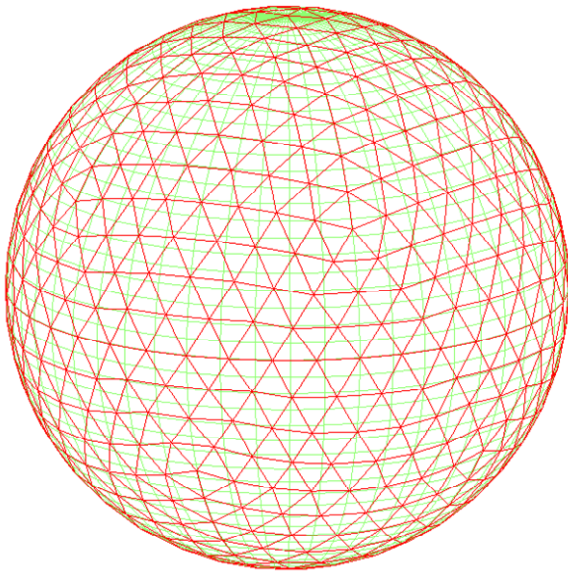




Vakwerken versus schalen

Okko Coppejans 1540521
CT3000 Bachelor eindwerk
13-1-2014

VOORWOORD

Voor u ligt het bachelor eindwerk van Okko Coppejans, student Civiele Techniek. In dit onderzoek worden twee verschillende bolvormige constructies vergeleken op basis van materiaalgebruik. Het onderzoek komt voort uit de opdracht, te vinden in Appendix B Opdracht Vakwerken versus schalen. Kort samengevat wordt daarin het verschil opgemerkt tussen de skeletten van verschillende dieren. Kleine dieren, zoals insecten, hebben vaak een exoskelet terwijl grote dieren, zoals mensen en olifanten, een endoskelet hebben. In de natuur is er op basis van de grootte van het dier te zeggen wat voor skelet deze heeft. Of dit te maken heeft met het de hoeveelheid materiaal wat nodig is om zo'n skelet te vormen is de centrale vraag in dit onderzoek.

SAMENVATTING

In dit onderzoek wordt uiteengezet hoe het materiaalgebruik van vakwerkconstructies en schaalconstructies zich verhoudt tot de radius van de te ontwerpen koepel of bol constructie. Om tot een goede vergelijking tussen de twee constructies is er een consequente methode van vergelijken nodig. Dit vergelijken wordt gedaan met behulp van toetsen, waarbij het bezwijken van de constructie en een maximale vervormingseis getoetst wordt. Deze toetsen worden gedaan met verschillende belastinggevallen, eigen gewicht en een puntlast en een combinatie van beiden.

De vakwerkconstructie die gebruikt wordt in dit onderzoek is een geodetisch vakwerk. Een geodetisch vakwerk is een vakwerk waarbij alle knopen van het vakwerk op het vlak van dezelfde denkbeeldige bol ligt. Het is daarom opgebouwd uit driehoeken die ongeveer het vlak van de bol volgen, hoewel de driehoeken uit rechte staven opgebouwd zijn. Aan de hand van de geometrie van de icosahedron, wat een regelmatig veelvlak met 12 hoeken en 20 vlakken is, kan een geodetisch vakwerk worden ontworpen. De simpelste versie van het geodetische vakwerk is de icosahedron zelf, want alle hoekpunten liggen op het vlak van een denkbeeldige bol. Om tot een complexer vakwerk te komen, wat uit meer driehoeken bestaat, is in het begin van de vorige eeuw een methode opgesteld door de heer Buckminster Fuller. In dit onderzoek wordt echter een zelf ontworpen methode gebruikt, die tot een vakwerk leidt met meer gelijke staaflengtes dan de methode van Buckminster Fuller. Daarnaast is deze nieuwe methode makkelijker te programmeren vanwege het herhalen van simpele berekeningen. Met deze methode worden vakwerken met uiteenlopende complexiteit ontworpen. De geometrie van ieder vakwerk verschilt van vakwerken met een lagere of hogere complexiteit en daarom worden deze per geval ontworpen. De ontwerpvariabelen bij een geodetisch vakwerk zijn de radius van de constructie, de staaftdoorsnede en de complexiteit. De formules voor de toetsen verschillen niet bij de verschillende complexiteiten.

De geometrie van de schaalconstructie is een stuk simpeler. Het onderzoek beperkt zich tot bolvormige constructie en koepelconstructies met als basis een cirkel. Ellipsoïden worden dus niet onderzocht in dit onderzoek. De ontwerpvariabelen bij schaalconstructies zijn de radius van de constructie en de dikte van de schaal, die uniform is over de gehele constructie.

Voordat er getoetst kan worden moeten er echter formules en toetsen worden opgesteld. Voor de vakwerkconstructies die in dit onderzoek worden ontworpen zijn nog geen formules bekend met betrekking tot de krachtenverdeling, de vervorming en de stabiliteit. Deze formules worden ontworpen met behulp van de verplaatsingenmethode en experimenten die gedaan zijn met behulp van het eindige elementenprogramma Ansys. Ansys is gebruikt bij het controleren van de constructie op krachtenverdeling, verplaatsing en doorslagknik. Het grootste deel van dit onderzoek wordt dan ook besteedt aan het ontwerpen van passende vergelijkingen en toetsen.

De schaalconstructie is lange tijd een populair onderwerp geweest om te onderzoeken. Om deze reden zijn er veel formules bekend voor het vinden van belangrijke gegevens over knik. De puntlast is echter een belastinggeval wat niet populair was om te onderzoeken en daarom wordt er in dit onderzoek een formule opgesteld voor de spanning in bolvormige constructies onder invloed van een puntlast. Deze formule komt voort uit experimentele resultaten van Chenjie Yu en wordt gebruikt voor het toetsen op vloei. Met deze formule zijn alle formules voor het toetsen van de constructie bekend en kan er met deze formules ontworpen worden.

Het ontwerpproces gebeurt met behulp van een Matlab script, dat per radius honderden constructies ontwerpt. In deze honderden ontwerpen verschilt bij de vakwerken alleen de complexiteit en de vakwerkstaafdoorsnede. Bij de schaalconstructies varieert alleen de dikte van de schaal. Vervolgens berekend het Matlab script het materiaalgebruik van de constructie voert de toetsen uit. Deze honderden constructies worden op een rijtje gezet en de constructie die bij het minimale materiaalverbruik nog aan de toetsen voldoet is de meest efficiënte constructie voor die bepaalde radius. De reden dat er honderden constructies ontworpen moeten worden heeft te maken met de onvoorspelbaarheid van het faalmechanisme, waardoor iteratief ontwerpen niet mogelijk is. Dit proces wordt herhaald voor iedere radius en belastinggeval, zodat uiteindelijk het verband tussen het materiaalgebruik en de radius bekend wordt.

In conclusie is een vakwerkconstructie efficiënter voor koepelconstructies met een radius groter dan 7 meter, bij belasting op eigen gewicht en of een puntlast. Voor bolvormige constructies en koepels met een radius kleiner dan 7 meter zijn schaalvormige constructies efficiënter.

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord	i
Samenvatting.....	ii
1 Inleiding	1
2 Onderzoeksmethodiek	2
3 Geodetische vakwerken	3
3.1 Geometrie.....	3
3.1.1 Basis.....	4
3.1.2 Complexiteit	5
3.2 Krachtenanalyse	6
3.2.1 Puntlast.....	6
3.2.2 Eigen gewicht	7
3.3 Vervormingenanalyse.....	8
3.3.1 Matlab berekening	10
3.3.2 Ansys Mechanical apdl berekening	10
3.4 Knikanalyse.....	11
3.4.1 Eulerse knik.....	11
3.4.2 Doorslag knik	11
3.5 Toetsen	15
3.6 Materiaalgebruik	16
4 Dunwandige schaalconstructies.....	17
4.1 Geometrie.....	17
4.2 Sterkte eisen	17
4.3 Vervormingenanalyse.....	21
4.3.1 Puntlast op de constructie	21
4.3.2 Eigen gewicht	21
4.4 Toetsen	22
5 Ontwerpen	23
5.1 Ontwerpproces.....	23
5.2 Complexiteit vakwerken.....	24
5.3 Vakwerkontwerpen	25
5.4 Schaalontwerpen.....	26
5.5 Materiaalgebruik ontwerpen	27
6 Conclusies.....	29
7 Aanbevelingen	30

Bibliografie	31
Appendix A Overzicht figuren en tabellen	32
Appendix B Opdracht Vakwerken versus schalen	33
Appendix C Matlab script	34
Ontwerpscript.m	34
EGvwt.m	38
Staveninv.m	39
Ansysprep.m	40
icosahedron2_function.m	40
Neighbours.m	42
Appendix D Experiment resultaten Chenjie Yu	43
Appendix E Ansys script niet-lineaire knik koepel $c=8$	46

1 INLEIDING

In het voorwoord werd de centrale vraag al een keer benoemd: Bij welke grootte van het lichaam is een endoskelet efficiënter dan een exoskelet?

In dit onderzoek worden de dieren versimpeld tot bollen of koepels en de skeletten tot schaalconstructies en vakwerkconstructies. Om te testen hoe het materiaalgebruik zich verhoudt tot de radius van de eerdergenoemde bollen en vakwerken, wordt een aantal bollen en koepels ontworpen met verschillende radii. De koepels en bollen worden ontworpen in twee soorten constructies, vakwerk- en schaalconstructies, waaruit zal blijken voor welke radius welke constructie efficiënter is qua materiaalgebruik. De hulpmiddelen bij dit onderzoek worden besproken in hoofdstuk 2 Onderzoeksmethodiek. Om de constructies op een goede manier te vergelijken, moeten dezelfde sterkte eisen gesteld worden aan de constructies. De twee constructies worden op dezelfde belastinggevallen getoetst.

De eerste constructie is een bol of koepel met een skelet in de vorm van een geodetisch vakwerk. Dit is een vakwerk waarbij alle knopen in het vlak van een denkbeeldige bol liggen. De staaflengtes zijn bij zo'n constructie nagenoeg gelijk. Om deze constructie vergelijkbaar te maken met de schaalconstructie, worden de driehoeken van het vakwerk afgedicht, om zo een functionele ruimte te creëren. Voor dit soort constructies zijn geen algemene formules beschikbaar en wordt in de praktijk bij het ontwerpen een eindige elementen methode programma gebruikt. In dit onderzoek wordt een zelfgeschreven Matlab script voor het toetsen van de constructie gebruikt en een eindige elementen methode programma om de uitkomsten te controleren en te helpen bij het opstellen van formules. Dit kan allemaal gevonden worden in hoofdstuk 3 (Geodetische vakwerken).

De tweede constructie is een schaalconstructie, die simpelweg bestaat uit een schaal van één materiaal met uniforme dikte. Ook deze constructie wordt getoetst op de belastinggevallen en dit is te vinden in hoofdstuk 4.

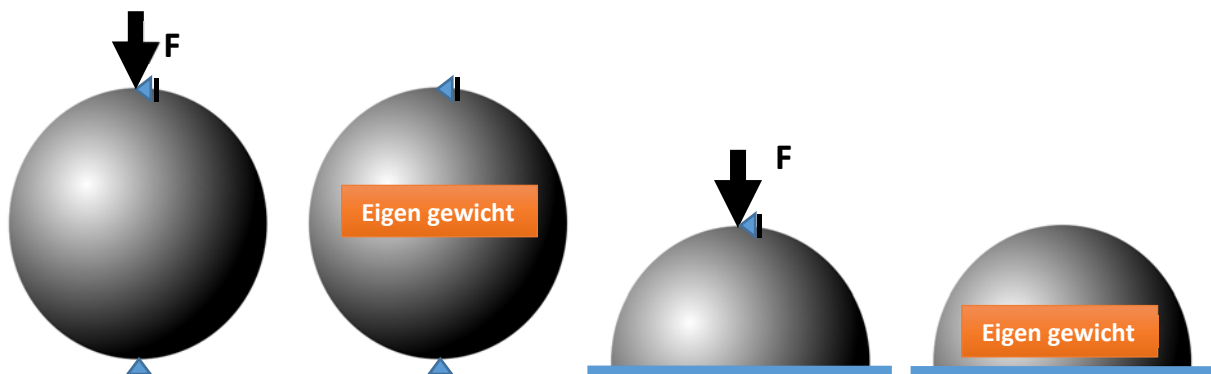
De ontwerpen van beide constructies zijn te vinden in hoofdstuk 5 en de conclusie in hoofdstuk 6. Na het doen van dit onderzoek is er ruimte voor aanbevelingen, hoofdstuk 7 om dit fundamentele onderzoek uit te breiden.

2 ONDERZOEKSMETHODIEK

Alle berekeningen in dit onderzoek worden gedaan met behulp van Matlab. Alle controles worden gedaan met behulp van Ansys Mechanical APDL. Voor beide programma's worden scripts geschreven die ervoor zorgen dat de constructie wordt berekend. Hierbij wordt gewerkt in de omgeving van het programma en zijn de berekeningen onderhevig hieraan. Een voorbeeld hiervan komt in dit onderzoek naar voren bij het bepalen van de staaflengtes en knoop coördinaten. Overal wordt gewerkt zonder afronden, maar de berekeningen leveren floating point getallen op met een bepaalde lengte.

Matlab werkt met floating point getallen met 16 decimalen. Bij het berekenen van de staaflengtes kan het daarom voorkomen dat de afrondfouten ten onrechte verschillende staaflengtes opleveren. Daarom wordt alleen bij het inventariseren van de staaflengtes afgerond tot een getal met 5 decimalen, wat in het script neerkomt op micrometers. De krachten- en vervormingen berekeningen worden wel met het volledige floating point getal gedaan, om afrondfouten te voorkomen.

Beide constructies worden belast op hun eigen gewicht of een puntlast zoals in Figuur 1, maar ook op de combinatie van beiden. Dit wordt verder toegelicht in de komende hoofdstukken.



FIGUUR 1: OVERZICHT BELASTINGGEVALLEN

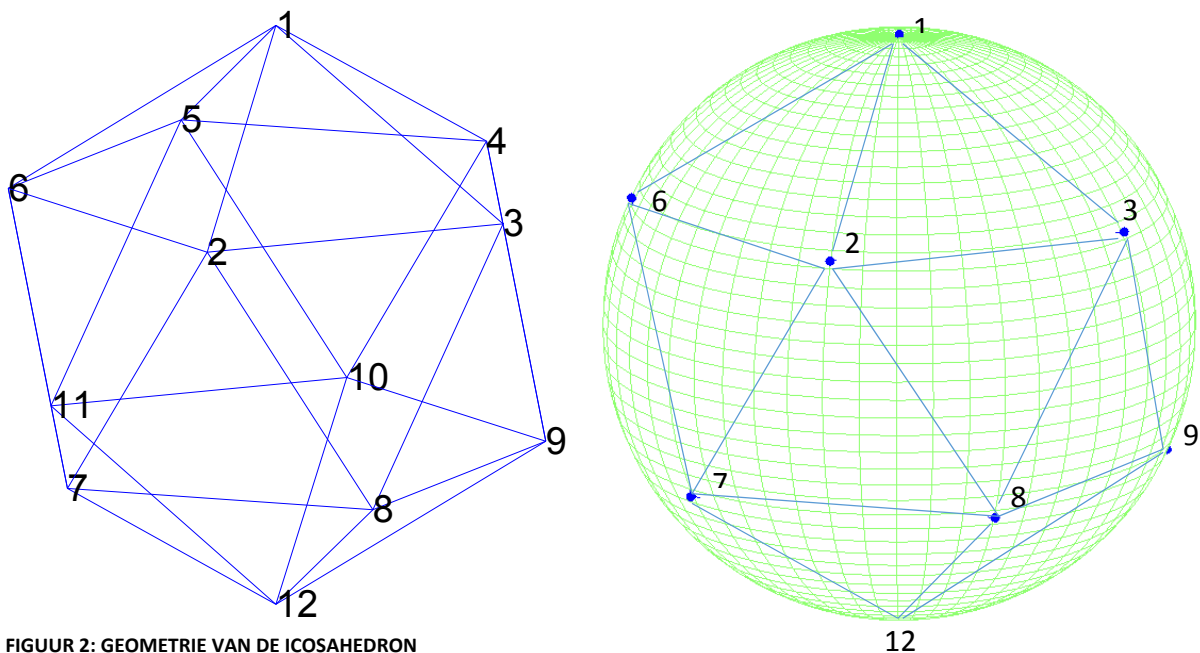
3 GEODETISCHE VAKWERKEN

Geodetische vakwerken zijn vakwerken waarbij alle verbindingen tussen vakwerkstaven op een denkbeeldige bol zijn geprojecteerd. Alle verbindingen hebben dus een afstand tot het middelpunt gelijk aan de radius van de bol. De driehoeken waar dit vakwerk uit is opgebouwd zijn nagenoeg identiek in afmetingen, zijn congruent en hebben gelijke onderlinge hoeken. Deze belangrijke eigenschappen maken het eenvoudig om de staafkrachten uit te rekenen en het geometrische gedrag te analyseren.

3.1 GEOMETRIE

De geometrie van een geodetisch vakwerk bestaat uit een aantal punten, geprojecteerd op een denkbeeldige bol, die verbonden zijn met behulp van vakwerkstaven. Het creëren van een geodetisch vakwerk begint bij het kiezen van een geschikt regelmatig veelvlak. De meest gebruikte vorm hiervoor is de icosahedron (twintigvlak). De icosahedron is een vorm die bestaat uit 20 identieke driehoeken, 12 hoekpunten en 30 ribben. De reden waarom dit de meest gebruikte vorm is om een geodetisch vakwerk te ontwikkelen, is de symmetrie van het figuur.

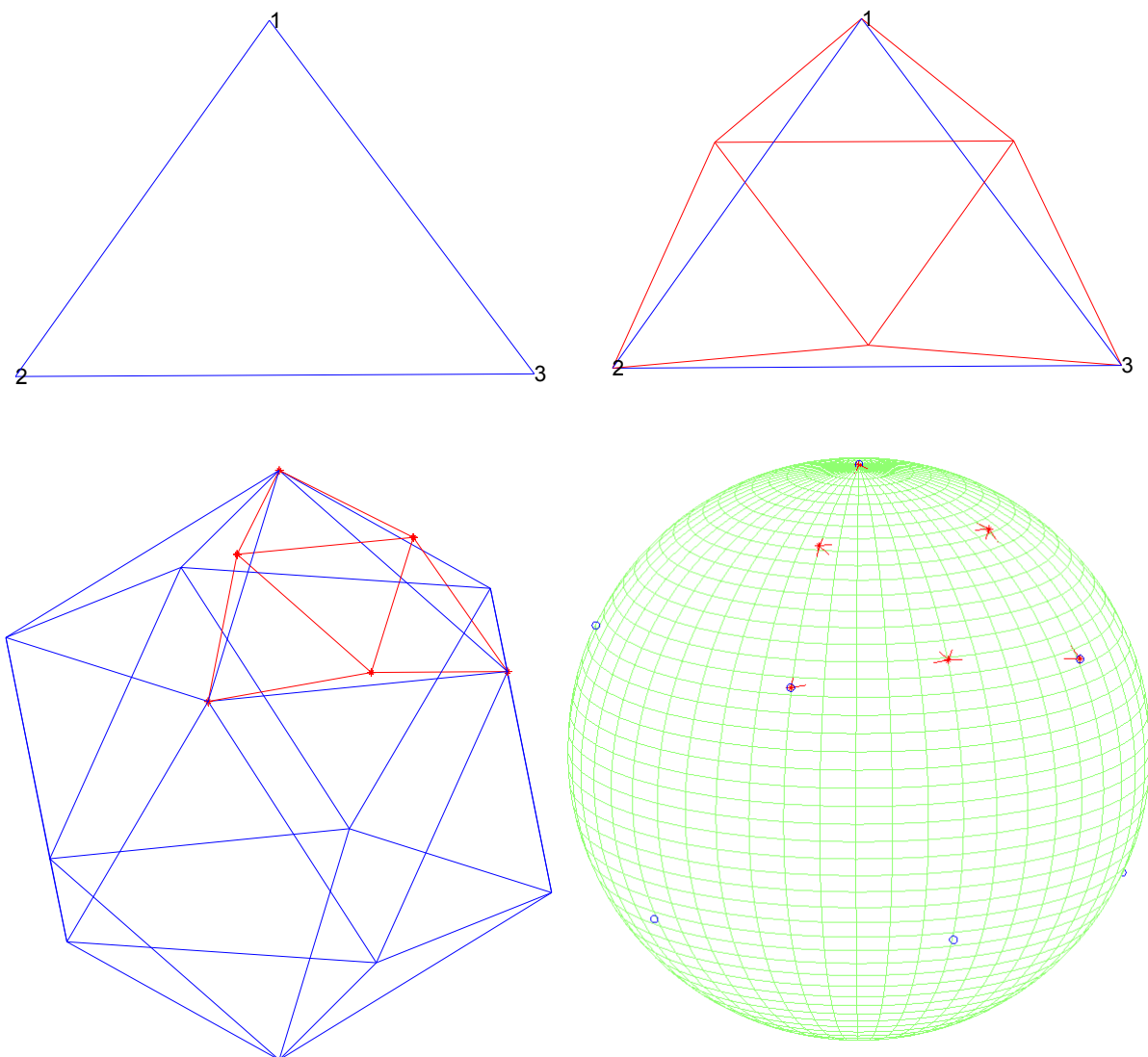
In Figuur 2 is het ruimtelijke skelet van de icosahedron te zien met genummerde hoekpunten. Nummer 2 tot en met 6 vormen de bovenste gelijkzijdige pentagon, nummers 7 tot en met 11 de onderste gelijkzijdige pentagon. Deze pentagons zijn ten opzichte van elkaar gedraaid en vormen met respectievelijk punt 1 en punt 12 een vijfhoekige piramide. De evenaar van deze ruimtelijke constructie ligt precies tussen het bovenste en onderste pentagon in. Op de groene bol zijn in het blauw de locaties van deze hoekpunten weergegeven.



FIGUUR 2: GEOMETRIE VAN DE ICOSAHEDRON

3.1.1 BASIS

De icosahedron is de eenvoudigste vorm van een geodetisch vakwerk. Alle hoekpunten liggen immers op een denkbeeldige bol en het is een regelmatig veelvlak. Alle punten op de ribben tussen de verschillende hoekpunten, liggen echter niet op de denkbeeldige bol. De methode om van de icosahedron een uitgebreider geodetisch vakwerk te maken bestaat simpelweg uit het projecteren van ieder middelpunt van iedere ribbe op de denkbeeldige bol. Het oorspronkelijke figuur bestaan uit 12 hoekpunten met 30 ribben. Het midden van elke ribbe wordt geprojecteerd op de omhullende bol, waardoor er 30 nieuwe hoekpunten ontstaan. Voor iedere bestaande driehoek, komen vier nieuwe driehoeken in de plaats. In Figuur 3 is de driehoek uit Figuur 2 met hoekpunten 1, 2 en 3 uitgelicht. Deze ruimtelijke gelijkzijdige driehoek heeft 3 ribben. Onderin Figuur 3 is te zien hoe het veranderen van 1 van de oorspronkelijke 12 driehoeken voor verandering zorgt in het totaalplaatje. Er zijn nu zes hoekpunten in deze driehoek die op de omhullende bol liggen en samen vormen zij vier nieuwe gelijkzijdige driehoeken.



FIGUUR 3: OPDELING ICOSAHEDRON

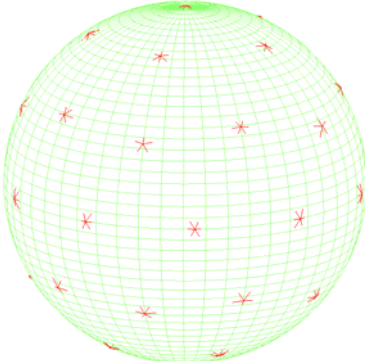
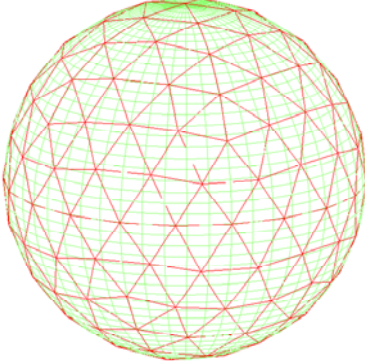
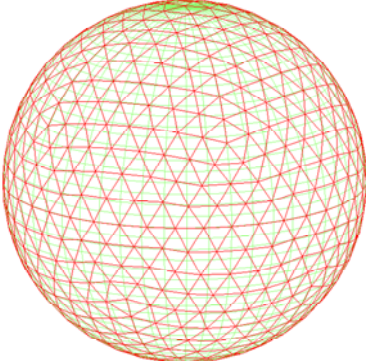
Hoe vaker dit proces wordt herhaald, hoe meer punten er op de bol komen te liggen. De mate van onderverdeling wordt in dit onderzoek verder aangeduid met complexiteit. Alle berekeningen en figuren volgen uit het Matlab script in Appendix C Matlab script.

3.1.2 COMPLEXITEIT

De complexiteit van het vakwerk beïnvloedt de volledige geometrie van het vakwerk. Er zijn praktisch gezien twee manieren om de complexiteit van het vakwerk te vergroten.

De eerste en bekendste methode is om iedere ribbe van de icosahedron onder te verdelen naar gelang de mate van complexiteit. Een complexiteit van acht zou vereisen dat iedere ribbe verdeeld wordt in acht gelijke delen, met dus zeven nieuwe knooppunten. Deze knooppunten worden geprojecteerd op de omliggende bol en zo wordt een geodetisch vakwerk gecreëerd.

De tweede methode om een complexiteit van bijvoorbeeld acht te verkrijgen is door de oorspronkelijke ribbe in tweeën te delen, vervolgens te projecteren op de omliggende bol en dan de nieuwe twee ribben weer in tweeën te delen en deze punten te projecteren. Op dit moment is dan een bol met complexiteit vier ontstaan en zodra de vier nieuwe ribben opnieuw in tweeën worden gedeeld en geprojecteerd op de omliggende bol wordt een complexiteit van acht verkregen. Dit proces wijkt wezenlijk af van de bekende methode van Buckminster Fuller. In de praktijk wordt deze tweede methode zelden gebruikt, hoewel deze methode het grote voordeel heeft minder verschillende lengtes staven nodig te hebben. De programmeerbaarheid van deze methode is logischer, vanwege de herhalende simpele berekeningen. Een nadeel hiervan is dat alleen complexiteiten van 2^n mogelijk zijn. In onderstaand tabel zijn een aantal geodetische vakwerken gegeven, met de kengetallen van de constructie. De groene bol stelt de denkbeeldige bol voor en is enkel een toegevoegd visueel aspect. De radius van de drie denkbeeldige bollen is 1% kleiner dan die van het geodetische vakwerk, zodat goed te zien is welk deel van het vakwerk voor 99% een bol omschrijft. Bij de riblengtes is vermeldt wat het verschil is tussen de twee eerder genoemde methoden.

					
Complexiteit:	2	4	8		
Aantal driehoeken bol:	48	192	768		
Hoekpunten bol:	42	162	642		
Hoekpunten koepel:	26	91	341		
Ribben bol:	120	480	1920		
Ribben koepel:	65	250	980		
Aantal riblengtes(1):	2	6	20		
Aantal riblengtes(2):	2	5	14		
Relatief verschil lengte(1):	0.88	0.780	0.725		
Relatief verschil lengte(2):	0.88	0.850	0.840		

TABEL 1: COMPLEXITEITEN

In Tabel 1 is al duidelijk te zien dat het aantal riblengtes uitpakt in het voordeel van methode 2. Hierbij moet worden opgemerkt dat het relatieve verschil in staaflengte bij de tweede methode ook kleiner is. Het relatieve verschil in staaflengte is de lengte van de kortste staaf gedeeld door de lengte van de langste staaf en hierbij geldt groter is beter. Staaflengtes worden afgerond op de vijfde decimaal (in dit geval micrometers), om te compenseren voor afbreekfouten van Matlab.

3.2 KRACHTENANALYSE

De krachten die op de constructie werken zijn beschreven in dit hoofdstuk. Bij het berekenen van deze krachten spelen de vectoren van de vakwerkstaven een essentiële rol.

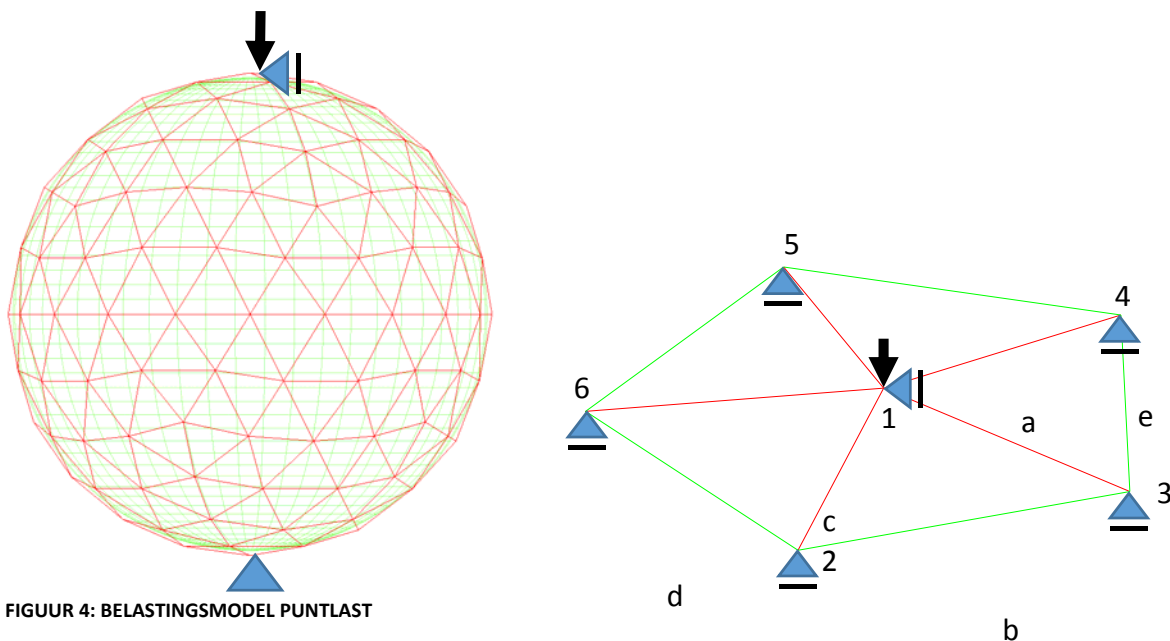
De krachtsafdracht is afhankelijk van zowel de vector van de vakwerkstaven als de elasticiteitsmodulus van het gebruikte materiaal. De rekenmethode is analoog aan de verplaatsingsmethode omschreven in (Hartsuijker & Welleman, 2004).

Bij de berekening worden de volgende aannamen gedaan:

1. Het tweede orde effect wordt verwaarloosd.
2. Alle staven zijn scharnierend in alle richtingen met elkaar verbonden.
3. De dakbedekking heeft geen invloed op de manier van krachtsafdracht, maar wel op de grootte van het eigen gewicht.

3.2.1 PUNTLAST

De puntlast wordt aangebracht op het bovenste hoekpunt en is gedefinieerd in de negatieve z-richting. In Figuur 4 wordt links dit overzicht gegeven. Rechts in onderstaand figuur staat het bovenste pentagoon afgebeeld, met de kracht en de aannamen die gelden uitgebeeld. Extra aanname bij de puntlast is dat alle significante verplaatsingen plaatsvinden in het bovenste pentagoon (of onderste pentagoon).



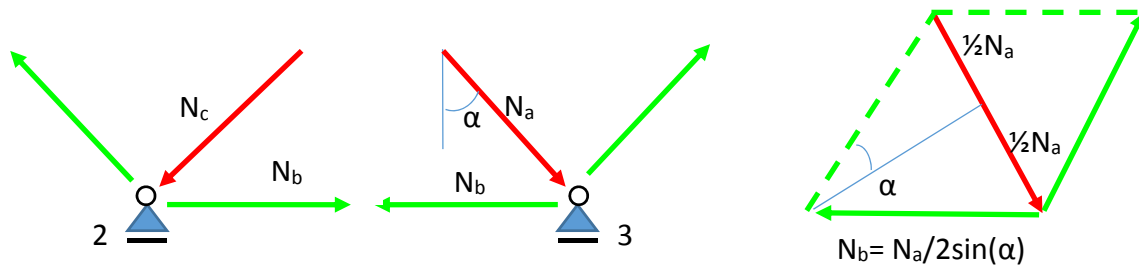
FIGUUR 4: BELASTINGSMODEL PUNTLAST

De rode staven rechts in Figuur 4 worden op zuivere druk belast, de groene staven op zuivere trek. Merk op dat het pentagoon niet plat is, het middelpunt ligt hoger dan de omliggende vijf punten. De krachtsverdeling wordt bepaald door de vectoren van alle staven die van punt 1 naar de punten 2 tot en met 6 lopen. Alle driehoeken in het bovenste pentagoon zijn identiek qua staaflengtes en hoeken en dus is de normaalkracht in iedere rode staaf hetzelfde. Dit volgt uit de verplaatsingsmethode. Stel de vector van staaf a is omschreven in matrix A, dan volgt uit Vergelijking 1 de normaalkracht in staaf a (en alle andere rode staven).

$$A = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \\ z_1 - z_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} N_{a,x} \\ N_{a,y} \\ N_{a,z} \end{bmatrix} = \frac{Fz}{5 * (z_1 - z_3)} * A$$

VERGELIJKING 1 KRACHTVERDELING

Nu de kracht in staaf a en de richting van staaf a bekend is, volgt de kracht in staaf b uit Figuur 5 en Vergelijking 2. De opleggingen 2 en 3 nemen alle krachtvectoren uit staaf a en c in de z-richting op.



FIGUUR 5 MODEL KRACHTVERDELING

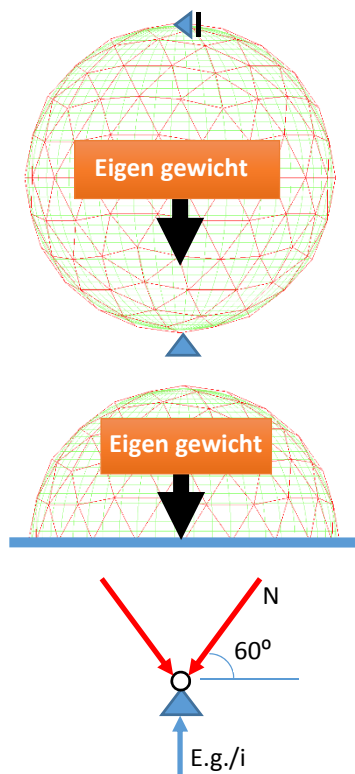
Uit het knoopenevenwicht bij knopen 2 en 3 volgt de ontbonden vector N_a , met het gegeven dat de normaalkracht in alle groene staven en de normaalkracht in alle rode staven gelijk zijn, Vergelijking 2.

$$N_b = \frac{\sqrt{N_{a,x}^2 + N_{a,y}^2}}{2 \sin(\alpha)} \quad \text{Met } \alpha = \frac{2 * \pi}{10}$$

VERGELIJKING 2 KRACHT IN TREKSTAAF

3.2.2 EIGEN GEWICHT

Bij belasting op eigen gewicht, zijn er twee verschillende gevallen te onderscheiden.



FIGUUR 6: STAAFKRACHT BIJ E.G BELASTING

Het eigen gewicht van de constructie zorgt voor een oplegreactie, waarbij de staven maatgevend worden belast zoals in bovenstaande paragraaf toegelicht. Voor dit geval zal dus Vergelijking 1 en Vergelijking 2 gebruikt worden.

Voor het geval waarbij een halve bol gebruikt moet worden die op eigen gewicht (Eg) belast wordt, zijn de staven onderaan de constructie maatgevend. Deze staven zorgen samen voor de oplegreactie in de z-richting, oftewel de richting waarin het eigen gewicht werkt. Het aantal oplegreacties is afhankelijk van de complexiteit (c). Voor het aantal oplegreacties (i) geldt: $i = 5 * c$. De kracht in de staven is afhankelijk van de hoek waaronder ze de oplegging bereiken, hiernaast is dat 60 graden. Hieruit volgt dat de kracht in de rode staaf, zie Figuur 6, als volgt berekend kan worden:

$$N = 0.5 * \frac{\sum E_g}{i} / \sin(60)$$

VERGELIJKING 3 STAAFKRACHT BIJ E.G BELASTING

3.3 VERVORMINGENANALYSE

De vervormingen ten gevolge van de verschillende belastingen staan in deze paragraaf uitgewerkt. Bij het uitwerken van de vervormingen zijn de volgende aannamen gedaan.

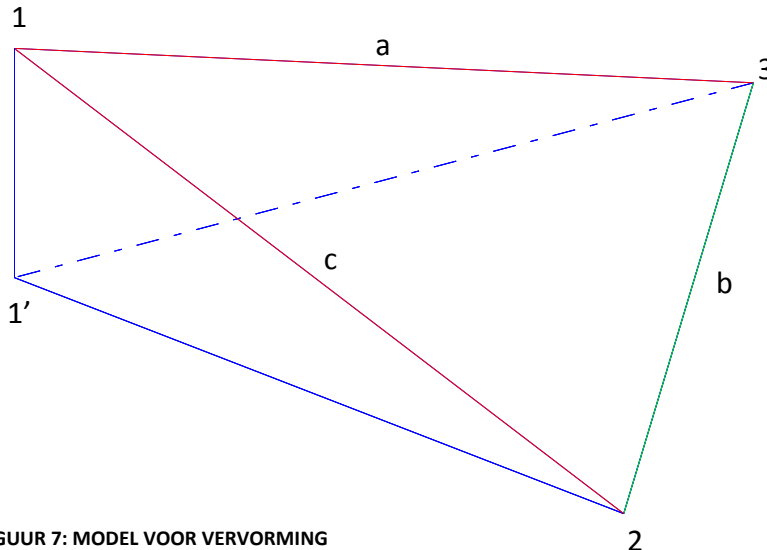
1. Het tweede orde effect wordt verwaarloosd.
2. Alle staven zijn scharnierend in alle richtingen met elkaar verbonden.
3. Alle significante vervormingen vinden plaats in het maatgevende pentagoon.

De vervormingen van de constructie worden volledig veroorzaakt door de verlenging en verkorting van de vakwerkstaven. Met Vergelijking 2 en de constitutieve betrekkingen zijn de volgende vergelijkingen te verkrijgen over de verlenging van de staven a en b.

$$\epsilon = \frac{N}{E * A} \quad \text{Staaft a: } \Delta l_a = \frac{N_a * l_a}{E * A} \quad \text{Staaft b: } \Delta l_b = \frac{N_b * l_b}{E * A} = \frac{\sqrt{N_{a,x}^2 + N_{a,y}^2} * l_b}{E * A * 2\sin(\alpha)}$$

VERGELIJKING 4 VERLENGING VAN DE STAVEN

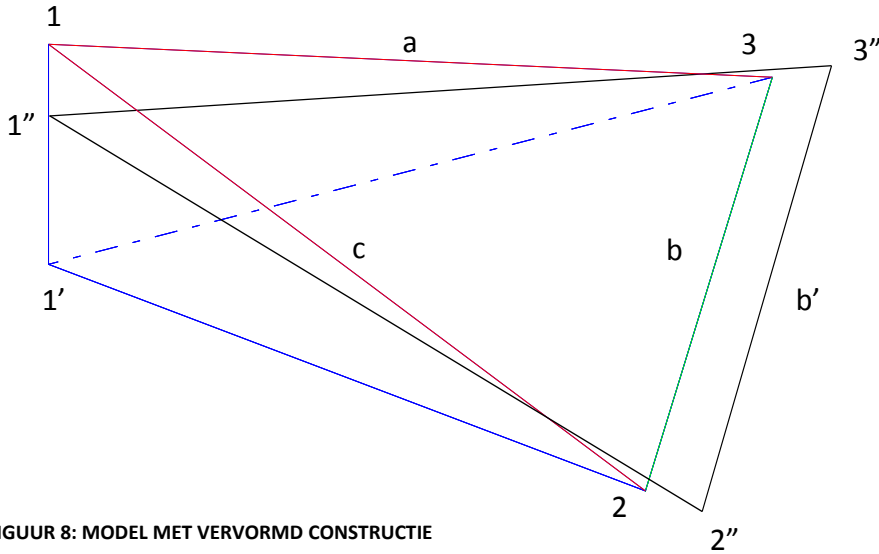
Met deze nieuwe staaflengtes, de oude staaflengtes en de voorwaarde van gelijkvormigheid kan het vervormde pentagoon berekend worden. In Figuur 7 is een driehoek van het bovenste pentagoon te zien, die ook al gebruikt werd in de krachtenanalyse. Hier is nu een ruimtelijke driehoek, ofwel simplex weergegeven. Door een verkorting of verlenging in staven a, b en c zal het vakwerk vervormen, waardoor punt 1 zal zakken ten opzichte van punt 2 en 3. In deze afbeelding zijn de op druk belaste staven wederom rood en de op trek belaste staven groen. De blauwe lijnen zijn toegevoegd om de ruimtelijkheid van het figuur weer te geven en zijn geen vakwerkstaven.



FIGUUR 7: MODEL VOOR VERVORMING

Zoals bekend is uit Vergelijking 4 hangt de verlenging van staaf b af van de normaalkracht in staaf a. Het punt 1' ligt op de z-as, waar de bol rond geconstrueerd is. De afstand van dat punt naar de punten 2 en 3 is dan ook gelijk en te zien als een soort van radius van het pentagoon. Staaf b zal door de normaalkracht verlengen, net als alle andere trekstaven in het pentagoon, waardoor de punten 2 en 3 in Figuur 7 lineair met deze verlenging zich van punt 1' zullen verwijderen.

Deze vervormde toestand zal er uitzien zoals afgebeeld in Figuur 8. Punt 1" stelt de nieuwe locatie voor van punt 1 en hetzelfde geldt voor punten 2 en 3. Staaf b' is de verlengde staaf b.



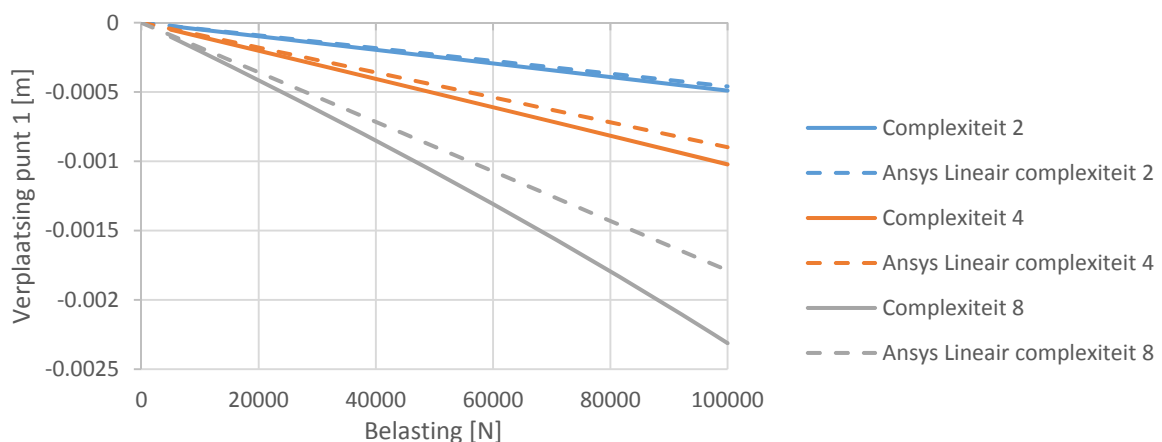
FIGUUR 8: MODEL MET VERVORMD CONSTRUCTIE

De zakking van punt 1 naar punt 1" is afhankelijk van ten eerste de verkorting van staven a en c en ten tweede van de verplaatsing van de punten 2 en 3 naar 2" en 3". De afstand tussen punt 1 en punt 1" wordt in het vervolg U_z genoemd, de afstand tussen punt 1' en 2" wordt R_{topna} genoemd. De berekening voor U_z vindt plaats met behulp van Pythagoras in driehoek (1", 2", 1'). De hoek tussen de staven a en c blijft $360/5=72$ graden. Met deze gegevens en de gelijkvormigheid van alle driehoeken in het pentagoon volgt Vergelijking 5.

$$R_{topna} = \frac{(l_b + \Delta l_b)}{2 * \sin\left(\frac{72}{2}\right)} \quad U_z = z_1 - \sqrt{(l_a + \Delta l_a)^2 - R_{topna}^2}$$

VERGELIJKING 5 ZAKKING VAN DE BOVENSTE KNOOP

Deze formules zijn gebruikt in het Matlab model (zie Appendix C) om de zakking van alle constructies te bepalen. Bij een grotere complexiteit wordt de z-waarde van de vector van staaf a kleiner, dan is de normaalkracht in de staven groter en daarmee ook de verplaatsing. In onderstaande grafiek is de relatie zakking-belasting te zien en de controlelijnen. Ter controle van alle eerder genoemde formules zijn een aantal constructies nagerekend met de eindige elementen methode in Ansys Mechanical APDL. Dit wordt in de komende paragraaf besproken.

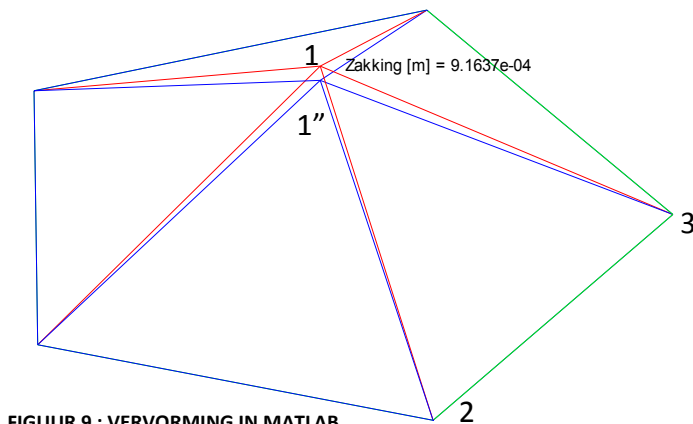


GRAFIEK 1: ZAKKING VERSUS BELASTING

Hieronder is één van de rekenvoorbeelden uitgewerkt, in zowel het Matlab script als met de eindige elementen methode.

3.3.1 MATLAB BEREKENING

In Matlab volgt uit het script in Appendix C de waarden en plot (blauw is vervormd) voor Figuur 9. De zakking (U_z) bedraagt voor dit belastinggeval 9.16×10^{-4} meters in Matlab, berekent met alléén het bovenste pentagoon en bovenstaande formules. Het oorspronkelijke punt 1 bevindt zich 96×10^{-4} meter boven de andere punten.



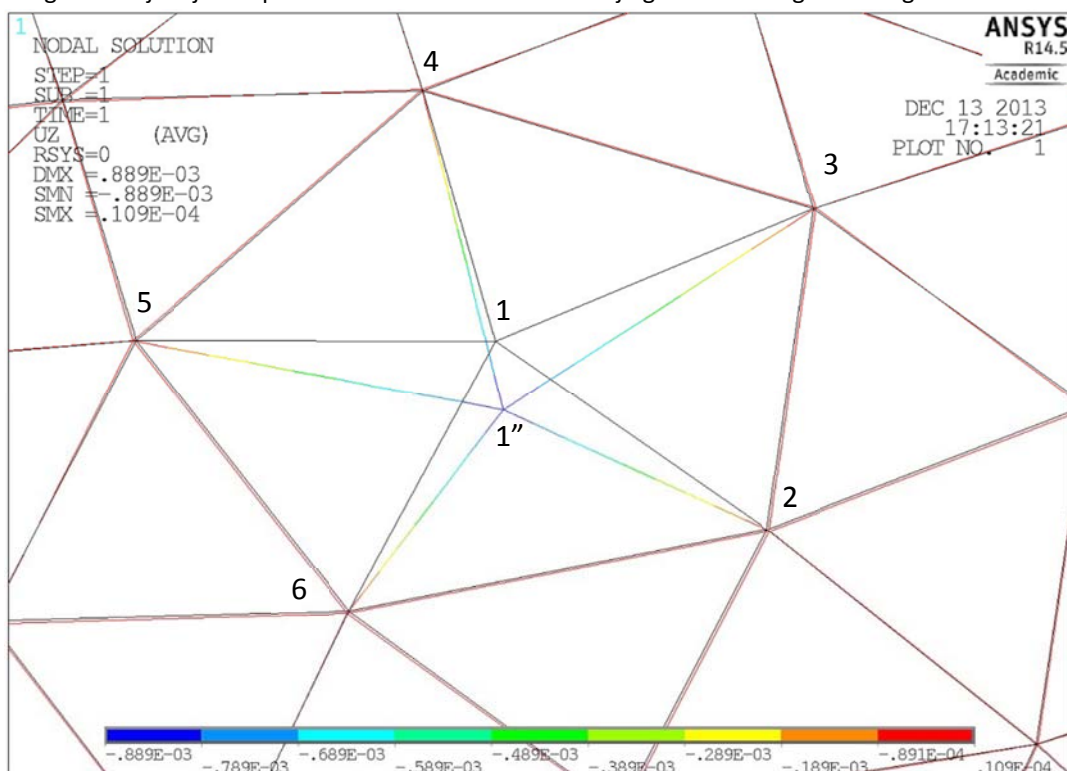
FIGUUR 9 : VERVORMING IN MATLAB

Rekenvoorbeeld kengetallen	
Complexiteit	8
Staaftdoorsnede oppervlakte	0.025 m ²
Belasting	50 kN
Radius constructie	1 m
U_z Matlab	9.16E-4 m
U_z Ansys	8.99E-4 m
Procentuele verschil Matlab en Ansys	3%

TABEL 2 REKENVOORBEELD KENGETALLEN

3.3.2 ANSYS MECHANICAL APDL BEREKENING

In het Matlab model wordt de vrijheidsgraad van de punten 2 tot en met 6 in het Y-X vlak niet beperkt. In het Ansys model worden de punten 2 tot en met 6 in het X-Y vlak beperkt door de stijfheid van omliggende driehoeken. Dit heeft dan ook tot effect dat de hier berekende $U_z = 0.889 \times 10^{-3} = 8.89 \times 10^{-4}$ ongeveer 3 procent kleiner is dan de in Matlab berekende waarde. In Figuur 10 is de oorspronkelijke constructie zwart en de (overdreven) vervormde constructie gekleurd op afwijking in z-richting. Hierbij is goed te zien dat de afwijking in z-richting van de staven meer dan factor 10 kleiner is dan U_z (donkerblauw $\approx 0.889 \times 10^{-3}$ en rood $> 0.891 \times 10^{-4}$). Zoals in Grafiek 1 al te zien is, is de Matlab berekening altijd een overschatting, dus de aannamen 2 en 3 uit paragraaf 3.3 die gedaan zijn bij het opstellen van het Matlab model zijn gerechtvaardigd en veilig.



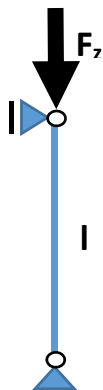
FIGUUR 10: VERVORMING IN ANSYS

3.4 KNIKANALYSE

De vakwerkstaven van de bovenste driehoeken worden belast op aanzienlijke normaalkrachten doordat de z-component van hun vector gering is ten opzichte van de x- en y-componenten. Als er dus een kracht in de z-richting op de constructie werkt, worden de x- en y-componenten heel groot. Het effect hiervan is dat de normaalkracht in de staven veel groter is dan de externe belasting. Het belastingsgeval eigen gewicht heeft hier ook mee te maken. Het eerste geval van knik wat uitgerekend wordt is dan ook Eulerse knik.

3.4.1 EULERSE KNIK

Knik in vakwerkstaven is te omschrijven met een zeer eenvoudig model, wat in Figuur 11 te zien is. De formules die hiervoor bekend zijn staan in Vergelijking 6.



$$F_k = \frac{\pi^2 * E * I}{l^2}$$

$$I = \frac{\pi * r^4}{4} \text{ Voor ronde oppervlaktes}$$

$$A = \pi * r^2 \quad r^2 = \frac{A}{\pi} \quad I = \frac{\pi * \left(\frac{A}{\pi}\right)^2}{4} = \frac{A^2}{4 * \pi}$$

$$F_k = \frac{\pi^2 * E * \frac{A^2}{4 * \pi}}{l^2} = \frac{\pi * E * A^2}{4 * l^2}$$

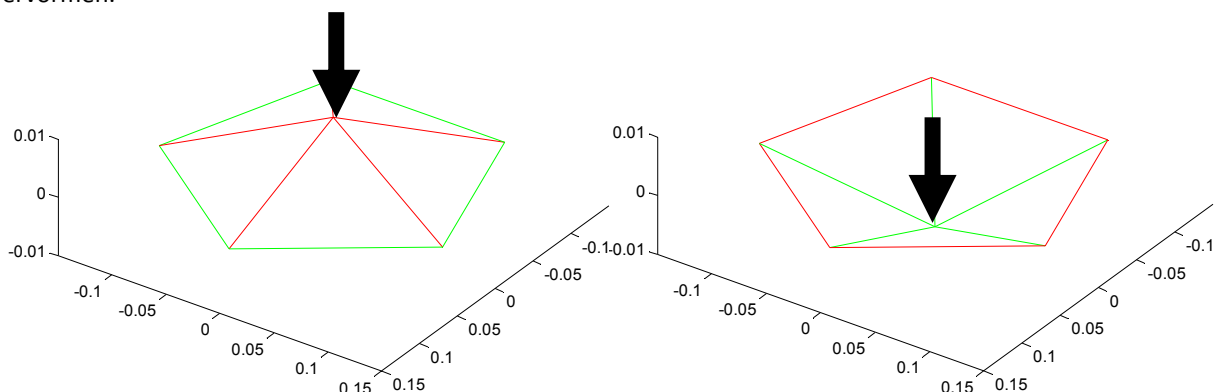
FIGUUR 11: EULERSE KNIK

VERGELIJKING 6 (HARTSUIJKER & WELLEMANN, 2007)

Uit bovenstaande gegevens zijn gemakkelijk per staaf de maximale kniklasten te vinden, deze is namelijk alléén afhankelijk van de lengte van de staven en het doorsnedeoppervlak. Ook hier is weer een verband te vinden met de complexiteit van het vakwerk, er geldt immers hoe complexer, hoe korter de staven.

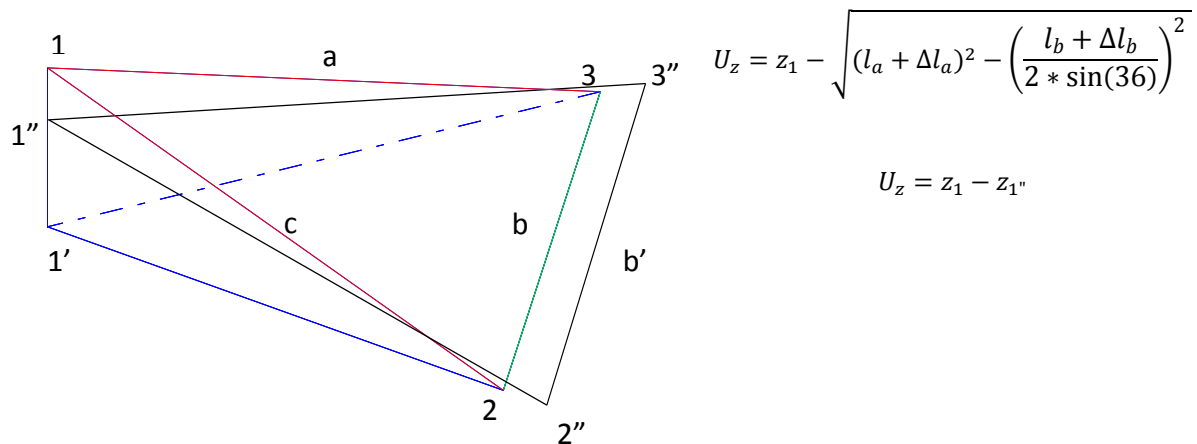
3.4.2 DOORSLAG KNIK

Naast Eulerse knik zijn er nog andere knikvormen die de constructie aan kan nemen onder invloed van de externe belasting of de oplegreacties. In dit onderzoek wordt nog een knikvorm onderzocht, namelijk de mogelijkheid van het omklappen van het ruimtelijke pentagoon. Dit wordt geïllustreerd in Figuur 12, het pentagoon is te zien zoals in eerdere figuren, met drukstaven rood en trekstaven groen. Links in Figuur 12 staat de piramide met de punt omhoog, rechts is hij door een belasting op de punt naar beneden gedrukt. De staven die van de punt naar de vijf hoekpunten lopen zijn nu trekstaven geworden en de vijf staven van het pentagoon zijn drukstaven. Deze knikvorm wordt berekend in deze paragraaf en maakt onderdeel uit van de toetsen die op de constructie worden gedaan. In het Matlab model kan de constructie niet verder vervormen omdat aangenomen is dat alle relevante vervorming plaatsvindt in het maatgevende pentagoon. In realiteit kan de rest van de constructie wel verder vervormen.



FIGUUR 12: DOORSLAGKNIK BIJ HET MAATGEVENDE PENTAGOON

In paragraaf 3.3 is de formule voor de zakking van de top van de piramide afgeleid (Vergelijking 5), die in Figuur 13 nogmaals is weergegeven.

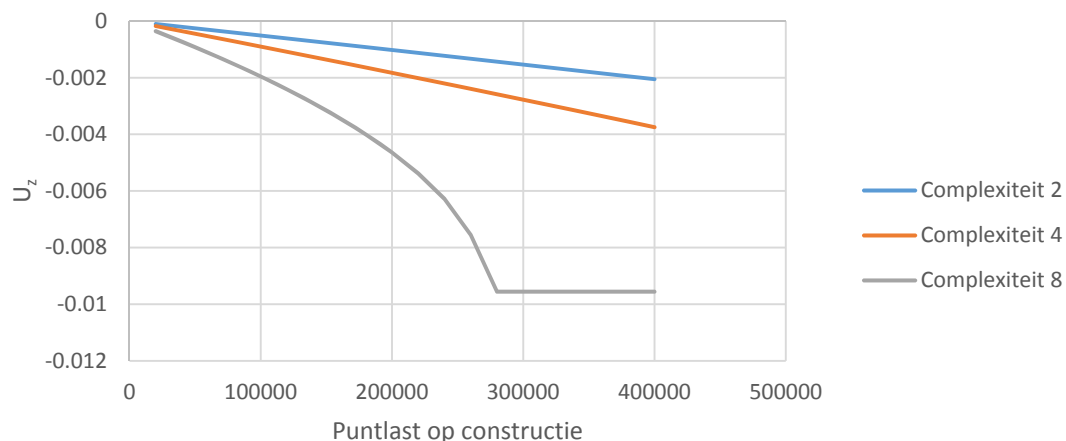


FIGUUR 13: VERVORMING MAATGEVEND PENTAGON

Hieruit volgt dat om te knikken punt 1 zo ver moet zakken dat het gelijk ligt met punt 1'. In dat geval geldt $U_z = z_1$ en moet het geheel onder het wortelteken 0 worden. In dit versimpelde model, waarbij de punten 2 en 3 zich ongelimiteerd van punt 1' kunnen verwijderen, zal de uiteindelijke kniklast lager zijn dan het complete model. De punten 2 en 3 kunnen zich in de constructie niet ongelimiteerd van punt 1' verwijderen, de stijfheid van de constructie onder en rond het pentagoon houdt dat tegen. Deze stijfheid is afhankelijk van de radius van de constructie, de complexiteit van het vakwerk en natuurlijk het doorsnedeoppervlak en Young's modulus van de staven. Dankzij de geringe hoogte van de vijfhoekige piramide ten opzichte van de staaf lengtes, zal in werkelijkheid de knik eerder optreden. Dit komt doordat een kleine vervorming door een kracht, grote invloed heeft op de krachtenverdeling, wat bekend staat als het 2^e orde effect. Dit kan alleen uitgerekend worden met een niet-lineaire berekening. Hieronder volgt een voorbeeld van de berekening van de kniklast die dit oplevert, met het Matlab script en daarna niet-lineair met behulp van Ansys.

3.4.2.1 MATLAB BEREKENING

In het Matlab script wordt wederom een staaf doorsnedeoppervlak van 0,025m² en een radius van 1m gebruikt. Dit resulteert in het volgende plaatje tot de waarden van U_z voor een oplopende puntlast. Opvallend is nu dat bij grotere waarden van de puntlast, het verloop van U_z duidelijk niet meer lineair is. De oorzaak hiervan is dat de variabelen onder de wortel niet allemaal afhankelijk zijn van F_z in de functie die te zien is in Figuur 13 van de vorige paragraaf. De last waarbij punt 1'' is gezakt tot de plaats van punt 1' (op -0,0096), zie ook Figuur 13, is voor het vakwerk met complexiteit 8 ongeveer 280000 Newton.

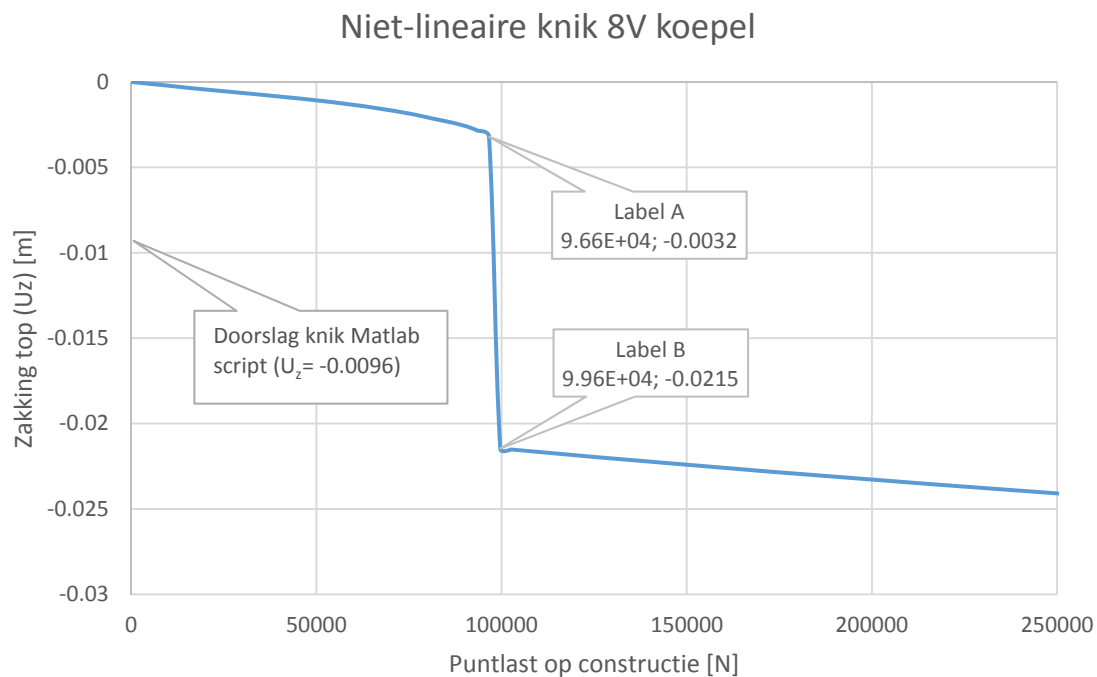


GRAFIEK 2: DOORSLAGKNIK VOLGENS MATLAB

3.4.2.2 ANSYS MECHANICAL APDL NIET-LINEAIRE BEREKENING

Met behulp van Ansys kan een niet lineaire berekening uitgevoerd worden. In vergelijking met de methode in Matlab van de vorige paragraaf zitten hier twee belangrijke verschillen in. In deze paragraaf wordt de volledige constructie meegenomen in de berekeningen en wordt het tweede orde effect niet verwaarloosd. Het doel van het Matlab uitkomsten vergelijken met deze berekening is onderzoeken hoe groot het verschil tussen beide uitkomsten is. Dit is van belang om te zorgen dat de constructie niet alsnog knikt en dus faalt, terwijl dat volgens het Matlab script nog niet het geval is.

In Grafiek 3 is de uitslag van deze berekening te zien, waarbij de doorslagknik optreedt bij ongeveer $9,66 \times 10^4$ N. De doorslagknik treedt dus veel eerder op dan het Matlab script aangeeft en daar moet rekening mee gehouden worden. Uit Grafiek 3 is ook te lezen dat het kritieke punt te vinden is bij $U_z = -0,0032$, wat een derde is van de doorzakking die toelaatbaar is in het Matlab script.



GRAFIEK 3: NIET LINEAIRE DOORSLAGKNIK MET ANSYS

Om de juiste veiligheidsmaatregel te bepalen worden nog een paar constructies doorgerekend, met verschillende radii en verschillende staafdoorsnede oppervlaktes. Deze resultaten zijn in onderstaande tabellen te zien voor constructies met complexiteit 8, maar ook op andere complexiteiten is getoetst. In Matlab was $U_{knik} = -0.0096$ voor een koepel met radius 1 en $A = 0.0025 \text{ m}^2$. Dit punt is bereikt als het pentagoon plat is.

A=0.0025	F _{knik} [m]	U _{knik} [m] Ansys	U _{knik} [m] Matlab
r=1m	9.66E+04	-0.0032	-0.0096
r=2m	9.62E+04	-0.0063	-0.0191
r=4m	9.77E+04	-0.0136	-0.0382

r=1	F _{knik} [m]	U _{knik} [m] Ansys
A=0.00125	4.83E+04	-0.0032
A=0.0025	9.66E+04	-0.0032
A=0.005	1.95E+05	-0.0034

TABEL 3: UITKOMSTEN ANSYS NIET LINEAIRE KNIK BEREKENING

Het opvallendste uit Tabel 3 is dat bij variatie van de radius, de kritieke $F_z (=F_{knik})$ ongeveer gelijk blijft en dat de kritieke $U (=U_{knik})$ lineair stijgt met de radius. Deze U_{knik} is voor alle gevallen iets meer dan 1/3 van de in Matlab berekende waarde. Uit het rechterdeel van de tabel blijkt dat bij een grotere of kleinere staafdoorsnede, de U_{knik} gelijk blijft terwijl de knikkracht halveert respectievelijk verdubbeld als de staafdoorsnede halveert of verdubbeld.

De experimentele uitkomsten uit Tabel 3 worden gebruikt om onderstaande formules op te stellen.

$$U_{knik} = \frac{1}{3} * (z_3 - z_1); \quad F_k = F(U_{knik})$$

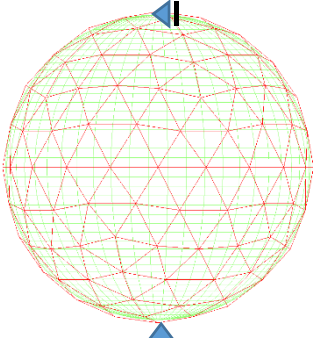
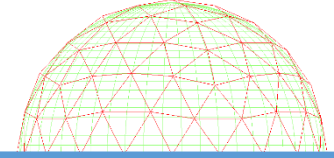
VERGELIJKING 7 EXPERIMENTELE DOORSLAGNIKFORMULE

De factor 1/3 is voor een complexiteit van acht net aan de veilige kant. De constructie wordt veiliger naarmate de complexiteit van het vakwerk kleiner is of groter is dan acht. Bij een complexiteit van vier vertoont de constructie pas doorslagknik bij $0,36 * (z_3 - z_1)$ terwijl bij een complexiteit van zestien de factor 0,39 bedraagt. De formule voor U_{knik} waarbij doorslagknik optreedt wordt gebruikt om de constructie op doorslagknik te toetsen.

Het Ansys script wat hiervoor gebruikt is, is te zien in Appendix E.

3.5 TOETSEN

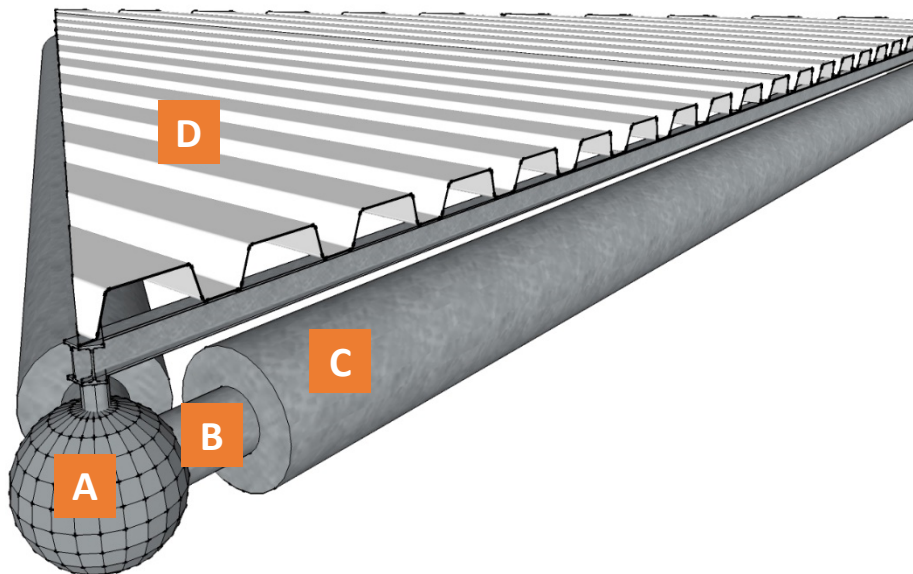
Bij het toetsen van de constructie wordt uitgegaan van staal, met materiaalfactor 1.0. Deze materiaalfactor is in de toetsen in Tabel 4 niet genoemd.

		
Vloei F_z	$\frac{N_a}{A} < 235 \frac{N}{mm^2};$ $N_a = \sqrt{N_{a,x}^2 + N_{a,y}^2 + N_{a,z}^2};$ $\begin{bmatrix} N_{a,x} \\ N_{a,y} \\ N_{a,z} \end{bmatrix} = \frac{Fz}{5 * (z_1 - z_3)} * \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \\ z_1 - z_3 \end{bmatrix}$	$\frac{N}{A} < 235 \frac{N}{mm^2};$ Zie Vloei F_z. De vijf bovenste staven zijn weer maatgevend.
Vloei E.g. UGT	Zie Vloei F _z vanwege oplegreactie. (paragraaf 3.2.2 Eigen gewicht)	$\frac{N_m}{A} = 0.5 * \frac{\sum E g}{\sin(60)} / A < 235 \frac{N}{mm^2}$
Knik F_z (Euler)	$N_a < F_k = \frac{\pi * E * A^2}{4 * l^2}$	$N_a < F_k = \frac{\pi * E * A^2}{4 * l^2}$
Knik E.g. (Euler)	$N_a < F_k = \frac{\pi * E * A^2}{4 * l^2}$	$N_m < F_k = \frac{\pi * E * A^2}{4 * l^2}$
Knik F_z (doorslag)	$U_{knik} = \frac{1}{3} * (z_3 - z_1)$ Zie paragraaf 3.4.2.2.	$U_{knik} = \frac{1}{3} * (z_3 - z_1)$
Knik eg (doorslag)	$U_{knik} = \frac{1}{3} * (z_3 - z_1)$	Niet maatgevend.
Vervorming eg en F_z	$U_z < 0.02 * R =$ $z_1 - \sqrt{(l_a + \Delta l_a)^2 - \left(\frac{l_b + \Delta l_b}{2 * \sin(36)}\right)^2}$ Met: $\Delta l_a = \frac{N_a * l_a}{E * A}; \quad \Delta l_b = \frac{N_b * l_b}{E * A}$ Zie paragraaf 3.2.2 Eigen gewicht	$U_z < 0.02 * R =$ $z_1 - \sqrt{(l_a + \Delta l_a)^2 - \left(\frac{l_b + \Delta l_b}{2 * \sin(36)}\right)^2}$ Met: $\Delta l_a = \frac{N_a * l_a}{E * A}; \quad \Delta l_b = \frac{N_b * l_b}{E * A}$ Eigen gewicht nvt, zie 3.2.2 Eigen gewicht

TABEL 4: OVERZICHT TOETSEN VAKWERKCONSTRUCTIE

3.6 MATERIAALGEBRUIK

Het materiaalgebruik van de vakwerkconstructie is tweedelig. Ten eerste heeft het vakwerk zelf een aantal staven en een aantal knopen die het materiaalgebruik bepalen. Daarnaast moeten de driehoeken van het vakwerk opgevuld worden om een functionele constructie te krijgen. Dit gebeurt met behulp van een constructie weergegeven in Figuur 14. Deze afbeelding is een impressie van hoe de dakconstructie er uit zou kunnen zien, maar het tot in detail ontwerpen van de dakbedekking valt buiten de scope van dit onderzoek. De dakbedekking constructie wordt getoetst op vloeï, door het eigen gewicht van de dakbedekking. Aan de hand hiervan wordt het gewicht van de dakbedekking bepaald en daarmee het materiaalgebruik.



FIGUUR 14: IMPRESSIE DAKDEEL MET BEDEKKING

In Figuur 14 is de verbinding tussen de vakwerkstaven aangegeven met een A. Het stukje staaf met aanduiding B zorgt ervoor dat de staven scharnierend aan de verbindingstuk A verbonden zijn, doordat deze een veel kleiner weerstandsmoment heeft dan staaf C. Met de letter D wordt het dak aangegeven, wat bijvoorbeeld van golfplaat of een gebogen plaat gemaakt kan worden.

De relatie tussen het materiaalgebruik en de radius staat centraal in dit onderzoek. Om deze reden wordt voor de constructie in Figuur 14 uitgerekend hoeveel materiaal dit kost en zo gebeurt het ook voor de rest van de constructie. Dit is gedaan met behulp van een aantal aannamen om niet teveel in details te treden.

1. De verbinding tussen de vakwerkstaven is een bol met dezelfde radius als de vakwerkstaven.
2. Het inkorten van de vakwerkstaven zodat deze aansluit op het scharnier levert een verwaarloosbaar gewichtsverschil op.
3. De dakbedekking constructie bezwijkt niet onder haar eigen gewicht.
4. De ligger die de golfplaat draagt wordt gedimensioneerd op de permanente belasting van het eigen gewicht van de golfplaat. Deze ligger wordt alleen getoetst op vloeï.
5. De dikte van de golfplaat is een vaste verhouding tussen de radius van de constructie en vakwerkstaven.

Het dimensioneren van de ligger die de golfplaat draagt wordt gedaan met behulp van Vergelijking 8.

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8} * q * l^2}{\frac{1}{6} * b * h^2}$$

VERGELIJKING 8 TOETS OP VLOEI VOOR DAKBEDEKKING

4 DUNWANDIGE SCHAALCONSTRUCTIES

Het ontwerpen van de dunwandige schaalconstructies gebeurt op eenzelfde manier als het ontwerpen van de vakwerken. De belangrijkste ontwerpvariabele is de schaaldikte t .

4.1 GEOMETRIE

Dunwandige schaalconstructies worden in dit onderzoek gezien als halve bollen of hele bollen, afhankelijk van het benodigde ontwerp. De reden dat er bij alle ontwerpen voor dunwandige schaalconstructies wordt gekozen is simpelweg het materiaalgebruik beperken. Er is al veel onderzoek gedaan naar de eigenschappen van bolvormige schaalconstructies en de formules die daar uit volgden worden in dit onderzoek gebruikt om de constructie te dimensioneren. Bij het onderzoeken van deze formules vallen een paar dingen op.

1. Het belangrijkste faalmechanisme van (in het bijzonder bolvormige) schaalconstructies is knik.
2. Imperfecties in schaalconstructies hebben een enorme impact op onder andere de kniklast.

“Since the load-carrying capability of thin shells is mostly determined by the buckling load, it is very important to determine a reliable and accurate value of this load for design purposes.” (Ventsel & Krauthammer, 19.10 Design Stability Analysis, 2001)

Bovenstaande opsomming en quote zorgen er voor dat de focus in dit deelonderzoek over het ontwerp van de bolvormige schaalconstructie direct op het materiaalgebruik uitkomt. Dit wordt verder toegelicht in paragraaf 4.2 Sterkte eisen.

De bolvormige schaalconstructie is opgebouwd uit staal in dit onderzoek om zoveel mogelijk de observatie uit punt 2 teniet te doen. Een stalen schaal kan met minder imperfecties worden gebouwd dan bijvoorbeeld een schaal opgebouwd uit gewapend beton. De tweede reden om ook deze constructie in staal uit te voeren is om het materiaalgebruik vergelijkbaar te houden met de vakwerk constructies.

4.2 STERKTE EISEN

De theorie voor dunne schaalconstructies gaat op voor bollen en koepels waarvoor de eis geldt in Vergelijking 9. Op basis van deze theorie zijn de formules in Vergelijking 10, Vergelijking 11 en Vergelijking 12 ontworpen. R is de radius, t is de dikte van de schaal.

$$1/1000 \leq \max\left(\frac{t}{R}\right) \leq 1/20$$

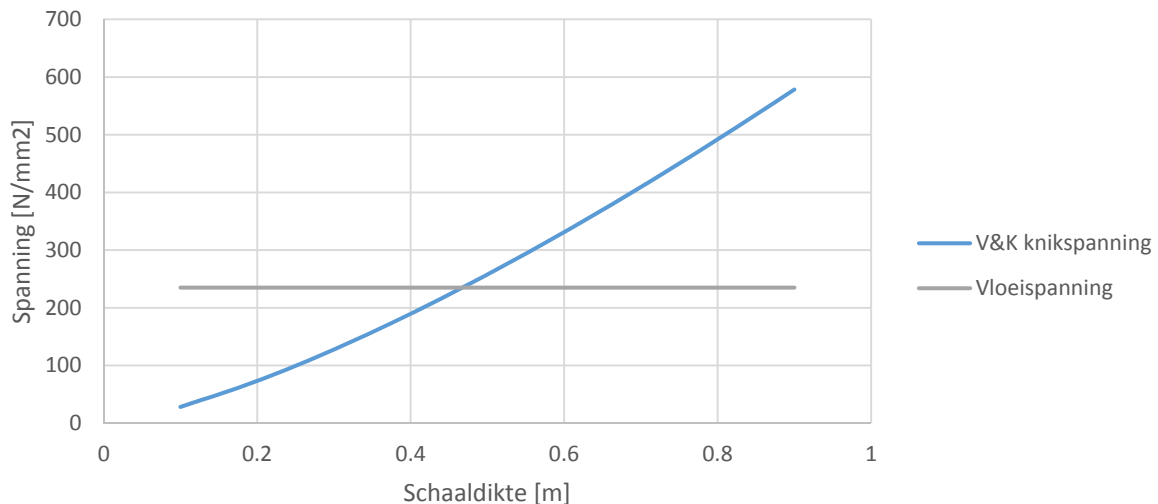
VERGELIJKING 9 (VENTSEL & KRAUTHAMMER, THIN PLATES AND SHELLS: THEORY, ANALYSIS AND APPLICATIONS, 2001)

Vergelijking 9 is de eerste voorwaarde waar de bolvormige schaalconstructies aan moeten voldoen. De beste dikte voor dit onderzoek zal dan ook in bovenstaand bereik gezocht worden.

$$\sigma_{cr} = \mu * \frac{E * t}{R} \quad \mu = \frac{1}{\pi} * \sqrt[8]{(100 * \frac{t}{R})^3}$$

VERGELIJKING 10 (VENTSEL & KRAUTHAMMER, 19.10 DESIGN STABILITY ANALYSIS, 2001)

De vergelijking hierboven is geldig voor alle bolvormige schaalconstructies en legt een verband tussen de maximale toelaatbare normaalspanning voordat er knik optreedt. Deze formule is zeer geschikt om te onderzoeken of knik inderdaad het belangrijkste faalmechanisme is voor dit soort constructies. Dit wordt gedaan door de maximaal toelaatbare normaalspanning volgens Vergelijking 10 te vergelijken met de maximale normaalspanning voordat het materiaal gaat vloeien. Deze formule geeft vergelijkbare waarden met experimentele waarden, aldus Ventsel & Krauthammer.



GRAFIEK 4: KNIKSPANNING VERSUS VLOEISpanning

In Grafiek 4, waarbij de blauwe lijn Vergelijking 10 volgt is duidelijk een niet-lineair verband te zien tussen de schaaldikte en de maximale normaalspanning voordat knik optreedt. Dit is logisch gezien de formules ook geen lineair verband laten zien. De Amerikaanse autoriteit op het gebied van standaarden en codes in dit vakgebied (ASME) geeft de in Vergelijking 11 afgebeelde formule om de kritieke normaalspanning te bepalen. In deze formule zit een veiligheidsfactor van 10 verwerkt en is slechts geldig voor een beperkt bereik in schaaldikte. Deze formule is in het grijs weergegeven in Grafiek 4.

$$\sigma_{cr} = 0.0625 * E * \frac{t}{R}$$

VERGELIJKING 11 (ASME (AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS), 1992)

Deze formules worden in dit onderzoek slechts gebruikt om te bepalen voor welke radius en dikte de knikspanning maatgevend is en niet de vloeispanning. Op een gegeven moment wordt het gebruik van deze formules discutabel vanwege het verschillende punt waarbij ze de vloeispanning bereiken, maar voor realistischere (tot grofweg 1 meter in dit voorbeeld) diktes van de schaal kan er veilig gesteld worden dat knikspanning maatgevend is. Dit onderzoek zal zich dan ook beperken tot het bereik waarbij knik maatgevend is en hiermee zijn ook meteen onrealistische schaaldiktes uitgesloten. Wat betreft de kniklast voor bolvormige constructies belast met een puntlast en of eigen gewicht wordt Vergelijking 12 gebruikt om de juiste schaaldikte te kiezen. Deze formule is ook geldig voor een koepel belast met een puntlast, de oplegreactie zorgt immers voor een puntlast bij het belastinggeval eigen gewicht.

$$N_{cr} = -0.1 * \frac{E * t^2}{R}$$

VERGELIJKING 12 (HOOGENBOOM, 2012)

Voor het andere geval, een koepel belast op eigen gewicht, wordt de relatie tussen de knikspanning in Vergelijking 11 gebruikt samen met de maximale normaalspanning in de bolconstructie ten gevolge van het eigen gewicht. Deze maximale spanning is volgens (Hoefakker & Blaauwendraad, 2003) te zien in Vergelijking 13.

$$N_{max} = p * R; \sigma_{max} = N_{max}/t$$

VERGELIJKING 13 SPANNING ONDERIN SCHAAL

De dikte van de schaal zal in eerste instantie gezocht worden in het bereik waar knik maatgevend is. Dit is het bereik van schaaldiktes waarbij de knikspanning lager is dan de vloeispanning. Deze maximale waarden, waarvoor geldt $\sigma_{max} = 235 \frac{N}{mm^2}$, zijn te zien in Grafiek 5: Knikdikte. Dit verband wordt gevonden door de formule uit Vergelijking 10 om te schrijven tot Vergelijking 14. Hier is nu de dikte een functie van de radius en de maximale spanning.

$$t_{max} = \sqrt[11]{\frac{\sigma_{vloe}^8}{100^3 * \frac{E^8}{R^{11} * \pi^8}}}$$

VERGELIJKING 14 VLOEIDIKTE



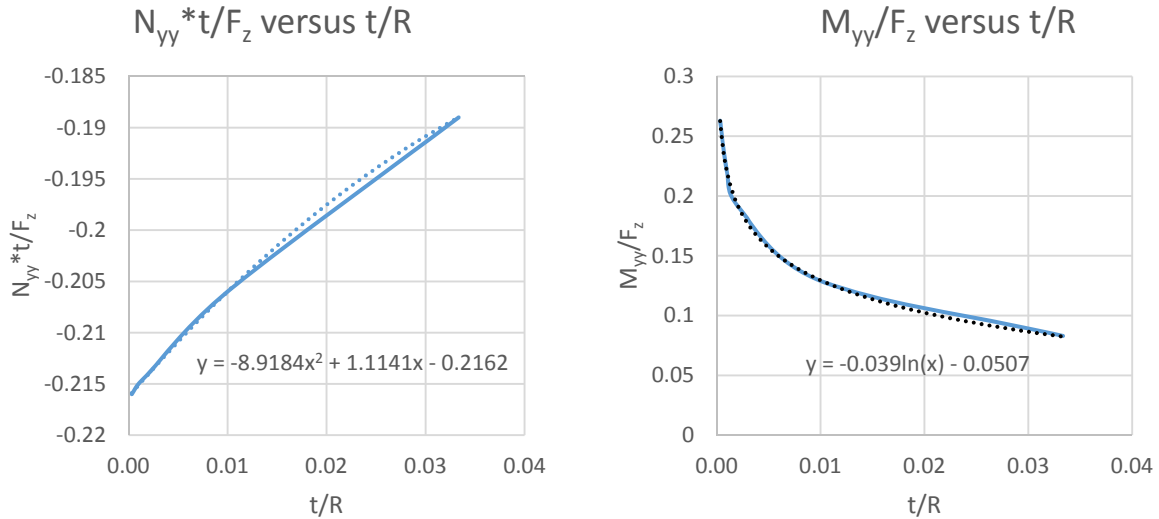
GRAFIEK 5: KNIKDIKTE

Als de ontwerpdikte van de schaal buiten de knikdikte valt, zoals bepaald in Grafiek 5, moet er ook op vloe getest worden. Hierbij moet de spanning worden berekend door normaalkracht en door buiging. Deze spanning is te berekenen met de formule in Vergelijking 15.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}; \quad \text{voor bolsegment met } W = \frac{b * h^2}{6} = \frac{t^2}{6}; \quad b = 1; \quad A = b * t = t$$

VERGELIJKING 15 SPANNING DOOR BUIGING EN NORMAALKRACHT

Voor deze berekening zijn helaas geen analytische formules beschikbaar, maar met resultaten uit een experiment van (Yu, NNG) is het mogelijk formules af te leiden. De resultaten van dit experiment zijn te vinden in Appendix D. Deze resultaten zijn geplott in Grafiek 6 en met behulp van een trendlijn zijn formules opgesteld voor de relaties in de grafiek.



GRAFIEK 6: EXPERIMENTELE UITKOMSTEN YU

$$\frac{N * t}{F_z} = -8.928 * \left(\frac{t}{R}\right)^2 + 1.114 * \left(\frac{t}{R}\right) - 0.216$$

$$N = \left(-8.928 * \left(\frac{t}{R}\right)^2 + 1.114 * \left(\frac{t}{R}\right) - 0.216\right) * \frac{F_z}{t} = -8.928 * \frac{t * F_z}{R^2} + 1.114 * \frac{F_z}{R} - 0.216 * \frac{F_z}{t}$$

VERGELIJKING 16 EXPERIMENTELE FORMULE NORMAALKRACHT IN SCHAAL

$$\frac{M}{F_z} = -0.039 * \ln\left(\frac{t}{R}\right) - 0.051; M = -0.039 * F_z * \ln\left(\frac{t}{R}\right) - 0.051 * F_z$$

VERGELIJKING 17 EXPERIMENTELE FORMULE MOMENT IN SCHAAL

Vergelijking 16 en Vergelijking 17 kunnen ingevuld worden in Vergelijking 15, wat tot de volgende vergelijking leidt.

$$\sigma = -8.928 * \frac{F_z}{R^2} + 1.114 * \frac{F_z}{R * t} - 0.216 * \frac{F_z}{t^2} + \frac{-0.039 * F_z * \ln\left(\frac{t}{R}\right) - 0.051 * F_z}{\frac{t^2}{6}}$$

VERGELIJKING 18 EXPERIMENTELE FORMULE SPANNING IN SCHAAL

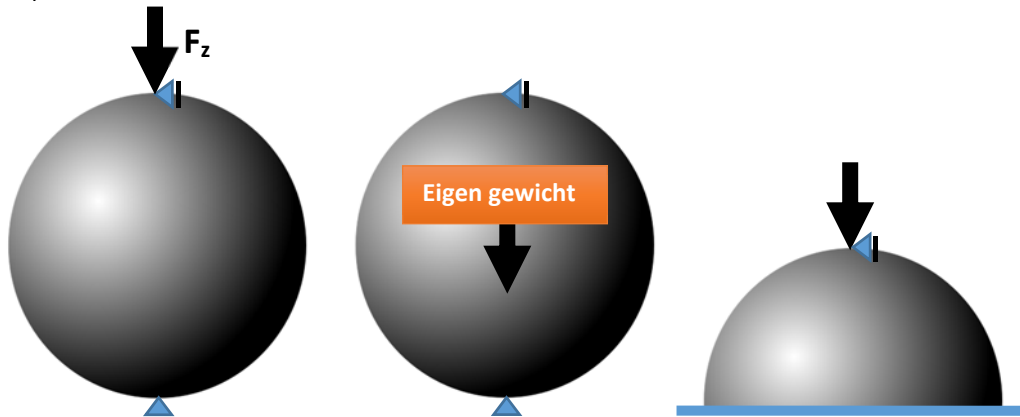
Bovenstaande vergelijking wordt gebruikt om de schaalconstructie te toetsen op vloeit. De eis is dan ook dat de spanning kleiner dan 235 N/mm² moet zijn.

4.3 VERVORMINGENANALYSE

De vervormingsanalyse wordt net als bij de vakwerkconstructies gescheiden voor de verschillende belastinggevallen. De vervormingsanalyse

4.3.1 PUNTLAST OP DE CONSTRUCTIE

Zoals in onderstaand figuur te zien is, zijn er drie gevallen waarbij er een puntlast op de bol de berekening bepaald.



FIGUUR 15: BELASTINGMODELLEN SCHAALECONSTRUCTIES

Het eigen gewicht van de bol wordt door de oplegging aan de onderkant ook als een puntlast behandeld, de spanningen bij deze oplegreactie zijn namelijk het grootst. Om de maximale uitwijking te berekenen in het materiaal, die plaats vindt bij de oplegreactie of bij de puntlast, is de formule in Vergelijking 19 bekend.

$$u_z = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{F_z * R}{E * t^2} * \sqrt{1 - \nu^2}$$

VERGELIJKING 19 (REISSNER, 1946)

4.3.2 EIGEN GEWICHT

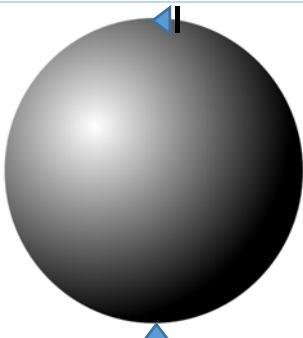
Het vervormen van een schaalconstructie onder invloed van het eigen gewicht is met Vergelijking 20 op te lossen. Deze formule is alleen nodig om de koepelconstructie te toetsen, voor de bol geldt immers dat de puntlast van de oplegreactie de maatgevende vervorming geeft.

$$U_z = 1.73 * \frac{q * R^2}{E * t}$$

VERGELIJKING 20 (HOOGENBOOM, 2012)

4.4 TOETSEN

Net als bij het vakwerk wordt hier uitgegaan van staal, waardoor de materiaalfactor gelijk aan 1 is in de toetsen. De keuze voor de maximale vervorming is net als bij het vakwerk gesteld op 1% van de radius.

		
Vloei F_z	$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} < 235 \frac{N}{mm^2}$	$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} < 235 \frac{N}{mm^2}$
Vloei E.g.	$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} < 235 \frac{N}{mm^2}$	$N_{max} = p * R; \sigma_{max} = N_{max}/t < 235 \frac{N}{mm^2}$
Knik F_z	$F_{cr} = -0.1 * \frac{E * t^2}{R}$	$\sigma_{cr} = \mu * \frac{E * t}{R}; \mu = \frac{1}{\pi} * \sqrt[8]{(100 * \frac{t}{R})^3}$
Knik E.g.	$F_{cr} = -0.1 * \frac{E * t^2}{R}$	$\sigma_{cr} = \mu * \frac{E * t}{R}; \mu = \frac{1}{\pi} * \sqrt[8]{(100 * \frac{t}{R})^3}$
Vervorming F_z	$u_z = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{F_z * R}{E * t^2} * \sqrt{1 - \nu^2} < R * 0.02$	$u_z = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{F_z * R}{E * t^2} * \sqrt{1 - \nu^2} < R * 0.02$
Vervorming E.g.	$u_z = \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{F_z * R}{E * t^2} * \sqrt{1 - \nu^2} < R * 0.02$	$U_z = 1.73 * \frac{q * R^2}{E * t} < R * 0.02$

TABEL 5: OVERZICHT TOETSEN SCHAALCONSTRUCTIE

5 ONTWERPEN

In dit hoofdstuk worden verschillende ontwerpen gepresenteerd, met verschillende radii. Alle constructies worden zowel met een geodetisch vakwerk berekend als met een schaalconstructie. Niet alle constructies zijn realistisch qua afmetingen, maar worden wel berekend in dit fundamentele onderzoek.

5.1 ONTWERPPROCES

De radii die gebruikt worden om de constructies te berekenen, welke constructie berekend worden en op welke belastinggevallen ze worden getoetst is weergegeven in Tabel 6. De bolconstructies worden belast zoals weergegeven in paragraaf 4.3.1 en 4.3.2. De bolconstructies worden niet op eigen gewicht getoetst in verband met de oplegreactie en de grootte van het eigen gewicht, dit zou altijd voor een falende constructie zorgen met 1 oplegging aan de onderkant.

Radius [m]	Vakwerk koepel	Vakwerk bol	Schaal koepel	Schaal bol
0.001	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
0.005	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
0.01	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
0.05	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
0.1	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
0.5	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
1	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
5	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
10	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
50	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
100	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast
500	E.g en puntlast	Puntlast	E.g en puntlast	Puntlast

TABEL 6: ONTWERPVARIABLEN

Het ontwerpen van de constructies wordt gedaan met behulp van het Matlab script in Appendix C. Dit script ontwerpt voor iedere radius 100 vakwerkconstructies met een afnemende staafdoorsnede oppervlakte binnen een proefondervindelijk vastgesteld bereik. Als eerste wordt een constructie ontworpen met bijbehorende staafdoorsnede oppervlakte, complexiteit en radius. Dit wordt gedaan voor de complexiteit 2^k met $1 \leq k \leq 8$. Daarna worden de belastingen berekend die afhankelijk zijn van de staafdoorsnedes, radius en complexiteit (zoals eigen gewicht en puntlast) en de belastingen worden toegepast op de constructie. Vervolgens wordt de krachtverdeling in de constructies bepaald en daarna de vervorming. Als laatste stap worden de constructies getoetst en opgeslagen. Al die constructies worden dan op een rijtje gezet en de constructie met het laagste eigen gewicht die nog voldoet aan alle toetsen (vloei, doorslagknik, knik en zakking) is de meest efficiënte vakwerkconstructie.

Het ontwerpen van de schaalconstructies gebeurt op een soortgelijke manier. Voor iedere radius worden 100 schaalconstructies ontworpen en deze worden getoetst met behulp van de toetsen in paragraaf 4.4. De puntlast moet identiek zijn aan de berekening voor het vakwerk, dus de puntlast die hoort bij de meest efficiënte vakwerk voor die radius wordt toegepast.

Wat betreft de vakwerken en hun complexiteit is niet bij voorbaat te voorspellen welke complexiteit bij welke grootte efficiënter is. Dit moet per geval berekend worden en om die reden is het in dit geval niet mogelijk om op een andere manier (bijvoorbeeld iteratief) de meest efficiënte constructie te bepalen. Dit is duidelijk te zien wanneer de optimale vakwerkconstructies voor iedere radius op een rijtje gezet wordt. Dit wordt in de volgende paragraaf besproken.

5.2 COMPLEXITEIT VAKWERKEN

Van de toetsen die de optimale constructie bepalen (vloei, doorslagknik, knik en vervorming) is niet bij voorbaat een maatgevende toets aan te wijzen. Een van de redenen hiervoor is dat het eigen gewicht van de constructie niet lineair afhangt van de lengte van de vakwerkstaven (zie bijvoorbeeld Vergelijking 8 Toets op vloei voor dakbedekking). Hieronder volgt een overzicht van de optimale vakwerkconstructies bij de verschillende radii. Hierbij is geen rekening gehouden met eventuele limieten aan staaflengte door productiebeperkingen.

R [m]	Complexiteit	Radius staaf [m]	Eg totale constructie [N]	Maatgevende toets
0.001	2	1.72E-07	6.83E-04	Vloei
0.005	2	6.64E-07	1.00E-02	Vloei
0.01	2	1.19E-06	3.19E-02	Vloei
0.05	2	4.58E-06	4.93E-01	Vloei
0.1	2	8.58E-06	1.70E+00	Vloei
0.5	4	3.27E-05	4.87E+01	Vloei
1	4	6.8E-05	2.24E+02	Vloei
5	16	0.00052	7.70E+03	Doorslagknik
10	32	0.00157	3.80E+04	Doorslagknik
50	32	0.012015	3.07E+06	Doorslagknik
100	32	0.032285	2.95E+07	Doorslagknik
500	16	0.350231	7.81E+09	Doorslagknik

TABEL 7: VAKWERK ONTWERPEN VOOR KOEPSEL BELAST OP EIGEN GEWICHT

De doorslagknik die optreedt bij de grotere radii komt door het eigen gewicht van de dakdelen in het hoogste pentagoon.

Hieruit worden twee zaken duidelijk. Ten eerste dat vakwerken met een hoge complexiteit falen op doorslagknik, terwijl vakwerken met een lage complexiteit falen op vloei. Ten tweede valt op dat naarmate de radius groter wordt, een hogere complexiteit nodig efficiënter is. Het eerste valt te verklaren doordat vakwerken met een hoge complexiteit in verhouding tot de vakwerken met lage complexiteit een kleine marge hebben voor de zakking totdat doorslagknik optreedt. De staven bij een hoge complexiteit zijn immers korter dan bij een lage complexiteit. Het tweede is te verklaren doordat het eigen gewicht sterk afneemt per dakdeel naarmate de complexiteit toeneemt. Naast deze verbanden zijn er nog enkele verbanden tussen de complexiteit en de maatgevende toets te vinden.

1. Bij constante radius maar een hoger wordende complexiteit treedt de knik van individuele staven steeds minder op en wordt ondergeschikt aan doorslagknik. Hierbij is het korter worden van de staven naarmate de complexiteit toeneemt de belangrijkste reden voor dit verband.
2. Bij een hoge complexiteit treedt vloei zelden als maatgevende toets op, omdat de staven veel eerder genoeg vervormen om doorslagknik te veroorzaken.
3. De toets op vervorming, waarbij de eis is dat de top niet meer dan 2% van de radius mag zakken, is alleen maatgevend bij een complexiteit die groter is dan de complexiteit die faalt op vloei en kleiner is dan de complexiteit die faalt op doorslagknik. Dit verklaart de sprong in complexiteit tussen radius 1 en radius 5, complexiteit 8 heeft niet het meest optimale materiaalgebruik om die reden.
4. Bij een kleine complexiteit en kleine radius, is vloei de maatgevende toets, mede doordat in de formule voor de knik van individuele staven de relatie $1/l^2$ de knikkracht bepaalt. Voor $0.001 < l < 1$ is deze knikkracht dus extreem groot, zie Vergelijking 6.

5.3 VAKWERKONTWERPEN

Zoals in Tabel 7 van de vorige paragraaf te zien is, is voor iedere vakwerkontwerp een bepaalde complexiteit het meest efficiënt. De kengetallen van deze ontwerpen zijn weergegeven in Tabel 8 voor een koepel belast op eigen gewicht.

R [m]	Complexiteit	Radius staven [m]	Aantal staven	Aantal driehoeken	Maximale staaflengte	Aantal scharnieren (=hoeken)
0.001	2	1.72E-07	65	24	0.00062	26
0.005	2	6.64E-07	65	24	0.0031	26
0.01	2	1.19E-06	65	24	0.0062	26
0.05	2	4.58E-06	65	24	0.031	26
0.1	2	8.58E-06	65	24	0.061	26
0.5	4	3.27E-05	250	96	0.162	91
1	4	6.8E-05	250	96	0.325	91
5	16	0.00052	3880	1536	0.413	1321
10	32	0.00157	15440	6144	0.413	5201
50	32	0.012015	15440	6144	2.067	5201
100	32	0.032285	15440	6144	4.133	5201
500	16	0.350231	3880	1536	41.302	1321

TABEL 8: IDEALE ONTWERPEN VOOR VAKWERKCONSTRUCTIE BELAST OP EIGEN GEWICHT

In Tabel 8 valt op dat de maximale staaflengte bij de koepel met radius 500 veel te groot is om te bouwen. Voor dit vakwerk kan er een hogere complexiteit worden gebruikt, die ook aan de eisen voldoet, maar wat minder efficiënt is qua materiaalgebruik. Dit is samengevat in het volgende tabel.

R [m]	Complexiteit	Radius staven [m]	Aantal staven	Aantal driehoeken	Maximale staaflengte	Aantal scharnieren (=hoeken)
500	32	0.355	15440	6144	20.669	5201
500	64	0.355	61600	24576	10.667	20641
500	128	0.368	246080	98304	5.735	82241
500	256	0.393	983680	393216	2.542	328321

TABEL 9: ANDERE ONTWERPEN VOOR R=500

Het aantal staven stijgt kwadratisch met de complexiteit en hetzelfde geldt voor het aantal hoekpunten. Aangezien de hoekpunten ook een redelijk groot gewicht hebben, stijgt het eigen gewicht van de constructie hierdoor ook snel mee. De totale gewichten van alle ontwerpen zijn te vinden in het onderstaande tabel.

R	Eigen gewicht [N]
0.001	6.83E-04
0.005	1.00E-02
0.01	3.19E-02
0.05	4.93E-01
0.1	1.70E+00
0.5	4.87E+01

R	Eigen gewicht [N]
1	2.24E+02
5	7.70E+03
10	3.80E+04
50	3.07E+06
100	2.95E+07
500	7.81E+09

TABEL 10: TOTALE GEWICHTEN VAKWERKCONSTRUCTIES

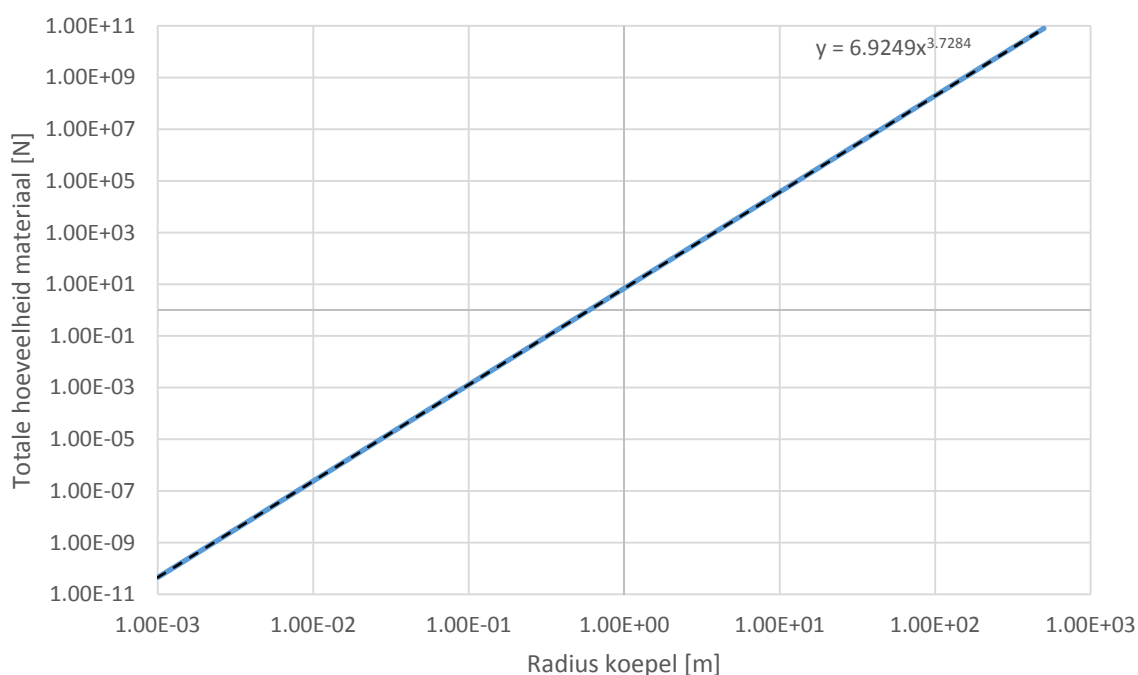
5.4 SCHAALONTWERPEN

De schaalontwerpen volgen ook uit het Matlab script. Voor een koepel belast op alleen haar eigen gewicht volgen hieruit de ontwerpen in Tabel 11.

r [m]	Koepeldikte [m]	Totale gewicht koepel [N]
1.00E-03	9.33E-11	4.51E-11
5.00E-03	1.52E-09	1.84E-08
1.00E-02	4.98E-09	2.41E-07
5.00E-02	8.11E-08	9.81E-05
1.00E-01	2.66E-07	1.29E-03
5.00E-01	4.33E-06	5.24E-01
1.00E+00	1.42E-05	6.86E+00
5.00E+00	0.000231	2.79E+03
1.00E+01	0.000774	3.75E+04
5.00E+01	0.012328	1.49E+07
1.00E+02	0.04132	2.00E+08
5.00E+02	0.657933	7.95E+10

TABEL 11: ONTWERPEN SCHAALCONSTRUCTIE KOEPEL

Het verloop van het materiaalgebruik versus de radius kan ook grafisch worden weergegeven met behulp van Excel. Hier kan dan een trendlijn door getrokken worden, die ongeveer het verband tussen de hoeveelheid materiaal en de radius weergeeft, zie Grafiek 7.

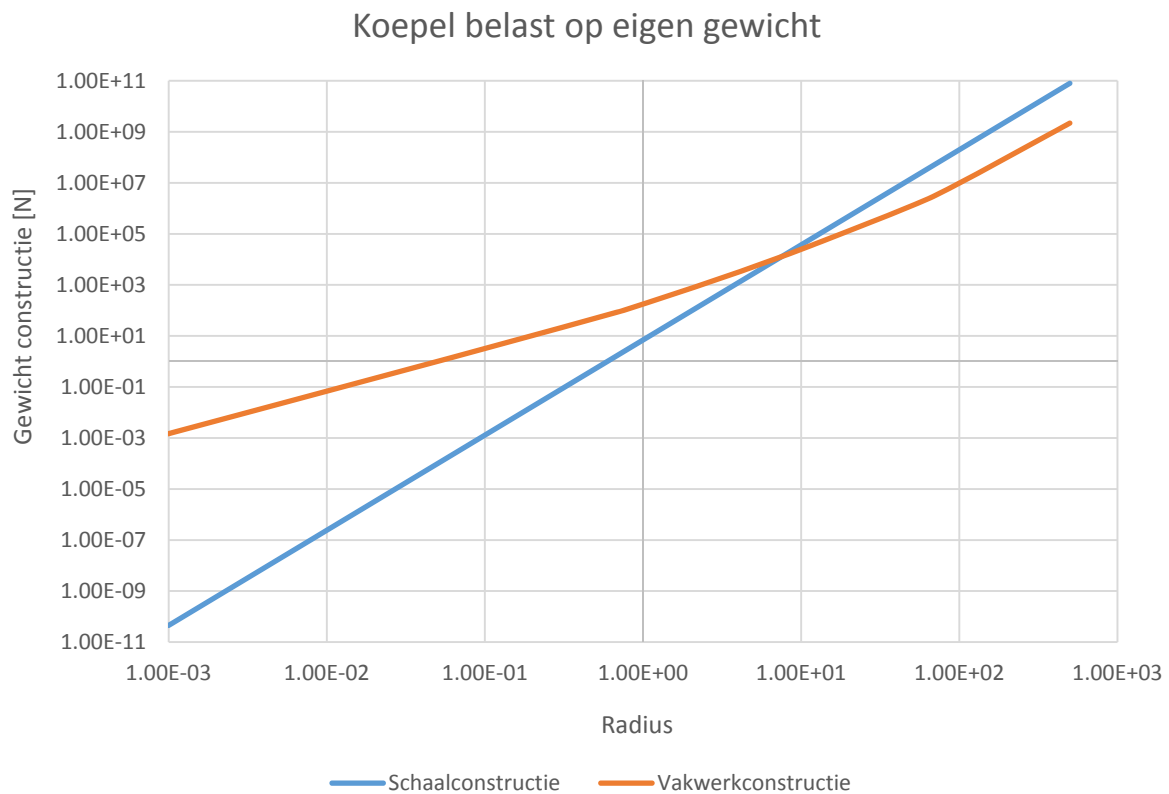


GRAFIEK 7: MATERIAALGEBRUIK SCHAALCONSTRUCTIE VERSUS RADIUS

5.5 MATERIAALGEBRUIK ONTWERPEN

De ontwerpen van de constructies zijn bepaald met het Matlab script en daaruit volgt het materiaalgebruik, wat te vinden is in dit hoofdstuk. Het materiaalgebruik is hierbij uitgedrukt in het totale gewicht van de constructie, waarbij overal is uitgegaan van de dichtheid van staal, 7850kg/m^3 .

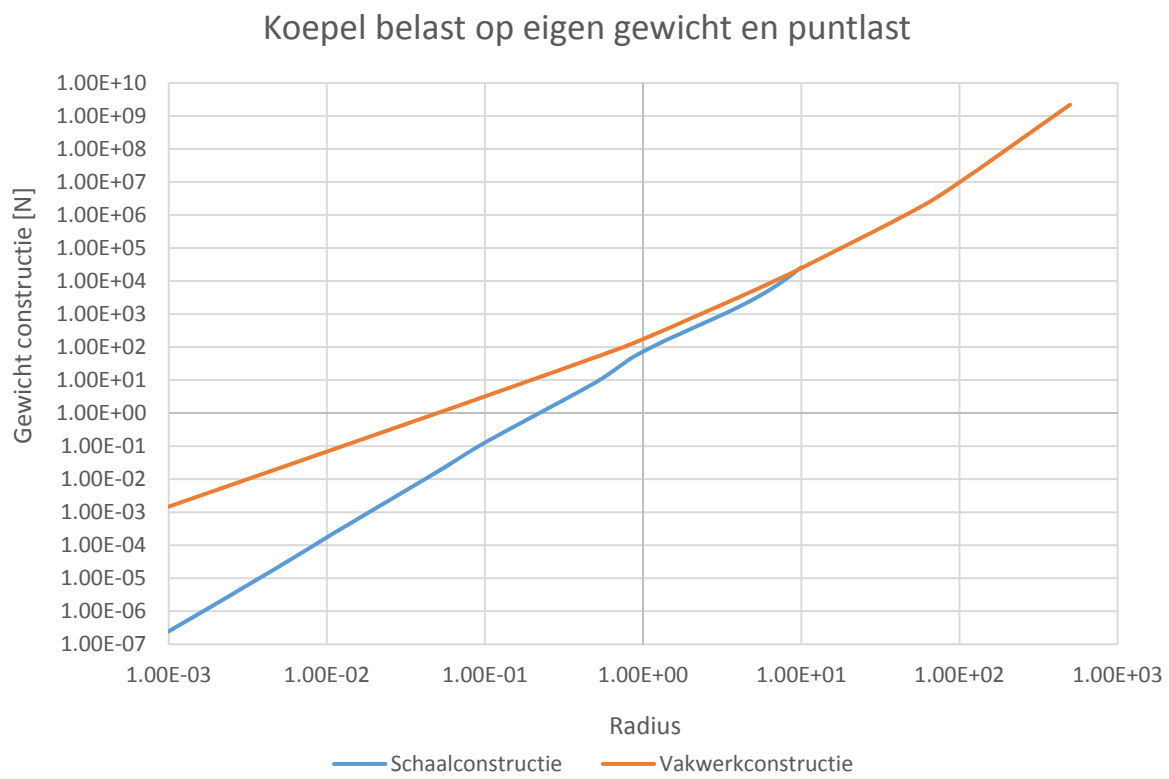
Als eerste wordt de koepelconstructie ontworpen, die slechts belast wordt op haar eigen gewicht. Hierbij is bij de vakwerkconstructie uitgegaan van de ideale ontwerpen, zie Tabel 8. Het verloop van het materiaalgebruik en de radius van de koepel is te zien in Grafiek 8.



GRAFIEK 8: KOEPEL BELAST OP EIGEN GEWICHT

Uit Grafiek 8 wordt duidelijk, dat er inderdaad een punt te vinden is waarbij beide constructies ongeveer evenveel materiaal nodig hebben. Beide assen zijn logaritmisch en het verband tussen de schaalconstructie en de radius volgt ongeveer het gedrag van een machtreeks. De lijn die de vakwerkconstructie volgt is niet zo eenvoudig te benoemen. Dit komt door de verschillende complexiteiten die bij een bepaalde radius het meest efficiënt zijn, zie ook paragraaf 5.2. Verder valt het grote verschil op tussen de constructies met kleine radii. De schaalconstructie is veel efficiënter bij radii kleiner dan 1 meter dan de vakwerkconstructie als het aankomt op belasting door eigen gewicht. In het voor bouwconstructies interessante bereik is alleen bij een radius van minder dan 7 meter een schaalconstructie efficiënter.

Zodra de koepelconstructie naast haar eigen gewicht ook een puntlast moet dragen, die gelijk is aan één dakdeel, ziet het resultaat er uit zoals weergegeven in Grafiek 9. Diezelfde puntlast wordt ook op de schaalconstructie toegepast.



GRAFIEK 9: KOEPEL BELAST OP EIGEN GEWICHT EN PUNTLAST

In Grafiek 9 valt direct op dat het verloop van de schaalconstructie veel grilliger is dan in Grafiek 8 en ophoudt bij een radius van 10 meter. De reden dat vanaf daar geen waarde zijn ingevuld is dat binnen het bereik waarvoor de theorie van dunne schalen geldt geen oplossing gevonden kon worden. De bovengrens van deze dikte is de radius delen door 20. Dit levert al geen praktische of realistische constructies op en dit wordt alleen maar erger voor schalen buiten de dunne schaal theorie. Dit komt enerzijds doordat er bij de vakwerkconstructies hele grote dakdelen nodig zijn, waardoor de puntlast enorm groot is en anderzijds omdat schaalconstructies minder efficiënt zijn bij grote radii. De invloed van de eerste oorzaak kan worden onderzocht door bij de constructies vanaf 5 meter doorsnede een vast puntlast te nemen. Deze puntlast is ongeveer gelijk aan het gewicht van een groot mens, 1000N. Dit levert nog wel een praktische constructie voor $r=10\text{m}$, maar daarna is er geen schaalconstructie te vinden die voldoet aan de eis voor vervorming.

Bolconstructies gedragen zich in een belangrijk opzicht anders, schaalconstructies hebben hier een enorm voordeel vanwege de oplegging in dit model. De vakwerkbol wordt door zijn eigen gewicht belast terwijl de gebruikte oplegging een puntlast veroorzaakt op de vakwerkstaven. Deze puntlast van de oplegreactie is echter altijd zo groot dat er geen constructie te ontwerpen is die aan alle eisen voldoet. Om deze reden is dit deel dan ook weggelaten uit het onderzoek.

6 CONCLUSIES

De gevonden verbanden tussen de radius en het materiaalgebruik geven een goede indicatie van het verschil tussen de twee soorten constructies. Met behulp van de toetsen en vergelijkingen die in dit onderzoek opgesteld zijn is nu de hoofdvraag te beantwoorden. Deze hoofdvraag is bij welke radius van een koepel- of bolvormige een vakwerkconstructie efficiënter is.

Het materiaalgebruik van de schaalconstructie reageert ongeveer volgens een voorspelbare machtreeks op de radius van de constructie. Het voorspellen van het gebruik van de vakwerkconstructies is moeilijker te voorspellen en moet per constructie bekeken worden. Het punt waarop de twee typen constructies ongeveer even efficiënt zijn, ligt voor een koepel belast op eigen gewicht op ongeveer 7 meter. Naarmate de radius verder toeneemt, wordt de vakwerkkoepeel maximaal ongeveer 100 keer efficiënter dan de gelijkwaardige schaalconstructie. Bij een kleinere radius dan 6 meter is een schaalconstructie vele malen efficiënter dan de vakwerkconstructie van gelijke grootte. Dit loopt zelfs op tot ongeveer 30000 maal efficiënter dan de vakwerkconstructie bij een bol met radius van 1 mm. Bij het gebruik van lichter materiaal om het dak te construeren, verschuift het punt ten gunste van de vakwerkconstructie.

Als er een bolvormige constructie gemaakt moet worden die op één oplegging zal rusten dient er altijd voor de schaalconstructie gekozen worden, of er moet een ander soort vakwerkconstructie ontworpen worden dan in dit onderzoek is gepresenteerd.

In conclusie is een vakwerkconstructie efficiënter voor koepelconstructies met een radius groter dan 7 meter, bij belasting op eigen gewicht en of een puntlast. Voor bolvormige constructies en koepels met een radius kleiner dan 7 meter zijn schaalvormige constructies efficiënter.

7 AANBEVELINGEN

Tijdens het onderzoeken zijn er een aantal zaken naar voren gekomen die het onderzoek zouden kunnen aanvullen.

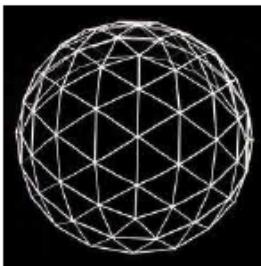
1. Het eigen gewicht van de dakdelen heeft een grote invloed op het eigen gewicht en om die reden heeft het ook invloed op het punt waar de schaalconstructie en de vakwerkconstructie even sterk zijn. Het is aan te bevelen deze dakconstructie daarom verder uit te werken en volledig te dimensioneren.
2. De bolvormige vakwerkconstructie is niet te ontwerpen als er getoetst wordt op eigen gewicht in verband met de soort oplegreactie, er is slechts 1 grote oplegging in dit onderzoek. Het is dan ook aan te bevelen deze constructie anders op te leggen.
3. Bij grote vakwerkconstructies zijn er (te) dikke vakwerkstaven nodig. Het is aan te bevelen uit te zoeken of dit verbeterd kan worden door twee vakwerkconstructies met een verschillende diameter te combineren die elkaar ondersteunen.
4. Een ballonhal die voor onder andere sportenvelden gebruikt wordt en een (dierlijke)cel worden gedragen door overdruk. Het is aan te bevelen te onderzoeken wat het effect is van interne overdruk op deze constructies.
5. Als er op totale materiaalkosten gelet wordt, is het misschien beter om de constructies in hout te ontwerpen. Het verdient de aanbeveling uit te zoeken of de constructies efficiënter zijn te ontwerpen met hout.

BIBLIOGRAFIE

- ASME (American society of Mechanical Engineers). (1992). Alternate Rules. *Pressure Vessel Code*, Section VIII.
- Hartsuijker, C., & Welleman, H. (2004). *Toegepaste Mechanica Deel 3*. Delft: Academic Service.
- Hartsuijker, C., & Welleman, J. (2007). *Constructiemechanica 3:Stabiliteit van het evenwicht*. Delft: TU-Delft.
- Hoefakker, J., & Blaauwendraad, J. (2003). *Theory of Shells*, p. 147. Delft: Delft university of technology.
- Hoogenboom, P. (2012). Handout 12. In P. Hoogenboom, *Notes on shell structures* (p. 4). Delft: TU Delft.
- Kameshki, E., & Saka, M. (1990). Analysis of geometrically nonlinear space trusses. In E. Kameshki, & M. Saka, *Optimum geometry design of nonlinear braced domes using genetic algorithm* (pp. 289-299). Bahrain,Firat: Pergamon Press.
- Reissner, E. (1946). Stresses and small displacements of shallow spherical shells II. *Journal of Mathematics and Physics*, vol.25, 279-300.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). 14.1 Membrane analysis of roof shell structures. In E. Ventsel, & T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells:Theory, Analysis and Application* (p. Chapter14.1). Pennsylvania: Marcel Dekker Inc.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). 19.10 Design Stability Analysis. In E. Ventsel, & T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications* (p. ch19.10). Pennsylvania: Marcel Dekker Inc.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). Chapter 19.2 Basic Concepts of Thin Shells Stability. In E. Ventsel, & T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells; Theory, Analysis and Applications* (pp. 2-3,38). Pennsylvania: Marcel Dekker Inc.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. Pennsylvania: Marcel Dekker Inc.
- Yu, C. (NNG). *Nog niet gepubliceerd*. NNG: NNG.
- Zamanzadeh, Z., Abdolpour, H., & Behraves, A. (2009). Investigating the buckling behaviour of single layer dome form. In N. Ghafoori, *Challenges, Opportunities and Solutions in Structural Engineering and Construction* (pp. 399-403). London: Taylor & Francis Group.

APPENDIX A OVERZICHT FIGUREN EN TABELLEN

Tabel 1: Complexiteiten	5
Tabel 2 Rekenvoorbeeld kengetallen.....	10
Tabel 3: Uitkomsten Ansys niet lineaire knik berekening	13
Tabel 4: Overzicht toetsen vakwerkconstructie.....	15
Tabel 5: Overzicht toetsen schaalconstructie	22
Tabel 6: Ontwerpvariabelen	23
Tabel 7: Vakwerk ontwerpen voor koepel belast op eigen gewicht	24
Tabel 8: Ideale ontwerpen voor vakwerkconstructie belast op eigen gewicht	25
Tabel 9: Andere ontwerpen voor $r=500$	25
Tabel 10: totale gewichten vakwerkconstructies.....	25
Tabel 11: Ontwerpen schaalconstructie koepel.....	26
Grafiek 1: Zakking versus belasting.....	9
Grafiek 2: Doorslagknik volgens Matlab	12
Grafiek 3: Niet lineaire doorslagknik met Ansys	13
Grafiek 4: Knikspanning versus vloeispanning	18
Grafiek 5: Knikdikte	19
Grafiek 6: Experimentele uitkomsten Yu	20
Grafiek 7: Materiaalgebruik schaalconstructie versus radius	26
Grafiek 8: Koepel belast op eigen gewicht.....	27
Grafiek 9: Koepel belast op eigen gewicht en puntlast.....	28
Figuur 1: Overzicht belastinggevallen	2
Figuur 2: Geometrie van De Icosahedron	3
Figuur 3: Opdeling icosahedron	4
Figuur 4: Belastingmodel puntlast.....	6
Figuur 5 Model krachtverdeling.....	7
Figuur 6: Staafkracht bij E.g belasting.....	7
Figuur 7: Model voor vervorming	8
Figuur 8: Model met vervormd constructie	9
Figuur 9 : Vervorming in Matlab	10
Figuur 10: Vervorming in Ansys	10
Figuur 11:Eulerse knik.....	11
Figuur 12: Doorslagknik bij het maatgevende pentagoon	11
Figuur 13: Vervorming maatgevend pentagon	12
Figuur 14: Impressie dakdeel met bedekking	16
Figuur 15: Belastingmodellen schaalconstructies	21

BSc Eindwerk		Datum van uitgifte: 8 juli 2013
Structural Engineering		
Vakwerken versus Schalen		
Onderzoeksgroep: ConstructieMechanica		
   Geodetisch vakwerk		Zoogdieren hebben skeletten bestaand uit botten (vakwerkconstructie). Insecten hebben skeletten bestaand uit gekromde platen aan de buitenkant van het lichaam (schaalconstructie). Vanzelfsprekend heeft het verschil te maken met grootte. De volgende vraag dringt zich op: Bij welke grootte is een vakwerkconstructie beter dan een schaalconstructie? Opdracht Om deze vraag te beantwoorden zal een geïdealiseerde constructie worden bestudeerd. Namelijk, een bol die bestaat uit twee delen 1) een geodetisch vakwerk onder het oppervlak en 2) een dunne schaal die het oppervlak afsluit. De bol wordt lokaal ondersteund en belast door eigengewicht en een puntlast. De bol-delen dragen samen de belasting. De ontwerpvariabelen zijn de lengte van de vakwerkstaven, de doorsnede-oppervlakte van de vakwerkstaven en de schaaldikte. Het ontwerpdoel is om de belasting te dragen met de minste hoeveelheid materiaal. Aanpak 1) Verzamel informatie over geodetische vakwerken en dunne schaalconstructies; met name formules voor stijfheid, sterkte en stabiliteit. 2) Ontwerp bollen met verschillende diameters, variërend van die van een biologische cel (10^{-7} m) tot een sportstadium (10^3 m). 3) Ontwikkel een Matlab- of Maple-programma dat bij het ontwerpen assisteert. 4) Onderzoek de invloed van materiaaleigenschappen en zwaartekracht. 5) Teken een grafiek van de hoeveelheid materiaal in de bol-delen als functie van de diameter. Gebruik zoveel mogelijk dimensie-loze parameters. 6) Trek uit de grafiek conclusies over de diameters waarbij een zuivere vakwerkconstructie beter is en die waarbij een zuivere schaalconstructie beter is.
Begeleiders: Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom Ir. P. de Vries		Meer informatie: P.C.J. Hoogenboom Kamer: 6.48 T: (+31) (0)15 278 8081 E: p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl
Faculteit Civiele Techniek en Omgevingswetenschappen		 TU Delft Technische Universiteit Delft

APPENDIX C MATLAB SCRIPT

ONTWERPSCRIPT.M

```

%% Ontwerpen, krachten, spanningen, vervormingen en toetsen.
close all; clear all; global r g plotvb output Vakwerk eigengewicht puntlast;
Vakwerk.E=210e+9; Schaal.E=210e+9; %Young's modulus [N/m^2]
Vakwerk.nu=0.3; Schaal.nu=0.3; %Poisson constante
Vakwerk.ro=7850; Schaal.ro=7850; %Dichtheid bouw materiaal [kg/m^3]
Vakwerk.fy=235e+6; Schaal.fy=235e+6; %yield sterkte [N/m^2]
g=9.81; shape='s'; %s=sphere, d=dome;
puntlast=1; eigengewicht=0;
plotvb=2; %1=Vakwerk, 2=Geen plot 3=Vakwerk met nummers
%% Formules Vakwerk
Fxy_z=@(Vecs, Fz) Vecs./repmat(Vecs(:,3),1,3).*Fz; %Krachtvectoren in staven
exten=@(N,A) sqrt(sum(N,2).^2).*(1/(Vakwerk.E*A)); %Rek
Fk=@(l,A) pi*Vakwerk.E*A^2/(4*l^2); %Knikkracht
Fveg=@(eg,i,A) (0.5*eg/i)/sin(60)/A; %Kracht in maatgevende staaf koepel
%% Formules schil
up=@(Fz,t,R) sqrt(3)*Fz*R/(4*Schaal.E*t^2)*sqrt(1-Schaal.nu^2);
uqd=@(q,t,R) 1.73*q*R^2/(Schaal.E*Schaal.t);
Vol=@(t,R) 4/3*pi*R^3-4/3*pi*(R-t)^3;
knikspanning=@(t,R) (100*t/R)^(3/8)/pi*Schaal.E*t/R;
bolspanning=@(Fz,R,t) -8.928*Fz/R^2+1.114*Fz/(R*t)-0.216*Fz/t^2-0.216-
(0.039*Fz*log(t/R)-0.051*Fz)/(t^2/6);
Ncrb=@(t,R) 0.1*Schaal.E*t^2/R;
%% Coördinaten ed. inladen
if exist('output256.mat')==2;
    load output256.mat;
else
    output=struct('Radius',r); run=1;
    [XYZ,nb,output]=icosahedron2_function(c,shape);
end
%% Uitwerking Vakwerkconstructies
constructie.vakwerk=zeros(12,33); constructie.schaal=zeros(12,5);
for j=7:12;
    rlijst=[0.001,0.005,0.01,0.05,0.1,0.5,1,5,10,50,100,500]; r=rlijst(j)
    clear Resultaten xlsmatrix xlsschaal schaalconstructie constructietabel
    schaal
    bereikvakwerk=[-10,-10,-8,-8,-7,-5,-4,-3,-2,-1,1,1;-14,-14,-12,-11,-
11,-10,-8,-7,-6,-5,-4,-1]; %Bol
    bereikschal=[-5,-5,-5,-4,-4,-3,-2,0,0,1,3,4;-9,-9,-9,-9,-7,-6,-5,-4,-
4,-2,-3,-2];
    % bereikvakwerk=[-10,-10,-8,-8,-7,-5,-4,-3,-2,-1,1,1;-14,-14,-12,-11,-
11,-10,-8,-7,-6,-5,-4,-1]; %Koepel_eg_FZ
    % bereikschal=[-5,-5,-5,-4,-4,-3,-2,0,0,1,3,4;-9,-9,-9,-9,-7,-6,-5,-
4,-4,-2,-3,-2];
    % bereikvakwerk=[-10,-10,-8,-8,-8,-5,-4,-3,-2,-1,1,1;-14,-14,-12,-11,-
11,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1]; %koepel_eg
    % bereikschal=[-7,-7,-7,-6,-6,-5,-2,0,0,1,1,1;-11,-11,-10,-9,-9,-8,-
5,-4,-4,-2,-3,-2];
    Staveninv; Fzdak=zeros(12,1); Fz=[100,500,1000,1000,1000,1000];
    for m=1:100; %Vakwerkstaafdoorsnede variëren
        A=logspace(bereikvakwerk(1,j),bereikvakwerk(2,j),100); Vakwerk.A=A(m);
        if shape=='s'
            k=1:8;
        else k=1:8;
        end
    for k=k; %loop door alle complexiteiten
        clear XYZ P nbtop Vecstop XYZtop Ztopna Resultaten Vecstopna N1_2 List
    
```

```

        namet=genvarname(['t' num2str(2^k)
'v']);XYZtop=output.(namet).XYZ(1:3,:);
        nb_top=[1,2;1,3;2,3];name=genvarname([shape num2str(2^k) 'v']);
        Vecstop=[XYZtop(nb_top(:,1),:)-
XYZtop(nb_top(:,2),:),sqrt(sum((XYZtop(nb_top(:,1),:)-
XYZtop(nb_top(:,2),:)).^2,2))];

[Vakwerk.Fz_eg,bedekking,~]=EGvwt(Vakwerk.A,Vecstop,2^k,shape);Fz_totaal=Fz
(j-6);

P.N1=Fxy_z(Vecstop(1,1:3),Fz_totaal/5);Resultaten.(name).N1=[P.N1,sqrt(sum(
P.N1(1:3).^2))];

Resultaten.(name).N2=sqrt(sum(P.N1(1,1:2).^2))*sin(subspace(Vecstop(1,1:3)'
,Vecstop(2,1:3)'));
        P.l1new=Vecstop(1,4)*(1-extend(Resultaten.(name).N1(1,4),Vakwerk.A));
        P.l2new=Vecstop(3,4)*(1+extend(Resultaten.(name).N2,Vakwerk.A));
        Ztopna=sqrt(P.l1new^2-(0.5*P.l2new/sin(pi/5))^2);
        Resultaten.(name).XYZtop=[XYZtop(:,1:2),XYZtop(:,3)-
ones(3,1).*XYZtop(2,3)];
        if eigengewicht>=1&&shape=='d'%Staaf bij oplegging maatgevend voor knik
en vloei bij koepel
            Resultaten.(name).Kniklast=[Fk(Vecstop(1,4),Vakwerk.A), -
Fveg(Vakwerk.Fz_eg,2^k*5,Vakwerk.A)];
        else
            Resultaten.(name).Kniklast=[Fk(Vecstop(1,4),Vakwerk.A), -
Resultaten.(name).N1(1,4)];
        end
        Resultaten.(name).Zakking=Resultaten.(name).XYZtop(1,3)-
Ztopna;Resultaten.(name).dak=bedekking;
        Resultaten.(name).Stress=[-
Resultaten.(name).N1(1,4)/Vakwerk.A,Vakwerk.fy;-
Resultaten.(name).N2/Vakwerk.A,Vakwerk.fy];

Resultaten.(name).XYZtopna=[XYZtop(1,1:2),Ztopna;Resultaten.(name).XYZtop(2
:3,1:2).*(P.l2new/Vecstop(3,4)),Resultaten.(name).XYZtop(2:3,3)];

Resultaten.(name).Toetsen=[sign(min(sum(Resultaten.(name).Stress,2)));sign(
(XYZtop(1,3)-XYZtop(2,3))/3-
Resultaten.(name).Zakking);sign(sum(Resultaten.(name).Kniklast(1,:),2));sig
n(r*0.02-Resultaten.(name).Zakking)];

Resultaten.(name).Names={'Vloei';'Doorslag';'Knik';'Zakking'};failname=sprinf
('%sFAIL',name);
        if min(Resultaten.(name).Toetsen)<1

Resultaten.Fails.(failname)=Resultaten.(name).Names(Resultaten.(name).Toets
en~=1);
        sprintf(' %d ',failname,Resultaten.Fails.(failname){:});
        end

xlsmatrix.(name)(m,:)=[Vakwerk.A,sqrt(Vakwerk.A/pi),Fz_totaal,abs(Resultate
n.(name).Stress(:,1)'),-
Resultaten.(name).Zakking,Resultaten.(name).Kniklast(1,:),Resultaten.(name)
.Toetsen',Vakwerk.Fz_eg,Resultaten.(name).dak];
end
end
%% Tabel met vakwerkconstructies maken
tabelvk=zeros(5,k);
for k=1:k
    name=genvarname([shape num2str(2^k) 'v']);

```

```

if
isempty(xlsmatrix.(name)(find(xlsmatrix.(name)(sum(xlsmatrix.(name)(:,9:12)
,2)==4,1),1,'last'),[1,2,13,14]))==1
    Vakwerk.(name)=[NaN;NaN;NaN;NaN];
else
Vakwerk.(name)=xlsmatrix.(name)(find(xlsmatrix.(name)(sum(xlsmatrix.(name)(
:,9:12),2)==4,1),1,'last'),[1,2,13,14]));
end
tabelvk(:,k)=[2^k;Vakwerk.(name)];

koppen(:,k)={sprintf('Astaaf_%s',name),sprintf('rstaaf_%s',name),sprintf('E
G_totaal_%s',name),sprintf('EG_dakdeel_%s',name)};
end
constructietabel=table(tabelvk(:,1),tabelvk(:,2),tabelvk(:,3),tabelvk(:,4),
tabelvk(:,5),tabelvk(:,6),tabelvk(:,7),tabelvk(:,8),'VariableNames',{'c2','
c4','c8','c16','c32','c64','c128','c256'});
constructie.vakwerk(j,:)=r,reshape(tabelvk(2:5,:),1,4*k)];
Fzdak(j)=tabelvk(5,tabelvk(4,:)==min(tabelvk(4,:)));%Fz selecteren van
meest efficiënte vakwerk
constructie.vakwerkoptimaal(j,1:6)=[r,tabelvk(1:5,tabelvk(4,:)==min(tabelvk
(4,:)))'];
%% Schaalconstructie maken
xlsschaal=zeros(100,7);
for m=1:100;
    tlijst=logspace(bereikschal(1,j),bereikschal(2,j),100);t=tlijst(m);
    xlsschaal(m,1)=t;xlsschaal(m,2)=up(puntlast*Fzdak(j),t,r);
    if shape=='d'&&eigengewicht>=1&&puntlast==0

xlsschaal(m,3)=Vol(t,r)/2;xlsschaal(m,4)=xlsschaal(m,3)*Schaal.ro*g;
        xlsschaal(m,5)=eigengewicht*uqd(xlsschaal(m,4)/(4*pi*r^2),t,r);
        xlsschaal(m,6)=xlsschaal(m,4)/(2*pi*r^2)*r/t;
        xlsschaal(m,10)=sign(knikspanning(t,r)-xlsschaal(m,6));%Toets knik
    elseif shape=='d'&&puntlast>=1

xlsschaal(m,3)=Vol(t,r)/2;xlsschaal(m,4)=xlsschaal(m,3)*Schaal.ro*g;

xlsschaal(m,5)=uqd(eigengewicht*xlsschaal(m,4),t,r)+up(Fzdak(j),t,r);
        xlsschaal(m,6)=bolspanning(Fzdak(j),r,t);
        xlsschaal(m,10)=sign(Ncrb(t,r)-puntlast*(Fzdak(j)));%Toets knik
    else
        xlsschaal(m,3)=Vol(t,r);

xlsschaal(m,5)=up(eigengewicht*xlsschaal(m,4)+puntlast*Fzdak(j),t,r);

xlsschaal(m,6)=bolspanning(eigengewicht*xlsschaal(m,4)+puntlast*Fzdak(j),r,
t);
        xlsschaal(m,10)=sign(min([Ncrb(t,r)-
puntlast*(Fzdak(j)),knikspanning(t,r)-xlsschaal(m,6)]));%Toets knik
    end
    xlsschaal(m,7)=sign(r*0.02-xlsschaal(m,2));%Toets op vervorming
puntlast
    xlsschaal(m,8)=sign(r*0.02-xlsschaal(m,5));%Toets op vervorming
eg+puntlast
    xlsschaal(m,9)=sign(235E6-xlsschaal(m,6)); %Toets op vloeï
end
if isempty(xlsschaal(find(sum(xlsschaal(:,7:10),2)==4,1,'last'),[1,4]))==1
    Schaal.Koepel=[NaN,NaN];
else
Schaal.Koepel=xlsschaal(find(sum(xlsschaal(:,7:10),2)==4,1,'last'),[1,4]);

```

```

end
if isempty(xlsschaal(find(sum(xlsschaal(:,7:10),2)==4,1,'last'),[1,4]))==1
    Schaal.Bol=[NaN,NaN];
else
    Schaal.Bol=xlsschaal(find(sum(xlsschaal(:,7:10),2)==4,1,'last'),[1,4]);
end
%% Tabel met Schaalconstructies maken
schaalconstructie=table(Schaal.Koepel,Schaal.Bol,'VariableNames',{'Koepel',
'Bol'})
constructie.schaal(j,:)=[r,Schaal.Koepel,Schaal.Bol];
end
filename=sprintf('constructies%s.xlsx',shape);
xlswrite(filename,['r',reshape(koppen,1,4*k)],2,'B1');
xlswrite(filename,constructie.vakwerk,2,'B2');
xlswrite(filename,{ 'r','Koepeldikte','Eg koepel','Boldikte','Eg
bol'},3,'B1');
xlswrite(filename,constructie.schaal,3,'B2');
xlswrite(filename,{ 'r','complexiteit','A_Staaf','r_staaf','Eg','Eg
dakbedekking'},3,'B14');
xlswrite(filename,constructie.vakwerkoptimaal,3,'B15');
%% Excel bestand maken
% r=1;c=2;%complexiteit vakwerk (1,2,4,8,16,32,64)
% XYZ=output.(sprintf('XYZ%s%dv',shape,c)).*(r/output.Radius);
%
nb=output.(sprintf('nb%s%dv',shape,c));output.(sprintf('List%s%dv',shape,c)
)=output.(sprintf('List%s%dv',shape,c)).*(r/output.Radius);
% for k=1:k
%     filename=sprintf('toets%sr%d.xlsx',shape,r);
%     xlswrite(filename,{ 'Vakwerk.A','Fz','Stress c','Stress
t','Zakking','Fk','Nc','Toets Vloei','Toets doorslag','Toets
Knik','Fz_eg'},k+1,'B1');
%     xlswrite(filename,xlsmatrix.(genvarname(['s' num2str(2^k)
'v'])),k+1,'B2');
% end
%% Plot maken van bovenste pentagon met verplaatsingen
% geoplfunc(XYZ,nb,c,shape)
% Adjc=sparse(nbd1_2(nbd1_2(:,2)==1,1),nbd1_2(nbd1_2(:,2)==1,2),1);
% Adjts=sparse(nbd1_2(nbd1_2(:,2)~=1,1),nbd1_2(nbd1_2(:,2)~=1,2),1);
% figure('name','Bovenste pentagon');
gplot3d(Adjc,Resultaten.(name).XYZtop,'g'); hold on
% gplot3d(Adjts,Resultaten.(name).XYZtop,'r');%hold on;
gplot3d(sparse(nbd1_2(:,1),nbd1_2(:,2),1),Resultaten.(name).XYZtopna,'b');
%
text(Resultaten.(name).XYZtop(1,1),Resultaten.(name).XYZtop(1,2),Resultaten
.(name).XYZtop(1,3),sprintf('      Zakking [m] =
%0.4e',Resultaten.(name).Zakking))
% for j = 1:length(Resultaten.(name).XYZtop);
%
text(Resultaten.(name).XYZtop(j,1),Resultaten.(name).XYZtop(j,2),Resultaten
.(name).XYZtop(j,3),int2str(j),'FontSize',10);
% end

```

EGVWT.M

```
function [ Fegv, eg_driehoek, Fz ] = EGvwt( A, Vecs, c, shape )
%Totale gewicht vakwerkconstructie
% Eigen gewicht staven plus dakbedekking
global g Vakwerk r puntlast eigengewicht
if shape=='d'
    c_driehoek=c^2*12/2;
    Opp=@(R) 4*pi*R^2/2;
else c_driehoek=c^2*12;
    Opp=@(R) 4*pi*R^2;
end
n_hoeken.s(1)=12;n_ribben.s(1)=30;
for k=2:9
    cd=2^(k-1);
    n_ribben.s(k)=3*12*cd^2/1.2;
    n_hoeken.s(k)=n_hoeken.s(k-1)+n_ribben.s(k-1);
    n_ribben.d(k)=n_ribben.s(k)/2+cd*2.5;n_hoeken.d(k)=n_hoeken.s(k)/2+cd*2.5;
end
name=sprintf('%s', shape);
eg_driehoek=(Vakwerk.ro*10^-
1*r*g*Opp(r)/3/c_driehoek*Vecs(1,4)^2/235)^(1/3)*3+Vakwerk.ro*10^-
3*g*(Opp(r)/c_driehoek)^2/Vecs(1,4);%Vecs(1,4)
% eg_driehoek=Vakwerk.ro*r*10^-4*g*(Opp(r)/c_driehoek)*Vecs(1,4);
Fegv=A*Vakwerk.ro*g*(sum(Vecs(:,4))/3*n_ribben.(name)(log10(c)/log10(2)+1)+
n_hoeken.(name)(log10(c)/log10(2)+1)*4/3*pi*(sqrt(A/pi))^3)+eg_driehoek*c_d
riehoek;
if shape=='d'&&eigengewicht==1
% Fz=eg_driehoek+puntlast*Vakwerk.ro*g*A*(Vecs(1,4)+Vecs(3,4)*2);
Fz=eg_driehoek+1000;
elseif shape=='d'&&eigengewicht==0
    Fz=puntlast*Vakwerk.ro*g*A*(Vecs(1,4)+Vecs(3,4)*2);
elseif shape=='s'&&eigengewicht==1
    Fz=Fegv+puntlast*Vakwerk.ro*g*A*(Vecs(1,4)+Vecs(3,4)*2);
else
    Fz=puntlast*Vakwerk.ro*g*A*(Vecs(1,4)+Vecs(3,4)*2);
end
end
```

STAVENINV.M

```
%Dit script maakt een inventaris van de benodigde staven voor een gegeven
%r (in m) en accuracy a (standaard op micrometer nauwkeurig).
global r output
a=r*10000;
for c=[1,2,4,8,16,32]
    clear name List Staaflengte

    output.(sprintf('XYZs%dv',c))=output.(sprintf('XYZs%dv',c)).*(r/output.Radi
us);
    name=genvarname(['Stavens' num2str(c) 'v']);
    List=genvarname(['Lists' num2str(c) 'v']);
    output.(List)=output.(List).*(r/output.Radius);
    [~,~,Staaflengte]=find(round(output.(List).*a)./a);

    output.(name)=[unique(Staaflengte),histc(Staaflengte,unique(Staaflengte))];
end
for c=[2,4,8,16,32,64]

    output.(sprintf('XYZd%dv',c))=output.(sprintf('XYZd%dv',c)).*(r/output.Radi
us);
    name=genvarname(['Stavend' num2str(c) 'v']);
    List=genvarname(['Listd' num2str(c) 'v']);
    output.(List)=output.(List).*(r/output.Radius);
    [~,~,Staaflengte]=find(round(output.(List).*a)./a);

    output.(name)=[unique(Staaflengte),histc(Staaflengte,unique(Staaflengte))];
end
for c=[1,2,4,8,16,32,64,128,256]

    output.(sprintf('t%dv',c)).XYZ=output.(sprintf('t%dv',c)).XYZ.*(r/output.Ra
dius);
end
output.Radius=r;
```

ANSYSPREP.M

```
clear AnsysXYZd4v AnsysAd4v row
%Nodes locatie bestand maken
AnsysXYZd4v(:,1)=1:length(output.XYZd4v);
AnsysXYZd4v=[AnsysXYZd4v,output.XYZd4v];
fileID=fopen('\Ansysbestanden\AnsysXYZd4v.txt','w');
fprintf(fileID,'n,%5.0f,%1.12f,%1.12f,%1.12f\n',AnsysXYZd4v');
%Nodes verbindingen bestand maken
AnsysAd4v(:,1)=1:length(output.nbd4v);
AnsysAd4v=[AnsysAd4v,sortrows(output.nbd4v,2)];
fileID=fopen('\Ansysbestanden\AnsysAd4v.txt','w');
fprintf(fileID,'en,%5.0f,%5.0f,%5.0f\n',AnsysAd4v');
%Randvoorwaarden definieren
[row,~]=find(output.XYZd4v(:,3)==0);
row=sort(repmat(row,3,1));
fileID=fopen('\Ansysbestanden\Ansysrvwd4v.txt','w');
fprintf(fileID,'d,%5.0f,ux,0\nd,%5.0f,uy,0\nd,%5.0f,uz,0\n',row');
fclose('all');
```

ICOSAHEDRON2_FUNCTION.M

```
function [out1,out2,output]=icosahedron2_function(n,shape)
global r output
%coördinaten Icosahedron vaststellen voor radius r
c=1/sqrt(5); s=2*c ;c1 = sqrt((3-sqrt(5))/8) ;s1 = sin(2*pi/5);
c2 = cos(pi/5) ;s2 = sin(pi/5) ;
output.XYZs1v=[0,0,1;s,0,c;s*c1,s*s1,c; -s*c2,s*s2,c; -s*c2,-s*s2,c; s*c1,-s*s1,c;
s*c2,-s*s2,-c; s*c2,s*s2,-c; -s*c1,s*s1,-c; -s,0,-c; -s*c1,-s*s1,-c;
0,0,-1];.*r;
%---adjacencymatrix maken mbv onderlinge afstand (neighbours.m)
[output.nbs1v,output.Lists1v]=neighbours(output.XYZs1v,1,'s');
%Middelpunten van vertices opzoeken:
midpoints2v=(output.XYZs1v(output.nbs1v(:,1),:)+output.XYZs1v(output.nbs1v(:,2),:))./2;
%Middelpunten op bol projecteren:
radius2v=mean(sqrt(sum(midpoints2v.^2,2)));f2v=(r/radius2v);midpoints2v=midpoints2v.*f2v;
%Nieuwe adjacency matrix bouwen:
output.XYZs2v=sortrows([output.XYZs1v;midpoints2v],-3);
%XYZ2v=sortrows([XYZ;midpoints2v],-3);
[output.nbs2v,output.Lists2v]=neighbours(output.XYZs2v,2,'s');
%Koepel maken met 2v
posZ=output.XYZs2v(:,3)>=0;
output.XYZd2v = sortrows(output.XYZs2v(posZ,:),-3);
[output.nbd2v,output.Listd2v]=neighbours(output.XYZd2v,2,'d');
%Bol maken met 4v
midpoints4v=(output.XYZs2v(output.nbs2v(:,1),:)+output.XYZs2v(output.nbs2v(:,2),:))./2;
radiuss4v=sqrt(sum(midpoints4v.^2,2));fs4v=r./radiuss4v;
output.XYZs4v=repmat(fs4v,1,3).*midpoints4v;output.XYZs4v=sortrows([output.XYZs2v;output.XYZs4v],-3);
[output.nbs4v,output.Lists4v]=neighbours(output.XYZs4v,4,'s');
%koepel maken met 4v
midpointsd4v=(output.XYZd2v(output.nbd2v(:,1),:)+output.XYZd2v(output.nbd2v(:,2),:))./2;
radiusd4v=sqrt(sum(midpointsd4v.^2,2));f4v=r./radiusd4v;
output.XYZd4v=repmat(f4v,1,3).*midpointsd4v;output.XYZd4v=sortrows([output.XYZd2v;output.XYZd4v],-3);
[output.nbd4v,output.Listd4v]=neighbours(output.XYZd4v,4,'d');
```

```

%Bol maken met 8v
midpoints8v=(output.XYZs4v(output.nbs4v(:,1),:)+output.XYZs4v(output.nbs4v(
:,2),:))./2;
radius8v=sqrt(sum(midpoints8v.^2,2));fs8v=r./radius8v;
output.XYZs8v= repmat(fs8v,1,3).*midpoints8v; output.XYZs8v=sortrows([output.
XYZs4v;output.XYZs8v],-3);
[output.nbs8v,output.Lists8v]=neighbours(output.XYZs8v,8,'s');
%koepel maken met 8v
midpointsd8v=(output.XYZd4v(output.nbd4v(:,1),:)+output.XYZd4v(output.nbd4v(
:,2),:))./2;
radius8v=sqrt(sum(midpointsd8v.^2,2));f8v=r./radius8v;
output.XYZd8v= repmat(f8v,1,3).*midpointsd8v; output.XYZd8v=sortrows([output.
XYZd4v;output.XYZd8v],-3);
[output.nbd8v,output.Listd8v]=neighbours(output.XYZd8v,8,'d');
%Bol maken met 16v
midpoints16v=(output.XYZs8v(output.nbs8v(:,1),:)+output.XYZs8v(output.nbs8v(
(:,2),:))./2;
radius16v=sqrt(sum(midpoints16v.^2,2));fs16v=r./radius16v;
output.XYZs16v= repmat(fs16v,1,3).*midpoints16v; output.XYZs16v=sortrows([out
put.XYZs8v;output.XYZs16v],-3);
[output.nbs16v,output.Lists16v]=neighbours(output.XYZs16v,16,'s');
%koepel maken met 16v
midpointsd16v=(output.XYZd8v(output.nbd8v(:,1),:)+output.XYZd8v(output.nbd8
v(:,2),:))./2;
radius16v=sqrt(sum(midpointsd16v.^2,2));f16v=r./radius16v;
output.XYZd16v= repmat(f16v,1,3).*midpointsd16v; output.XYZd16v=sortrows([out
put.XYZd8v;output.XYZd16v],-3);
[output.nbd16v,output.Listd16v]=neighbours(output.XYZd16v,16,'d');
%koepel maken met 32v
midpointsd32v=(output.XYZd16v(output.nbd16v(:,1),:)+output.XYZd16v(output.n
bd16v(:,2),:))./2;
radius32v=sqrt(sum(midpointsd32v.^2,2));f32v=r./radius32v;
output.XYZd32v= repmat(f32v,1,3).*midpointsd32v;
output.XYZd32v=sortrows([output.XYZd16v;output.XYZd32v],-3);
[output.nbd32v,output.Listd32v]=neighbours(output.XYZd32v,32,'d');
%bol maken met 32v
midpoints32v=(output.XYZs16v(output.nbs16v(:,1),:)+output.XYZs16v(output.nb
s16v(:,2),:))./2;
radius32v=sqrt(sum(midpoints32v.^2,2));fs32v=r./radius32v;
output.XYZs32v= repmat(fs32v,1,3).*midpoints32v; output.XYZs32v=sortrows([out
put.XYZs16v;output.XYZs32v],-3);
[output.nbs32v,output.Lists32v]=neighbours(output.XYZs32v,32,'s');
%koepel maken met 64v Let op, kost erg veel tijd!!!!
%
midpointsd64v=(output.XYZd32v(output.nbd32v(:,1),:)+output.XYZd32v(output.n
bd32v(:,2),:))./2;
% radius64v=sqrt(sum(midpointsd64v.^2,2));f64v=r./radius64v;
% output.XYZd64v= repmat(f64v,1,3).*midpointsd64v;
% output.XYZd64v=sortrows([output.XYZd32v;output.XYZd64v],-3);
% [output.nbd64v,output.Listd64v]=neighbours(output.XYZd64v,64,'d');
output1=genvarname(['XYZ' shape num2str(n) 'v']);out1=output.(output1);
output2=genvarname(['nb' shape num2str(n) 'v']);out2=output.(output2);
% output3=genvarname(['List' shape num2str(n) 'v']);out3=output.(output3);
output.t1v.XYZ=output.XYZs1v(1:3,:);
A1=[0,0,0;1,0,0;1,1,0;];a=10000;
output.t1v.nb=[1,2;1,3;2,3;];
for i=1:8
    cd=2^i;c_1=2^(i-1);name=genvarname(['t' num2str(cd)
'v']);name_1=genvarname(['t' num2str(c_1) 'v']);
    clear XYZ radiuss midpoints

```

```

midpoints=(output.(name_1).XYZ(output.(name_1).nb(:,1),:)+output.(name_1).XYZ(output.(name_1).nb(:,2),:))./2;
radiuss=sqrt(sum(midpoints.^2,2));fs=r./radiuss;

XYZ= repmat(fs,1,3).*midpoints;output.(name).XYZ=sortrows([output.(name_1).XYZ;XYZ],-3);
    if i<8

[output.(name).nb,output.(name).List]=neighbours(output.(name).XYZ,cd,'t');
    [~,~,Staaflengte]=find(round(output.(name).List.*a)./a);

output.(name).Staveninv=[unique(Staaflengte),histc(Staaflengte,unique(Staaflengte))];
    else
    end
end
end

```

NEIGHBOURS.M

```

function [neighbours,Ls]=neighbours(xyz,nv,shape)
clear Ls L Z Y I IX Lsorted A neighbours J
global I J Lsorted
if nv>=2&&shape=='d'%Voor shape=dome
    nv=30*nv^2/2+5*nv/2;
elseif nv>=1&&shape=='s'
    nv=30*nv^2;%Voor shape=sphere
else %voor shape t=triangle
    nv=nv+1;nv=3*(nv^2-nv)/2;
end
L=zeros(length(xyz),length(xyz));
for n=1:length(xyz)
    Y=zeros(length(xyz),3);Z=Y;
    Z(n+1:length(xyz),:)=xyz(n+1:length(xyz),:);
    Y(n+1:length(xyz),:)=repmat(xyz(n,:),(length(xyz)-n),1);
    L(:,n)=sqrt(sum((Z-Y).^2,2));
end
[I,J,Lsorted]=find(L);%Alle lengtes groter dan 0 zoeken
[Lsorted,IX]=sort(Lsorted);%Lengtes op grootte sorteren
I=I(IX,:);J=J(IX,:);neighbours=[I(1:nv),J(1:nv)];%Database met burens opstellen
Ls=sparse(neighbours(:,1),neighbours(:,2),Lsorted(1:nv));%Te gebruiken lengtes
end

```

APPENDIX D EXPERIMENT RESULTATEN CHENJIE YU

Table 2. Moment m_{xx} as a function of curvature; $d = 4$ t, $\nu = 0$, $t=40$, $P=1000$, $E=2.1e5$

$\frac{m_{xx}}{P}$	$k_{yy}t$				
	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{30}$
-1.0	0.283	0.239	0.211	0.147	0.100
-0.8	0.283	0.240	0.212	0.148	0.101
-0.6	0.284	0.240	0.212	0.149	0.102
-0.4	0.283	0.239	0.212	0.148	0.102
-0.2	0.282	0.238	0.211	0.147	0.101
$\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$ 0.0	0.278	0.235	0.207	0.144	0.099
0.2	0.274	0.230	0.203	0.139	0.094
0.4	0.270	0.227	0.199	0.136	0.090
0.6	0.268	0.224	0.197	0.133	0.087
0.8	0.265	0.222	0.194	0.131	0.085
1.0	0.263	0.220	0.192	0.129	0.083

Table 3. Moment m_{yy} as a function of curvature; $d = 4$ t, $\nu = 0$, $t=40$, $P=1000$, $E=2.1e5$

$\frac{m_{yy}}{P}$	$k_{yy}t$				
	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{30}$
-1.0	0.283	0.239	0.211	0.148	0.101
-0.8	0.290	0.247	0.219	0.155	0.108
-0.6	0.299	0.255	0.228	0.164	0.116
-0.4	0.309	0.265	0.238	0.174	0.126
-0.2	0.320	0.276	0.248	0.185	0.137
$\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$ 0.0	0.318	0.275	0.247	0.184	0.142
0.2	0.302	0.258	0.231	0.167	0.120
0.4	0.288	0.244	0.217	0.153	0.106

0.6	0.278	0.234	0.207	0.143	0.096
0.8	0.270	0.226	0.199	0.135	0.089
1.0	0.263	0.220	0.192	0.129	0.083

Table 4. Normal force n_{xx} as a function of curvature; $\nu = 0$, $t=40$, $P=1000$, $E=2.1e5$

$\frac{n_{xx}t}{P}$	$k_{yy}t$				
	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{30}$
-1.0	0.141	0.140	0.140	0.136	0.130
-0.8	0.126	0.125	0.125	0.121	0.116
-0.6	0.103	0.103	0.102	0.100	0.095
-0.4	0.065	0.065	0.065	0.063	0.061
-0.2	-0.009	-0.009	-0.009	-0.008	-0.005
0.0	-0.127	-0.127	-0.127	-0.128	-0.140
0.2	-0.190	-0.190	-0.190	-0.188	-0.183
0.4	-0.208	-0.208	-0.207	-0.203	-0.192
0.6	-0.214	-0.213	-0.212	-0.206	-0.192
0.8	-0.215	-0.214	-0.213	-0.206	-0.191
1.0	-0.216	-0.215	-0.214	-0.206	-0.189

Table 5. Normal force n_{yy} as a function of curvature; $\nu = 0$, $t=40$, $P=1000$, $E=2.1e5$

$\frac{n_{yy}t}{P}$	$k_{yy}t$				
	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{30}$
-1.0	-0.141	-0.141	-0.140	-0.135	-0.122
-0.8	-0.155	-0.154	-0.154	-0.149	-0.137
-0.6	-0.171	-0.170	-0.170	-0.165	-0.154

$\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$	-0.4	-0.190	-0.190	-0.189	-0.183	-0.172
	-0.2	-0.210	-0.210	-0.209	-0.202	-0.189
	0.0	-0.223	-0.222	-0.221	-0.214	-0.201
	0.2	-0.222	-0.221	-0.220	-0.213	-0.198
	0.4	-0.219	-0.218	-0.217	-0.210	-0.195
	0.6	-0.217	-0.217	-0.215	-0.208	-0.193
	0.8	-0.217	-0.216	-0.214	-0.207	-0.191
	1.0	-0.216	-0.215	-0.214	-0.206	-0.189

APPENDIX E ANSYS SCRIPT NIET-LINEAIRE KNIK KOEPEL C=8

```
/prep7
!knopen (plakken uit XYZ csv bestand uit Ansysprep.m)

et, 1, link180          ! Link180 is volledig scharnierend

!First Material
mp, ex, 1, 210.e9      ! Material Property, Elastic

r, 1, 0.005           ! (Cross sectional area)
real, 1
mat, 1
! Verbindingen tussen knopen (plakken uit A output uit Ansysprep.m)

!Randvoorwaarden (plakken uit rvwd output uit Ansysprep.m)

epplot                ! elementen plotten
/pbc, u, , 1

finish

/solu
ANTYPE,STATIC ! Static analysis
NLGEOM,ON ! Groter verplaatsingen aan
OUTRES,,1
NSUBST,1 !
Neqit,1000
LNSRCH,ON
F,1,FZ,-250000! Bovengrens belasting instellen
SOLVE
FINISH
/Output
/Post26
Nsol,3,1,U,Z
PROD,4,1,,,LOAD,,,250000
Xvar,4
PLvar,3
/AXLAB,Y,DEFLECTION
/AXLAB,X,LOAD
/REPlot ! Grafiek plotten met deflection vs load.
```