

Numeriek verkregen stijfheidsmatrices van de ligger met de rechthoekige doorsnede zijn vergeleken met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Het verschil is uitgedrukt in procenten. Het numerieke model is opgebouwd uit elementen van het type SOLID 45. De elementen hebben ribben met een lengte van 12.5 x 12.5 x 12.5 mm lang. Bij het model zijn de liggeruiteinden verstevigd met een hogere E-modulus. Het aantal elementen waarop deze verhoogde E-modulus is toegepast en de grootte van de E-modulus zijn gevarieerd.

2 rijen

Wanneer er 2 rijen elementen aan beide liggeruiteinden een vergrote E-modulus krijgen. Dan worden de volgende procentuele afwijkingen gevonden.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05\% & - & - & - \\ - & -5.35\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 4.44\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \phi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 6 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 2 element rijen met $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.37\% & - & - & - \\ - & -0.11\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 7.67\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \phi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 7 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 2 rijen $E=1 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.96\% & - & - & - \\ - & 2.76\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 9.60\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \phi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 8 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 2 element rijen met $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

4 rijen

Wanneer er 4 rijen elementen aan beide liggeruiteinden een vergrote E-modulus krijgen. Dan worden de volgende procentuele afwijkingen gevonden.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.65\% & - & - & - \\ - & 2.68\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 4.42\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 9 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 4 element rijen met $E=5 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11\% & - & - & - \\ - & 6.89\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 4.97\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 10 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 4 rijen $E=1 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.02\% & - & - & - \\ - & 9.00\% & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 5.26\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

Matrix 11 - Procentuele afwijking bij rechthoekige doorsnede met 4 element rijen met $E=2 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$

Bijlage 2: De analytisch bepaalde stijfheidsmatrix voor de T-ligger

Voor de ligger met de T-doorsnede, waarvan de afmetingen staan op pagina 16, is de stijfheidsmatrix analytisch bepaald. Dit is gedaan door de waarden in te vullen in de stijfheidsmatrix uit het dictaat *“Numerical Mechanics, The displacement method”* geschreven door ir. A.W.M. Kok. De wringstijfheid is berekend door R. Nirmalsingh gebruikmakend van het programma ShapeDesigner.

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 211933,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 83,34 & 0,00 & 5264,24 & 0,00 & 125017,32 \\ 0,00 & 0,00 & 1190,54 & 0,00 & -1785803,54 & 0,00 \\ 0,00 & 5264,24 & 0,00 & 3708353,89 & 0,00 & 7896363,32 \\ 0,00 & 0,00 & -1785803,54 & 0,00 & 3571607077,33 & 0,00 \\ 0,00 & 125017,32 & 0,00 & 7896363,32 & 0,00 & 250034644,44 \\ -211933,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -83,34 & 0,00 & -5264,24 & 0,00 & -125017,32 \\ 0,00 & 0,00 & -1190,54 & 0,00 & 1785803,54 & 0,00 \\ 0,00 & -5264,24 & 0,00 & -3708353,89 & 0,00 & -7896363,32 \\ 0,00 & 0,00 & -1785803,54 & 0,00 & 1785803538,67 & 0,00 \\ 0,00 & 125017,32 & 0,00 & 7896363,32 & 0,00 & 125017322,22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

Matrix 12 - Analytisch afgeleide stijfheidsmatrix, zonder afschuifvervorming, voor de T-ligger

Bijlage 3: Script, opleggen verplaatsing

Hieronder staat een voorbeeld van een script om in ANSYS een verplaatsing op te leggen aan het liggeruiteinde van een bepaalde ligger. Het onderstaande script geeft het liggeruiteinde een hoekverdraaiing van $\varphi_y = 1$. u_x = de verplaatsing van de geselecteerde knopen in x-richting. De verplaatsing die de knopen in x-richting krijgen is ter grootte van de z-coördinaat (zc) welke de knoop heeft. Hierdoor ontstaat de hoekverdraaiing $\varphi_y = 1$.

```
' ! ANSYS macro
! Impose a 1 radian rotation around the y-axis to selected nodes.
! Used to apply a deformation to a beam end.
! P.C.J. Hoogenboom, April 27, 2010
! Aangepast door V.A.G. Bron

/PMACRO
*GET,nnode,node,,num,max ! Get the total number of nodes
NSEL,S,P                  ! Select the involved nodes on the screen
*DO,i,1,nnode
  *GET,t,NODE,i,NSEL      ! See if node i is selected; -1=unselected, 1=selected,
  *IF,t,EQ,1,then
    *GET,ZC,NODE,i,LOC,Z ! Get the z coordinate of node i.
    D,i,Ux,zc            ! Impose a rotation to node i around the y axis
    D,i,UZ,0
  *ENDIF
*ENDDO
NSEL,ALL
```

Bijlage 4: Script, aflezen kracht

Hieronder staat een voorbeeld van een script om in ANSYS de reactiekrachten en de buigende momenten van het liggeruiteinde op te halen. [NSEL,S,P] selecteert de knopen welke door de gebruiker worden aangewezen. Om een kloppende uitkomst te krijgen, moeten dit alle knopen zijn van een liggeruiteinde. Vervolgens worden de krachten in deze knopen opgehaald. Deze worden bij elkaar opgeteld en zo nodig vermenigvuldigd met hun z- of y- coördinaat om de momenten te berekenen. Als output geeft ANSYS de normaalkracht (N), de dwarskrachten (Dy en Dz), de momenten (Mx, My, Mz) en de procentuele afwijking tussen de analytisch en de numeriek bepaalde stijfheid (Dyp, Myp).

```
! ANSYS macro
! Calculate the forces and moments in a cross-section perpendicular to the x axis
! N = normal force
! Dy, Dz = shear forces
! My, Mz, Mx = bending moments and torsion moment
! P.C.J. Hoogenboom, April 28, 2010
! Aangepast door V.A.G.Bron
!
/NOPR                                ! suppress printout
/PMACRO                              ! log the macro commands
*GET,nnode,node,,num,max             ! total number of nodes
NSEL,S,P                             ! Select the involved nodes on the screen
*SET,N,0
*SET,Dy,0
*SET,Dz,0
*SET,My,0
*SET,Mz,0
*SET,Mx,0
*DO,i,1,nnode
  *GET,t,NODE,i,NSEL                 ! See if node i is selected; -1=unselected, 1=selected,
  *IF,t,EQ,1,then
    *GET,y,NODE,i,LOC,Y             ! Get the y coordinate of node i.
    *GET,z,NODE,i,LOC,Z             ! Get the z coordinate of node i.
    *SET,Rx,0
    *SET,Ry,0
    *GET,Rx,NODE,i,RF,FX             ! Get the rx reaction of node i.
    *GET,Ry,NODE,i,RF,FY             ! Get the ry reaction of node i.
    *GET,Rz,NODE,i,RF,FZ             ! Get the rz reaction of node i.
    *SET,N,N+Rx
    *SET,Dy,Dy+Ry
    *SET,Dz,Dz+Rz
    *SET,My,My+z*Rx
    *SET,Mz,Mz-y*Rx
    *SET,Mx,Mx+y*Rz-z*Ry
  *ENDIF
*ENDDO

/GO                                  ! resume printout
*SET,N,N
*SET,Dy,Dy
*SET,Dz,Dz
*SET,Mx,Mx
*SET,My,My
*SET,Mz,Mz
*SET,Dzp,(-1.785803539E6-Dz)/(Dz/100) !Procentuele afwijking t.o.v. analytische stijfheid
*SET,Myp,(3.571607077E9-My)/(My/100)  !Procentuele afwijking t.o.v. analytische stijfheid
/NOPR
NSEL,ALL
```

Bijlage 5: stijfheidsmatrix met afschuifvervorming

De stijfheidsmatrix met afschuifvervorming uit het dictaat “*Numerical Mechanics, The displacement method*” geschreven door ir. A.W.M. Kok.

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_y}{l} & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{\lambda_y}{l} & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & \frac{1}{2} \lambda_y \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & -\frac{1}{2} \lambda_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_z}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\frac{1}{2} \lambda_z & 0 \\ 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \mu & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\mu & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_z & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & p_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \lambda_z & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & -q_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & p_y & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -q_y \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_y}{l} & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & \frac{\lambda_y}{l} & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & \frac{1}{2} \lambda_z & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \frac{1}{2} \lambda_z & 0 \\ 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\mu & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \mu & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & \frac{1}{2} e_z \lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_z & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -q_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \lambda_z & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & p_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -q_y & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & \frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ F_{z2} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{bmatrix}$$

Matrix 13 - Stijfheidsmatrix met afschuifvervorming

$$\frac{1}{\lambda_y} = \frac{L^2}{12EI_z} + \frac{1}{k_y GA}$$

$$\frac{1}{\lambda_z} = \frac{L^2}{12EI_y} + \frac{1}{k_z GA}$$

$$\mu = \frac{GI_w + \lambda_y e_y^2 + \lambda_z e_z^2}{L}$$

$$p_y = \frac{EI_z}{L} + \frac{1}{4} \lambda_y L$$

$$p_z = \frac{EI_y}{L} + \frac{1}{4} \lambda_z L$$

$$q_y = \frac{EI_z}{L} - \frac{1}{4} \lambda_y L$$

$$q_z = \frac{EI_y}{L} - \frac{1}{4} \lambda_z L$$

Bijlage 6: Numeriek bepaalde stijfheidsmatrix T-ligger, grove elementen

Via het eindige-elementenprogramma ANSYS is de onderstaande stijfheidsmatrix verkregen voor de T-ligger. De afmetingen van de ligger met T- doorsnede staan op bladzijde 16. Het numerieke model is opgebouwd uit elementen van het type SOLID 45. De elementen hebben ribben van 21 x 11 x 21 mm lang. Deze ribben hebben de dubbele lengte van de ribben van de elementen waarmee de stijfheidsmatrix, Matrix 5 op bladzijde 20, is bepaald.

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 211933,33 & 0,00 & 4548,97 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 83,26 & 32,24 & 5200,00 & 0,00 & 124887,90 & 0,00 & 18,13 & -1165,25 & 297,11 & -1747875,84 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1165,25 & -1747875,84 & 3515334073,00 & 11428,91 & -4548,97 & 0,00 & 1747875,84 & 157520,00 & 1728293457,00 & 871,38 \\ 0,00 & 5193,00 & 209,52 & 4031848,00 & -157520,05 & 7789492,00 & 0,00 & 18,13 & -1165,25 & 297,11 & -1747875,84 & 0,00 \\ -0,03 & -1747875,84 & 3515334073,00 & 11428,91 & -4548,97 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 124887,90 & 0,00 & 7800848,00 & -865,71 & 249890566,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -4548,97 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 18,13 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1165,25 & 1747875,84 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 297,11 & 157520,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1747875,84 & 1728293457,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 871,38 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

Matrix 14 - Numeriek bepaalde stijfheidsmatrix van de T-ligger, bij gebruik van grove elementen in het ANSYS model

Bijlage 7: Berekening DC

Met behulp van Maple is de locatie van het dwarskrachtencentrum (DC) bepaald. Voor het berekenen van de specifieke stijfheden van de analytisch afgeleide stijfheidsmatrix voor de T-doorsnede is de afstand e_z nodig. De afstand e_z is de afstand tussen het dwarskrachtencentrum en het normaalkrachtencentrum (NC). Daarom is het nodig de locatie van het dwarskrachtencentrum te bepalen. De afstand in y-richting tussen het NC en het DC is nul, $e_y = 0$. Dit komt doordat de T-doorsnede symmetrisch is om de z-as.

> restart :

$L := 3000$;

$bf := 100$;

$hl := 189$;

$tl := 11$;

$tf := 11$;

$$z := \frac{(194.5 \cdot tf \cdot bf + 94.5 \cdot tl \cdot hl)}{(tl \cdot hl + bf \cdot tf)} \quad 129.102076$$

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot bf \cdot tf^3 + bf \cdot tf \cdot (194.5 - z)^2 + \frac{1}{12} \cdot tl \cdot hl^3 + tl \cdot hl \cdot (94.5 - z)^2$$

$$1.33935265410^7$$

$$I_z := \frac{1}{12} \cdot tf \cdot bf^3 + \frac{1}{12} \cdot hl \cdot tl^3$$

$$\frac{11251559}{12}$$

Voor het berekenen van de locatie van het DC wordt verondersteld dat er een moment $M_z = 1$ Nmm en een dwarskracht $V_y = 1$ N op de T-doorsnede werken. De normaalspanning (N_{span}) die hierdoor ontstaat staan hieronder weergegeven.

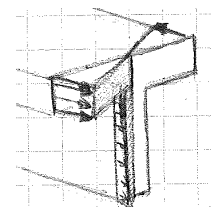
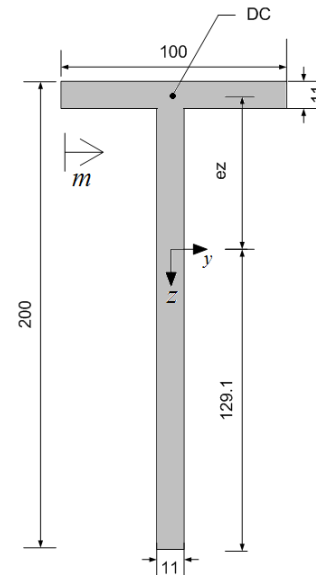
$$N_{spanflens}(m) := \frac{50}{I_z} - \frac{m}{I_z}$$

$$m \rightarrow \frac{50}{I_z} - \frac{m}{I_z}$$

$$N_{spanlijf}(m) := \frac{5.5}{I_z} - \frac{m}{I_z}$$

$$m \rightarrow \frac{5.5}{I_z} - \frac{m}{I_z}$$

De schuifspanning en de schuifkracht, voor het lijf en de flens staan hieronder. Te zien is dat de schuifkrachten samen gelijk zijn aan $V_y = 1$ N.



$$Schuifkrachtflens(f) := \int_0^f \left(11 \cdot \left(\frac{50 \cdot m}{I_z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{I_z} \right), m = 0 \dots f \right)$$

$$f \rightarrow \int_0^f \left(\frac{550 m}{I_z} - \frac{11}{2} \frac{m^2}{I_z} \right) dm$$

$$schuifkrachtlijf(f) := \int_0^f \left(189 \cdot \left(\frac{5.5 \cdot m}{I_z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{I_z} \right), m = 0 \dots f \right)$$

$$f \rightarrow \int_0^f \left(\frac{189 \cdot 5.5 m}{I_z} - \frac{189}{2} \frac{m^2}{I_z} \right) dm$$

$$schuifkrachtlijf(11)$$

$$0.0223577017$$

$$V_y := Schuifkrachtflens(100) + schuifkrachtlijf(11)$$

$$1.000000000$$

$$ez := z - (200 - z_{top})$$

$$-63.1621537$$