Eindige-elementenmethode voor schaalconstructies

De werkelijke nauwkeurigheid van schaalelementen in Ansys

J.U. de Jong

Technische Universiteit Delft

TU Delft Delft University of Technology

Challenge the future

Eindige-elementenmethode voor schaalconstructies

De werkelijke nauwkeurigheid van schaalelementen in Ansys

door

J.U. de Jong

Studentnummer:	4153499
Projectduur:	10 november 2014 – 14 januari 2015
Begeleiders:	Dr. ir. P. C. J. Hoogenboom
	Dr. ir. F. P. van der Meer
Faculteit:	Civiele Techniek en Geowetenschappen

Een elektronische versie van dit verslag is beschikbaar op
http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/BSc_projects.html/.

Delft University of Technology

Voorwoord

Voor u ligt het eindrapport van het onderzoek dat ik heb uitgevoerd ter afsluiting van mijn bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Het rapport is het resultaat van een onderzoek naar de nauwkeurigheid van schaalelementen in het elementenprogramma Ansys. Dit is een vervolgonderzoek naar aanleiding van voorafgaand onderzoek naar de nauwkeurigheid van schaalelementen in het elementenprogramma SCIA Engineer door C.T.J.D.M. Steenbergen. Het onderzoek is gedurende acht weken individueel uitgevoerd onder begeleiding van dr. ir. P. C. J. Hoogenboom en dr. ir. F. P. van der Meer. Graag wil ik hen hartelijk bedanken voor de geboden hulp en geïnvesteerde tijd tijdens dit onderzoek. Hun waardevolle adviezen, uitleg en besprekingen die leidde tot nieuwe inzichten, hebben geleid tot dit resultaat waar ik met plezier aan heb gewerkt. Ik wens u veel leesplezier toe.

J.U. de Jong
Delft, januari 2015

Samenvatting

Dit rapport is geschreven in het kader van het doorrekenen van schaalconstructies met de eindige-elementenmethode. Eindige-elementenmethoden worden toegepast op complexe constructies waarbij analytische oplossingen onmogelijk of te omslachtig zijn. Elementenprogramma's maken gebruik van numerieke oplossingen die altijd een afwijking bevatten ten opzichte van de exacte oplossing. Gebruikers van elementenprogramma's moeten dus rekening houden met een fout in de berekening. Door een kundig aantal elementen te kiezen kan een bepaalde nauwkeurigheid behaald worden in de berekening. De ontwikkeling van de fout over het aantal elementen verschilt echter per element. Deze is niet bekend voor schaalelementen in Ansys.

In dit rapport staan de onderzoeksresultaten naar de nauwkeurigheid van schaalelementen in Ansys. De hoofdvraag luidt: *Wat is de werkelijke nauwkeurigheid, grootte van de orde van de fout, van schaalelementen in het eindige-elementenprogramma Ansys voor verplaatsing, moment en Von Mises-spanning?* De werkelijke nauwkeurigheid is bepaald aan de hand van testen op verschillende 'benchmarks'. Deze benchmarks zijn eenvoudige constructies met belasting waarvan de vervorming bekend is. De testen zijn herhaald met kleinere elementgrootten. Met deze resultaten is de elementnauwkeurigheid voor verplaatsing, moment en Von Mises-spanning bepaalt.

Hieronder een kort overzicht met resultaten van de nauwkeurigheid, orde van de fout, voor verplaatsing, Von Mises-spanning en moment per model:

Tabel 1: Orde van de fout voor verschillende grootheden

Model	Schaalelement	**Verplaatsing**	**Von Mises-spanning**	**Moment**
Vlakke plaat	Vierknoops	2,03	-	2,00
Vlakke plaat	Achtknoops	2,10	-	2,00
Koepel	Achtknoops	2,91	2,46	-
Gesloten cilinder	Achtknoops	3,34	2,03	-
Open cilinder	Achtknoops	3,41	2,08	-

De 'werkelijke' nauwkeurigheid van schaalelementen in Ansys is dus 2,0 tot 3,4 voor verplaatsing, 2,0 tot 2,5 voor Von Mises-spanning en 2,0 voor moment.

Verder wordt geconcludeerd dat de eindige-elementenresultaten altijd convergeren, maar niet altijd monotoon. Bij heel kleine elementen kunnen singulariteiten en reken-onnauwkeurigheid de convergentie onzichtbaar maken. Daarom moet de elementengrootten waarmee de orde van de afbreekfout worden bepaald oordeelkundig worden gekozen.

Daarnaast hebben vierknoopselementen en achtknoopselementen voor een vlakke plaat dezelfde orde van fout voor verplaatsingen en momenten. Niettemin zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger. De achtknoopselementen geven meer nauwkeurigheid voor fijne elementennetten, maar ook voor grove netten. Opmerkelijk is dat de vierknoopselementen per vrijheidsgraad wel nauwkeuriger blijken te zijn dan achtknoopselementen voor de grootheid moment.

Ook blijkt de nauwkeurigheid van schaalelementen onafhankelijk te zijn van de overheersende situatie, buiging of membraankrachten. Er is eenzelfde orde fout gevonden voor een cilinder met open en gesloten einden voor verplaatsing en Von Mises-spanning.

Ansys kan geen momenten, normaalkrachten en dwarskrachten afbeelden. Deze grootheden moeten derhalve worden berekend uit de spanningen en een correct script hiervoor is nog niet gevonden. Voor vervolgonderzoek zou het interessant zijn wel het juiste script te vinden.

Er is geen verklaring gevonden voor dezelfde orde fout voor een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen. Vervolgonderzoek naar een verklaring hiervoor zou interessant zijn.

Inhoudsopgave

1

Inleiding

Bij sterkteberekeningen van complexe constructies maken constructeurs gebruik van eindige-elementenmethoden. Deze rekenmethoden delen de constructie op in een eindig aantal elementen. Er wordt als het ware een net over de constructie heen gelegd. Met matrixvergelijkingen kan dan het gedrag van de constructie onder verschillende omstandigheden worden bepaald. Wanneer er kleinere elementen en dus ook meer elementen worden gebruikt, neemt de nauwkeurigheid van de berekening toe. De berekende oplossing heeft dan een kleinere afwijking ten opzichte van de exacte oplossing. Te veel elementen kan een computer niet verwerken; de computer zal een tekort aan geheugen hebben en de rekentijd zal te lang zijn. Het is dus belangrijk om te weten hoe nauwkeurig elementen zijn zodat er zo min mogelijk gebruikt behoeven worden. Dit geldt ook voor schaalelementen in eindige-elementenberekeningen die gebruikt worden voor constructies met enkel- en dubbelgekromde elementen als bijvoorbeeld koeltorens.

Een constructeur die ervaren is met eindige-elementenmethoden weet wanneer een element voldoende klein is voor een berekening met een bepaalde nauwkeurigheid. Als er twijfel is over deze keuze zal er onderzoek moeten worden gedaan naar de nauwkeurigheid van de elementen. Dit is het geval voor schaalelementen in het veel gebruikte elementenprogramma Ansys. De theoretische nauwkeurigheid van de schaalelementen in Ansys is bekend. Over de werkelijke nauwkeurigheid is echter onduidelijkheid. Onderzoek is uitgevoerd om dit te bepalen.

1.1. Doel

Het doel van dit eindwerk is de werkelijke nauwkeurigheid, ordegrootte van de fout, van schaalelementen te bepalen van het elementenprogramma Ansys voor verplaatsing, moment en Von Mises-spanning.

1.2. Aanpak

De werkelijke nauwkeurigheid van de schaalelementen zal bepaald worden door testen op zogenoemde 'benchmarks'. Dit zijn eenvoudige constructies met belasting waarvan de vervorming bekend is. Benchmarks die gebruikt worden zijn een cilinder (met open én gesloten einden), een halve bol met opening en een vlakke plaat. Van deze benchmarks worden de verplaatsingen, momenten en Von Mises-spanning berekend in Ansys. De berekeningen worden herhaald met kleinere elementen. Met deze resultaten wordt de elementnauwkeurigheid bepaald.

In voorgaand onderzoek van C.T.J.D.M. Steenbergen is de nauwkeurigheid van schaalelementen bepaald in het eindige-elementen-computerprogramma SCIA Engineer [1]. Uit zijn onderzoek bleek dat de orde van de fout in vele gevallen lastiger te bepalen was dan in eerste instantie werd gedacht. De berekende oplossingen convergeerden naar een unieke oplossing bij verfijning van de elementnetten, maar niet altijd monotoon. In sommige gevallen kon zelfs geen betrouwbaar resultaat worden gevonden. Ook zat er veel variatie in de resultaten. De hypothese dat de fout kan worden beschreven met $O(h^\alpha)$ is niet juist voor de elementen in SCIA Engineer. Verwacht wordt dat Ansys, het meer academische eindige-elementenprogramma, een meer nauwkeurige fout beschrijft die wel betrouwbaar is.

1.3. STRUCTUUR

De opbouw van dit rapport is als volgt: Allereerst zal de eindige-elementenmethode geïntroduceerd worden; wat houdt elementnauwkeurigheid in en hoe bepaalt men die. Vervolgens zullen de verschillende modellen worden toegelicht die zijn gebruikt gedurende dit onderzoek; hoe zijn ze opgebouwd en wat zijn de eigenschappen ervan. Hierna zullen de resultaten van de elementenberekeningen worden gepresenteerd voor verplaatsing, moment en Von Mises-spanning. Hieruit worden de conclusies getrokken die gevolgd worden door aanbevelingen voor verder onderzoek.

2

Eindige-elementenmethoden

Sterkteberekeningen van complexe constructies vereisen geavanceerde oplosmethoden van de differentiaalvergelijkingen die het gedrag van de constructiedelen beschrijven. Analytische oplossingen zijn onmogelijk of te omslachtig. Bij complexe constructies wordt daarom gebruik gemaakt van eindige-elementenmethoden. Deze methoden zijn gebaseerd op numerieke oplossingen die meestal door computers worden uitgevoerd. Computerprogramma's delen de constructies op in een eindig aantal elementen. Er wordt een rooster/net over de constructie geplaatst. De elementen hebben gemeenschappelijke randvoorwaarden waar de numerieke oplossing aan moet voldoen. Zo ontstaan er duizenden constitutieve en kinematische vergelijkingen tussen de elementen wat zich uit in enorme matrices. Door de matrixvergelijkingen op te lossen kan het gedrag van de constructie worden bepaald. Het oplossen van zo'n matrix kost tijd. Zeker als deze groot is. Zoals eerder vermeld, is het dus aan de constructeur om oordeelkundig een aantal elementen te kiezen voor een resultaat dat nauwkeurig genoeg is met een acceptabele rekentijd. De (numerieke) elementenberekeningen zijn een benadering van de exacte oplossing. Er zal praktisch altijd een afwijking of fout in de berekende oplossing zitten. De oplossingen uit de elementenberekeningen kunnen dus als volgt omschreven worden:

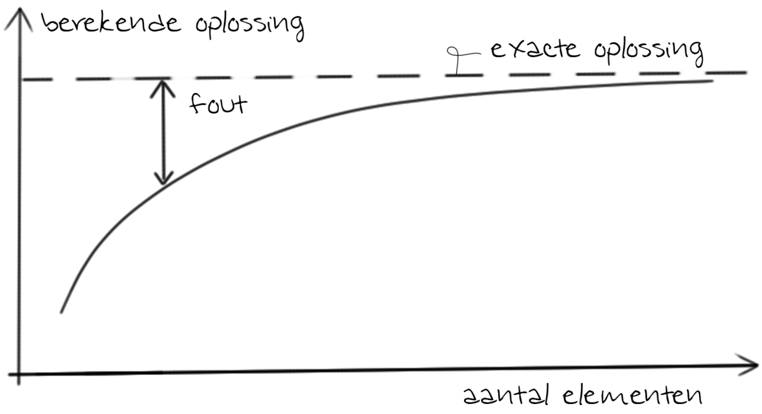
$$\text{exacte oplossing} = \text{berekende oplossing} + \text{fout}$$

2.1. Nauwkeurigheid

Elementnauwkeurigheid kan niet uitgedrukt worden in een percentage. Deze is namelijk afhankelijk van de situatie waarin het element wordt gebruikt. Bekend is dat bij toename van het aantal elementen in de berekening de fout kleiner wordt. De typische convergentie van een eindige-elementenberekening naar de exacte oplossing is te zien in figuur 2.1. De keuze van de grootte van het element is dus bepalend voor de grootte van de fout. Hierdoor kunnen we de fout omschrijven als een functie van de elementgrootte h. In de numerieke wiskunde wordt de fout omschreven als $O(h^\alpha)$ (spreek als orde alpha) met $\alpha = 1, 2, 3, ...$ Ook wel in de vorm Ch^α met C als een constante. Er geldt dat $\alpha \neq 0$, anders zou dit duiden op een constante fout en dus een onbruikbaar element. De ontwikkeling van een fout als functie van de elementgrootte voor verschillende α's is weergegeven in figuur 2.2. Te zien is dat een grote waarde voor α resulteert in een snelle convergentie naar de exacte oplossing. Een hoge orde fout is dus gunstig voor eindige-elementenberekeningen. Er zijn minder elementen nodig voor een nauwkeurig resultaat.

2.2. Schaalelementen

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de 'shell181' en de 'shell281' schaalelementen in het Ansys 14.0 pakket. Dit zijn vierhoekige elementen met vier (shell181) en acht (shell281) knooppunten. Het vierknoopselement (ook wel een bilineair element) heeft knooppunten op ieder hoekpunt. Het achtknoopselement (ook wel een kwadratisch element) heeft op iedere hoek en in het midden van de zijde een knooppunt zitten. Elk knooppunt heeft zes vrijheidsgraden: translatie in de x, y en z assen, en rotatie om de x, y en z assen. Over het algemeen geven achtknoopselementen nauwkeurigere resultaten dan vierknoopselementen.



Figuur 2.1: Typische convergentie van een eindige-elementenberekening

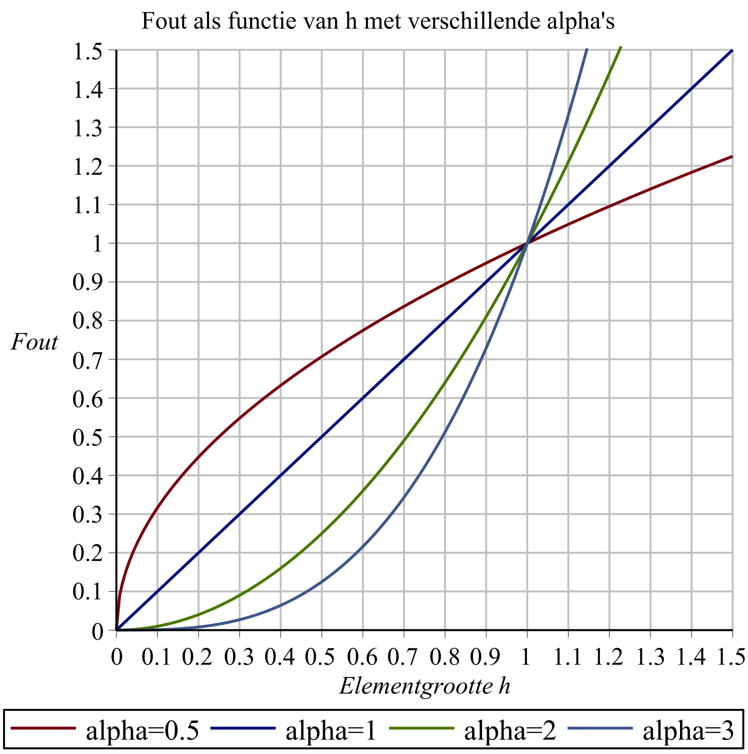
2.3. NAUWKEURIGHEID BEPALEN

De nauwkeurigheid van een element (orde fout) in eindige-elementenberekeningen kan op verschillende manieren bepaald worden. In deze paragraaf komen er twee aan bod waarvan één gebruikt is gedurende dit onderzoek. Elke oplossingsmethoden is gebaseerd op minimaal drie testen waarbij de elementgrootte varieert.

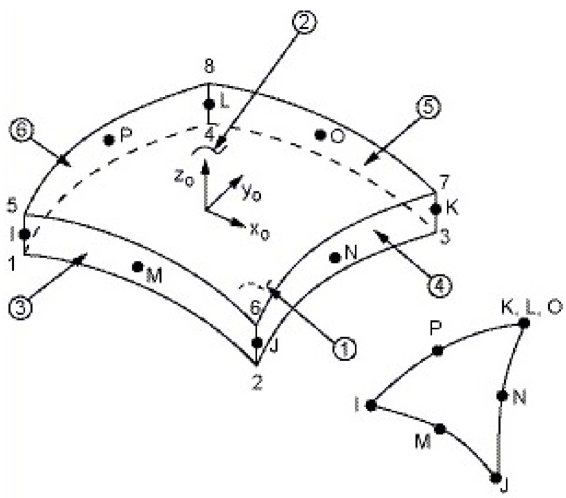
2.3.1. ANALYTISCHE BENADERING

De analytische benadering berust op drie testen met gehalveerde elementgrootte. De tweede met de helft van de eerste elementgrootte en de derde met één vierde van de eerste elementgrootte. Deze analytische benadering heeft drie vergelijkingen en drie onbekenden. Neem bijvoorbeeld de verplaatsing. Dan is er de constante C, de exacte verplaatsing u_{exact} en de orde van convergentie van de fout α. Alpha kan bepaald worden met de berekende waarden en is onafhankelijk van C (verg. 2.2). De constante C is daarentegen wel afhankelijk van de orde alpha. Nadeel van deze benadering is dat maar een klein domein van elementen gebruikt wordt om de orde te bepalen. Om een uitspraak te kunnen doen over de orde van de fout moeten de berekeningen meerdere malen uitgevoerd worden op verschillende elementgrootten. Daarnaast is de keuze voor elementgrootte gelimiteerd tot gehalveerde grootten. Deze analytische methode is gebruikt in voorgaand onderzoek van C.T.J.D.M. Steenbergen naar de nauwkeurigheid van schaalelementen in SCIA Engineer [1].

$$
\begin{gathered}
u_{exact} = u_{berekend,1} + Ch^{\alpha} \\
u_{exact} = u_{berekend,2} + C\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} \\
u_{exact} = u_{berekend,3} + C\left(\frac{h}{4}\right)^{\alpha} \\
\alpha = \frac{\log\left(\frac{u_{berekend,1} - u_{berekend,2}}{u_{berekend,2} - u_{berekend,3}}\right)}{\log(2)}
\end{gathered} \tag{2.1}
$$



Figuur 2.2: Fout als functie van de elementgrootte met verschillende alpha's (orde fout)



Figuur 2.3: Schaalelement shell281 in Ansys

2.3.2. LOGARITMISCHE BENADERING

De exacte oplossing kan herschreven worden naar een logaritmische vergelijking waarin de fout een functie is van het aantal elementen (verg. 2.2). Hierbij is A het totaal oppervlakte van de elementen en n het aantal elementen. Het totaal oppervlakte van de elementen is constant bij n elementen en valt dan ook weg met de andere constante in C'.

Analytische oplossingen zijn er voor complexe constructies niet. Bij deze methode is het dus noodzaak zelf een unieke 'exacte' oplossing te kiezen. De keuze is gebaseerd op de oplossingen van de elementberekening met de fijnste netten. De absolute fout, de afwijking van de gemaakte berekeningen met de 'exacte' oplossing, wordt uitgezet in een grafiek tegen het aantal elementen met dubbel logaritmische schaalverdeling. Door de berekende fouten wordt een lineaire regressielijn geplot met de kleinste-kwadratenmethode. Dit is een rekenmethode om bij een gegeven verzameling van meetpuntenparen (in dit geval de berekende fout) de best passende lijn te bepalen. De best passende lijn is diegene waarbij het totaal van de gekwadrateerde afwijking in verticale zin met punten ten opzichte van de lijn zo klein mogelijk is. De ontstane regressielijn heeft een functie die gelijk is aan vergelijking 2.2. Het idee van deze methode is dat met de richtingscoëfficiënt van deze lijn de orde van de fout (= α) te bepalen is. De elementgrootte is omgekeerd evenredig met het aantal elementen als er in één richting wordt verfijnd. In dat geval is de orde van de fout gelijk aan de richtingscoëfficiënt. De elementgrootte is omgekeerd evenredig met de wortel uit het aantal elementen als er in twee richtingen wordt verfijnd. De orde van de fout is dan gelijk aan twee keer de richtingscoëfficiënt van de regressielijn. De nauwkeurigheid van de schaalelementen in dit onderzoek zijn bepaald met deze logaritmische benadering.

$$
\begin{aligned}
u_{exact} &= u_{berekend} + Ch^{\alpha} \\
u_{exact} - u_{berekend} &= Ch^{\alpha} \\
\log\left(u_{exact} - u_{berekend}\right) &= \log\left(Ch^{\alpha}\right) \\
\log(\text{fout}) &= \log C + \alpha \log h \\
\log(\text{fout}) &= \log C + \alpha \log \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\log(\text{fout}) &= \log C + \frac{1}{2}\alpha \left[\log A - \log n\right] \\
\log(\text{fout}) &= \log C + \frac{1}{2}\alpha \log A - \frac{1}{2}\alpha \log n
\end{aligned}
$$

$$
\log(\text{fout}) = -\frac{1}{2}\alpha \log n + C' \tag{2.2}
$$

3
Modellen

De modellen gebruikt in dit onderzoek zijn gemaakt in zogenoemde Macro files. Deze files zijn opgesteld in het Windows programma Kladblok. De Macro files bestaan uit rijen commando's welke Ansys inleest en uitvoert. Het resultaat is een totaal gemodelleerde constructie met materiaaleigenschappen, opgelegde belasting, opleggingen etc. die helemaal doorgerekend wordt voor alle knooppunten en elementen. Het gebruik maken van Ansys op deze manier is geleerd met behulp van voorbeeld files van dr. ir. P. C. J. Hoogenboom. De schaalmodellen gebruikt in dit onderzoek zijn veelgebruikte 'benchmarks' voor schaalelementen. De eenvoudige constructies waarvan de vervorming bekend is worden gebruikt om ontwikkelaars hun schaalelementen te valideren. De referentie benadering van de benchmarks is gebruikt om de modellen in dit onderzoek te controleren. In dit hoofdstuk zal eerst kort de opbouw van de Macro files (vanaf nu scripts genoemd) worden toegelicht. Vervolgens de modellen met hun eigenschappen en parameters die zijn gebruikt gedurende dit onderzoek.

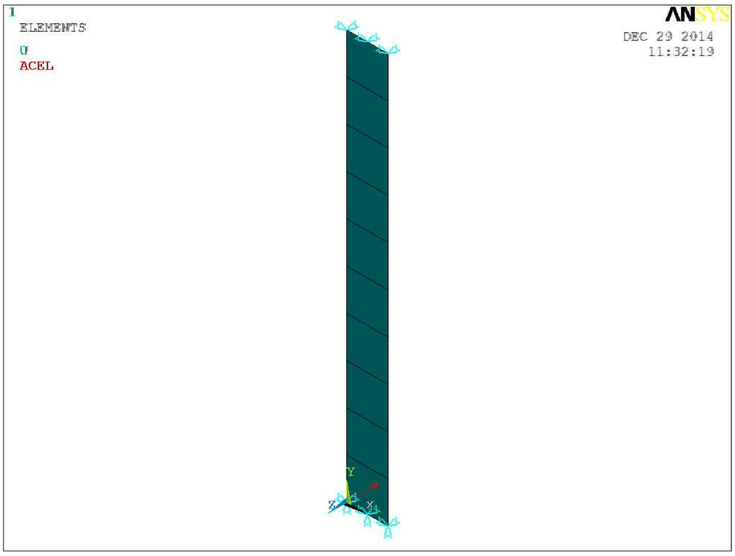
3.1. Opbouw script

De opbouw van de scripts is telkens hetzelfde en vrij eenduidig. Te beginnen met het definiëren van variabelen van het model. Het gaat hier onder andere om de dikte, elasticiteitsmodulus, Poisson ratio, aantal elementen en afmetingen. Vervolgens wordt het elementtype toegewezen en zijn eigenschappen. Dit wordt vervolgd door het plaatsen van de knooppunten. De knooppunten zijn genummerd die samen weer elementen vormen. Hierna worden de oplegreacties toegewezen aan de knooppunten. Dit wordt gedaan door per knooppunt aan te geven in welke vrijheidsgraad deze wordt verhinderd/beperkt. Voor de scharnierende rol oplegging van een vlakke plaat is dit bijvoorbeeld de translatie in de z-richting (UZ) en de x-richting (UX). Vervolgens wordt de belasting aangebracht. In dit onderzoek eigen gewicht en puntlasten. Nu is het model gevormd met belasting en wordt helemaal doorgerekend in Ansys. Voor elk hoekknooppunt zijn spanningen en verplaatsingen berekend. Tenslotte wordt het script afgesloten door de gewenste resultaten te presenteren in het output venster.

3.2. Plaat

Het eerst gebruikte model is een rechthoekige vlakke plaat die wordt belast op eigen gewicht. De plaat is scharnierend opgelegd aan twee overstaande zijden (fig. 3.1). Eigen gewicht werkt in de positieve z-richting. In de breedterichting is slechts één element gebruikt. Het aantal elementen in de lengterichting is wel variërend gedurende de berekeningen. Voor de nauwkeurigheidsberekeningen is er telkens één knooppunt beschouwd. Dit is het knooppunt halverwege de plaat aan de rand. Hier zijn de verplaatsingen en spanningen afgelezen.

Het model is gevalideerd door de verplaatsing te controleren met de analytische oplossing. Wanneer er vierknooppuntselementen worden gebruikt kan de plaat worden beschouwd als een balk en zal niet doorbuigen in de breedterichting. De verplaatsing halverwege de plaat is te berekenen met een vergeet-me-nietje voor een ligger met lijnbelasting (verg. 3.1). Hierbij is q de verdeelde lijnbelasting (eigen gewicht) in N/mm, l de overspanning in mm, E de elasticiteitsmodulus in N/mm^2 en I het traagheidsheidsmoment in mm^4. Met de eerder gegeven eigenschappen van de plaat is de doorbuiging halverwege de plaat 5,8036 mm via de analytische oplossing (fig. A.13 op blz. 50).



Figuur 3.1: Plaat model in Ansys

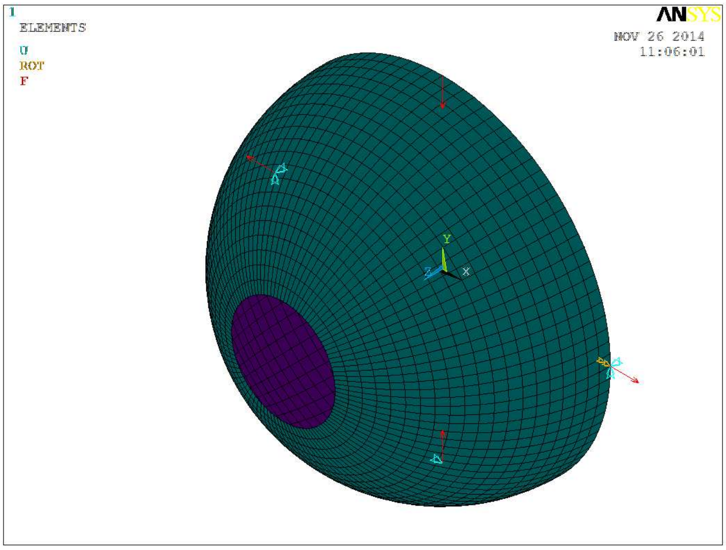
- E =210000 MPa
- ρ =7800 kg/m^3
- v =0,3 [-]
- l =10 m
- b =1 m
- t =0,1 m

$$u = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \tag{3.1}$$

3.3. KOEPEL

Het volgende model omschrijft een dunwandige koepel, ook wel de helft van een bol. De koepel heeft in de top een opening die een hoek van 18 graden maakt met de z-as. Hier is voor gekozen omdat er anders gebruik gemaakt moest worden van driehoekselementen in de top. De nauwkeurigheidsanalyse is dan minder zuiver omdat er twee verschillende elementen tegelijk worden gebruikt. De koepel is symmetrisch belast door vier puntlasten op de onderrand van de constructie. Twee trekkende krachten in de x-richting en twee duwende in de y-richting (fig. 3.2).

Ansys geeft alleen resultaten indien de constructie kinematisch bepaald is en dus niet vrij kan bewegen. Door zes vrijheidsgraden te verhinderen op de juiste locaties kan de koepel niet transleren en roteren. Gekozen is voor scharnieren onder de puntlasten. Twee scharnieren in de z-richting, twee in de x-richting, één in de y-richting en één rotatie verhindering om de x-as. De blauwe driehoekjes in het figuur 3.2 weergeven de scharnieren, de oranje dubbele driehoek de rotatie beperking en de rode pijlen de puntlasten. De koepel is een goede test voor een dunwandige constructie met dubbelgekromde elementen onder invloed van buiging. Deze veelgebruikte benchmark voor schaalelementen heeft een referentie verplaatsing van 0,0935 m direct onder de puntlast [2]. In Ansys is er een verplaatsing van 0,0937 m gevonden. De procentuele afwijking met de benchmark van 0,2% wordt gezien als acceptabel. De nauwkeurigheidsberekeningen gedurende dit onderzoek zijn uitgevoerd op het knooppunt halverwege de meridiaan naar de top boven de puntlast voor verplaatsing en spanningen. Er is niet gekozen voor het knooppunt direct onder de puntlast. Singulariteiten zorgen hier voor onzuivere analyse.



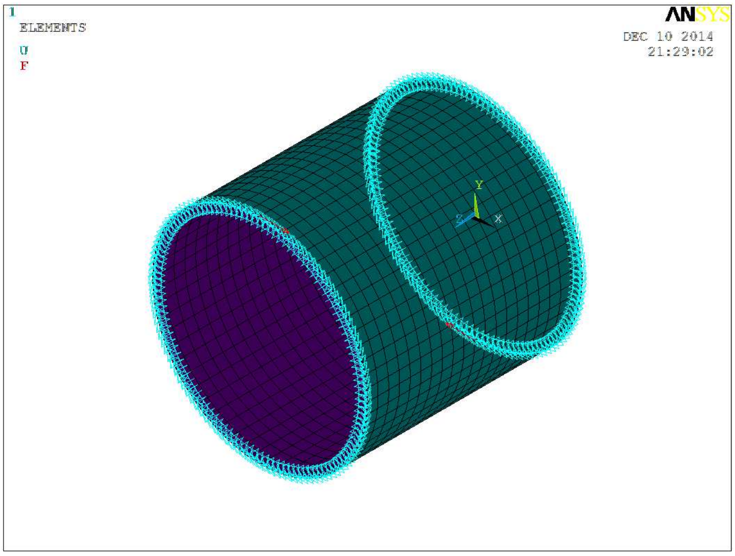
Figuur 3.2: Koepel model met opening in Ansys

- $E = 6,825 \cdot 10^7$ N/m^2
- $\nu = 0,3$ [−]
- $r = 10$ m
- $t = 0,04$ m
- $F = 2$ N

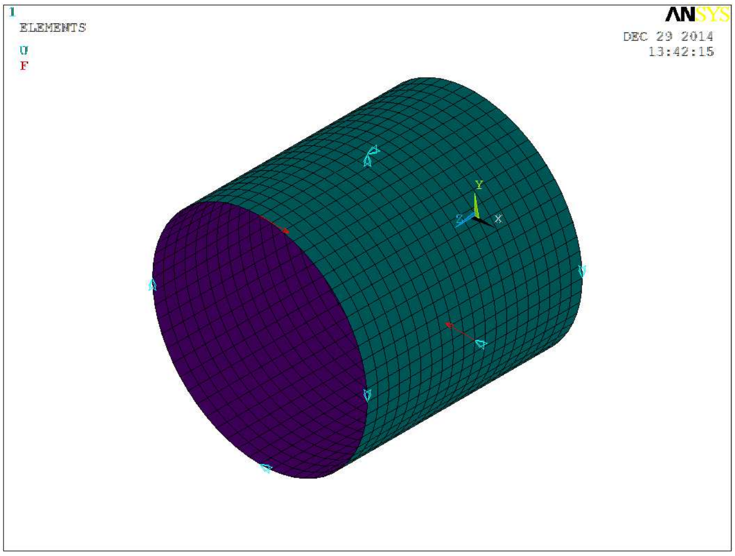
3.4. CILINDER

De laatste modellen zijn dunwandige cilinders. De één met open einden en de ander met gesloten einden. De "geknepen" cilinder wordt belast door twee overstaande puntlasten in de x-richting halverwege de cilinder. De knopen aan de randen van de gesloten cilinder zijn verhinderd in de x en y-richting (fig. 3.3). Deze kunnen vrij bewegen bij de open cilinder (fig. 3.4). De eigenschappen en belasting van de cilinder zijn voor beide modellen verder exact hetzelfde. Er is gekozen voor twee varianten van de cilinder om de invloed van membraankrachten tegenover buiging op de nauwkeurigheid van schaalelementen te onderzoeken. Membraankrachten overheersen in de gesloten cilinder. In de open cilinder overheerst buiging. De referentie verplaatsing onder de puntlast is 1,82488 mm van de gesloten cilinder [2]. Ansys berekent een verplaatsing van 1,85860 mm wat een procentuele afwijking geeft van 1,8%. Ook deze afwijking wordt als acceptabel gezien en het model goedgekeurd. Gedurende dit onderzoek is het knooppunt op $\frac{1}{4}$ van de lengte en op 45 graden boven de puntlast gebruikt voor de nauwkeurigheidsberekeningen voor verplaatsing en spanningen.

- $E = 3 \cdot 10^6$ N/mm^2
- $\nu = 0,3$ [−]
- $r = 300$ mm
- $L = 600$ mm
- $t = 3$ mm
- $F = 1 \cdot 10^5$ N



Figuur 3.3: Gesloten cilinder model in Ansys



Figuur 3.4: Open cilinder model in Ansys

4

Verplaatsing

In dit hoofdstuk zullen per model de resultaten gepresenteerd worden van de nauwkeurigheid van schaalelementen voor verplaatsing. De verplaatsing is de uitwijking van de constructie in vervormde toestand. Zoals eerder is aangegeven is er per model, op één locatie, de verplaatsing berekend in Ansys. De elementenberekeningen zijn herhaald met gehalveerde elementgrootten. Absolute fouten zijn bepaald aan de hand van de berekende verplaatsingen en de uniek gekozen 'exacte' verplaatsingen. De werkelijke nauwkeurigheid (orde van de fout, α) voor verplaatsing is bepaald met de logaritmische benadering.

4.1. Plaat

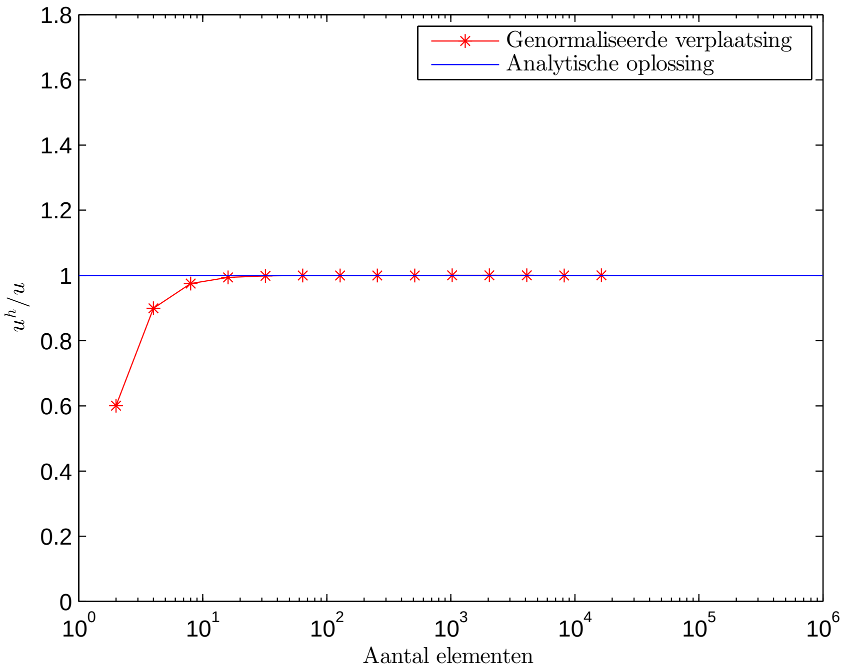
De vlakke plaat vervormt parabolisch onder eigen gewicht met een maximale uitwijking halverwege de plaat (fig. A.9a en A.9b op blz. 48). De vlakke plaat is in één richting verfijnd met zowel de vier- als achtknoopselementen.

4.1.1. Plaat met vierknoopselementen

In tabel 4.1 staan de resultaten voor verplaatsing van de vlakke plaat met vierknoopselementen. De eerste kolom weergeeft het aantal elementen gebruikt voor de berekening. De tweede kolom het totaal aantal vrijheidsgraden (Degree of freedom, DOF). De derde kolom de berekende verplaatsing (u^h) van het knooppunt in mm. Daarnaast de absolute fout ($|u-u^h|$) en tenslotte de genormaliseerde verplaatsing (u^h/u) waarbij de verhouding wordt gegeven tussen de berekende en de exacte oplossing.

Tabel 4.1: Verplaatsing vlakke plaat met vierknoopselementen

Elementen	DOF's	u^h (mm)	$\lvert u-u^h\rvert$ (mm)	u^h/u
2	26	3,483596	2,319975	0,60025
4	50	5,218256	0,585315	0,899146
8	98	5,657661	0,145911	0,974858
16	194	5,767495	0,036076	0,993784
32	386	5,794955	0,008616	0,998515
64	770	5,801821	0,001751	0,999698
128	1538	5,803537	0,000034	0,999994
256	3074	5,803966	0,000395	1,000068
512	6146	5,804073	0,000502	1,000087
1024	12290	5,804100	0,000529	1,000091
2048	24578	5,804107	0,000536	1,000092
4096	49154	5,804111	0,000539	1,000093
8192	98306	5,804098	0,000527	1,000091
16384	196610	5,804112	0,000541	1,000093
	Analytisch	5,803571		



Figuur 4.1: Genormaliseerde verplaatsing vlakke plaat met vierknoopselementen

De genormaliseerde verplaatsing over het aantal elementen is te zien in figuur 4.1. De verplaatsing convergeert, monotoon en stijgend, richting de exacte oplossing. Ten gevolge van afschuifvervorming is de berekende oplossing groter dan de exacte bij een groot aantal elementen.

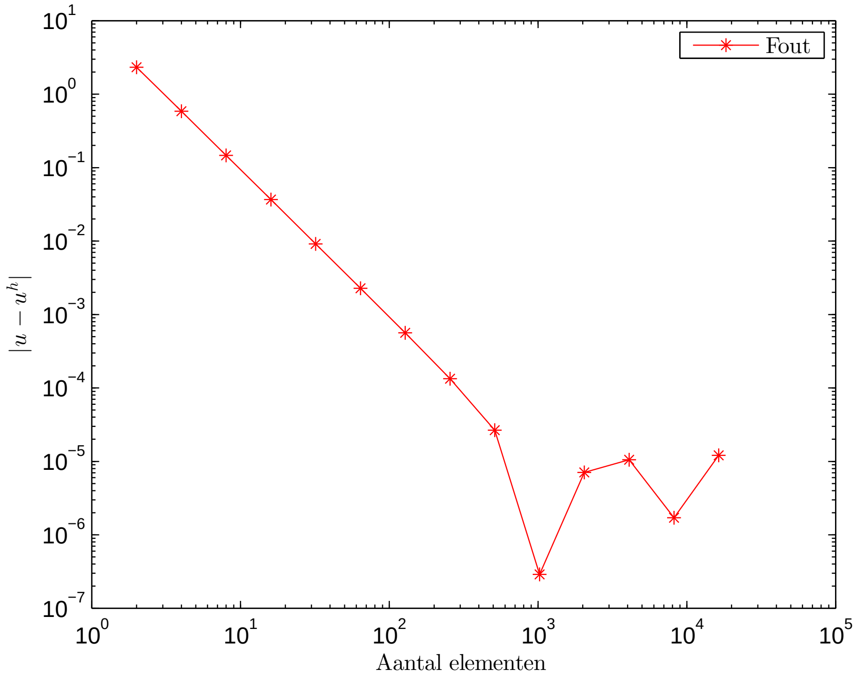
Figuur 4.2 laat de absolute fout zien als functie van het aantal elementen. Bij een klein aantal elementen neemt de fout lineair af. Dit duidt op een constant orde van convergentie van de fout. Vervolgens ontstaat er een piek/dal in de fout en wordt de uiteindelijke oplossing bereikt volgens de schaaltheorie in Ansys. Het dal is het resultaat van een berekende oplossing die toevallig heel dicht bij de gekozen 'exacte' oplossing ligt. Bij een groot aantal elementen is de oplossing niet nauwkeuriger te berekenen en begint te oscilleren om de exacte oplossing. Dit wordt ruis genoemd.

Interessant is nu de helling van het eerste deel van de grafiek. Deze is gelijk aan de orde van convergentie van de fout. De richtingscoëfficiënt van de geplotte regressielijn in figuur 4.3 is -2,0334. De fout wordt kleiner als het aantal elementen toeneemt. De orde van de fout, α, voor de verplaatsing van een vlakke plaat met een vierknooppunts-schaalelementen is dus 2,03.

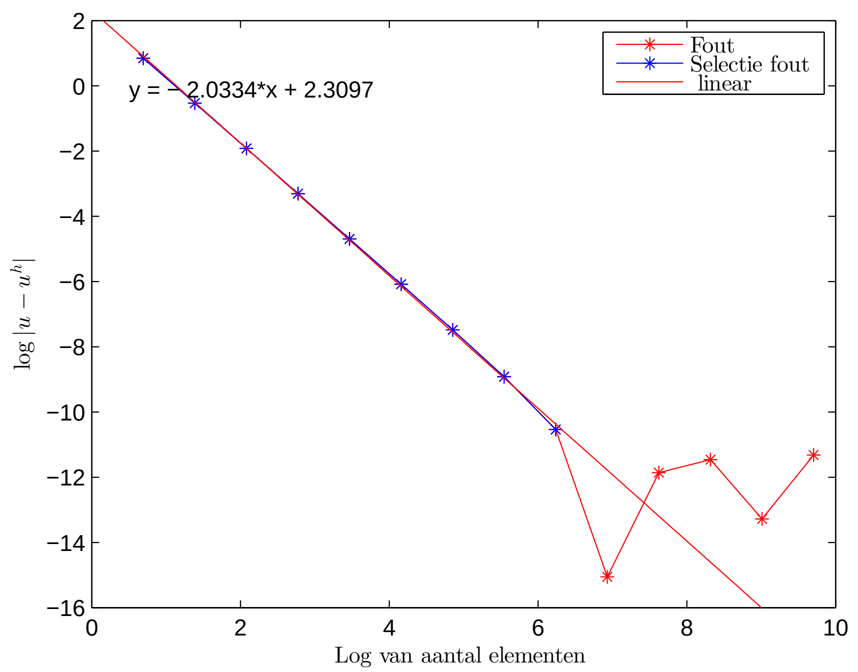
4.1.2. PLAAT MET ACHTKNOOPSELEMENTEN

De verplaatsing van dezelfde vlakke plaat met nu achtknoopselementen is te zien in tabel A.1. Net als bij de vierknoopselementen convergeert de verplaatsing monotoon, dit keer dalend, naar de gekozen oplossing. Bij een groot aantal elementen is de berekende verplaatsing wat groter dan de exacte en neemt de fout toe (fig. A.1). Er is bewust gekozen voor een geschatte oplossing. Voor een vlakke plaat met achtknoopselementen is de analytische oplossing voor een balk is niet bruikbaar. De fout is vrijwel meteen constant en de helling bij een klein aantal elementen is niet bruikbaar.

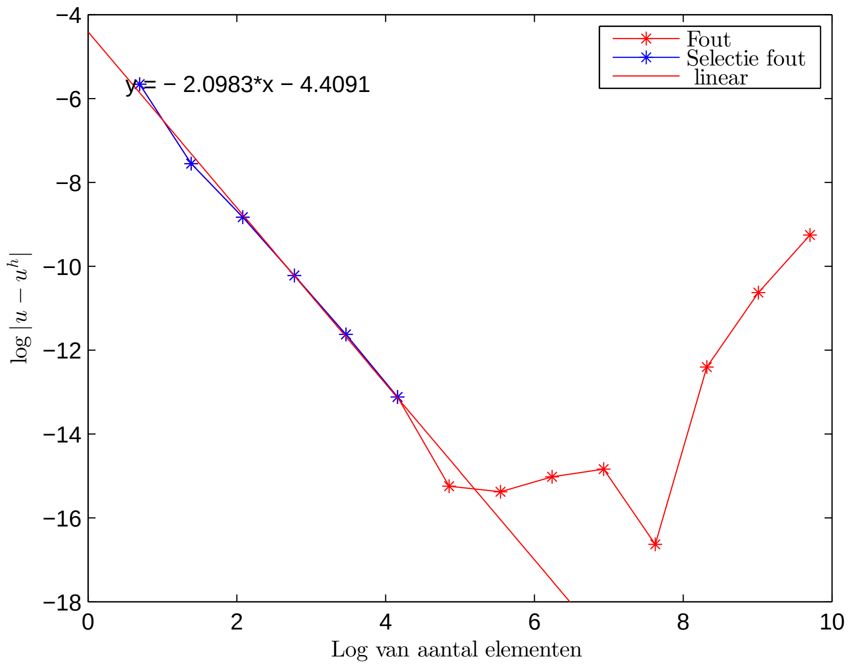
De fout in figuur A.5 laat weer een constante afname van de fout zien in het begin van de grafiek. Van dit deel is de helling bepaalt met een regressielijn. De helling is -2,0983 (fig. 4.4). De orde fout voor verplaatsing van de vlakke plaat met achtknoopselementen is 2,10.



Figuur 4.2: Absolute fout verplaatsing vlakke plaat met vierknoopselementen



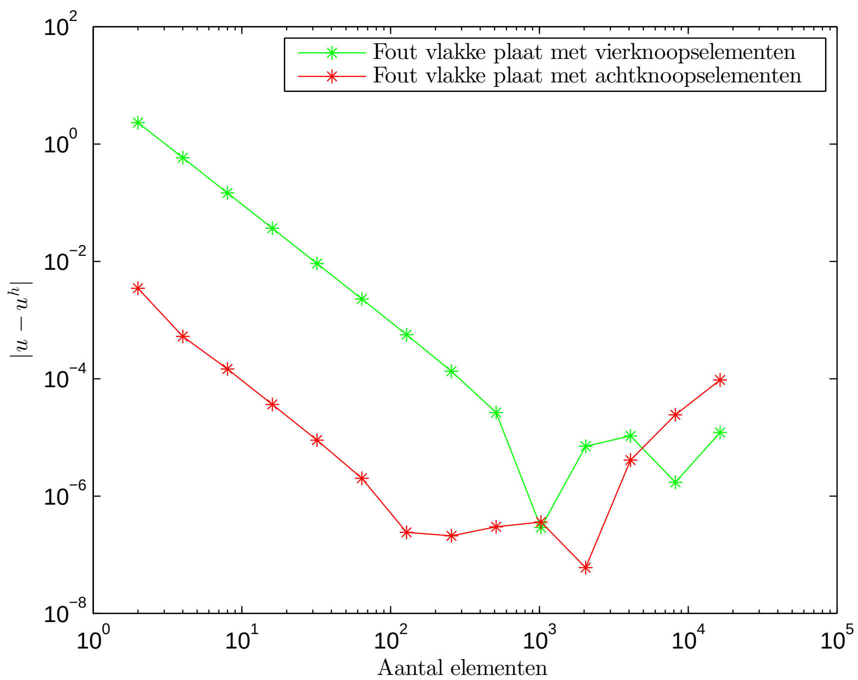
Figuur 4.3: Logaritmische benadering van orde fout verplaatsing vlakke plaat met vierknoopselementen



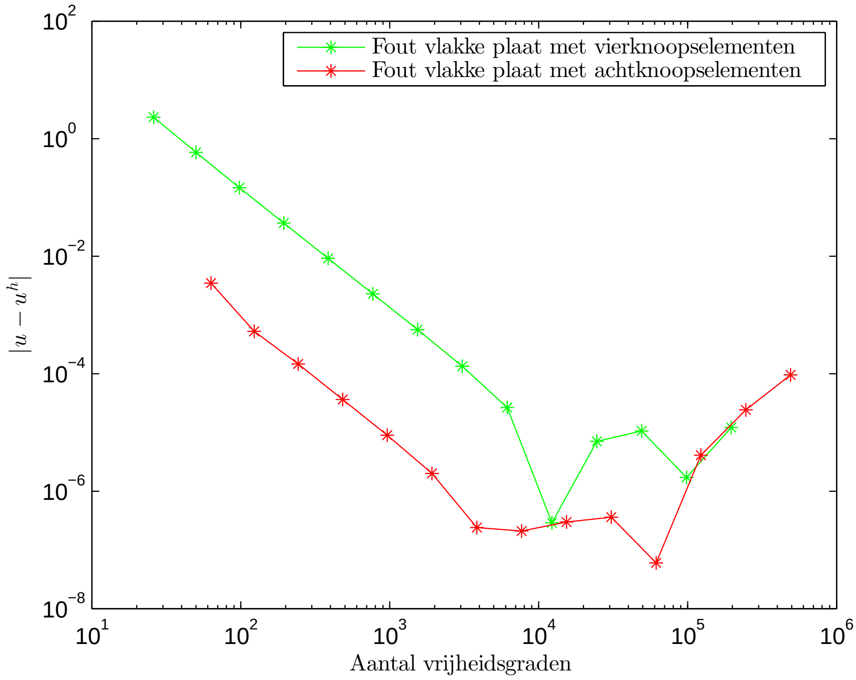
Figuur 4.4: Logaritmische benadering van orde fout verplaatsing vlakke plaat met achtknoopselementen

4.1.3. VERGELIJKING PLAAT MET VIER- EN ACHTKNOOPSELEMENTEN

De vlakke plaat heeft eenzelfde orde fout met vier- en achtknoopselementen voor verplaatsing. Toch zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger. De fout is kleiner bij een laag aantal elementen (fig. 4.5). Ook is de fout kleiner per vrijheidsgraad (fig. 4.6).



Figuur 4.5: Fout verplaatsing vlakke plaat

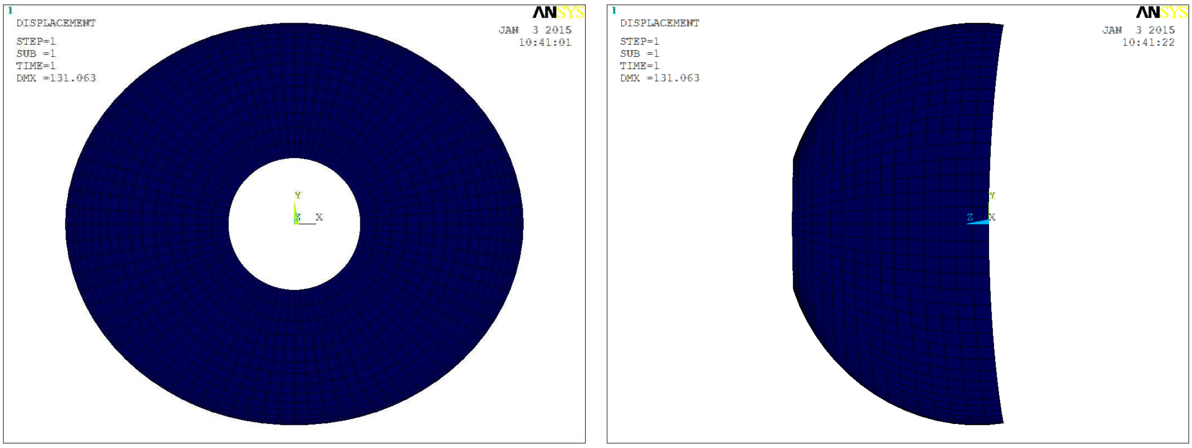


Figuur 4.6: Fout verplaatsing vlakke plaat

4.2. KOEPEL

De koepel vervormt symmetrisch onder belasting van de vier puntlasten (fig. A.10b, 4.7a, 4.7b). Zoals eerder vermeld is voor de verplaatsing van de koepel het knooppunt halverwege de meridiaan ter hoogte van de puntlast berekend voor verschillende elementgrootten. Dit knooppunt verplaatst zowel in de x-, y- als z-richting. De norm van de verplaatsing is daarom gekozen voor de nauwkeurigheidsberekeningen van de koepel.

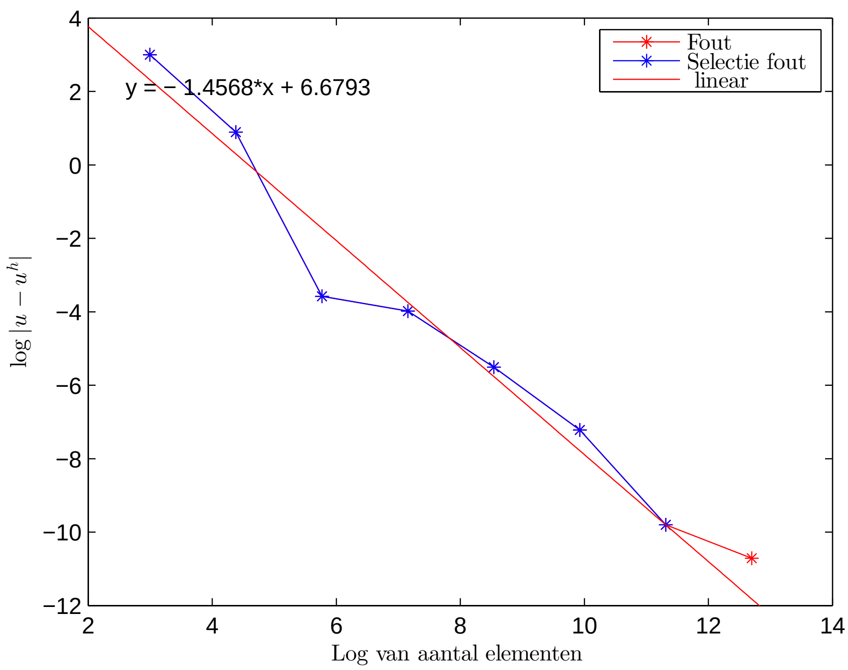
Tabel A.2 bevat de resultaten hiervan. De verplaatsing convergeert, niet monotoon, naar een geschatte waarde van 27,77035 mm (fig. A.2). Het elementendomein van 20 tot 81920 elementen wordt gezien als representatief voor de orde van de fout. De elementen in de koepel zijn in twee richtingen verfijnd. Met behulp van de logaritmische benadering is een orde fout van 2,91 gevonden voor de koepel verplaatsing.



(a) Bovenaanzicht

(b) Zijaanzicht

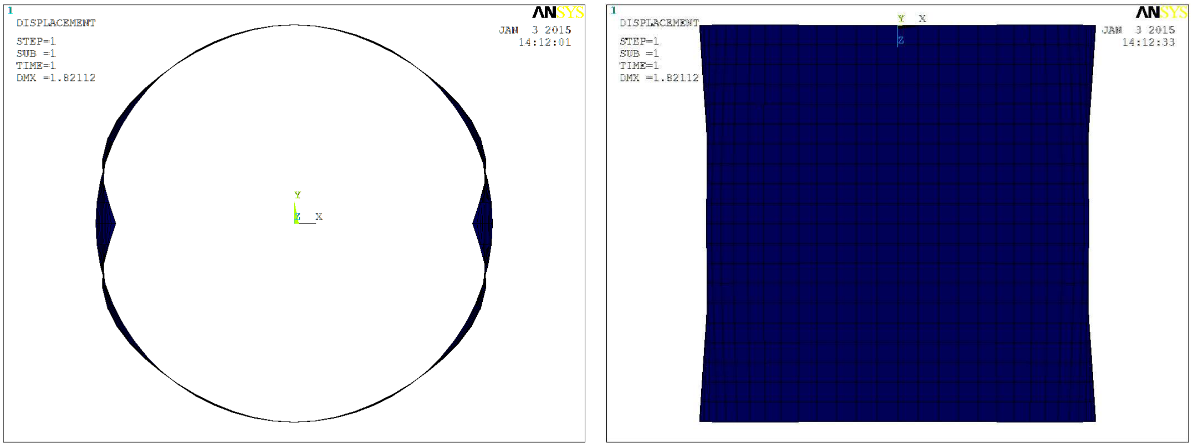
Figuur 4.7: Vervormde koepel met opening



Figuur 4.8: Logaritmische benadering van orde fout verplaatsing koepel

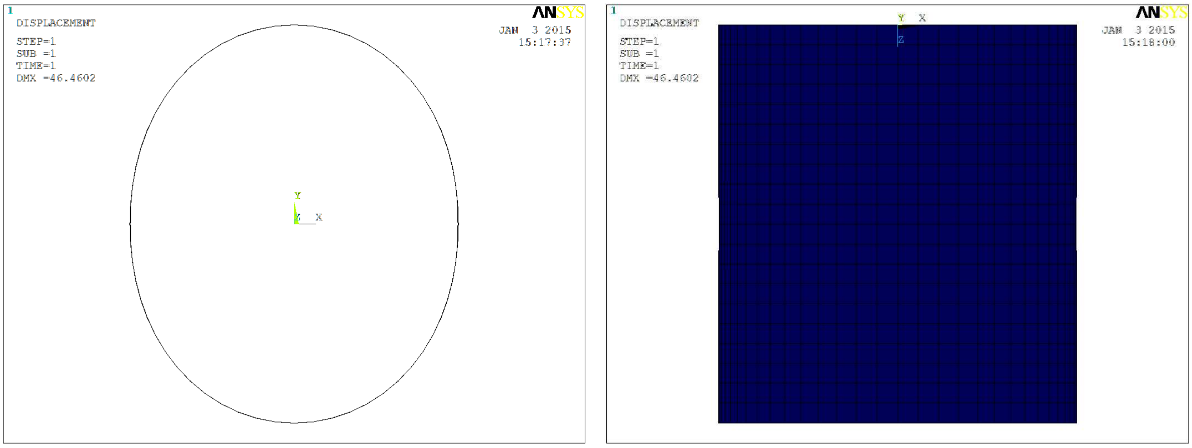
4.3. CILINDER

De dunwandige cilinder wordt belast door twee overstaande puntlasten in het midden van de constructie. De vervorming van de "geknepen" cilinders verschillen. De vervormde toestand van de cilinder met gesloten einden bevat deuken onder de puntlast (fig. 4.9a en 4.9b). De cilinder met open einden krijgt een ovale vorm (fig. 4.10a en 4.10b). Ook voor de cilinders is netverfijning in twee richtingen toegepast.



(a) Zijaanzicht (b) Bovenaanzicht

Figuur 4.9: Vervormde cilinder met gesloten einden



(a) Zijaanzicht (b) Bovenaanzicht

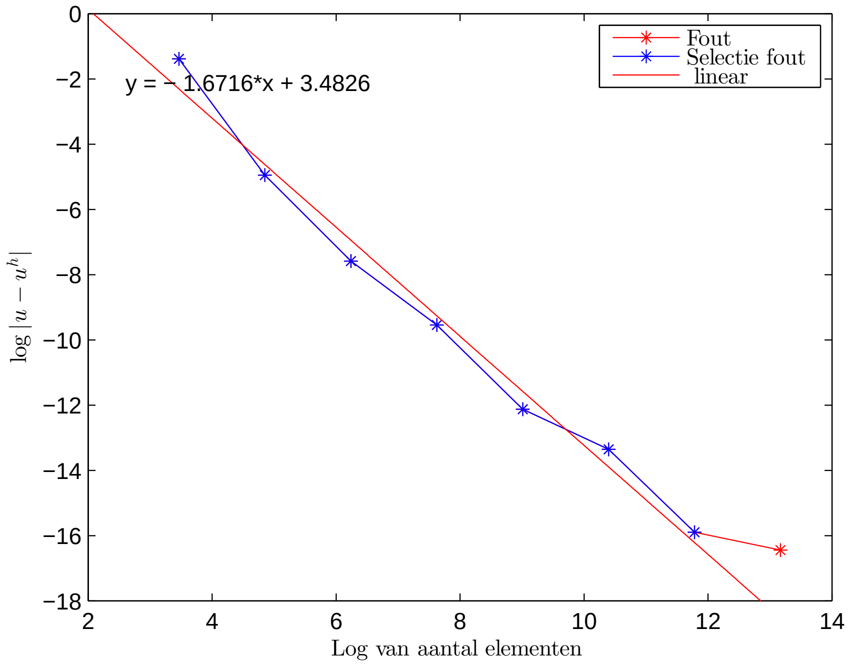
Figuur 4.10: Vervormde cilinder met open einden

4.3.1. GESLOTEN CILINDER

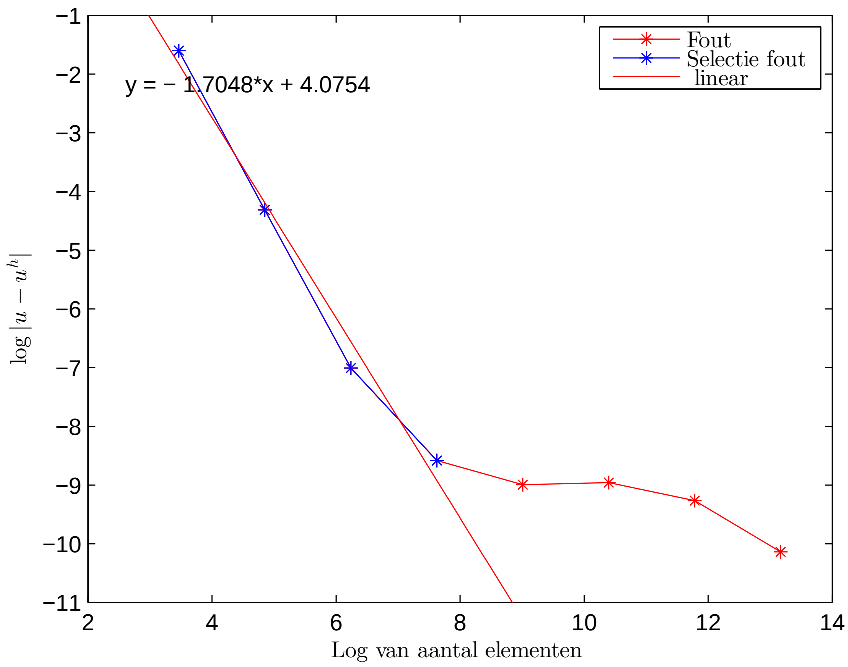
De verplaatsing van de gesloten cilinder convergeert, niet monotoon, naar de geschatte oplossing (fig. A.3). De helling van de regressielijn in het gekozen elementendomein is -1,6716 wat gelijk is aan de orde fout van 3,34 voor verplaatsing van de cilinder met gesloten einden.

4.3.2. OPEN CILINDER

Ook de verplaatsing van de cilinder met open einden convergeert stijgend naar een geschatte oplossing. Dit keer wel monotoon. De gevonden orde fout voor de verplaatsing van de open cilinder is 3,41 (fig. 4.12).



Figuur 4.11: Logaritmische benadering van orde fout verplaatsing gesloten cilinder



Figuur 4.12: Logaritmische benadering van orde fout verplaatsing open cilinder

4.4. CONCLUSIES VOOR VERPLAATSING

De volgende conclusies kunnen worden getrokken aan de hand van deze resultaten voor verplaatsing:

- De verplaatsing convergeert bij elk model naar de geschatte of analytische waarde. Niet altijd monotoon.
- Bij elementberekening voor verplaatsingen met achtknoopselementen is de gevonden orde fout 2,0 tot 3,4.
- Voor een vlakke plaat hebben vierknoopselementen en achtknoopselementen dezelfde orde van fout voor verplaatsingen. Niettemin zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger. De achtknoopselementen geven niet alleen meer nauwkeurigheid per vrijheidsgraad voor fijne elementennetten maar ook voor grove netten.
- Voor een cilinder met open én gesloten einden hebben achtknoopselementen dezelfde orde fout voor verplaatsing. De elementnauwkeurigheid voor verplaatsing is dus onafhankelijk of buiging of membraankrachten overheersen.

5
Moment

In dit hoofdstuk zullen de resultaten van de elementnauwkeurigheid voor de grootheid moment gepresenteerd worden. De vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen zijn berekend op buiging. Het is niet gelukt een script te schrijven voor de koepel en cilinder die het moment bepaalt.

5.1. Plaat

De elementnauwkeurigheid voor een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen is bepaald met een analytische oplossing voor een ligger met lijnbelasting (verg. 5.1). Volgens de theorie uit de constructiemechanica is het moment halverwege een ligger met lijnbelasting gelijk aan 9750 Nmm per eenheid van breedte (fig. A.13 op blz. 50). Ansys kan geen momenten afbeelden in de resultaten. Via het script is het moment berekend met de normaalspanningen in de boven- en onderzijde van het element. De spanningsintensiteit in een vlakke plaat onder belasting van eigen gewicht is geplot in figuur B.5 op bladzijde 55. Het moment verloopt parabolisch met een maximum halverwege de plaat.

$$M = \frac{1}{8} q l^2 \tag{5.1}$$

5.1.1. Plaat met vierknoopselementen

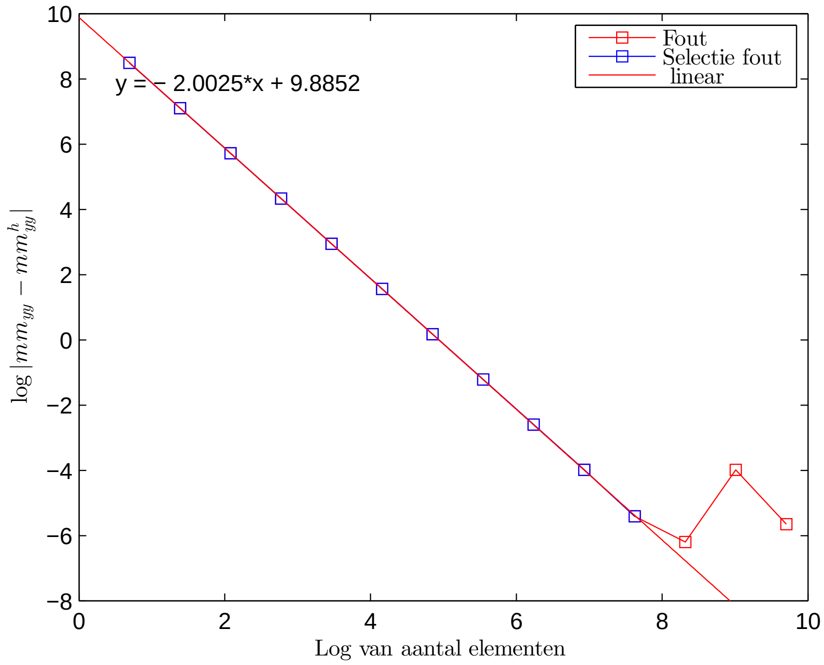
Het moment convergeert, monotoon en stijgend, naar de analytische oplossing (fig. B.1). Bij een groot aantal elementen treedt een oscillerende fout op (fig. 4.2). Met de logaritmische benadering is een orde fout van 2,00 voor moment gevonden (fig. 5.1).

5.1.2. Plaat met achtknoopselementen

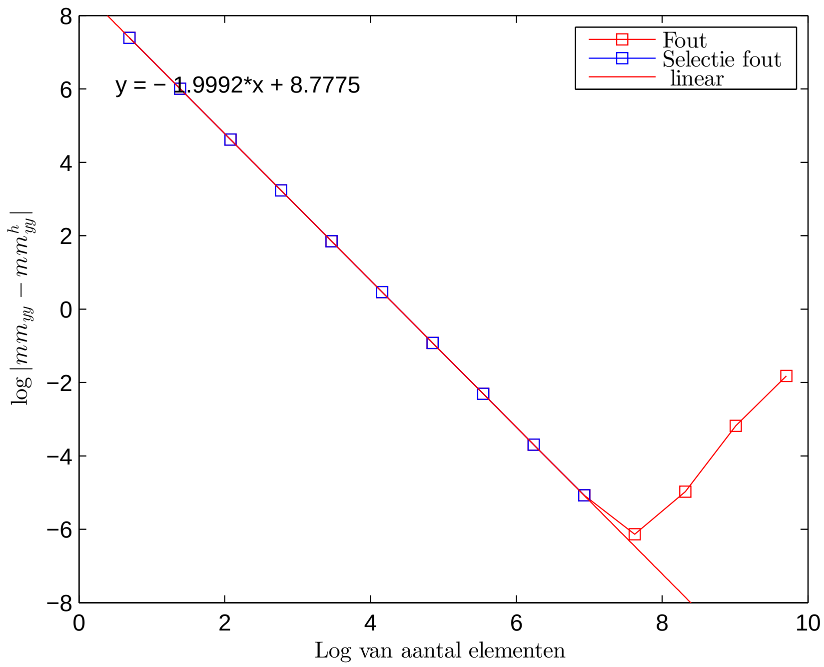
Ook de plaat met achtknoopselementen heeft een orde fout van 2,00 voor moment (fig. 5.2). Het moment convergeert monotoon, dit keer dalend, naar de analytische oplossing (fig. B.2). Bij een groot aantal elementen divergeert de oplossing en neemt de fout toe (fig. B.4).

5.1.3. Vergelijking plaat met vier- en achtknoopselementen

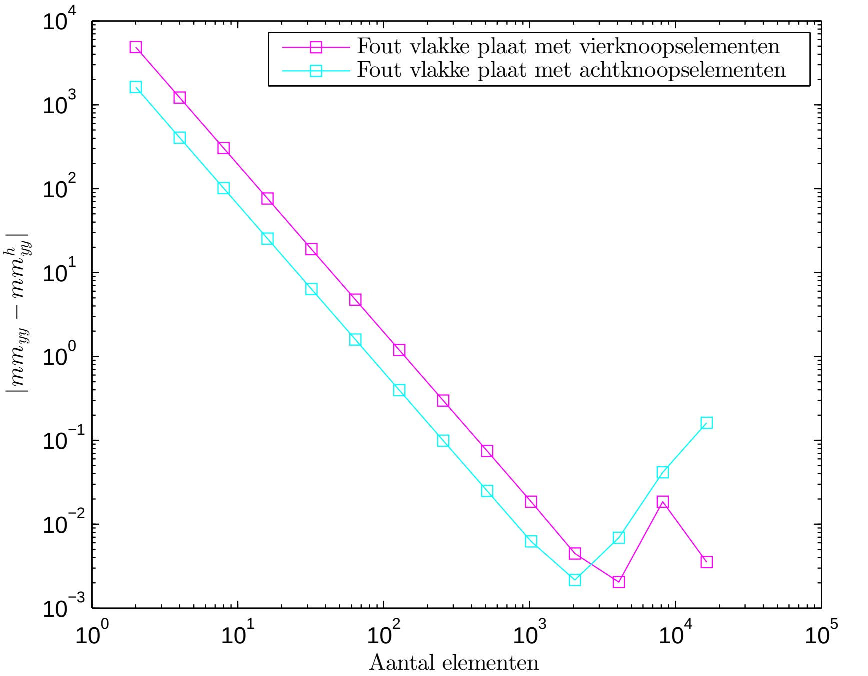
Voor een vlakke plaat met vierknoopselementen is de orde fout dezelfde als met achtknoopselementen. Toch is het achtknoopselement per element nauwkeuriger bij grove en fijne netten (fig. 5.3). Per vrijheidsgraad is de fout kleiner met vierknoopselementen (fig. 5.4).



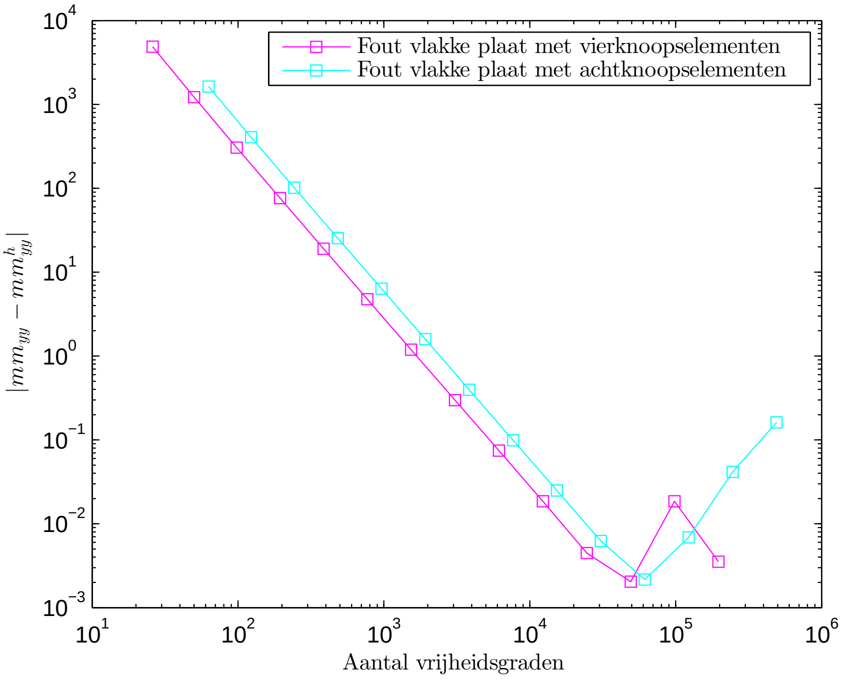
Figuur 5.1: Logaritmische benadering van orde fout moment vlakke plaat met vierknoopselementen



Figuur 5.2: Logaritmische benadering van orde fout moment vlakke plaat met achtknoopselementen



Figuur 5.3: Fout moment vlakke plaat



Figuur 5.4: Fout moment vlakke plaat

5.2. CONCLUSIES VOOR MOMENT

Met de resultaten in dit hoofdstuk kunnen de volgende conclusies worden getrokken voor moment:

- De gevonden orde van de fout voor buiging is 2,0
- De orde fout is hetzelfde voor de plaat met vier- en achtknoopselementen. Toch zijn achtknoopselementen nauwkeuriger voor fijne en grove netten. Per vrijheidsgraad zijn de vierknoopselementen nauwkeuriger.

6
Von Mises-spanning

De Von Mises-spanning is een veelgebruikte spanning in sterkteberekeningen. De spanning geeft aan wanneer een element plastisch vervormt onder meerdimensionale aangebrachte spanningen. Deze spanning is te vergelijken met de vloeigrens als er in één dimensie spanningen zijn. Constructeurs moeten voor een veilig ontwerp voldoen aan het Von Mises-criterium. De berekende Von Mises-spanning moet onder de vloeigrens blijven van het materiaal. Ansys geeft de gebruiker de mogelijkheid deze Von Mises-spanning (ook wel equivalent stress in Ansys) te weergeven in de berekende resultaten. In dit hoofdstuk zal de berekende Von Mises-spanningen (aan de bovenzijde van het element) gebruikt worden om de nauwkeurigheid te bepalen van achtknoops-schaalelementen.

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6\sigma_{xy}^2+6\sigma_{yz}^2+6\sigma_{zx}^2\right]} \tag{6.1}$$

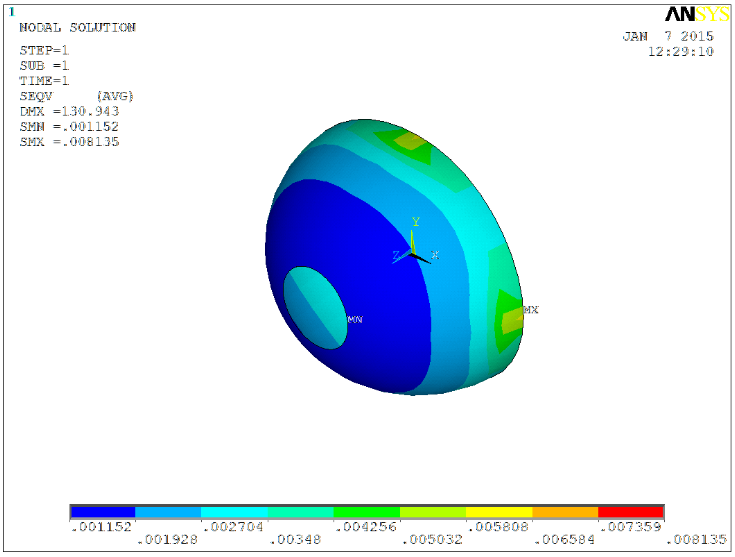
6.1. Plaat

Voor een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen zijn geen nauwkeurigheidsberekeningen gemaakt voor Von Mises-spanning. Toch kan een uitspraak gedaan worden over de orde fout van schaalelementen voor Von Mises-spanning in een vlakke plaat. Het moment in een vlakke plaat kan worden omgerekend naar de Von Mises-spanning: buigspanning is moment gedeeld door weerstandsmoment. In een vlakke plaat met overspanning in één richting treedt verreweg de grootste spanning op in deze richting. (In de rand zijn de andere spanningen zelfs helemaal nul). Omdat er maar één normaalspanning is, is, volgens de formule, deze spanning gelijk aan de Von Mises-spanning. Normaalkracht en dwarskracht hebben geen invloed op de Von Mises-spanning.

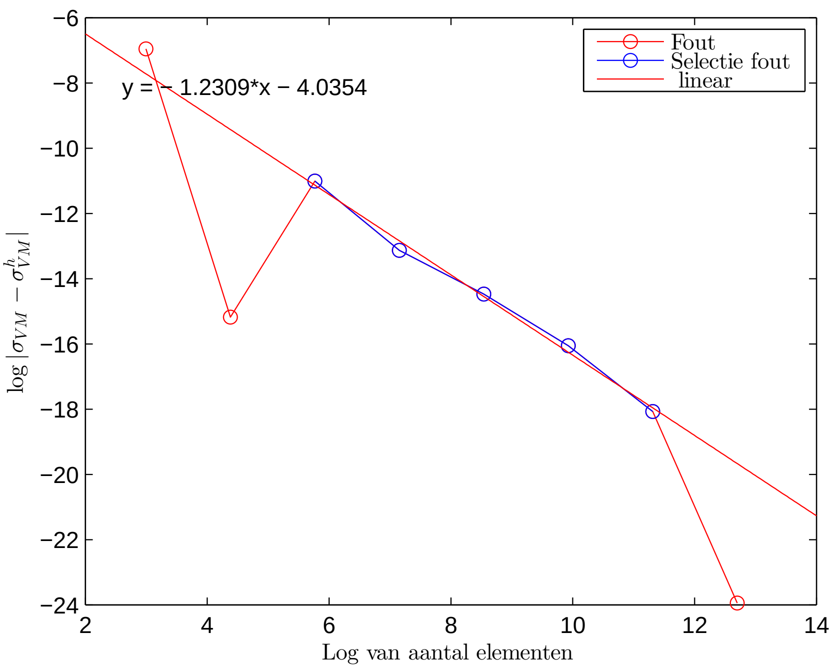
Bij deze omrekening is de elementgrootte h niet gebruikt. Er is slechts gebruik gemaakt van vermenigvuldigingen en delingen en niet van optellen of aftrekken. Fout is constante maal h tot de macht alpha. De fout in het moment is anders dan de fout in de Von Mises-spanning. De constante is anders maar de factor h tot de macht alpha is niet anders. De orde fout van een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen is dus 2,00 voor Von Mises-spanning.

6.2. Koepel

Vervolgens de dunwandige koepel constructie. Om een idee te krijgen van de Von Mises-spanningsverdeling in de koepel is deze geplot in figuur 6.1. De Von Mises-spanning van de koepel convergeert, niet monotoon, naar een geschatte waarde van 0,00200147 N/mm^2 (fig. C.1). Tussen de 320 en 81920 elementen neemt de fout constant af. Dit domein is gebruikt om de orde van de fout te bepalen. Voor de koepel is de orde van de fout is 2,46 voor Von Mises-spanning (fig. 6.2).



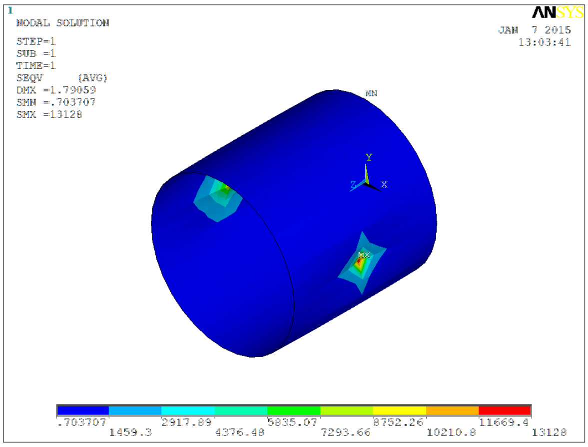
Figuur 6.1: Von Mises-spanningsverdeling koepel in Ansys



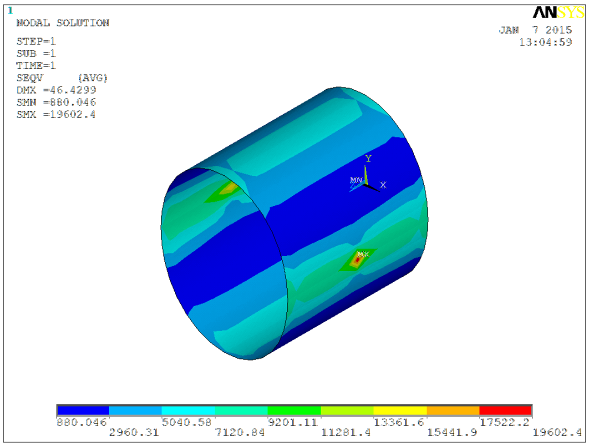
Figuur 6.2: Logaritmische benadering van orde fout Von Mises-spanning koepel

6.3. CILINDER

In figuren 6.3a en 6.3b is de Von Mises-spanningsverdeling geplot voor de cilinders. Het beschouwde knooppunt ligt op $\frac{1}{4}$ van de lengte en op 45 graden boven de puntlast. Zoals eerder vermeld zijn beide cilinders uitgevoerd met achtknoopselementen. Deze zijn in twee richtingen verfijnd waardoor de orde fout gelijk is aan twee keer de richtingscoëfficiënt van de regressielijn.



(a) Gesloten cilinder



(b) Open cilinder

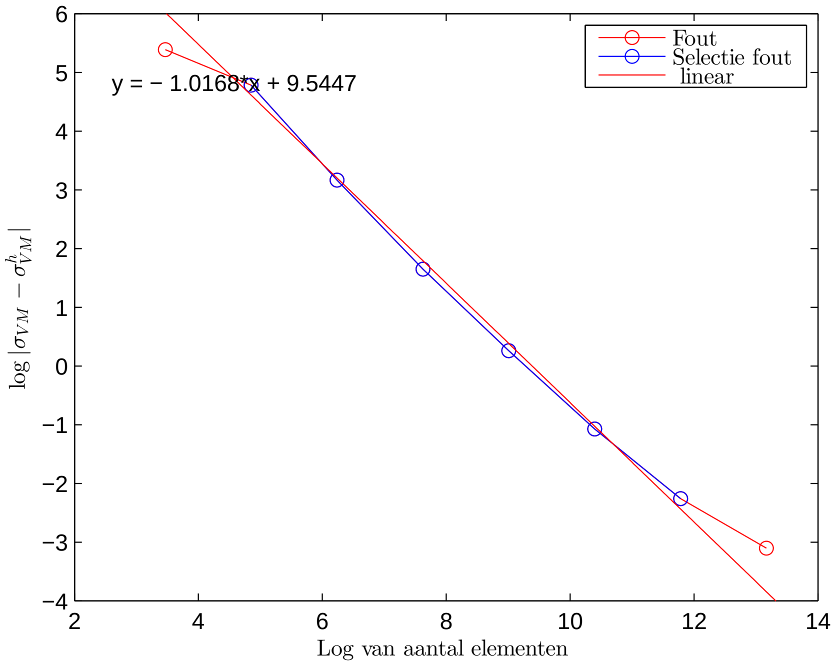
Figuur 6.3: Von Mises-spanningsverdeling in de cilinders in Ansys

6.3.1. GESLOTEN CILINDER

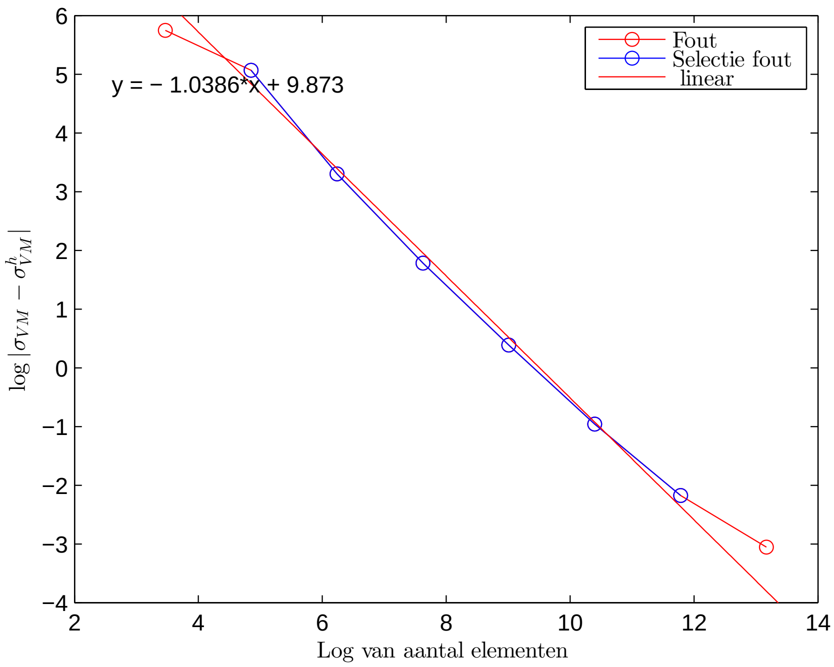
De Von Mises-spanning van de gesloten cilinder convergeert, dalend en monotoon, naar een geschatte waarde van 333,7 N/mm^2 (fig. C.2). De absolute fout beschrijft een nagenoeg rechte lijn (fig. C.5). De gevonden richtingscoëfficiënt van de regressielijn in het gekozen elementendomein is -1,0168 (fig. 6.4). De orde van de fout voor Von Mises-spanning is hiermee 2,03.

6.3.2. OPEN CILINDER

De open cilinder laat eenzelfde monotoon en dalende convergentie zien van de Von Mises-spanning richting de geschatte waarde (fig. C.3). De absolute fout heeft net als bij de gesloten cilinder een constant verloop (fig. C.6). Voor de open cilinder is de gevonden orde fout 2,08 voor Von Mises-spanning (fig. 6.5).



Figuur 6.4: Logaritmische benadering van orde fout Von Mises-spanning gesloten cilinder



Figuur 6.5: Logaritmische benadering van orde fout Von Mises-spanning open cilinder

6.4. CONCLUSIES VOOR VON MISES-SPANNING

Met de resultaten van de elementberekeningen uit dit onderzoek voor Von Mises-spanning kunnen de volgende conclusies getrokken worden:

- De Von Mises-spanning convergeert altijd, niet altijd monotoon.
- Voor de Von Mises-spanning is de gevonden orde van de fout 2,0 tot 2,5 voor achtknoopselementen.
- De orde van de fout voor de Von Mises-spanning is even groot als van de open en gesloten cilinder. De orde van de fout is blijkbaar onafhankelijk van de overheersende situatie, buiging of membraankrachten.

7

INTERPRETATIE

Opvallend in dit onderzoek zijn de eindige-elementresultaten voor een vlakke plaat. De orde van de fout voor vier- en achtknoopselementen zijn hetzelfde voor verplaatsing en moment. In dit hoofdstuk is een interpretatie gegeven aan deze resultaten.

De theoretische nauwkeurigheid van een element is bepaald aan de hand van zogenoemde 'shape functions'. Deze shape functions zijn vergelijkingen die de verplaatsing van een element beschrijven als functie van translaties die de knooppunten kunnen aannemen. Deze kunnen lineair zijn maar ook kwadratisch. Hoe 'rijker' de functie des te nauwkeuriger het element. Met rijker wordt een functie bedoeld die afhankelijk is van meerdere parameters. Meer knooppunten per element betekent dan ook een rijkere shape function. Het element kan immers op nog meer verschillende manieren vervormen.

Over het algemeen geldt dus dat achtknoopselementen een hogere nauwkeurigheid hebben dan vierknoopselementen. In vakliteratuur is voor een plat vierknoopselement een theoretische nauwkeurigheid van $O(h)$ bepaald [3]. Voor een achtknoopselement element $O(h^2)$ [3]. De resultaten uit dit onderzoek laten voor een vlakke plaat met zowel vier- en achtknoopselementen een orde fout 2,0 zien voor verplaatsing en moment. Niettemin zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger per element. Per vrijheidsgraad blijken de vierknoopselementen nauwkeuriger te zijn voor moment (fig. 5.4 op blz. 25). Hiervoor zijn mogelijke verklaringen geprobeerd te geven:

- Het model is te eenvoudig om de nauwkeurigheid van vier- en achtknoopselementen te vergelijken. Meshverfijning in één richting en slechts één element in de breedterichting is niet gunstiger voor de nauwkeurigheid van de achtknoopselementen dan vierknoopselementen. Daarnaast kunnen randverstoringen in de vlakke plaat de nauwkeurigheid van achtknoopselementen benadelen.

- De invloed van de uniek gekozen 'exacte' oplossing op de nauwkeurigheid is groter dan gedacht. Voor verplaatsing van de vlakke plaat met vierknoopselementen is een analytische oplossing gebruikt. Voor achtknoopselementen een gekozen oplossing. Voor moment is voor beide platen een analytische oplossing gekozen.

Een duidelijke verklaring voor de vlakke plaat is niet gevonden. Verder onderzoek zal nodig zijn om deze te vinden.

8
CONCLUSIES

De gevonden 'werkelijke' nauwkeurigheid van schaalelementen, de orde van de fout, in Ansys is 2,0 tot 3,4 voor verplaatsing, 2,0 tot 2,5 voor Von Mises-spanning en 2,0 voor moment (tabel 8.1 op blz. 36). Hierbij is de nauwkeurigheid voor verplaatsing en Von Mises-spanning bepaald in situaties met schaalconstructies. De nauwkeurigheid voor moment met een vlakke plaat.

Op grond van de verkregen eindige-elementresultaten kunnen de volgende conclusies worden getrokken ten behoeve van de fout ontwikkeling in Ansys:

- De eindige-elementenresultaten blijken altijd te convergeren, maar niet altijd monotoon.
- Het is niet te voorspellen of eindige-elementenresultaten stijgend of dalend convergeren, indien monotone convergentie.
- Bij heel kleine elementen kunnen singulariteiten en reken-onnauwkeurigheid de convergentie onzichtbaar maken. Daarom moet de elementengrootte waarmee de orde van de afbreekfout worden bepaald oordeelkundig wordt gekozen.

De hypothese waarin de fout te beschrijven is als $O(h^\alpha)$ blijkt juist te zijn. De variatie in elementnauwkeurigheid per grootheid is klein.

De eindige-elementenresultaten zijn te interpreteren in een grafiek met dubbele logaritmische schaalverdeling. De helling van de grafiek in een oordeelkundig elementendomein komt overeen met de orde van de fout.

Conclusies ten behoeve van de nauwkeurigheid voor een vlakke plaat:

- Voor een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen is de orde fout 2,0 voor verplaatsing en moment.
- Voor een vlakke plaat hebben vierknoopselementen en achtknoopselementen dezelfde orde fout voor verplaatsingen en momenten. Niettemin zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger. De achtknoopselementen geven niet alleen meer nauwkeurigheid voor fijne elementennetten maar ook voor grove netten.
- Per vrijheidsgraad zijn de achtknoopselementen nauwkeuriger voor verplaatsing. Voor moment blijken vierknoopselementen nauwkeuriger te zijn.

De orde van de fout voor verplaatsing en Von Mises-spanning is even groot voor de cilinder met open en gesloten einden. De nauwkeurigheid van schaalelementen is blijkbaar onafhankelijk van de overheersende situatie, buiging of membraankrachten.

Ansys kan geen momenten, normaalkrachten en dwarskrachten afbeelden. Deze grootheden moeten derhalve worden berekend uit de spanningen en een correct script hiervoor is nog niet gevonden.

Tabel 8.1: Orde van de fout voor verschillende grootheden

Model	Schaalelement	**Verplaatsing**	**Von Mises-spanning**	**Moment**
Vlakke plaat	Vierknoops	2,03	-	2,00
Vlakke plaat	Achtknoops	2,10	-	2,00
Koepel	Achtknoops	2,91	2,46	-
Gesloten cilinder	Achtknoops	3,34	2,03	-
Open cilinder	Achtknoops	3,41	2,08	-

9 Aanbevelingen

Aan het eind van dit onderzoek is er vanzelfsprekend ruimte overgebleven voor vervolgonderzoek. Punten die aansluiten op dit onderzoek en/of het aanvullen:

- Het juiste script te vinden waarbij normaalkracht, moment en dwarskracht wel te bepalen zijn. Ansys kan geen momenten, normaalkrachten en dwarskrachten afbeelden. Deze grootheden moeten derhalve worden berekend uit de spanningen en een correct script hiervoor is nog niet gevonden. Oorspronkelijk waren dit, naast verplaatsing, de te onderzoeken grootheden.
- Een vlakke plaat met vier- en achtknoopselementen vergelijken in andere situaties. Daarnaast kan naar een verklaring gezocht worden voor dezelfde orde fout voor verplaatsing en moment in de situatie gebruikt in dit onderzoek.
- De schijnbare divergentie van een vlakke plaat met achtknoopselementen voor heel fijne netten te onderzoeken.
- De invloed van de rekentijd op de nauwkeurigheid van schaalelementen te onderzoeken.
- Tenslotte zou de nauwkeurigheid van schaalelementen in een ander eindige-elementenpgrogramma kunnen worden bepaald.

Referenties

[1] C. T. J. D. M. Steenbergen, *Nauwkeurigheid van schaalelementen in scia engineer,* (2014).

[2] T. Belytschko, H. Stolarski, W. K. Liu, N. Carpenter, and J. S. J. Ong, *Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements,* Computational Methods in Applied Mechanical Engineering **51**, 221 (1985).

[3] A. W. M. Kok, *Numerical Mechanics, The Displacement Method, Dictaat TU Delft* (TU Delft, 1991).

A

Bijlagen verplaatsing

A.1. RESULTATEN VERPLAATSING

Tabel A.1: Verplaatsing plaat met achtknoopselementen

Elementen	DOF's	u^h (mm)	$\lvert u-u^h \rvert$ (mm)	u^h/u
2	63	5,822435	0,003486	1,000599
4	123	5,819475	0,000526	1,00009
8	243	5,819096	0,000147	1,000025
16	483	5,818985	3,64E-05	1,000006
32	963	5,818958	8,95E-06	1,000002
64	1923	5,818951	2,01E-06	1
128	3843	5,818949	2,4E-07	1
256	7683	5,818949	2,1E-07	1
512	15363	5,818949	3E-07	1
1024	30723	5,818949	3,6E-07	1
2048	61443	5,818949	6E-08	1
4096	122883	5,818945	4,1E-06	0,999999
8192	245763	5,818973	2,42E-05	1,000004
16384	491523	5,819045	9,55E-05	1,000016
	Geschat	5,818949		

Tabel A.2: Verplaatsing koepel

Elementen	DOF's	u^h (mm)	$\lvert u-u^h \rvert$ (mm)	u^h/u
16	474	70,09488	1,186115	0,98336
64	1530	57,23355	14,04745	0,802929
256	5370	72,47162	1,190616	1,016703
1024	19962	71,52656	0,245559	1,003445
4096	76794	71,33456	0,053562	1,000751
16384	301050	71,29043	0,009426	1,000132
65536	1191930	71,28154	0,000543	1,000008
262144	4743162	71,28108	8,4E-05	1,000001
	Geschat	71,28100		

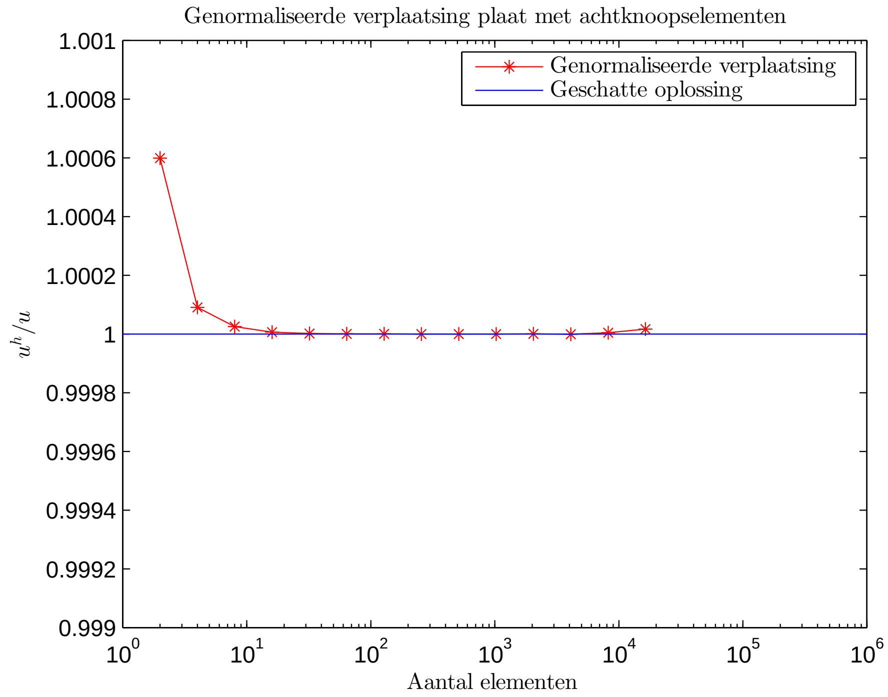
Tabel A.3: Verplaatsing gesloten cilinder

Elementen	DOF's	u^h (mm)	$\lvert u-u^h \rvert$ (mm)	u^h/u
32	607	0,40326326	0,249985	2,6309186
128	2367	0,16038160	0,007103	1,0463412
512	9343	0,15277125	0,000507	0,9966907
2048	37119	0,15320668	7,18E-05	0,9995315
8192	147967	0,15327308	5,42E-06	0,9999647
32768	590847	0,15327692	1,58E-06	0,9999897
131072	2361343	0,15327838	1,25E-07	0,9999992
524288	9441279	0,15327843	7,2E-08	0,9999995
	Geschat	0,15327850		

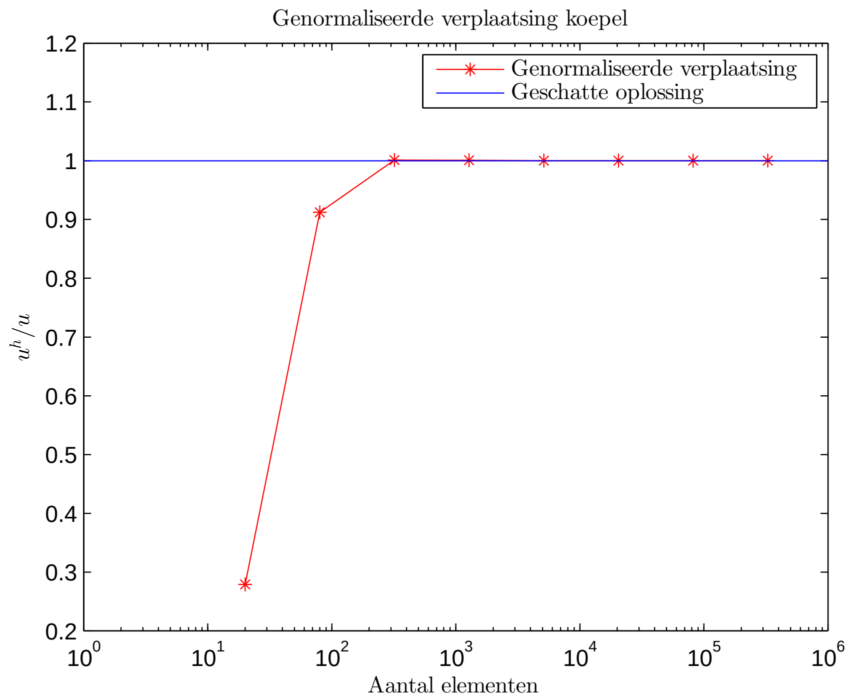
Tabel A.4: Verplaatsing open cilinder

Elementen	DOF's	u^h (mm)	$\lvert u - u^h \rvert$ (mm)	u^h / u
32	665	21,42046	0,201121	0,990698
128	2489	21,60822	0,013364	0,999382
512	9593	21,62068	0,000905	0,999958
2048	37625	21,62139	0,000187	0,999991
8192	148985	21,62146	0,000124	0,999994
32768	592889	21,62145	0,000129	0,999994
131072	2365433	21,62149	9,47E-05	0,999996
524288	9449465	21,62154	3,95E-05	0,999998
	Geschat	21,62158		

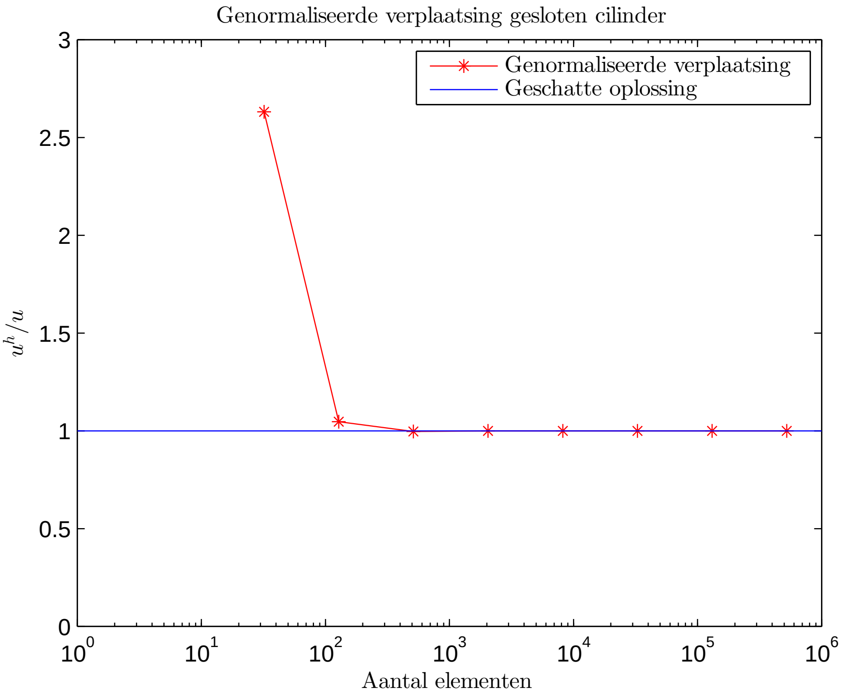
A.2. GENORMALISEERDE VERPLAATSING



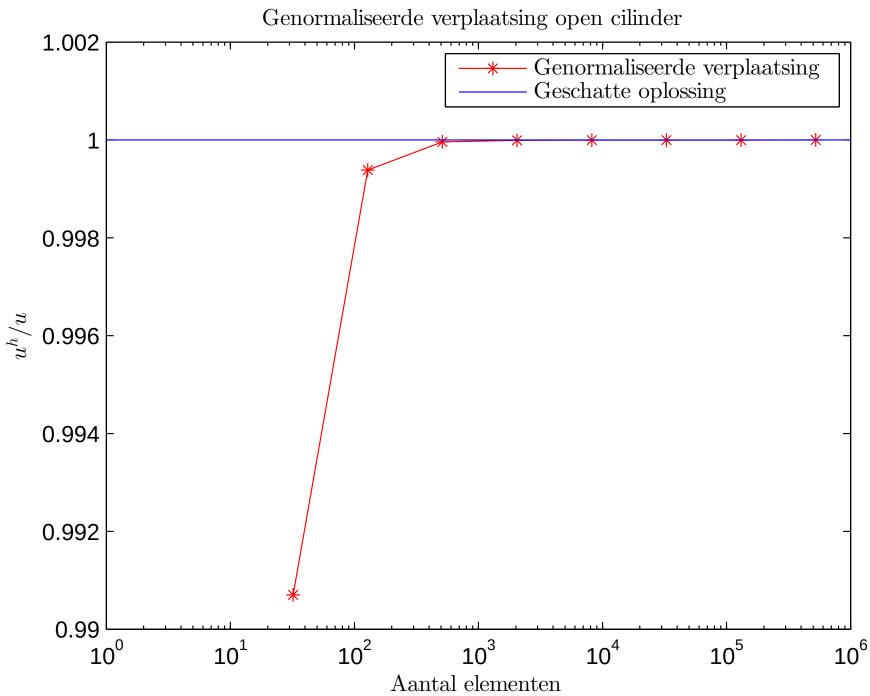
Figuur A.1: Genormaliseerde verplaatsing plaat met achtknoopselementen



Figuur A.2: Genormaliseerde verplaatsing koepel

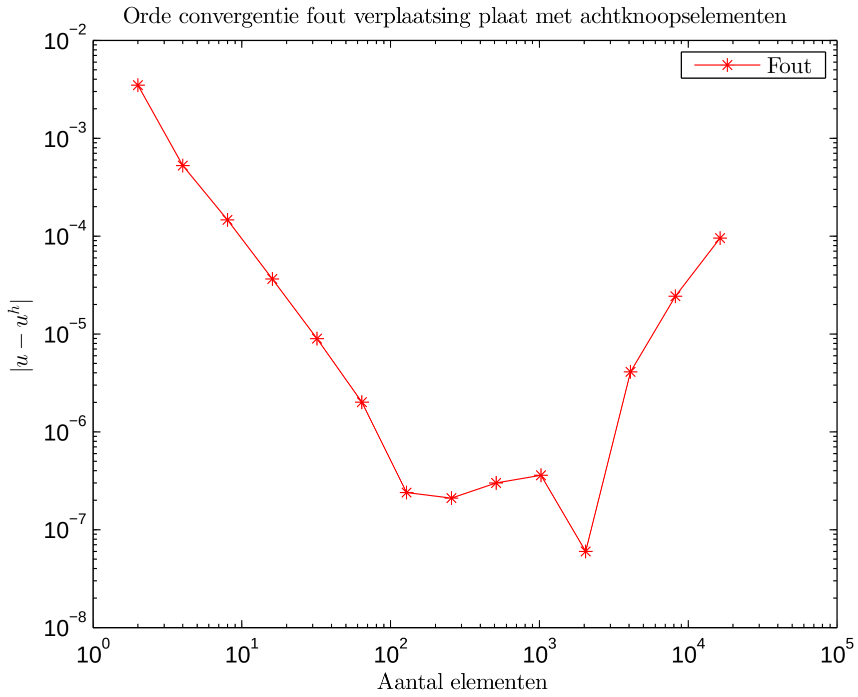


Figuur A.3: Genormaliseerde verplaatsing gesloten cilinder

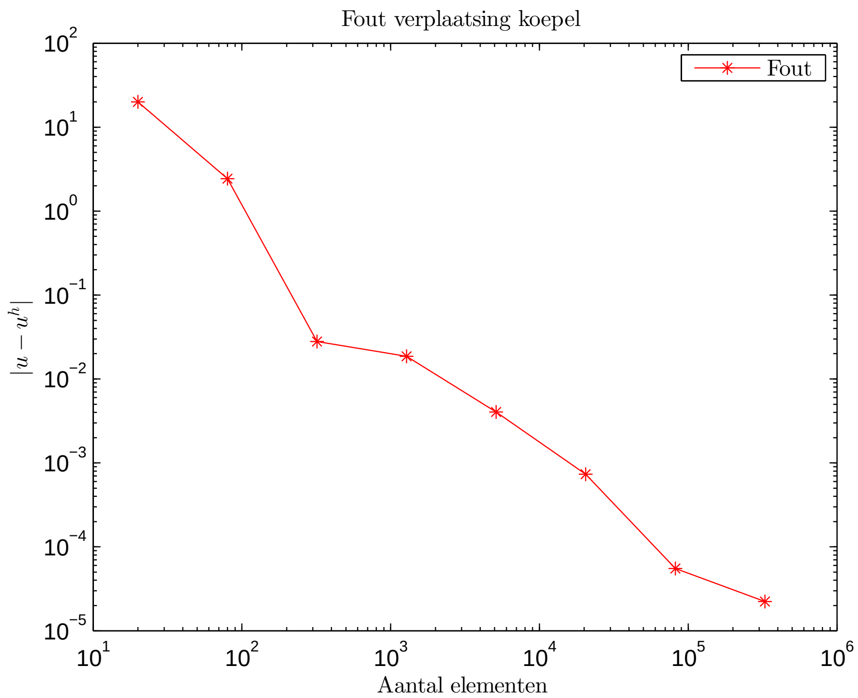


Figuur A.4: Genormaliseerde verplaatsing open cilinder

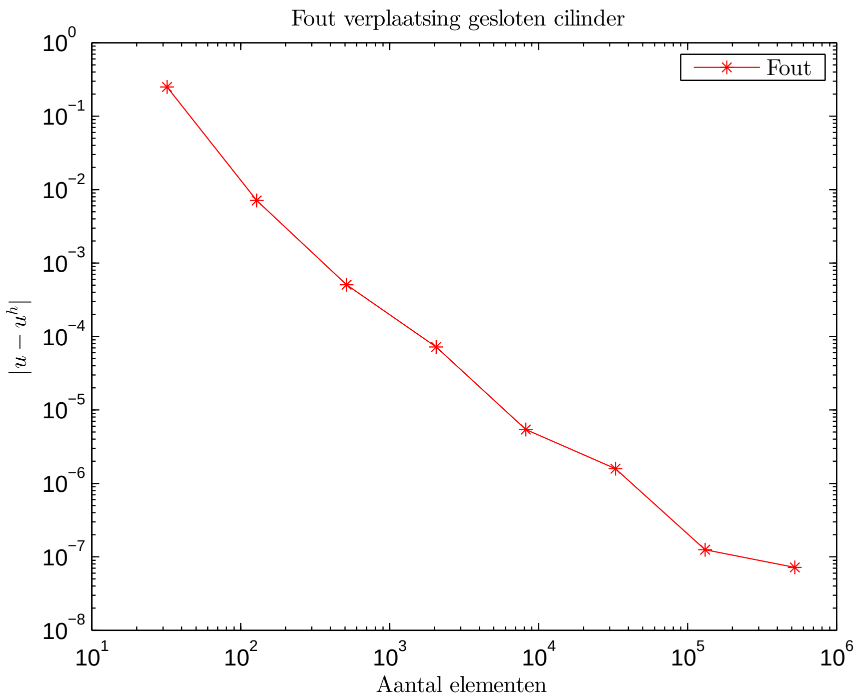
A.3. FOUT VERPLAATSING



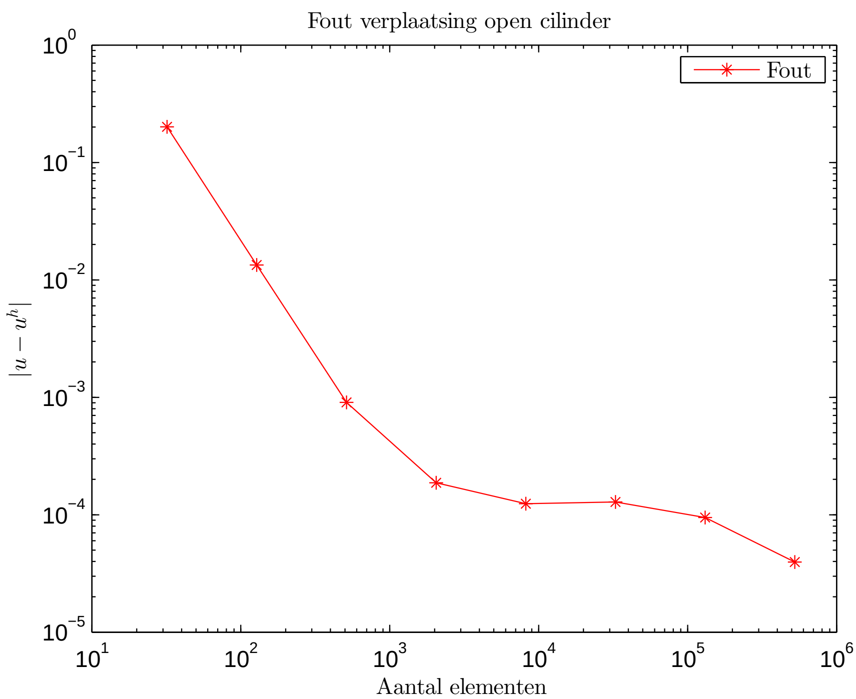
Figuur A.5: Absolute fout verplaatsing plaat met achtknoopselementen



Figuur A.6: Fout verplaatsing koepel

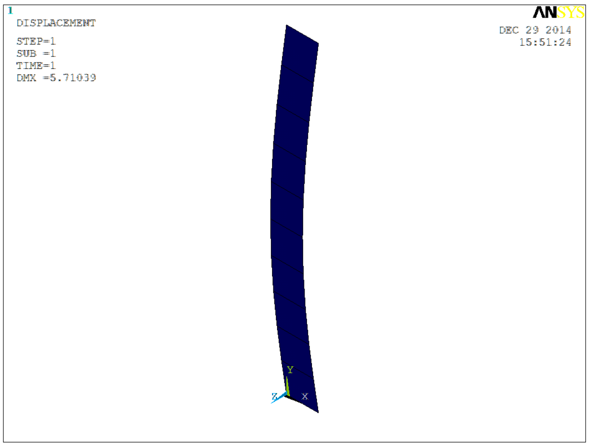


Figuur A.7: Fout verplaatsing gesloten cilinder

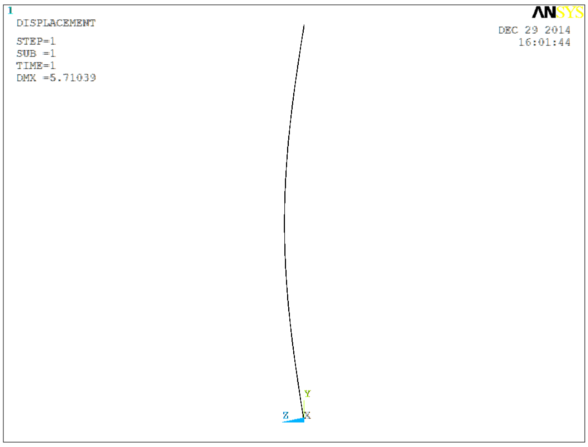


Figuur A.8: Fout verplaatsing open cilinder

A.4. VERVORMDE CONSTRUCTIES

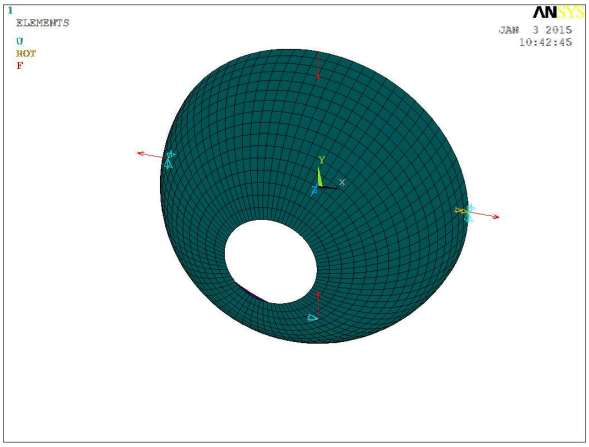


(a) Ruimtelijk aanzicht

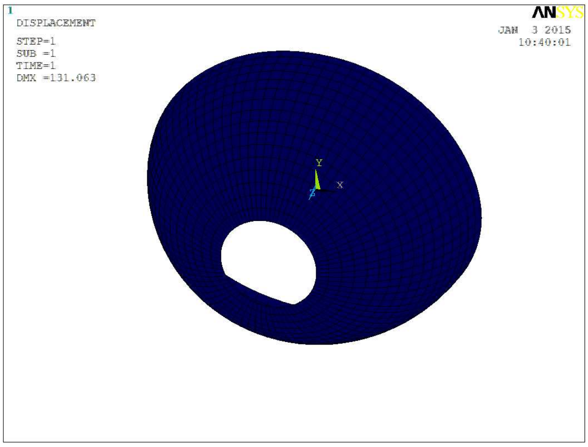


(b) Zijaanzicht

Figuur A.9: Vervormde plaat met vierknooppuntselementen onder belasting van eigengewicht

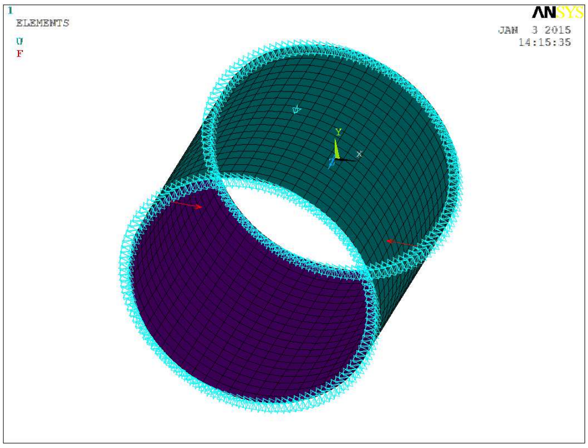


(a) Koepel met belasting en opleggingen

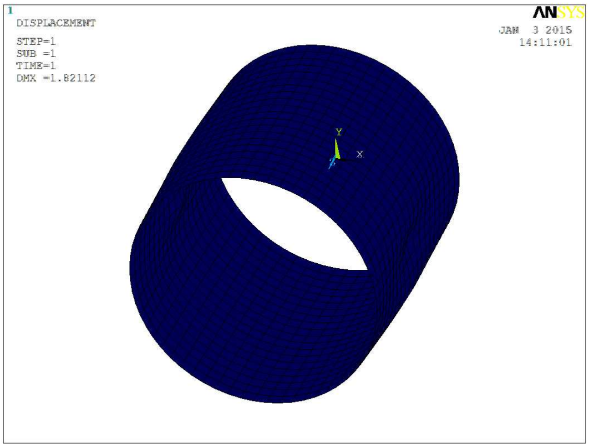


(b) Vervormde koepel

Figuur A.10: Ruimtelijk aanzicht koepel met opening

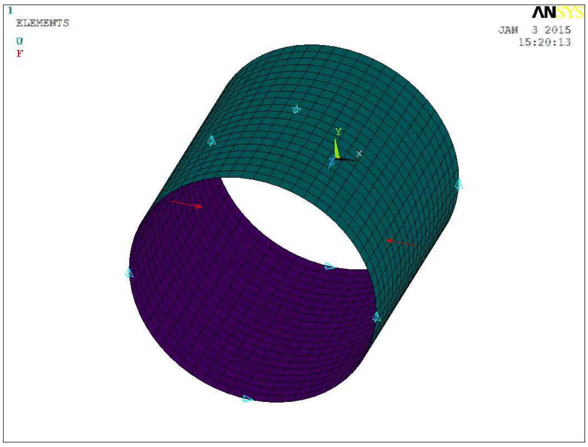


(a) Ruimtelijk aanzicht cilinder

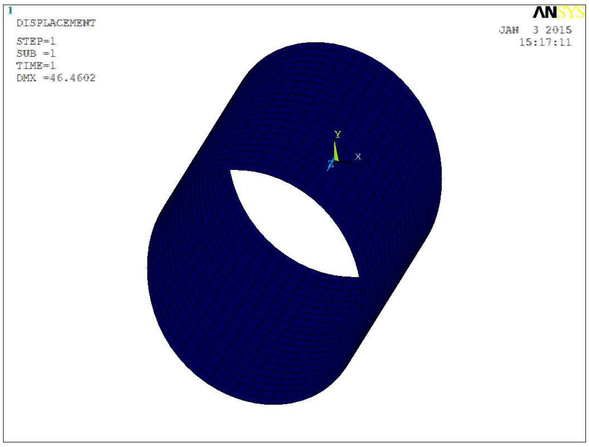


(b) Ruimtelijk aanzicht vervormde cilinder

Figuur A.11: Cilinder met gesloten einden



(a) Ruimtelijk aanzicht cilinder



(b) Ruimtelijk aanzicht vervormde cilinder

Figuur A.12: Cilinder met open einden

A.5. OVERIG

```
clc

rho=7800;                          % kg/m3
l=10000;                           % mm
b=1000;                            % mm
t=100;                             % mm
E=210000;                          % N/mm2
I=1/12*b*t^3;                      % mm4

q=rho/10^9*t*b;                    % N/mm

format long
w=(5*q*l^4)/(384*E*I)         % mm
mxx=1/8*q*l^2/b               % Nmm/mm
```

Command Window

```
w =

   5.803571428571429


mxx =

        9750
```

Figuur A.13: Analytische oplossing voor verplaatsing en moment halverwege de vlakke plaat in Matlab

B

Bijlagen moment

B.1. RESULTATEN MOMENT

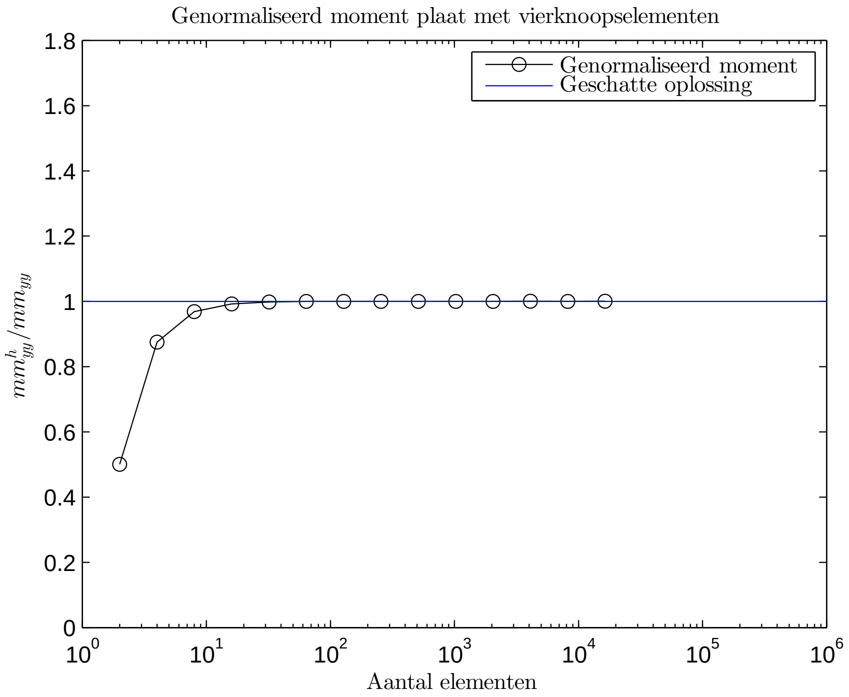
Tabel B.1: Moment vierknoopsplaat

Elementen	DOF's	mm^h_{yy} (Nmm/mm)	$\lvert mm_{yy} - mm^h_{yy}\rvert$	mm^h_{yy}/mm_{yy}
2	26	4875	4875	0,5
4	50	8531,25	1218,75	0,875
8	98	9445,313	304,6875	0,96875
16	194	9673,828	76,17184	0,992188
32	386	9730,957	19,04293	0,998047
64	770	9745,239	4,760703	0,999512
128	1538	9748,81	1,190146	0,999878
256	3074	9749,702	0,297513	0,999969
512	6146	9749,926	0,074417	0,999992
1024	12290	9749,981	0,018578	0,999998
2048	24578	9749,996	0,004476	1
4096	49154	9750,002	0,00204	1
8192	98306	9749,981	0,018563	0,999998
16384	196610	9750,004	0,003522	1
	Analytisch	9750		

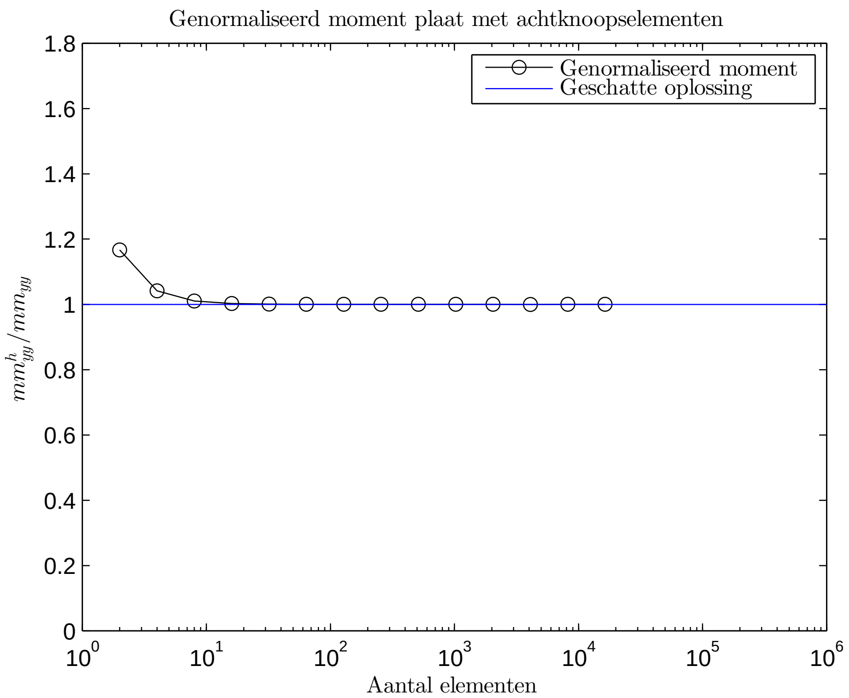
Tabel B.2: Moment plaat met achtknoopselementen

Elementen	DOF's	mm^h_{yy} (Nmm/mm)	$\lvert mm_{yy} - mm^h_{yy}\rvert$	mm^h_{yy}/mm_{yy}
2	63	11375	1625	1,166667
4	123	10156,25	406,2501	1,041667
8	243	9851,563	101,5625	1,010417
16	483	9775,391	25,39067	1,002604
32	963	9756,348	6,347701	1,000651
64	1923	9751,587	1,58696	1,000163
128	3843	9750,397	0,39678	1,000041
256	7683	9750,099	0,099237	1,00001
512	15363	9750,025	0,024913	1,000003
1024	30723	9750,006	0,006241	1,000001
2048	61443	9750,002	0,002169	1
4096	122883	9749,993	0,006904	0,999999
8192	245763	9750,042	0,041562	1,000004
16384	491523	9750,162	0,161957	1,000017
	Analytisch	9750		

B.2. GENORMALISEERD MOMENT

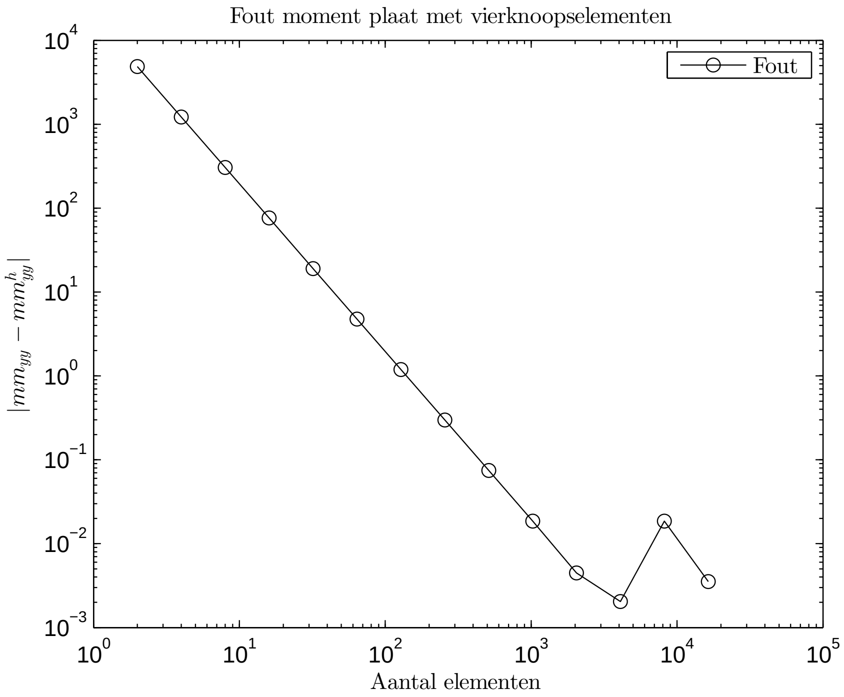


Figuur B.1: Genormaliseerd moment plaat met vierknoopselementen

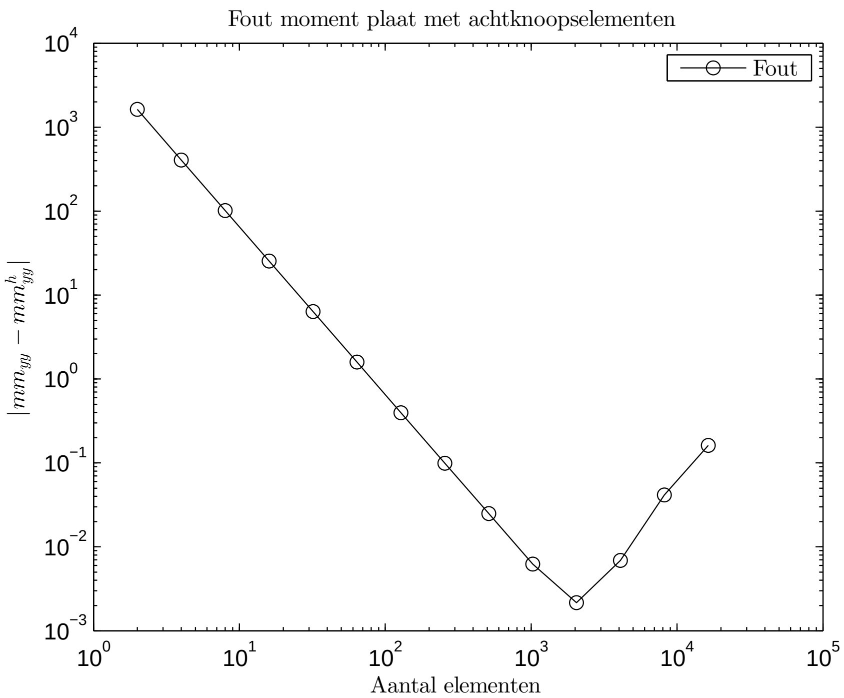


Figuur B.2: Genormaliseerd moment plaat met achtknoopselementen

B.3. FOUT MOMENT

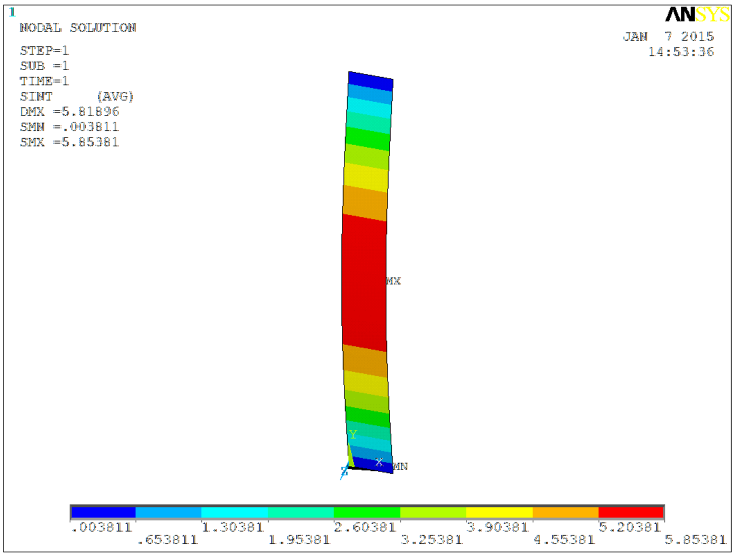


Figuur B.3: Fout moment plaat met vierknoopselementen



Figuur B.4: Fout moment plaat met achtknoopselementen

B.4. SPANNINGSINTENSITEIT IN DE CONSTRUCTIE



Figuur B.5: Spanning intensiteit plot achknoopsplaat in Ansys

C

Bijlagen Von Mises-spanning

C.1. RESULTATEN VON MISES-SPANNING

Tabel C.1: Von Mises-spanning koepel

Elementen	DOF's	σ^h_{VM}	$\lvert\sigma_{VM} - \sigma^h_{VM}\rvert$	$\sigma^h_{VM}/\sigma_{VM}$
20	474	0,00104823	9,53E-04	0,523729
80	1674	0,00200121	2,56E-07	0,999872
320	6234	0,00201804	-1,66E-05	1,008280
1280	23994	0,00200345	-1,98E-06	1,000992
5120	94074	0,00200199	-5,19E-07	1,000259
20480	372474	0,00200158	-1,06E-07	1,000053
81920	1482234	0,00200148	-1,41E-08	1,000007
327680	5913594	0,00200147	-4,00E-11	1,000000
	Geschat	0,00200147		

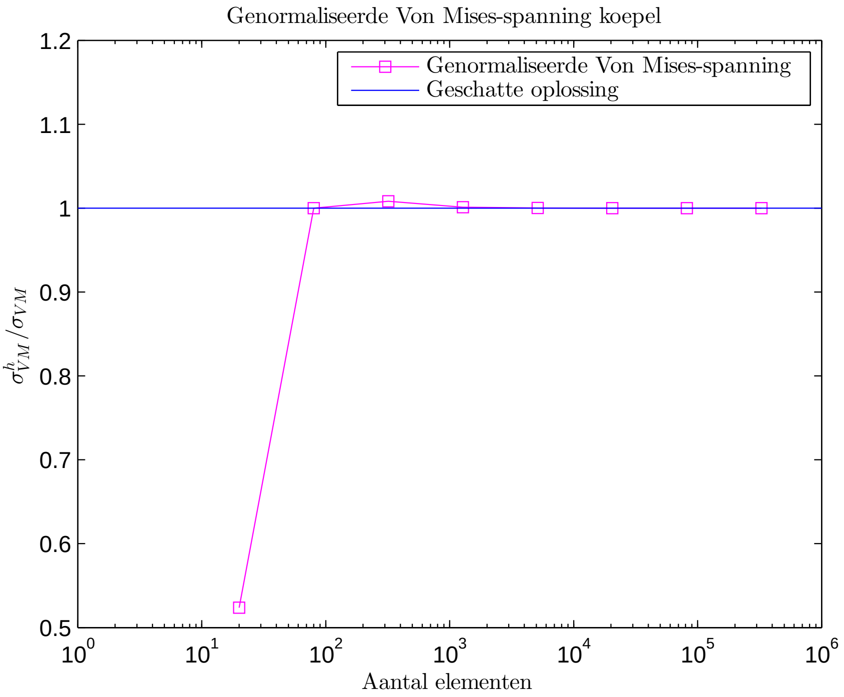
Tabel C.2: Von Mises-spanning gesloten cilinder

Elementen	DOF's	σ^h_{VM}	$\lvert\sigma_{VM} - \sigma^h_{VM}\rvert$	$\sigma^h_{VM}/\sigma_{VM}$
32	607	552,102	218,40	1,6545
128	2367	453,2348	119,53	1,3582
512	9343	357,428	23,73	1,0711
2048	37119	338,9013	5,20	1,0156
8192	147967	334,9948	1,29	1,0039
32768	590847	334,0413	0,34	1,0010
131072	2361343	333,8043	0,10	1,0003
524288	9441279	333,7449	0,04	1,0001
	Geschat	333,7		

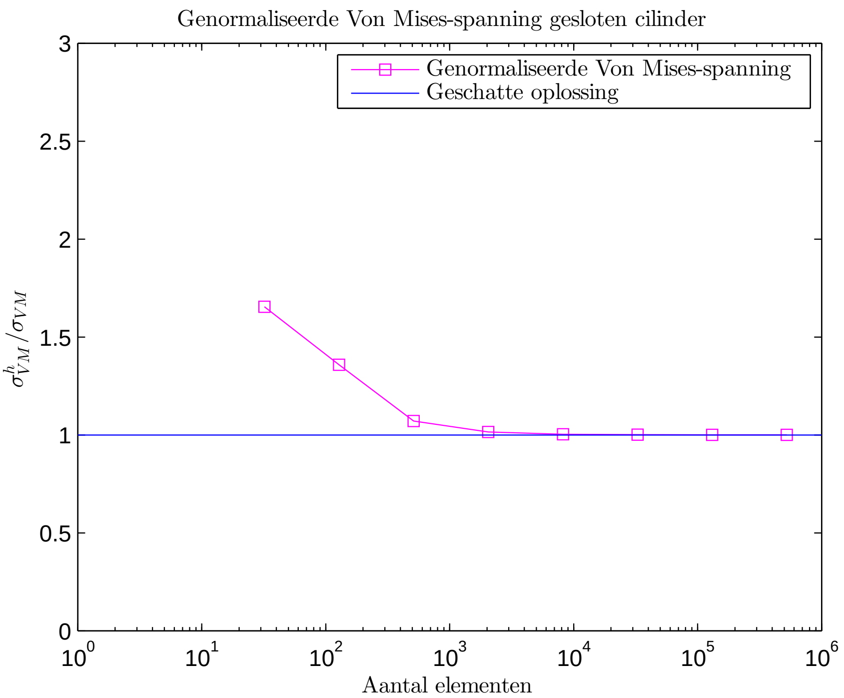
Tabel C.3: Von Mises-spanning open cilinder

Elementen	DOF's	σ^h_{VM}	$\lvert\sigma_{VM} - \sigma^h_{VM}\rvert$	$\sigma^h_{VM}/\sigma_{VM}$
32	665	1332,51	312,76	1,3067
128	2489	1178,54	158,79	1,1557
512	9593	1046,93	27,18	1,0266
2048	37625	1025,69	5,94	1,0058
8192	148985	1021,22	1,47	1,0014
32768	592889	1020,13	0,38	1,0004
131072	2365433	1019,86	0,11	1,0001
524288	9449465	1019,80	0,05	1,0000
	Geschat	1019,75		

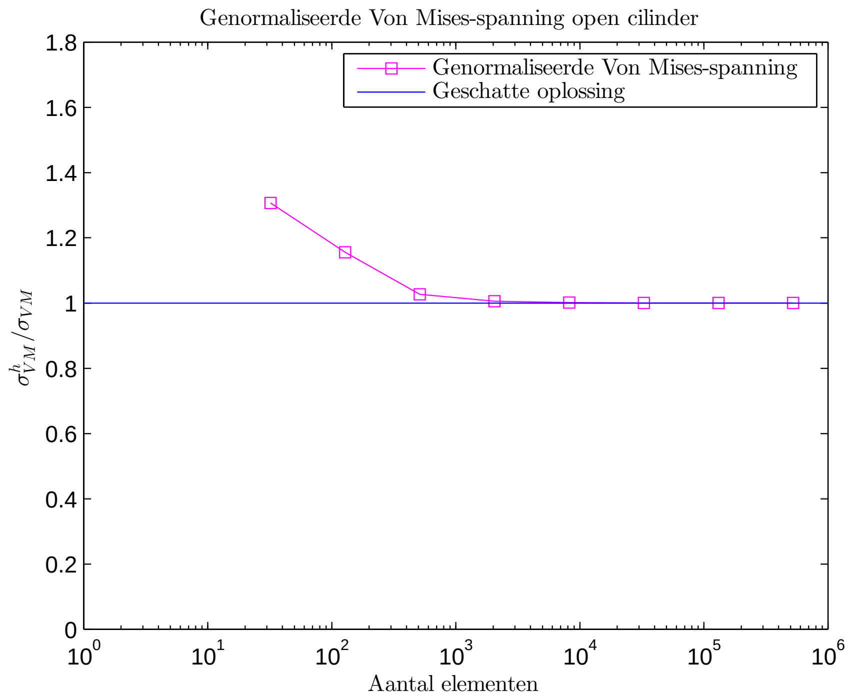
C.2. GENORMALISEERDE VON MISES-SPANNING



Figuur C.1: Genormaliseerde Von Mises-spanning koepel

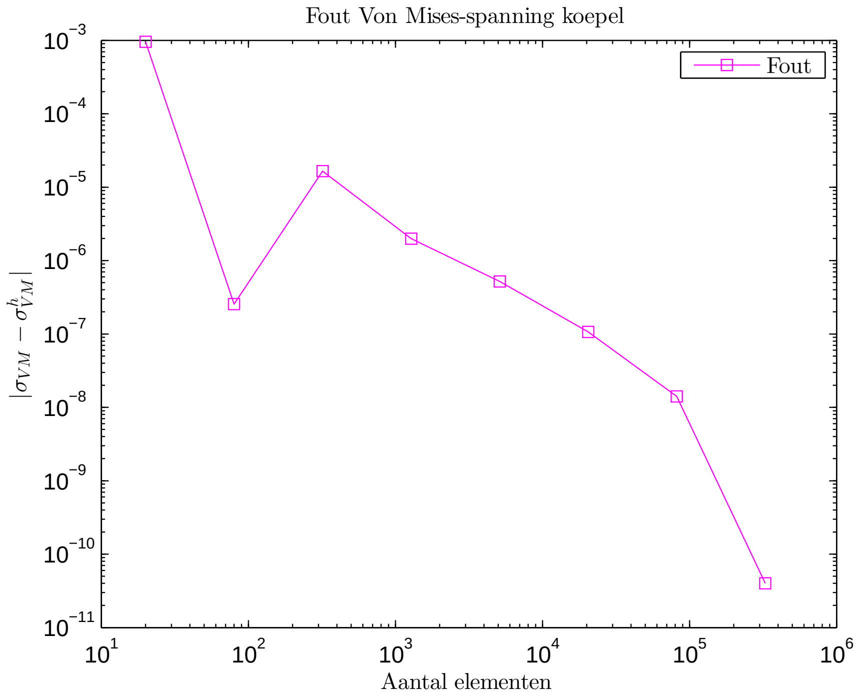


Figuur C.2: Genormaliseerde Von Mises-spanning gesloten cilinder

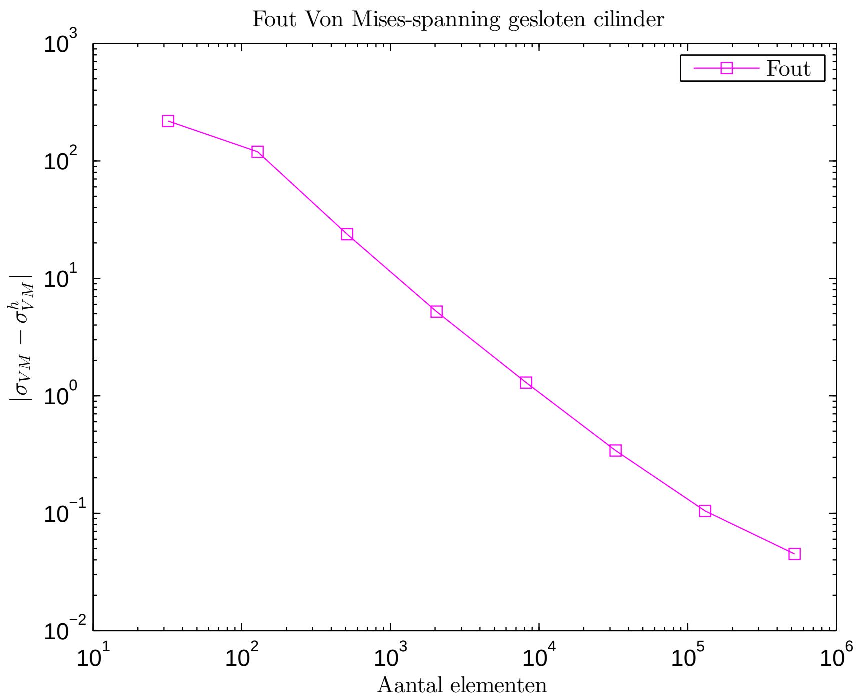


Figuur C.3: Genormaliseerde Von Mises-spanning open cilinder

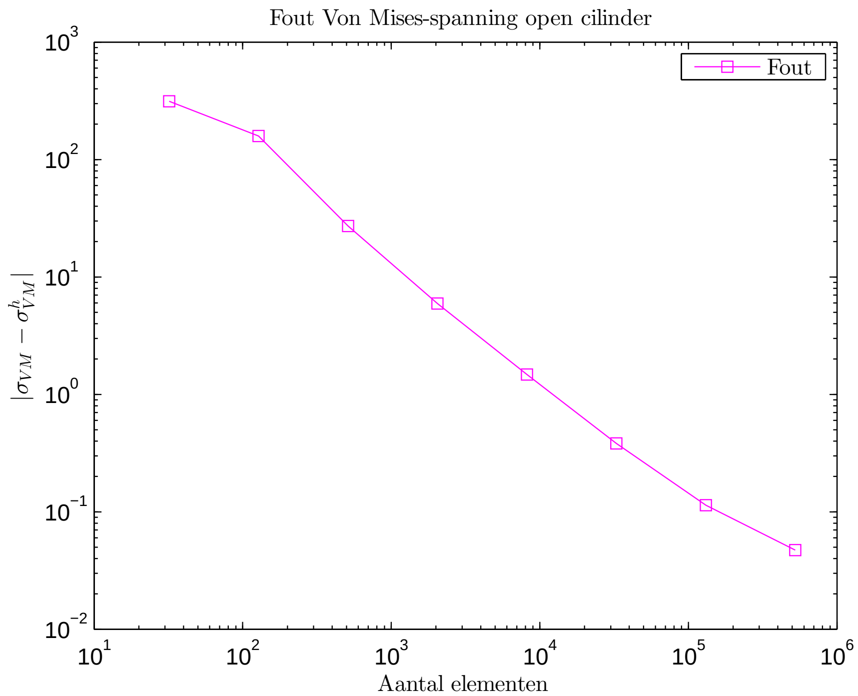
C.3. FOUT VON MISES-SPANNING



Figuur C.4: Fout Von Mises-spanning koepel



Figuur C.5: Fout Von Mises-spanning gesloten cilinder



Figuur C.6: Fout Von Mises-spanning open cilinder