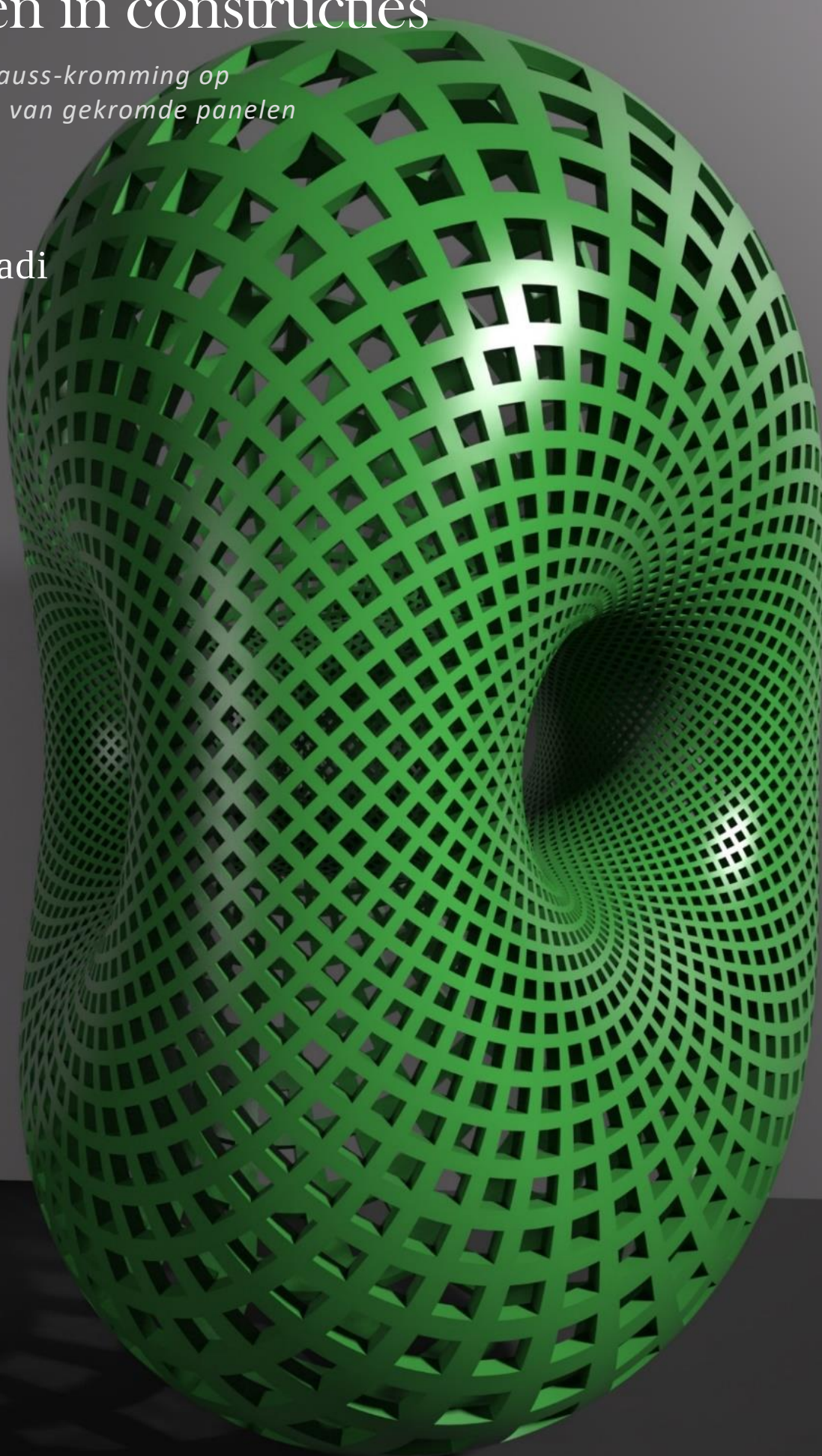


Trillingen in constructies

*Invloed van de gauss-kromming op
eigenfrequenties van gekromde panelen*

N. el Bouayadi



Trillingen in constructies

Invloed van de gauss-kromming op
eigenfrequenties van gekromde panelen

door

N. el Bouayadi

Studentnummer: 4598326

Projectduur: 2 september 2019 – 21 oktober 2019

Begeleiders: Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom

Dr.ir. F.P. van der Meer

Faculteit: Civiele Techniek en Geowetenschappen

Voorwoord

Voor u ligt het bachelor eindwerk van het onderzoek naar de invloed van de gauss-kromming op de eigenfrequenties van gekromde panelen. In dit eindwerk is er onderzoek gedaan naar de mogelijke relatie tussen de eigenfrequenties van gekromde panelen en de gauss-kromming. Het onderzoek berust op het gebruik van simulaties met betrekking tot de eindige-elementenmethode.

De eerste helft van de totale projectduur bestond vooral uit het vergaren van relevante theorie en het leren hanteren van het programma Ansys om een correct werkend model op te stellen. Tegelijkertijd werden voorgaande studies bestudeerd om de doelstelling in context te brengen. Met behulp van het programma Ansys en kwadratische regressie is er tot een conclusie gekomen.

Dit onderzoek is gedaan onder de begeleiding van Dhr. Hoogenboom en Dhr. Van der Meer en ik wil hen hiervoor hartelijk bedanken.

Tenslotte wens ik de lezer veel leesplezier toe.

Nabil el Bouayadi
21 oktober 2019

Samenvatting

In dit eindwerk is gekeken naar de mogelijke invloed die de gauss-kromming van een oppervlak zou hebben op de eigenfrequenties van het betreffende oppervlak. Informeel en eenvoudig gezegd vertelt de gauss-kromming op een bepaald punt van een oppervlak over hoe deze kromt: een positieve gauss-kromming duidt aan op een bolvormige kromming, een negatieve gauss-kromming duidt een zadelpunt aan en een gauss-kromming van nul duidt op een parabolisch punt (zoals het oppervlak van een cilinder). Aanleiding hiervan is dat de gauss-krommingsterm in de huidige ontwerpformule voor het bepalen van de eigenfrequentie gering van invloed is:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

De gauss-kromming is hier $k_{xx}k_{yy}$. Het vermoeden is dat deze geen invloed heeft op de eigenfrequentie van een oppervlak en dat deze term is ontstaan doordat het oppervlak waarmee getest werd een gemiddelde kromming (de term $k_{xx} + k_{yy}$) bevatte die niet exact nul was. De hypothese is dus dat de gauss-kromming geen invloed heeft op de eigenfrequenties van gekromde panelen. Het doel van dit rapport is het toetsen van deze hypothese.

Om deze hypothese te toetsen wordt een eindige-elementenprogramma, Ansys, gehanteerd. Een eindige-elementmethode is een numerieke methode waarbij onder ander het gedrag van geometrische objecten kan worden bepaald. Programma's zoals Ansys zijn dus bedoeld om complexe (ingenieurs) problemen, die handmatig moeilijk op te lossen zijn, te simuleren om eventueel vervolgens oplossingen te vinden. In Ansys wordt een Enneper-oppervlak ontwikkeld. Het Enneper-oppervlak is een minimaaloppervlak: hier is de gemiddelde kromming ($k_{xx} + k_{yy}$) gelijk aan nul, maar een gauss-kromming ($k_{xx}k_{yy}$) is nog steeds aanwezig. Als gevolg hiervan kan enige verandering in eigenfrequentie worden toegeschreven aan de gauss-kromming binnen het oppervlak.

Het gemodelleerde Enneper-oppervlak is zo opgesteld dat enige numerieke onnauwkeurigheid als gevolg van de methodiek de resultaten niet significant beïnvloed. Verder is het oppervlak isotroop en bevat deze de karakteristieken van staal. Een oppervlak die op een bepaald vervormde toestand kan trillen noemt men een modus. De focus ligt op het meten van eigenfrequenties waarbij de modus van het oppervlak slechts één buik bevat (denk maar aan een platte vlak dat van zijn platte toestand naar een heuvelvormige toestand heen en weer trilt). Eigenfrequenties van Enneper-oppervlakken met verschillende gauss-krommingen zijn gemeten en uitgezet tegen de gemiddelde gauss-kromming van behorende oppervlakken. Essentieel hierbij is het in stand houden van alle andere variabelen waaronder de lengte. Immers kan alleen dan het verschil in waarnemingen met zekerheid worden toegeschreven aan de gauss-kromming. Uit de resulterende grafieken kan dan opgemaakt worden of de gauss-kromming invloed heeft.

Het blijkt dat de gauss-kromming wel een invloed heeft op de eigenfrequenties van gekromde panelen. Er is door middel van kwadratische regressie een voorwaarde opgesteld. Als aan deze voorwaarde is voldaan, dan is de invloed van de gauss-kromming op de eigenfrequentie gering.

Wanneer geldt dat:

$$|K_g| < \frac{1}{4l^2}$$

Dan is er sprake van een lichte invloed van de gauss-kromming op de (eerste) eigenfrequentie van het oppervlak. Hierbij is $|K_g|$ de gemiddelde gauss-kromming van het oppervlak in absolute waarde. l is de zijdelengte van het oppervlak (alle zijdes dienen dus even lang te zijn). De eigenfrequentie heeft dan een maximale afwijking van 10% t.o.v. de huidige ontwerpformule zonder krommingstermen (dus alleen het meest linkse deel):

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2 E t^2}{12(1 - \nu^2)\rho l^4}}$$

Belangrijk om op te merken is dat de opgestelde voorwaarde dusver alleen op het Enneper-oppervlak is getest en alleen geldt als de modus uit één buik bestaat. Bovendien is deze niet allesomvattend; sommige panelen waarbij de gauss-kromming een lichte invloed heeft op de eigenfrequentie kunnen een gemiddelde gauss-kromming hebben groter dan het rechterlid van de voorwaarde. In hoeverre deze voorwaarde geldig is voor algemene gekromde panelen met twist (de term k_{xy}) en gemiddelde kromming moet nog worden onderzocht.

Inhoudsopgave

Voorwoord.....	1
Samenvatting.....	2
Lijst van figuren.....	5
Lijst van Tabellen.....	6
Symbolenlijst.....	7
1 Introductie.....	8
1.1 Inleiding.....	8
1.2 Probleemstelling.....	9
1.3 Doelstelling	9
1.4 Hoofdvraag	9
1.5 Methode	9
2 Achterliggende Theorie.....	10
2.1 Oppervlaktes en Gauss-kromming.....	10
2.2 Gemiddelde kromming en minimaaloppervlakken	10
2.3 Trillingen	12
2.4 Kromtestraal/dikte verhouding.....	13
3 Voorgaande studies	14
4 Modellering en Analyse.....	16
4.1 Mechanical APDL script.....	16
4.2 Aanpak.....	16
4.3 Verificatie APDL-script.....	20
4.4 Aantal knooppunten	22
4.5 Invloed Gauss-kromming.....	24
4.6 Parameter grenzen afbakenen	28
5 Discussie	30
6 Conclusie en aanbevelingen	31
6.1 Conclusie	31
6.2 Aanbevelingen.....	31
7 Bibliografie.....	32
7.1 Appendix A: Ansys Mechanical APDL script – Enneper-oppervlak.....	34
7.2 Appendix B: Python code – Bepaling absolute grenswaarde	37
7.3 Appendix C: Enneper-oppervlak – modi voorbeelden	38
7.4 Appendix D: Tabel – Eerste eigenfrequentie uitgezet tegen gauss-kromming.....	41
7.5 Appendix E: Python script – Gemiddelde gauss-kromming Enneper-oppervlak	43
7.6 Appendix F: Python code - Kwadratische regressie.....	44

Lijst van figuren

Figuur 1-1 Het huidige Taq Kasra, dat als paleis diende voor het Perzische rijk, gelegen in Irak (Oppolzer, 2016).....	8
Figuur 1-2 Een reconstructie van het paleis (“Taq Kasra reconstruction”, 2017)	8
Figuur 2-1 Van links naar rechts: Een anticlastisch vlak, een enkel gekromd vlak (monoclastisch) en een synclastisch vlak (Nicoguardo, 2016).....	10
Figuur 2-2 Een Enneper-oppervlak (Stewart J. M., 2017, p. 124).....	10
Figuur 2-3 Een catenoïde (“The Catenoid”, n.d.).....	11
Figuur 2-4 Een helicoïde (“The Helicoid”, n.d.).....	11
Figuur 2-5 Enkele voorbeelden van TPMS (Whitehead, 2019). Van links naar rechts: Schoen’s Gyroid, Schwarz P, Schoen’s PA Batwing.	12
Figuur 2-6 Een oppervlak met een positieve buik (links) en een oppervlak met zowel een positieve als negatieve buik (rechts) (Dorrington, Jones, Danchy, & Pappa, 2004).	13
Figuur 4-1 Elk randknooppunt van het Enneper-oppervlak kan niet in de lokale Z-richting en in de richting van het oppervlak verplaatsen.	17
Figuur 4-2 Het gedrag van een gebogen plaat kan worden gesimuleerd door deze te verdelen in kleinere gebogen platen.	17
Figuur 4-3 Elke randknoop van het Enneper-oppervlak kan niet in de lokale Z-richting noch in de richting van het oppervlak bewegen.	17
Figuur 4-4 Een eerste modus van een Enneper-oppervlak met maar één buik (zie Appendix C voor details).....	18
Figuur 4-5 Afstandsberekening tussen twee knooppunten door Ansys.	20
Figuur 4-6 De lokale assenstelsels zijn correct geconfigureerd.	20
Figuur 4-7 De contourkaart indien de verplaatsing in de lokale z-as op het middelste knooppunt beperkt wordt.....	21
Figuur 4-8 Er zijn modi die onderling symmetrisch zijn met dezelfde eigenfrequenties.	21
Figuur 4-9 Contourkaart voor $n=6$	23
Figuur 4-10 Contourkaart voor $n=196$	23
Figuur 4-11 De eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gemiddelde gauss-kromming.	24
Figuur 4-12 Een globaal beeld van de eerste modus indien $0 < b < 0.2$	25
Figuur 4-13 De vorm van de eerste modus indien $2 < b < 2.5$	25
Figuur 4-14 De eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gauss-kromming met $2 < b < 2.5$	26
Figuur 4-15 De gemeten waarden vergeleken met de huidige ontwerpformules.	27
Figuur 4-16 Het resultaat van de kwadratische regressie.	28
Figuur 7-1 Eerste modus van een Enneper-oppervlak.....	38
Figuur 7-2 Tweede modus van een Enneper-oppervlak.....	38
Figuur 7-3 Derde modus van een Enneper-oppervlak.	39
Figuur 7-4 Vierde modus van een Enneper-oppervlak.....	39
Figuur 7-5 Vijfde modus van een Enneper-oppervlak.....	40

Lijst van Tabellen

Tabel 1 Eigenschappen van het Enneper-oppervlak voor het vinden van het optimale elementenaantal.	22
Tabel 2 Eigenfrequenties en bijbehorend aantal elementen voor het Enneper-oppervlak.	22
Tabel 3 Gehanteerde parameters.	24
Tabel 4 Berekende waarden van de invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie met $0 < b < 0.2$	41
Tabel 5 Berekende waarden van de invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie met $2 < b < 2.5$	42

Symbolenlijst

Symbool	Betekenis	Eenheid
l/L	(Zijde)lengte	m
b	Grenswaarde voor de parametrische vergelijking ($-b < u/v < b$)	-
E	Elasticiteitsmodulus	$\frac{N}{m^2}$
t	Oppervlakedikte	m
k_{xx}	Kromming om de x-as	$\frac{1}{m}$
k_{yy}	Kromming om de y-as	$\frac{1}{m}$
k_{xy}	Twist	$\frac{1}{m}$
ν	Poisson-factor	-
ρ	Dichtheid	$\frac{kg}{m^3}$
a	Kromtestraal	m
K/K_g	Gauss-kromming/ gemiddelde gauss-kromming	$\frac{1}{m^2}$

1 Introductie

1.1 Inleiding

Van oudsher probeert men structuren te realiseren die een blijvende indruk in de toeschouwer achterlaten. Deze grandioze bouwwerken maken vaak gebruik van gevorderde technieken om zich van andere te onderscheiden. Het initiatief is markant, vooral als er wordt gekeken naar hun prestaties in combinatie met de relatief gebrekkige technische kennis die men van hen zou verwachten: het gebruik van met name gebogen panelen is merkwaardig. De belangstelling voor dergelijke panelen binnen de architectuur bestaat al eeuwenlang.

De Taq Kasra, een naam gegeven voor de overblijfselen van een Perzisch paleis daterend tot voor de zevende eeuw, is een passend voorbeeld. De oprichter is tot hedendaags onbekend, hoewel sommigen van mening zijn dat Shapour I, die Perzië in de derde eeuw regeerde, deze rol vervulde (Heinrich Schmidt, 1934).

Het opmerkelijke aan het bouwwerk is het tongewelf die de twee gedeelten van het paleis verbindt. Tot op de dag van vandaag wordt het beschouwd als de grootste stenenboog ooit geconstrueerd (zie figuur 1.1 en 1.2). Het is een fascinerende gedachte dat de enige zichtbare constructie van de oude stad Ctesiphon ook de meest indrukwekkende is.



Figuur 1-1 Het huidige Taq Kasra, dat als paleis diende voor het Perzische rijk, gelegen in Irak (Oppolzer, 2016).



Figuur 1-2 Een reconstructie van het paleis ("Taq Kasra reconstruction", 2017)

1.2 Probleemstelling

Voor het bepalen van de laagste eigenfrequentie van schaalconstructies is er een formule opgesteld (Hoogenboom, 2019). Joep Sluijs heeft deze formule uitgebreid met de invloed van de gauss-kromming (Sluijs, 2017). Het huidige ontwerpformule is:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Het blijkt dat de invloed van de gauss-kromming (hier $k_{xx}k_{yy}$) bescheiden is. Uit voorgaand onderzoek zijn de resultaten verkregen uit schalen waarbij de kromming variabel is. Het vermoeden is ontstaan dat de gauss-kromming helemaal geen invloed heeft op de eigenfrequenties. De invloed die Sluijs vond, kan veroorzaakt zijn doordat de gemiddelde kromming in de onderzochte schaalvormen niet overal exact nul was. Met het veranderen van de gauss-kromming werd ook de gemiddelde kromming veranderd. Dit kan de invloed die gevonden werd door Sluijs verklaren.

1.3 Doelstelling

De doelstelling van dit project is het toetsen van de mogelijke invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie van een gekromd oppervlak. Als de hypothese kan worden verworpen is het doel om parametergrenzen aan te geven waarbinnen de invloed van de Gauss-kromming klein is.

1.4 Hoofdvraag

De hoofdvraag luidt: Heeft de gauss-kromming invloed op de eigenfrequenties van vierkante schaalconstructies waarvan de randen rollend zijn opgelegd?

Als deze hypothese waar zou zijn dan is dit een belangrijk theoretisch inzicht. Er zullen ook consequenties uit volgen voor het ontwerpen van schaalconstructies. Het ziet er naar uit dat deze hypothese toetsbaar is bij schalen die alleen gauss-kromming hebben en geen andere krommingen, bijvoorbeeld een catenoïde en Enneper-oppervlak. Als de hypothese niet waar blijkt te zijn dan is het interessant om te bestuderen voor welke lengte de invloed van de Gauss-kromming op de laagste eigenfrequentie klein is.

1.5 Methode

Er is gekozen voor een numerieke aanpak met de eindige-elementenmethode. Resultaten worden aan de hand van het simulatiesoftware Ansys Mechanical APDL verkregen. Een bestaand script, waarmee schalen van verschillende vormen kunnen worden gegenereerd, is uitgebreid. Enneper-oppervlak is hierin geïmplementeerd en de randvoorwaarden zijn grondig gecontroleerd. Parameters zijn gevarieerd en de eigenfrequenties zijn uitgezet in grafieken. De numerieke nauwkeurigheid is onderzocht. De conclusies volgen uit het oordeelkundig aflezen van de grafieken.

2 Achterliggende Theorie

2.1 Oppervlaktes en Gauss-kromming

In de differentiaalmeetkunde kan een oppervlak zowel synclastisch of anticlastisch zijn. Een synclastisch oppervlak is te herkennen aan de koepelachtige vorm terwijl een anticlastisch te herkennen valt aan zijn zadelvorm (Fisher, 2004). Sommige oppervlaktes, zoals een kegel of cilinder, tonen enkel gekromd gedrag; de gauss-kromming is op elk punt van de oppervlakte gelijk (zie figuur 2.1).

Op een (schaal)oppervlak kan de afbuiging op een punt in elke richting variëren. De kromming duidt aan wat de mate van deze afbuiging is. De hoofdkrommingen (aangeduid met k_1 en k_2) zijn de waarden waarbij de krommingen maximaal en minimaal zijn (Hoogenboom, 2019)..

De Gauss-kromming is het product van de hoofdkrommingen ($k_g = k_1 * k_2$) en is onafhankelijk van de gekozen richtingen van het lokaal coördinatensysteem.

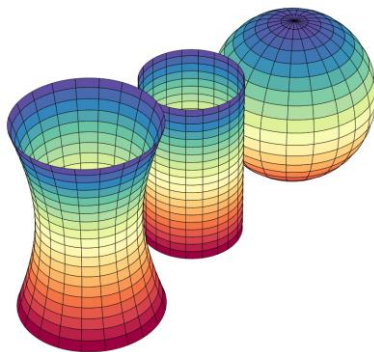
Indien de Gauss-kromming positief is, dan is het betrokken oppervlak koepelachtig van vorm. Een negatieve Gauss-kromming duidt op een zadelvorm terwijl een waarde van nul een oppervlak aanduidt dat enkel gekromd is.

Het doorbuigingsgedrag van een oppervlak, op een bepaald punt, met betrekking tot een puntbelasting is afhankelijk van de Gauss-kromming (Hoogenboom, 2019). Een punt met een grote Gauss-kromming (in absolute waarde) vertoont kleinere doorbuiging.

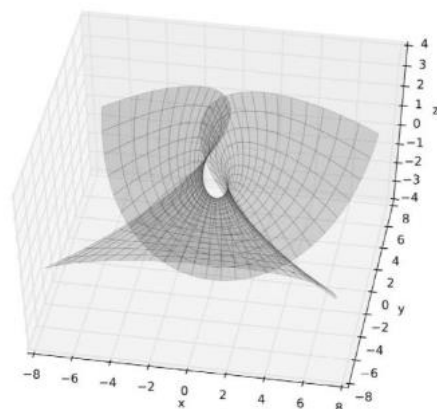
2.2 Gemiddelde kromming en minimaaloppervlakken

De gemiddelde kromming van een oppervlak op een punt is het gemiddelde van de hoofdkrommingen op genoemd punt: $\frac{1}{2} * (k_1 + k_2)$ (Hoogenboom, 2019). De gemiddelde kromming, net als de Gauss-kromming, is onafhankelijk van het lokaal coördinatensysteem, behalve voor de richting van de z-as.

Minimaaloppervlakken zijn oppervlakken waarvan de gemiddelde kromming op elk punt nul is. Voorbeelden hiervan zijn het Enneper-oppervlak en catenoiden. Minimaaloppervlakken kunnen zichzelf kruisen en sommige bevatten geen grenzen (zie figuur 2.2).



Figuur 2-1 Van links naar rechts: Een anticlastisch vlak, een enkel gekromd vlak (monoclastisch) en een synclastisch vlak (Nicoguardo, 2016).



Figuur 2-2 Een Enneper-oppervlak (Stewart J. M., 2017, p. 124)

Het Enneper-oppervlak, geïntroduceerd door Alfred Enneper in 1864, is een eindig minimaaloppervlak dat zichzelf kruist (Dierkes, Hildebrandt & Sauvigny, 2010). Dit oppervlak kan parametrisch beschreven worden met¹:

$$\begin{aligned}x &= u(1 - u^2/3 + v^2)/3, \\y &= -v(1 - v^2/3 + u^2)/3, \\z &= (u^2 - v^2)/3.\end{aligned}$$

De Helicoïde is een oppervlak dat wenteltrapachtig van vorm is (zie figuur 2.4). Het werd door Jean Baptiste Meusnier in 1776 beschreven (Fomenko & Tuzhilin, 2005). De helicoïde kan parametrisch beschreven worden met:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\alpha\theta), \\y &= \rho \sin(\alpha\theta), \\z &= \theta,\end{aligned}$$

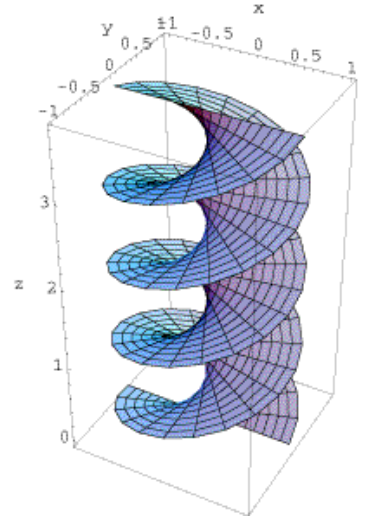
Waarbij ρ en θ variëren van negatief tot positief oneindig. Als de constante α positief is, ‘stijgt’ de helicoïde tegen de klok in. Indien negatief, dan is dit met de klok mee.

De catenoïde, in 1744 gevonden door Euler, is de eerste non-triviale minimaaloppervlak (dus exclusief een simpel tweedimensionale vlak) die ontdekt werd (Euler, 1952) (zie figuur 2.3). Parametrisch kan deze beschreven worden met:

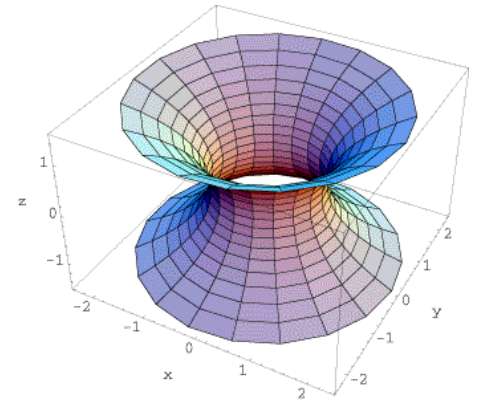
$$\begin{aligned}x &= c \cosh \frac{v}{c} \cos u \\y &= c \cosh \frac{v}{c} \sin u \\z &= v\end{aligned}$$

Waarbij $u \in [-\pi, \pi)$, $v \in \mathbb{R}$ en ‘c’ een niet-nul reële constante.

Verder zijn er de Schwarz minimaaloppervlakken: driedimensionale minimaaloppervlakken die periodiek symmetrisch zijn (*triply periodic minimal surface* of TPMS) en de Gyroid van Alan Schoen (Schoen, 1970). Vrijwel alle TPMS kruisen zichzelf niet (Karcher & Polthier, 1996) en dergelijke driedimensionale structuren zijn zelfs geobserveerd in membranen van amoebe (Deng & Mieczkowski, 1998) (zie figuur 2.5).

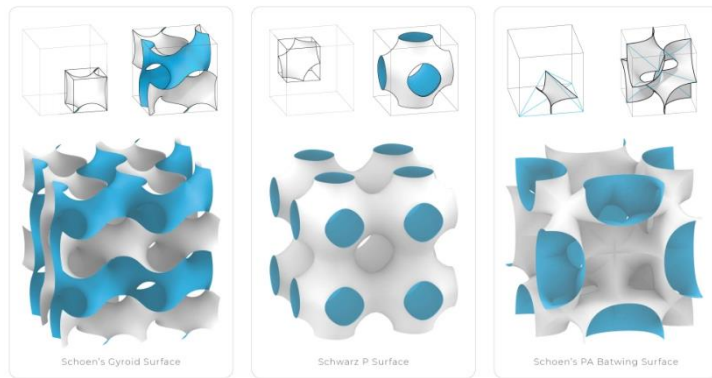


Figuur 2-4 Een helicoïde (“The Helicoid”, n.d.).



Figuur 2-3 Een catenoïde (“The Catenoid”, n.d.).

¹ In dit eindwerk wordt het Enneper-oppervlak voorts zodanig parametrisch beschreven waarbij de kromtestraal expliciet uitgedrukt wordt (zie hoofdstuk Modellering).



Figuur 2-5 Enkele voorbeelden van TPMS (Whitehead, 2019). Van links naar rechts: Schoen's Gyroid, Schwarz P, Schoen's PA Batwing.

2.3 Trillingen

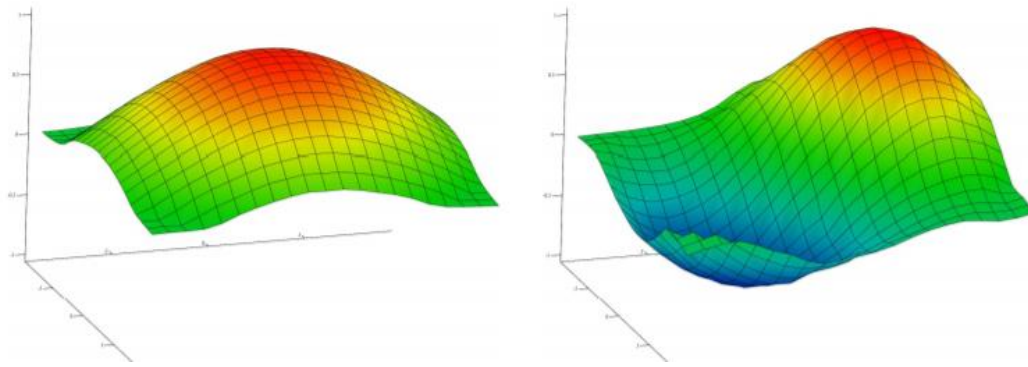
De eigenfrequentie van een systeem is de frequentie waarbij het systeem oscilleert onder afwezigheid van drijvende krachten of demping (Bhatt, 2010). Een klassiek voorbeeld is een enkelvoudig massa-veersysteem zonder demping. De eigenfrequentie (uitgedrukt in radialen) volgt uit:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

waarbij 'k' hier de veerstijfheid is en 'm' de massa.

Resonantie is het fenomeen dat zich voordoet wanneer de frequentie waarmee een kracht wordt uitgeoefend gelijk of bijna gelijk is aan (een van) de eigenfrequentie(s) van het systeem waarop de kracht wordt uitgeoefend (Bhatt, 2010). Een voorbeeld hiervan is een schommel; het duwen van de schommel op het interval die overeenkomt met de eigenfrequentie van de schommel zorgt ervoor dat deze hoger zwaait dan voorheen. Resonantie in de (bouw)techniek is een ongewenst fenomeen, omdat dit kan leiden tot het bezwijken van constructies (Billah & Scanlan, 1991).

Een oppervlak die op een bepaald vervormde toestand kan trillen noemt men een modus (zie figuur 2.6). Een eindige elementen model bevat evenveel modi en eigenfrequenties als het aantal vrijheidsgraden (Hoogenboom, 2019). Een modus bestaat uit een patroon van buiken en het aantal hiervan langs een dwarsdoorsnede kan worden uitgedrukt in een golfgetal. De modus van een oppervlak is afhankelijk van de frequentie waarmee het oppervlak trilt.



Figuur 2-6 Een oppervlak met een positieve buik (links) en een oppervlak met zowel een positieve als negatieve buik (rechts) (Dorrington, Jones, Danchy, & Pappa, 2004).

2.4 Kromtestraal/dikte verhouding

Het gedrag van een gekromd paneel is sterk afhankelijk van de verhouding tussen de kromtestraal en dikte (oftewel de a/t -ratio). Er zijn vier categorieën waarin een oppervlak in verdeeld kan worden (Hoogenboom, 2019):

1. Een zeer dikke schaal ($a/t < 5$): Een dergelijke schaal is structureel gezien niet een schaal; het dient driedimensionaal gemodelleerd te worden.
2. Een dikke schaal ($5 < a/t < 30$)
3. Een dunne schaal ($30 < a/t < 4000$): Afschuifvervorming is in deze categorie verwaarloosbaar klein.
4. Een membraan ($4000 < a/t$): Belasting wordt alleen via membraankrachten overgedragen.

De derde categorie is hier van belang, niet alleen omdat veel schalen hierin gecategoriseerd kunnen worden en dat dit de algemene perceptie is die men heeft van schalen, maar bovendien uit consistentie met voorgaande studies op hetzelfde gebied.

3 Voorgaande studies

Het onderzoek loopt sinds 2012, waarbij Dhr. Moerbeek in dat jaar de mogelijke invloed onderzocht van kromming op eigenfrequenties (Moerbeek, 2012). Hierbij werden verschillende vormen betrokken, zoals een cilinder en een catenoïde. Zijn bevindingen omvat dat wanneer de dikte toeneemt, de eigenfrequentie ook toeneemt. De lengte is ook van invloed: de eigenfrequentie wordt kleiner naarmate de lengte toeneemt. Voorts correspondeert bij cilinders, (psuedo)bollen en ellipsoïden een toenemende straal met een afnemende eerste eigenfrequentie.

Dhr. Metselaar heeft met behulp van een eindige elementen methode variabelen achterhaald die de eigenfrequenties van gekromde panelen beïnvloeden (Metselaar, 2013). Hierbij zijn er een aantal formules opgesteld waarbij de eigenfrequenties bepaald kunnen worden onder andere aan de hand van de kleinste kromtestraal, dikte en materiaaleigenschappen. Voor een accuraat resultaat dient er aan verschillende eisen te voldaan².

Mevr. Scheltema ontwierp een praktische formule voor het bepalen van de eerste eigenfrequentie (Scheltema, 2013):

$$f_{\text{dubbelgekromd, getwist, rechthoekig}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{\pi^4 h^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)^2 + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{R_{xy}} \right)^2 \right)}$$

Hierbij is de voorwaarde dat in zowel x als y richting er slechts één buik aanwezig is (halve trilling).

Dhr. Van Dijk heeft voor het bepalen van de eigenfrequentie van gekromde panelen onder invloed van ook membraankrachten de volgende formule aangekaart (Van Dijk, 2014):

$$f_{11, \text{curve, load}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\rho\pi^2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)^2 + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2} \right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E} \right)}$$

Dhr. Noortman is in 2015 verder gegaan. Zijn bevindingen tonen aan dat één formule niet nauwkeurig genoeg is voor een paneel dat zowel krommingen in beide richtingen als twist bevat (Noortman, 2015). Hij heeft om deze reden twee formules opgesteld: één voor twist en de ander voor kromming.

Mevr. Greijmans zocht een relatie met de formule van dhr. Noortman en de Gauss-kromming (Greijmans, 2016). Het resultaat hiervan is de volgende formule:

² Met name dient er een vierkant paneel aangehouden te worden met een zijdelengte tussen de 600 en 2000 mm.

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [A \cdot (k_{xx}^2 + k_{yy}^2) + B \cdot k_{xx}k_{yy} + C \cdot k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2\rho}}$$

Waarbij A, B en C categorieafhankelijke constanten zijn.

Dhr. Paasman probeerde de constanten uit de formule van Mevr. Greijmans vast te stellen (Paasman, 2016). Hierbij diende de opgeleverde formule binnen een foutmarge van 20% te zitten. Hier is de gauss-krommingsterm uit de formule van Mevr. Greijmans irrelevant gemaakt. Het resultaat is:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2\rho}}$$

Hiermee is bewezen dat een relatief nauwkeurige formule met zowel kromming als twist binnen één formule daadwerkelijk mogelijk is, ondanks de bevindingen van Dhr. Noortman.

In 2017 trachtte Dhr. Sluijs de invloed van kromming op de laagste eigenfrequentie vast te stellen (Sluijs, 2017). Bovendien onderzocht hij de mogelijkheid om de ontwerpformule uit te breiden zodat deze ook zadelvormige vlakken omvat. Zijn resultaat is de volgende ontwerpformule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2\rho}}$$

Dhr. Sluijs heeft de gauss-krommingsterm, dat Dhr. Paasman ontkende, weer betrokken. De bovenstaande formule is toepasselijk op anticlastische vlakken, met of zonder twist, met een foutmarge van maximaal 20%. Essentieel hier is dat de formule (voorlopig) alleen toegepast kan worden wanneer geldt: $k_{yy} = -k_{xx}$. Verder moet er voldoen aan een trillingsmodus van één buik. Een aanbeveling van dhr. Sluijs is het vinden van de grenzen (in dimensieloze eenheden) en om eventueel de genoemde ontwerpformule te testen met schalen met andere geometrische eigenschappen.

Interessant hierbij en zoals eerder uitgedrukt is dat de gauss-krommingsterm door de jaren heen steeds verworpen en weer betrokken wordt.

4 Modelling en Analyse

4.1 Mechanical APDL script

Voor het verkrijgen van resultaten wordt een script toegepast waar een oppervlak gegeneerd kan worden in het Mechanical APDL pakket van Ansys. Een korte samenvatting van de belangrijkste syntax van het programma wordt beschreven. Er wordt verondersteld dat de lezer bekend is met programmeren. Het script kan in drie fases verdeeld worden:

1. **Preprocessing:** De start van deze fase wordt weergegeven met “/PREP7” in het script. In deze fase kunnen materiaal en geometrische eigenschappen gedefinieerd worden. Verder worden de knooppunten samen met de elementen aangemaakt en eventuele lokaalassenstelsels afgebakend.
2. **Solution:** Hier worden de gewilde resultaten berekend. De fase wordt aangegeven met /SOLU in het script. Het type resultaten kan variëren van verplaatsingen tot temperatuur, mits aan de noodzakelijke input in de vorige fase is voldaan. In dit geval zijn de eigenfrequenties met de behorende modi van belang.
3. **Postprocessing:** Hiermee wordt de weergave van de resultaten bepaald. Voorbeelden hiervan zijn contourkaarten of een lijst met waarden. Dit wordt niet weergegeven in het script, maar in de gebruikersinterface van het programma.

Het commando “*DO” initieert een “for loop”. In het gehanteerde script wordt dit gebruikt om onder andere de knooppunten en randvoorwaarden vast te leggen.

4.2 Aanpak

De parametervergelijking voor het Enneper-oppervlak die hier gehanteerd wordt is het volgende:

$$\bar{x} = 2au(1+v^2 - \frac{1}{3}u^2)$$

$$\bar{y} = -2av(1+u^2 - \frac{1}{3}v^2)$$

$$\bar{z} = 2a(u^2 - v^2)$$

Met krommingen en gauss-kromming:

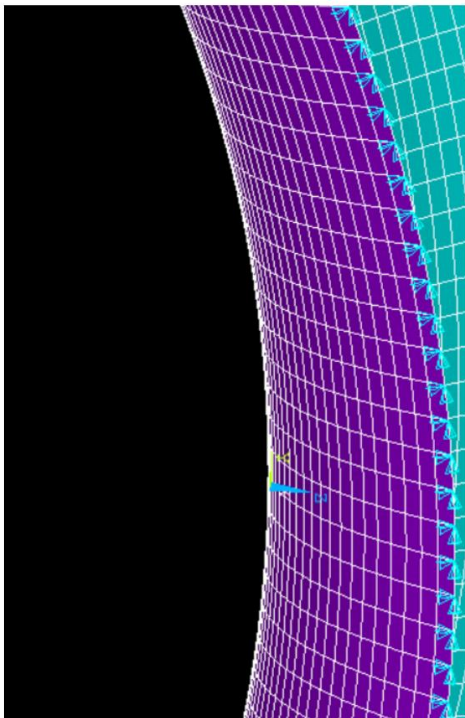
$$k_{xx} = \frac{-1}{a(1+u^2+v^2)^2} \quad K = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2 = k_{xx}k_{yy}$$

$$k_{yy} = \frac{1}{a(1+u^2+v^2)^2}$$

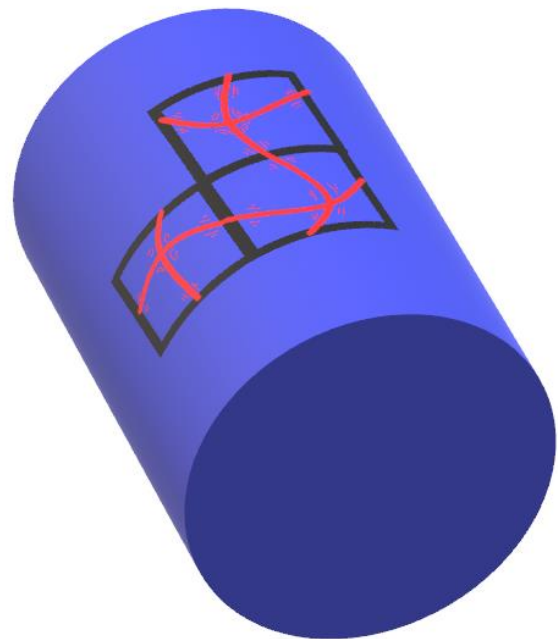
$$k_{xy} = 0$$

Alle zijden van het Enneper-oppervlak zijn even lang. Alle randknooppunten zijn zodanig opgelegd dat ze niet in lokale z-richting kunnen verplaatsen. Verder kunnen deze ook niet in de richting van het oppervlak verplaatsen; dit is, afhankelijk van de rand, in de x- of y-richting (zie figuur 4.1). Dit geldt zelfs wanneer het oppervlak zichzelf kruist (figuur 4.3). Deze randvoorwaarde, in het engels *diaphragm boundary conditions*, wordt toegepast om het gedrag van één gedeelte binnen een oppervlak te simuleren (zie figuur 4.2). Er wordt uitgegaan van een

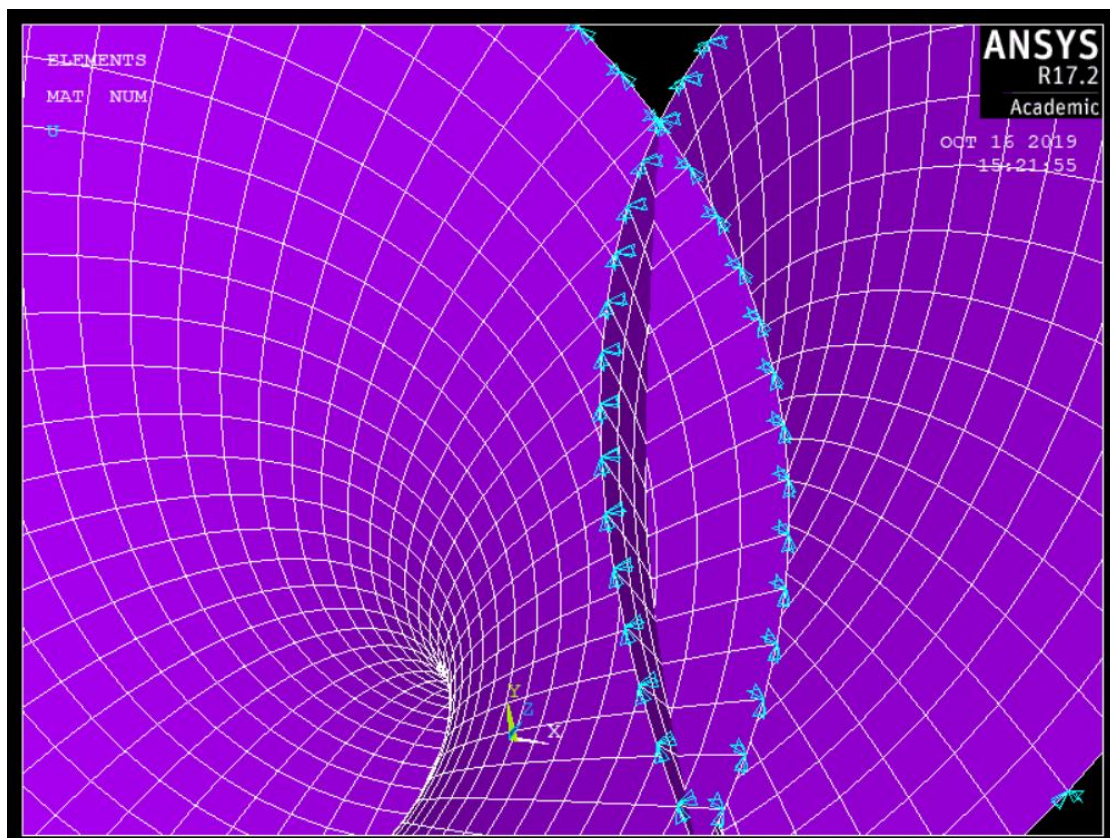
isotroop materiaal met de karakteristieken van staal tenzij anders gespecificeerd. Voor het behorende Mechanical APDL script, zie appendix A.



Figuur 4-1 Elk randknooppunt van het Enneper-oppervlak kan niet in de lokale Z-richting en in de richting van het oppervlak verplaatsen.



Figuur 4-2 Het gedrag van een gebogen plaat kan worden gesimuleerd door deze te verdelen in kleinere gebogen platen.



Figuur 4-3 Elke randknoop van het Enneper-oppervlak kan niet in de lokale Z-richting noch in de richting van het oppervlak bewegen.

Zoals eerder beschreven wordt onderzocht of de gauss-kromming een invloed heeft. De overige variabelen dienen constant te blijven. De lengte van een Enneper-oppervlak kan worden bepaald met:

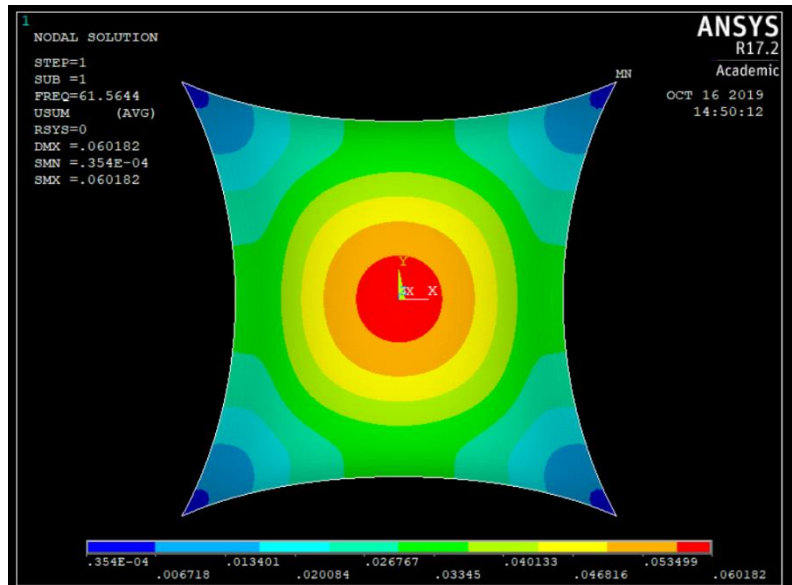
$$l = \frac{4}{3} (4 a b^3 + 3 a b)$$

De lengte is, net als de gauss-kromming, afhankelijk van de kromtestraal. Hierbij is “ b ” de absolute grenswaarde voor de parameters “ u ” en “ v ”. Bij een variërende Gauss-kromming en dus een variërende kromtestraal dient de grenswaarde zodanig gekozen te worden dat de lengte onveranderd blijft. De grenswaarde expliciet uitdrukken in lengte en kromtestraal geeft:

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{3 a^2 l + \sqrt{16 a^6 + 9 a^4 l^2}}}{2^{2/3} a} - \frac{2^{2/3} a}{\sqrt[3]{3 a^2 l + \sqrt{16 a^6 + 9 a^4 l^2}}} \right)$$

Met een functie gedefinieerd in Python worden de grenswaarden aan de hand van op de vorige pagina beschreven vergelijking bepaald waarbij de lengte een vaste waarde aanhoudt bij een steeds variërende kromtestraal. Zie appendix B voor de behorende code.

Voor het onderzoek ligt de focus op de eerste modus van het Enneper-oppervlak (zie figuur 4.4). De vorm van de modi zijn afhankelijk van meerdere variabelen (waaronder de grenswaarde). In het figuur is een contourkaart weergegeven waarin een rood gebied een maximale verplaatsing aanduidt en een blauw gebied een minimale verplaatsing aanduidt. Bij een trilling betekent dit dus in dit geval dat de hoekpunten zich vrijwel niet verplaatsen. Voor de gehanteerde eigenschappen en de eerste vijf modi, zie appendix C.



Figuur 4-4 Een eerste modus van een Enneper-oppervlak met maar één buik (zie Appendix C voor details).

Voor het testen van de hypothese wordt allereerst het aantal benodigde knopen vastgesteld voor een acceptabele numerieke nauwkeurigheid. De eerste eigenfrequentie van het oppervlak zal in een grafiek worden uitgezet tegen de gauss-kromming op de oorsprong van het behorend oppervlak. De redenering hiervoor is dat dit ongeveer het gemiddelde is voor een oppervlak met een grote straal. Als gewerkt wordt met kleine kromtestralen of als blijkt dat de gemiddelde gauss-kromming significant verschilt dan wordt het gemiddelde gehanteerd. De a/t -verhouding van elk oppervlak zal zich in het domein $30 < a/t < 4000$ bevinden. Vervolgens worden de resultaten, indien nodig, op significantie getoetst.

Als blijkt dat de hypothese verworpen kan worden zal de parametergrenzen van het Enneper-oppervlak afgebakend worden waarbij de invloed van de Gauss-kromming minimaal is.

4.3 Verificatie APDL-script

Zoals in Appendix A is weergegeven kan het script in drie belangrijke fases verdeeld worden:

1. Aanlegging van de knooppunten.
2. Het construeren van een lokaal assenstelsel op elk knooppunt.
3. Het toepassen van de randvoorwaarden.

Hier wordt het script op deze aspecten gecontroleerd. De gehanteerde waarden zijn zoals in Appendix A is beschreven. De afstand tussen twee knooppunten wordt zowel analytisch als door Ansys met het ingevoerde script berekend. De afstand tussen $u = v = 0$ en $u = 0, v = \frac{1}{2}$ wordt gekozen. Dit geeft $\Delta x = 0, \Delta y = \frac{11}{12}$ en $\Delta z = -\frac{1}{2}$.

De afstand wordt dan afgerond $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 1.0441$. In figuur 4.4 is te zien dat Ansys inderdaad hiermee overeenkomt. Hierbij is knooppunt 1201³ gelegen op $u = v = 0$ en knooppunt 1177 op $u = 0, v = \frac{1}{2}$.

```
The distance between nodes 1201 and 1177 in coordinate system 0 is:
DIST      DX (ND2-ND1)      DY (ND2-ND1)      DZ (ND2-ND1)
1.044163674      0.000000000      0.916666667      -0.500000000
```

Figuur 4-5 Afstandsberekening tussen twee knooppunten door Ansys.

Het nagaan de laatste twee aspecten verloopt gezamenlijk. Zoals eerder vermeld wordt er bij elk knooppunt een lokaal assenstelsel aangemaakt. De randvoorwaarden zijn gebaseerd op het lokale assenstelsel van elk punt. Op knooppunt 1201 met $u = v = 0$ komt het lokale assenstelsel overeen met het globale assenstelsel. Als de verplaatsing in de lokale z-as op dit knooppunt een bepaalde waarde heeft dan hoort de verplaatsing identiek te zijn in de globale z-as. De verplaatsing in de lokale z-as wordt bij knooppunt 1201 aan nul gesteld. Ansys zal de verplaatsing uitdrukken gebaseerd op het globale assenstelsel. Het blijkt dat Ansys dit inderdaad bevestigt (zie figuur 4.6).

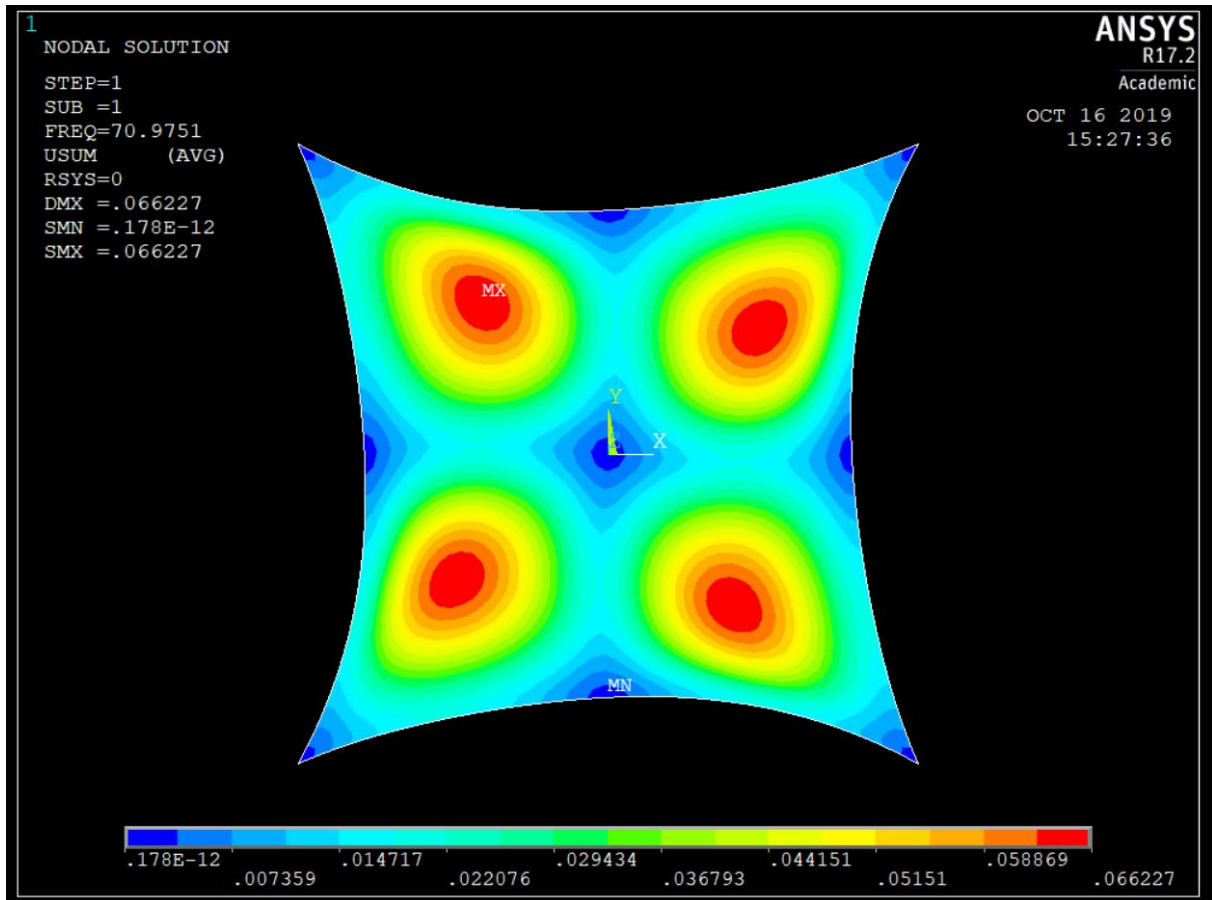
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1185	0.15764E-01	-0.37430E-12	-0.94109E-12	0.15764E-01
1186	0.16791E-01	-0.46190E-12	-0.10874E-11	0.16791E-01
1187	0.17533E-01	-0.53200E-12	-0.12234E-11	0.17533E-01
1188	0.17978E-01	-0.58567E-12	-0.13403E-11	0.17978E-01
1189	0.18117E-01	-0.61834E-12	-0.14346E-11	0.18117E-01
1190	0.17948E-01	-0.63449E-12	-0.14991E-11	0.17948E-01
1191	0.17474E-01	-0.63095E-12	-0.15319E-11	0.17474E-01
1192	0.16702E-01	-0.61469E-12	-0.15279E-11	0.16702E-01
1193	0.15647E-01	-0.58361E-12	-0.14874E-11	0.15647E-01
1194	0.14327E-01	-0.54615E-12	-0.14078E-11	0.14327E-01
1195	0.12763E-01	-0.50088E-12	-0.12914E-11	0.12763E-01
1196	0.10984E-01	-0.45666E-12	-0.11387E-11	0.10984E-01
1197	0.90184E-02	-0.41216E-12	-0.95380E-12	0.90184E-02
1198	0.69006E-02	-0.37579E-12	-0.74015E-12	0.69006E-02
1199	0.46662E-02	-0.34566E-12	-0.50452E-12	0.46662E-02
1200	0.23530E-02	-0.32892E-12	-0.25363E-12	0.23530E-02
1201	-0.41285E-12	-0.32226E-12	0.0000	0.52373E-12
1202	-0.23530E-02	-0.33012E-12	0.23180E-12	0.23530E-02
1203	-0.46662E-02	-0.34629E-12	0.45039E-12	0.46662E-02

Figuur 4-6 De lokale assenstelsels zijn correct geconfigureerd.

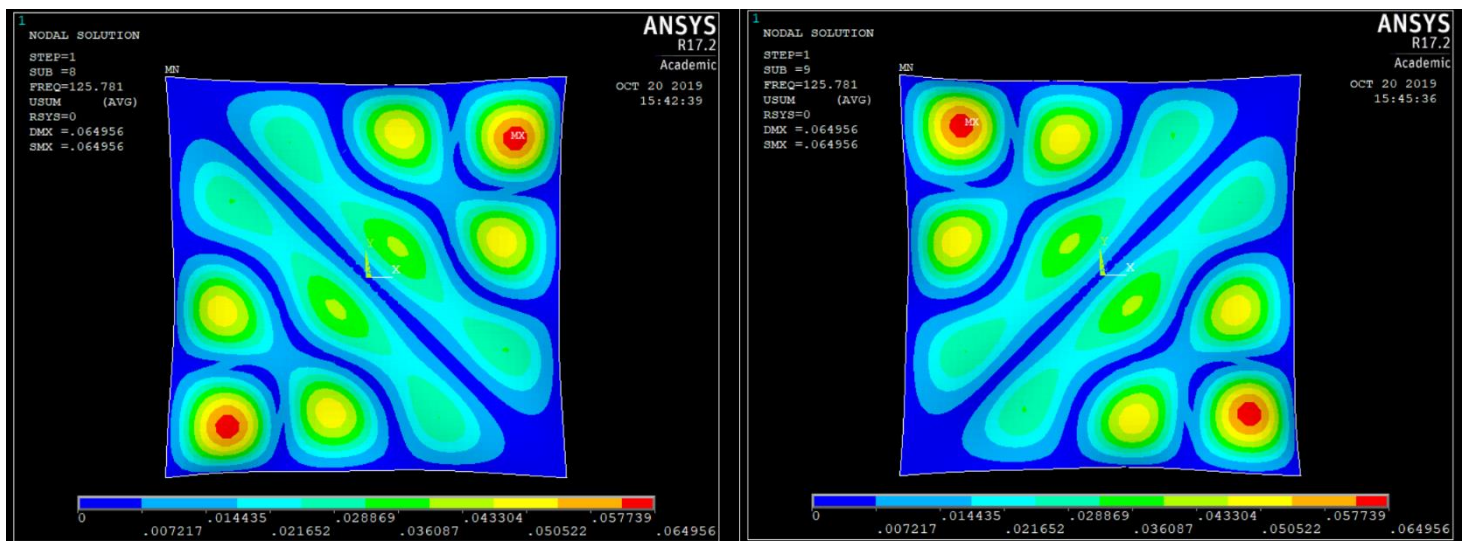
³ Aangezien in dit geval $n=48$ gehanteerd wordt en dus één zijde $n+1$ knooppunten lang is geldt bij het middelpunt $u = v = 0$ knooppuntnummer $((n+1) * (n+1) + 1) / 2 = 1201$. Bij $u = 0, v = \frac{1}{2}$ is dit een halve zijde eerder (het is gelegen aan de rand). Dit wordt dan $1201 - (n/2) = 1177$.

Dit is ook aan de bijbehorende contourkaart te zien (zie figuur 4.7). Merk op hoe de eerste modus dankzij de randvoorwaarde in de oorsprong nu vier buiken bevat in plaats van één.



Figuur 4-7 De contourkaart indien de verplaatsing in de lokale z-as op het middelste knooppunt beperkt wordt.

Voorts moet gelden dat er modi aanwezig zijn die symmetrisch zijn en die dezelfde frequentie bevatten. Hieraan wordt voldaan (zie figuur 4.8).



Figuur 4-8 Er zijn modi die onderling symmetrisch zijn met dezelfde eigenfrequenties.

4.4 Aantal knooppunten

Het aantal knooppunten dat een eindige elementenmethode hanteert kan de nauwkeurigheid van resultaten beïnvloeden. Om deze reden dient er eerst een keuze gemaakt te worden naar de kwantiteit van de gebruikte knooppunten.

Om tot een beslissing te komen wordt de eerste eigenfrequentie van een Enneper-oppervlak vergeleken met hetzelfde oppervlak en een verschillend aantal knooppunten. De eigenschappen van het oppervlak zijn in tabel 1 weergegeven.

<i>Parameter</i>	<i>Waarde</i>
L	2.667 m
t	0.02 m
a	1 m
E	210 GPa
ρ	7850 kg/m ³
ν	0.3
b	0.5

Tabel 1 Eigenschappen van het Enneper-oppervlak voor het vinden van het optimale elementenaantal.

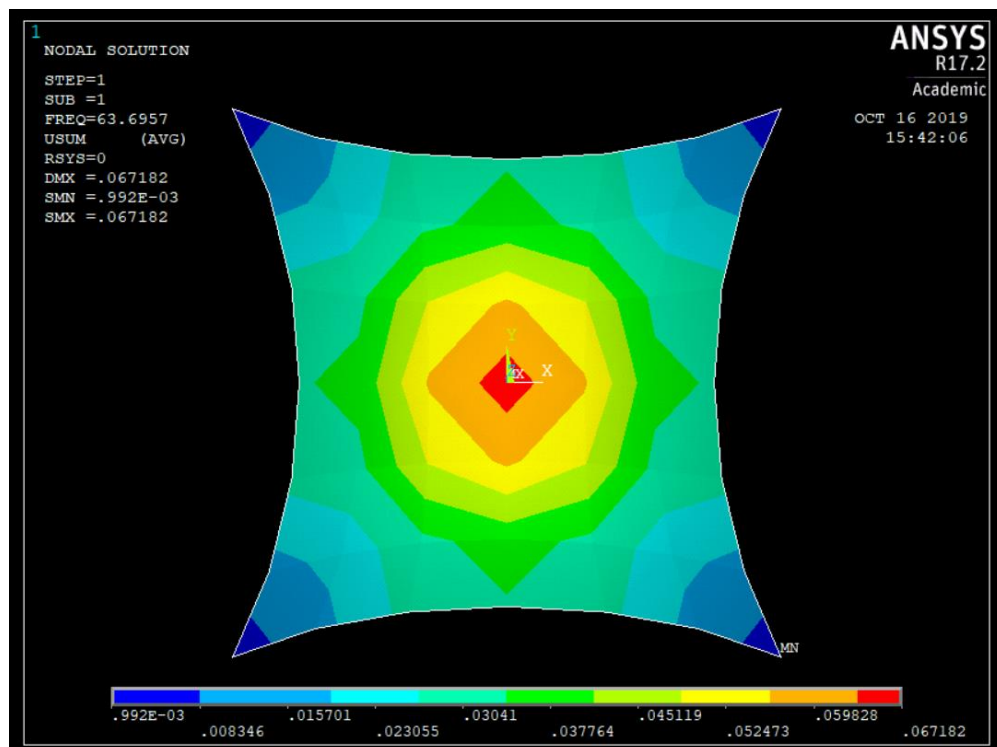
De resultaten zijn in tabel 2 weergegeven.

Aantal elementen per richting (n)	Eigenfrequentie eerste modus (Hz)	Afwijking eigenfrequentie t.o.v. $n=192$ (%)
6	63.696	3.48
12	61.697	0.24
24	61.597	0.073
48	61.564	0.0194
96	61.557	0.008
192	61.552	-

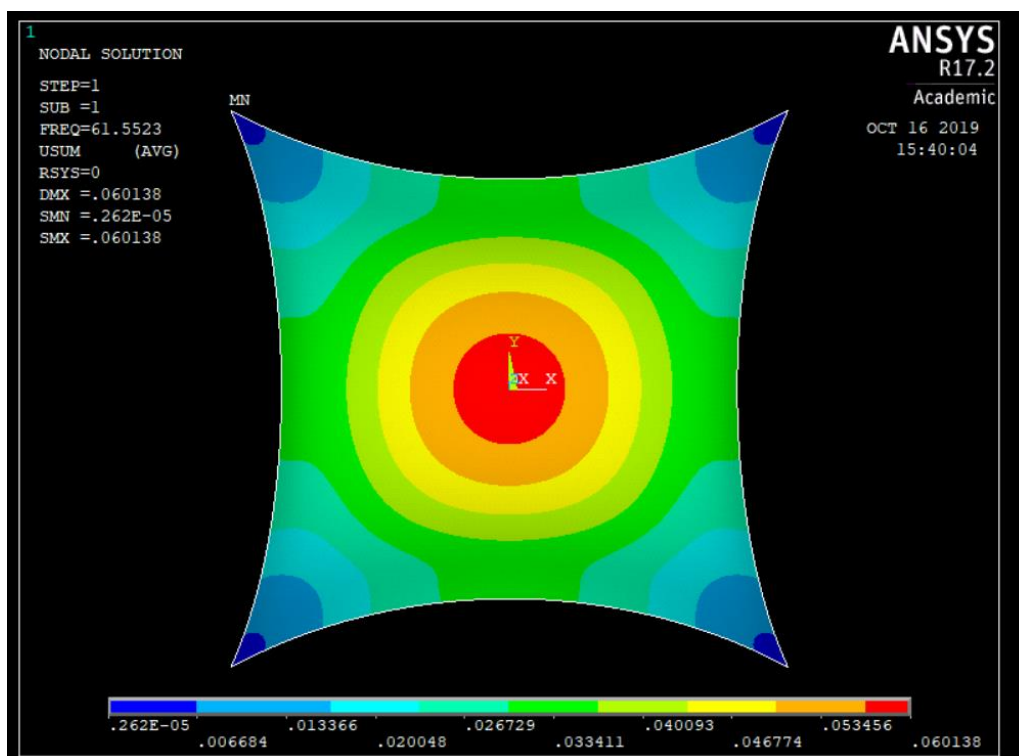
Tabel 2 Eigenfrequenties en bijbehorend aantal elementen voor het Enneper-oppervlak.

Al vanaf $n=12$ is de afwijking vergeleken met $n=192$ kleiner dan één procent. Verder lijken de resultaten typisch: de nauwkeurigheid neemt toe naarmate het aantal knooppunten toeneemt. Vanaf $n=24$ is de afwijking acceptabel. Ondanks deze observatie wordt er voor $n=48$ gekozen aangezien de rekentijd als bijna even lang wordt ervaren.

Een interessantere waarneming is te zien in de gegenereerde contourkaarten met betrekking tot het aantal gebruikte knooppunten (zie figuur 4.9 en 4.10). Zo is de contourkaart met $n=6$ vrij grof; de contourlijnen kunnen met eenvoud als rechte lijnen ontleed worden. Bovendien is deze vrij onnauwkeuriger; de maximale verplaatsing bij $n=6$ is 12% groter.



Figuur 4-9 Contourkaart voor $n=6$.



Figuur 4-10 Contourkaart voor $n=196$.

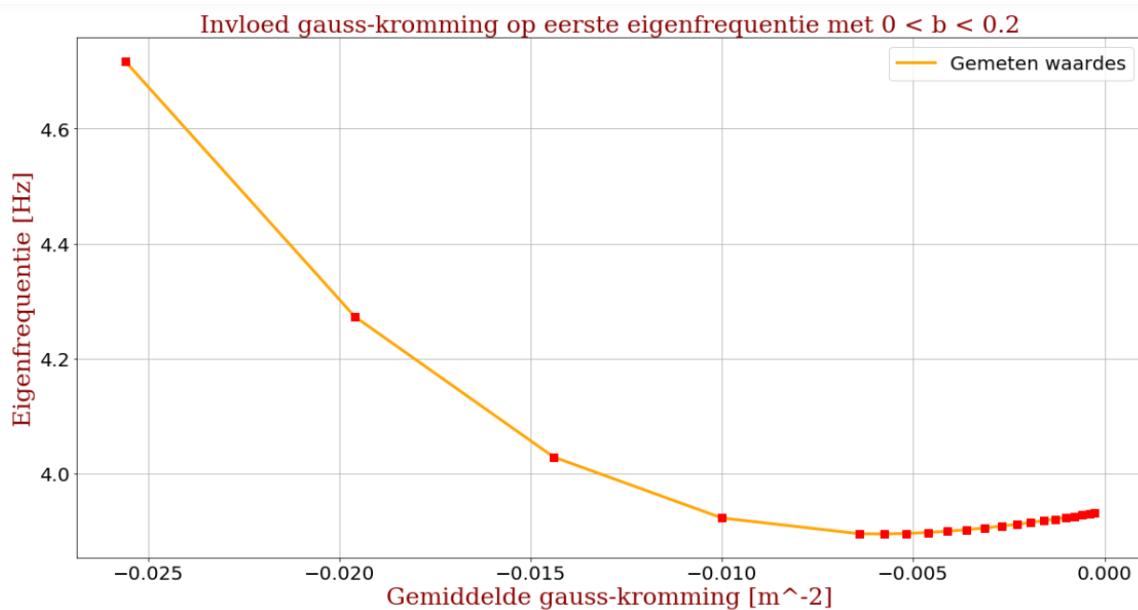
4.5 Invloed Gauss-kromming

In figuur 4.11 is de eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gauss-kromming op de oorsprong. De markeringen zijn de exacte waarden berekend door Ansys terwijl de lijngrafiek het resultaat is van de door Python uitgevoerde interpolatie. Een vaste zijdelengte van 5 meter is aangehouden en de parametergrenswaarde “ b ” varieert, zoals eerder beschreven, afhankelijk van de gekozen kromtestraal om deze lengte constant te houden (zie tabel 3 voor de gehanteerde parameters).

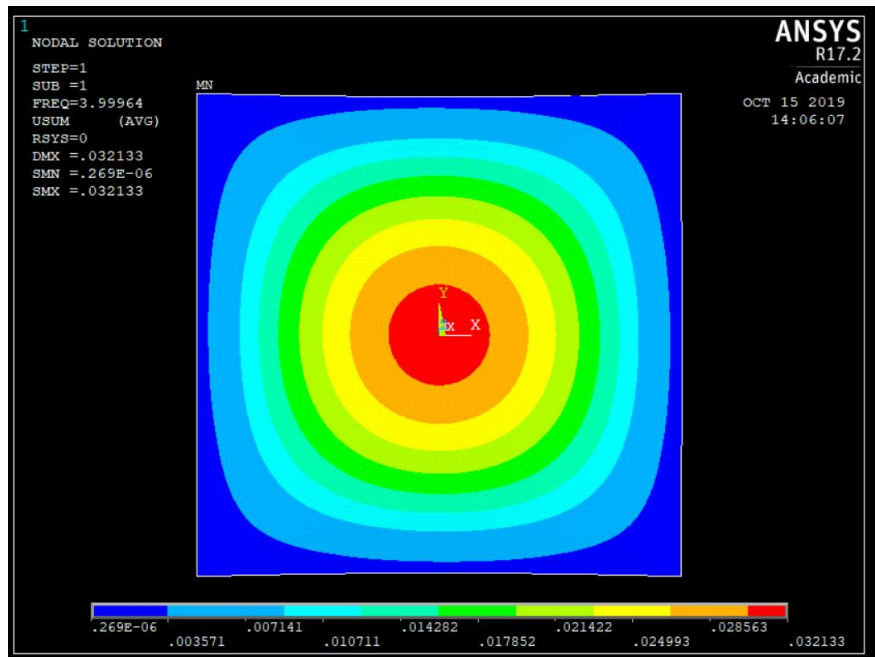
De eerste modus moet voor alle varianten constant zijn. Dit betekent dat er een domein voor b gedefinieerd moet worden waarbij de modus nagenoeg identiek blijft. Een domein van $0 < b < 0.2$ in combinatie met de eigenschappen uitgezet in tabel 4.3 worden gehanteerd om een eerste modus met één buik in stand te houden (zie figuur 4.12).

<i>Parameter</i>	<i>Waarde</i>
L	5 m
t	0.02 m
a	-
E	210 GPa
ρ	7850 kg/m ³
ν	0.3
b	-

Tabel 3 Gehanteerde parameters.



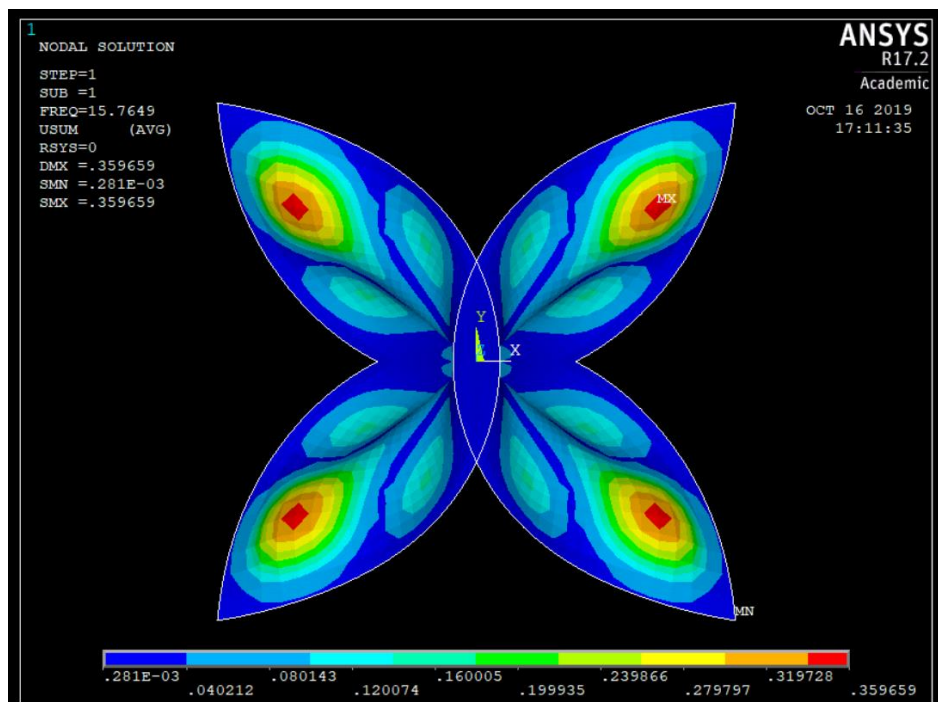
Figuur 4-11 De eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gemiddelde gauss-kromming.



Figuur 4-12 Een globaal beeld van de eerste modus indien $0 < b < 0.2$.

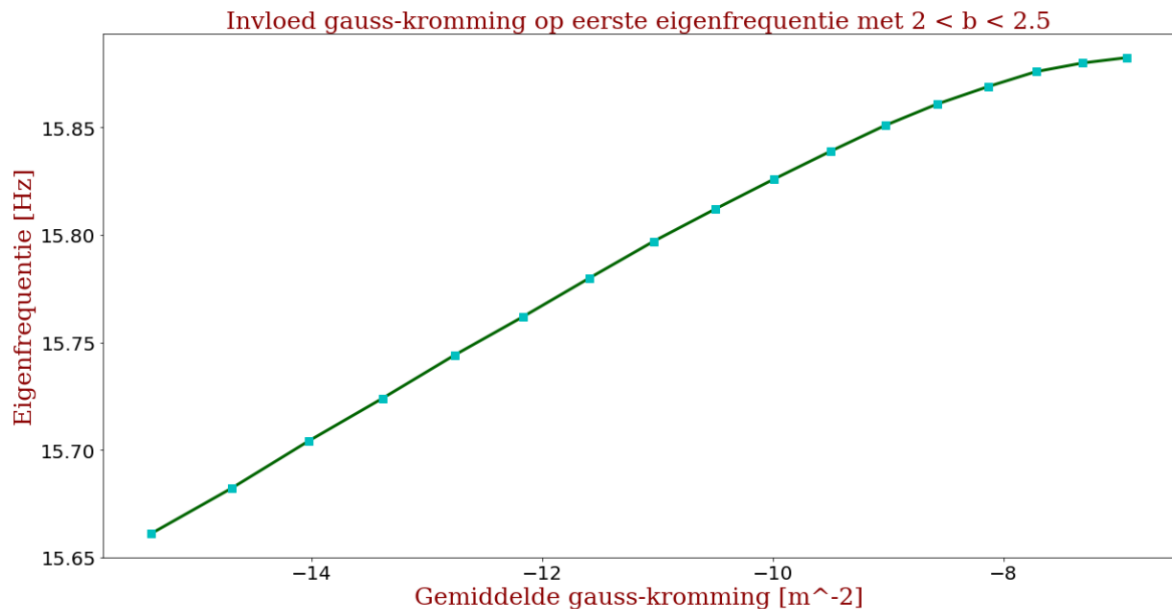
In figuur 4.11 is een kwadratisch verloop zichtbaar. Interessant hier is dat de eigenfrequentie eerst daalt naarmate de gauss-kromming in absolute waarde toeneemt.

Vervolgens zal voor b met domein $2 < b < 2.5$ gekozen worden. De dikte wordt dan gelijk gesteld aan 0.001 m om ervoor te zorgen dat in dezelfde a/t-categorie nog gewerkt wordt. Alle overige waarden, mits a en b vanzelfsprekend, zijn identiek. De behorende modus is zoals in figuur 4.13 is weergegeven. De karakteristieke vorm van het Enneper-oppervlak is nu duidelijk zichtbaar en de eerste modus bevat nu meerdere buiken.



Figuur 4-13 De vorm van de eerste modus indien $2 < b < 2.5$.

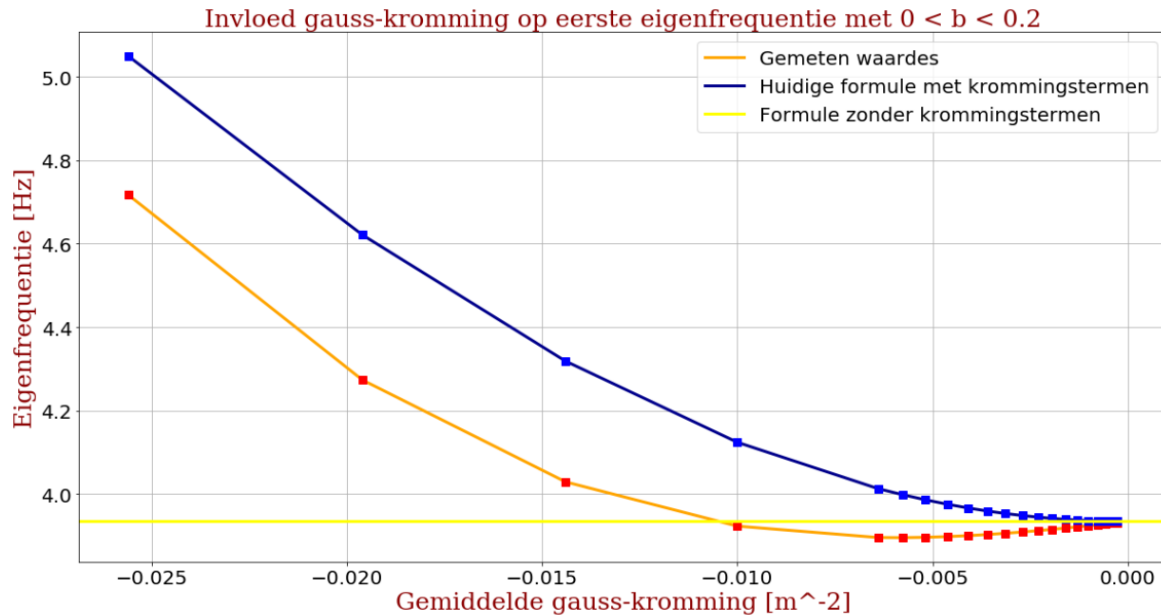
In figuur 4.14 is de eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gauss-kromming van het laatst genoemde geval en in Appendix D zijn de exacte berekende punten weergegeven. Zowel bij figuur 4.11 als figuur 4.14 werden de eigenfrequenties uitgezet tegen de gemiddelde gauss-kromming van het oppervlak. De gemiddelde gauss-kromming wordt berekend met behulp van python. Het script is in Appendix E uitgezet.



Figuur 4-14 De eerste eigenfrequentie uitgezet tegen de gauss-kromming met $2 < b < 2.5$.

In figuur 4.14 lijkt de gauss-kromming gering van invloed, maar een polynomiale verloop kan nog zeker geïnterpreteerd worden. Een argument waarom er in figuur 4.11 wel duidelijker een invloed lijkt te zijn is dat dit toegeschreven kan worden aan fouten die door middel van het eindige-elementenmethode en bijhorende programma zijn ontstaan. Hieronder vallen fouten ten gevolge van het aantal gehanteerde knooppunten en afrondingsfouten. Ondanks dit, echter, is het zeer waarschijnlijk zo dat dergelijke fouten niet verantwoordelijk kunnen zijn voor dergelijke drastische afwijkingen in resultaten. Volgens figuur 4.11 is er een relatie tussen de eerste eigenfrequentie en de gauss-kromming. Figuur 4.14, echter, schijnt tegenstrijdig met de wijze van relatie; de eigenfrequentie daalt naarmate de gauss-kromming in absolute waarde toeneemt. Wellicht dat dit kan liggen aan de eerste modus die hier vier buiken bevat eventueel in combinatie met de grote spreiding van de gauss-kromming binnen het oppervlak.

Het eerste geval met $0 < b < 0.2$ wordt vergeleken met de huidige ontwerpformule van de eigenfrequenties ontwikkeld door Dhr. Sluijs in 2017 met en zonder invloed van de gauss-term en zo tegelijkertijd alle krommingstermen⁴. Zoals eerder beschreven betreft het weer om een situatie waarbij het oppervlak één buik bevat. Dit resulteert in figuur 4.15.



Figuur 4-15 De gemeten waarden vergeleken met de huidige ontwerpformules.

Interessant genoeg is het verloop van de gemeten waarden vergelijkbaar met de huidige formule. Het verloop lijkt inderdaad kwadratisch en het feit dat de eigenfrequentie, zoals eerder beschreven, eerst daalt is verassend. De huidige ontwerpformule gaat ervan uit dat de gauss-kromming verloopt in kwadratische vorm $Ax^2 + Bx + C$ met $B = C = 0$. Figuur 4.15 suggereert dat de waarde van B niet nul is, afgezien van de mogelijke ontstane fouten, aangezien de grafiek eerst daalt vanaf de oorsprong voordat het toeneemt.

⁴ Aangezien er een Enneper-oppervlak bestudeerd wordt zijn twist en gemiddelde kromming irrelevant.

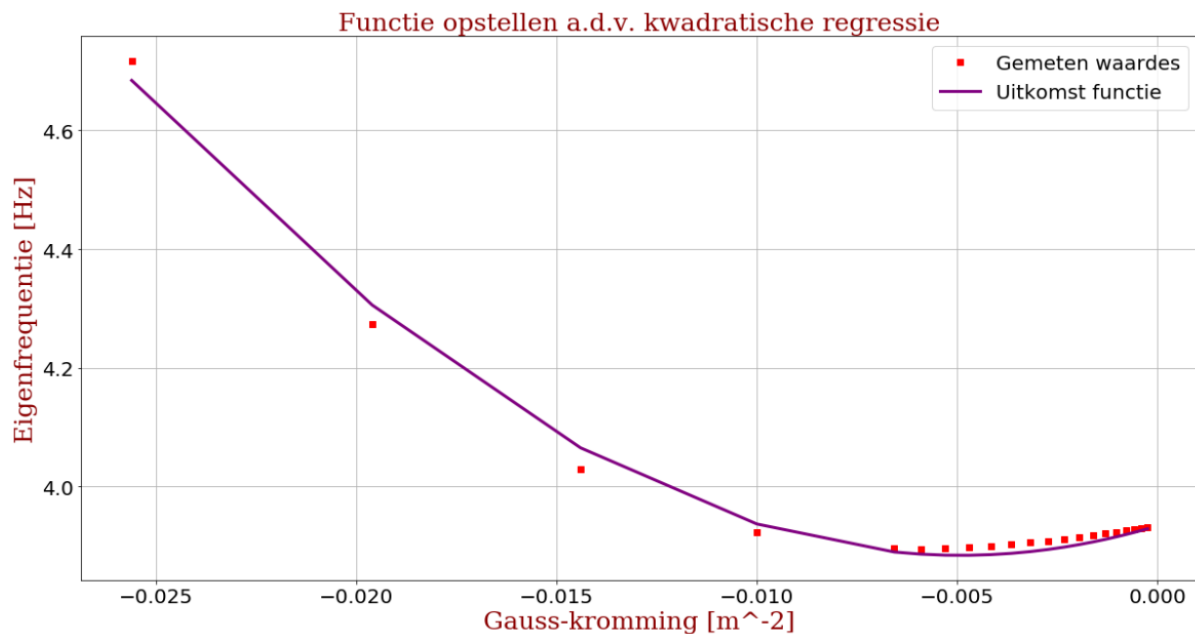
4.6 Parametergrenzen afbakenen

Nu bekend is dat de gauss-kromming wel invloed heeft op de eigenfrequenties dient de grenzen afgebakend te worden waarbij deze minimaal is op de eerste eigenfrequentie. Hierbij zal eerst van de lijngrafiek van figuur 4.11 een kwadratische regressie plaatsvinden.

De lijngrafiek heeft een kwadratisch verloop in de vorm: $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ met C:

$$\frac{\pi^2 E t^2}{12(1-\nu^2)\rho l^4}$$

De termen met betrekking tot de gemiddelde kromming en twist zijn hier uitgesloten. Ter wille van de beknoptheid zal met behulp van Python de variabele A en B door kwadratische regressie bepaald worden (zie Appendix F voor de bijbehorende code). Dit levert figuur 4.16 met A = 16041.17 en B = 158.02.



Figuur 4-16 Het resultaat van de kwadratische regressie.

Met de eigenschappen die in het begin van het hoofdstuk zijn beschreven kan a voor het Enneper-oppervlak als volgt uitgedrukt worden:

$$\frac{(K_g)^2 l^2 E}{264,02 * 16\pi^2 \rho}$$

Met B:

$$\frac{|(K_g)|E}{1072,1 * 16\pi^2 \rho}$$

Hierbij is de lengte weggelaten om aan de eenheid van frequentie te voldoen. De gevolgen van deze afwezigheid wordt niet op in gegaan.

Dit resulteert in de volgende formule:

$$f_n = \sqrt{\underbrace{\frac{\pi^2 E t^2}{12(1-v^2)\rho l^4}}_A + \underbrace{\left[\frac{(K_g)^2 l^2}{264,02} - \frac{|K_g|}{1072,1} \right]}_B \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Deze formule geldt voor een (eerste) modus met één buik. Imaginaire frequenties zijn mogelijk en het is dan duidelijk dat de formule niet meer op gaat. Belangrijk hierbij op te merken is dat deze dusver alleen voor het Enneper-oppervlak is getest en eigenlijk ook alleen voor dit geval bestemd is (de invloed van twist en gemiddelde kromming is hierbij weggelaten aangezien het een minimaaloppervlak betreft). Bovendien is deze slechts bedoeld om een afbakening te bepalen; deze formule wordt snel onnauwkeurig in het geval van een (lichte) verandering in eerste modus. Verder dient er gewerkt te worden met een gemiddelde gauss-kromming (K_g).

In figuur 4.15 is te zien dat de invloed van de gauss-kromming voor een paneel met zijdelengte 5 m gering is wanneer $|K_g| < 0.01 \text{ m}^{-2}$. Algemener kan worden gesteld dat de termen A en B gelijk aan elkaar dienen te zijn. De vergelijking A = B oplossen geeft:

$$|K_g| = \frac{1}{4l^2}$$

Om ervoor te zorgen dat de gauss-kromming een kleine invloed heeft op de eerste eigenfrequentie van een Enneper-oppervlak dient dan het volgende te gelden:

$$|K_g| < \frac{1}{4l^2}$$

Zodat de eerste eigenfrequentie maximaal 10% afwijkt van de huidige vergelijking zonder krommingstermen:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2 E t^2}{12(1-v^2)\rho l^4}}$$

5 Discussie

Essentieel hierbij te vermelden is dat de voornoemde grens niet allesomvattend is om tenminste deze redenen:

1. Voor dezelfde zijdelengte is er een verschillende gemiddelde gauss-kromming van het oppervlak mogelijk. De grens houdt hier geen rekening mee. Er kunnen dus gevallen plaatsvinden waar de opgestelde voorwaarde beweert dat het desbetreffende paneel zeer beïnvloed wordt door de gauss-kromming terwijl dit niet het geval is. Het schijnt dat deze voorwaarde effectiever is wanneer de gemiddelde gauss-kromming van orde 10^{-2} en kleiner is.
2. Het Enneper-oppervlak is symmetrisch en de gauss-kromming hierbij dus ook. De invloed van asymmetrische gauss-krommingen binnen een oppervlak op de eerste eigenfrequentie is niet onderzocht.

Benadrukt moet worden dat de grens niet perfect nauwkeurig is, zoals vermeld in het hoofdstuk hiervoor. Voor zover is het bedoeld om een grove schatting van de mogelijke invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie te bepalen en is het niet bedoeld voor een willekeurig (asymmetrisch) gekromd paneel. Zoals eerder beschreven zijn imaginaire eigenfrequenties mogelijk en het is dan vanzelfsprekend dat dit niet meer op gaat. Dit kan gereproduceerd worden door de dikte t zeer klein te nemen.

6 Conclusie en aanbevelingen

6.1 Conclusie

Aanvankelijk is er een hoofdvraag gesteld en het onderzoek was gericht om deze vraag te beantwoorden.

Hoofdvraag - : Heeft de gauss-kromming invloed op de eigenfrequenties van vierkante schaalconstructies waarvan de randen rollend zijn opgelegd?

Uit dit rapport is gebleken dat de gauss-kromming wel invloed heeft op de eigenfrequenties van gekromde panelen. Dit is gedemonstreerd door een Enneper-oppervlak die zich ondervindt aan *diaphragm boundary conditions* om een realistisch scenario te beschrijven. Vervolgens werden eigenfrequenties van varianten van het Enneper-oppervlak met alleen verschillende gauss-krommingen gemeten en onderling vergeleken.

De voorwaarde waarbij de gauss-kromming een minimale invloed heeft op de eerste eigenfrequentie is wanneer:

$$|K_g| < \frac{1}{4l^2}$$

Tot dusver geldt deze voorwaarde alleen voor het Enneper-oppervlak en is het zelfs voor dit oppervlak niet allesomvattend. Als de gemiddelde gauss-kromming van het bestudeerde oppervlak kleiner is dan het rechterlid, dan wijkt de eigenfrequentie met maximaal 10% af van de huidige ontwerpformule zonder krommingstermen.

Belangrijk hierbij te vermelden is dat deze percentage gebaseerd is op een beperkt aantal proeven en kan hierdoor niet met de grootste zekerheid worden gesteld.

6.2 Aanbevelingen

Nu blijkt dat de gauss-kromming van invloed is op de eerste eigenfrequentie is het allereerst aan te raden in hoeverre de opgestelde voorwaarde relevant is bij willekeurige (asymmetrische) gekromde panelen eventueel in combinatie met verschillende materiaaleigenschappen.

Een vervolgonderzoek kan bestaan uit het bepalen van de afbakening van de grenzen waarbij de gauss-kromming gering van invloed is voor een algemene situatie.

Wat merkwaardig is, is de mogelijke relatie van de gauss-kromming op tenminste de eerste eigenfrequentie indien de eerste modus meerdere buiken bevat eventueel in combinatie met een zeer grote gemiddelde gauss-kromming (zie figuren 4.13 en 4.14). Wellicht dat de invloed van de gauss-kromming op de eigenfrequentie na een bepaalde waarde afvlakt of zelfs in zo'n geval helemaal niet van invloed is.

7 Bibliografie

Wright, G. R. (2009). Ancient building technology, volume 3: construction (2 Vols). Brill.

Taq Kasra reconstruction. (2017). Opgehaald van: <https://kavehfarrok.com/military-history-1900-present/jens-kroger-ctesiphon/>

Oppolzer, K. (2016). Overblijfsel van de stenenboog van de Taq Kasra. Opgehaald van: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ctesiphon_01.jpg

Heinrich Schmidt, J. (1934). L'expédition de Ctésiphon en 1931-1932. Syria. Archéologie, Art et histoire, 15(1), 1-23.

Hoogenboom, P.C.J. Notes on shell structures, Reader TU Delft, 2019, online: http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_schedule.html

Sluijs, J. Eigenfrequentie van gekromde panelen; Uitbreiding van de ontwerpformule voor zadelvormige panelen, Bacheloreindproject TU Delft, 2017, online: http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_sluijs.pdf

Nicoguaro, (2016). *Gaussian curvature - Wikipedia* [Foto]. Geraadpleegd van https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_curvature

Stewart, J. M. (2017). *Python for scientists*. Cambridge University Press.

Dierkes, U., Hildebrandt, S., & Sauvigny, F. (2010). Minimal surfaces. In *Minimal Surfaces* (pp. 53-90). Springer, Berlin, Heidelberg. The Helicoid. (n.d.). Opgehaald 21 september 2019, van: https://www.math.hmc.edu/~egu/curves_and_surfaces/surfaces/helicoid.html

Fomenko, A. T., & Tuzhilin, A. A. (2005). *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space* (Vol. 93). American Mathematical Soc..

Euler, L. (1952). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Bhatt, P. (2010). *Maximum Marks Maximum Knowledge in Physics*. Allied Publishers.

Billah, K. Y., & Scanlan, R. H. (1991). Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, 59(2), 118-124.

Fisher, B. (2004, 26 februari). *Surface Curvature*. Geraadpleegd op 24 oktober 2019, van <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/BOOKS/FSTO/node28.html>

The Catenoid. (n.d.). Opgehaald 21 september 2019, van: https://www.math.hmc.edu/~gu/curves_and_surfaces/surfaces/catenoid.html

CK-12 Foundation. (2017). Functions on a Coordinate Plane [Foto]. Geraadpleegd van <https://www.ck12.org/algebra/functions-on-a-coordinate-plane/lesson/Functions-on-a-Cartesian-Plane-BSC-ALG/>

- Dorrington, A. A., Jones, T. W., Danehy, P. M., & Pappa, R. S. (2004). Membrane vibration analysis above the Nyquist limit with fluorescence videogrammetry.
- Schoen, A. H. (1970). Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections.
- Karcher, H., & Polthier, K. (1996). Construction of triply periodic minimal surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 354(1715), 2077-2104.
- Deng, Y., & Mieczkowski, M. (1998). Three-dimensional periodic cubic membrane structure in the mitochondria of amoebae *Chaos carolinensis*. *Protoplasma*, 203(1-2), 16-25.
- Whitehead, S. (2019). Triply Periodic Minimal Surfaces [Foto]. Geraadpleegd van <https://wewanttolearn.wordpress.com/2019/02/03/triply-periodic-minimal-surfaces/>
- Moerbeek, C. M. (2012). De invloed van kromming op de eigenfrequentie van oppervlaktes. TU Delft.
- Metselaar, L. (2013). Ontwerpformule voor eigenfrequenties van gekromde panelen. TU Delft.
- Scheltema, A. (2013). BSc Eindwerk Eigenfrequenties, Dubbele Krommingen & Twist. TU Delft.
- Van Dijk, R. (2014). Bachelor Eindwerk Eigenfrequentie van belaste panelen. TU Delft.
- Noortman, F. (2015). Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen. TU Delft.
- Greijmans, M.A. (2016). Eigenfrequenties van schalen - Uitbreiding van de ontwerpformule. TU Delft.
- Paasman, Y. (2016). Eigenfrequentie van gekromde panelen - Totstandkoming van een ingenieursformule. TU Delft.

7.1 Appendix A: Ansys Mechanical APDL script – Enneper-oppervlak

! Natural frequencies of Enneper's surface

! Written by Luuk Metselaar 5 May 2013

! changed by Pierre Hoogenboom 20 February 2017

! changed by Nabil el Bouayadi 26 September 2019

b = 2 ! - $-b < u < b, -b < v < b$

h = 0.001 ! m thickness

a = 0.01 ! m radius of curvature

E = 2.1e11 ! N/m² Young's modulus

nu = 0.3 ! - Poisson's ratio

rho = 7850 ! kg/m³ mass density

n = 48 ! - number of elements in both directions (even)

/PREP7

MPTEMP,,,,,,,, ! isotropic material

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,E

MPDATA,PRXY,1,,nu

MPDATA,DENS,1,,rho

ET,1,SHELL181 ! element type: 4 node quadrilateral

R,1,h,h,h,h,, ! element thickness

*DO,j,-n/2,n/2,1 ! put nodes

*DO,i,-n/2,n/2,1

u= 2*i*b/n

v= 2*j*b/n

x= 2*a*u*(1+v**2-u**2/3)

y=-2*a*v*(1+u**2-v**2/3)

z= 2*a*(u**2-v**2)

N,,x,y,z,,

```

*ENDDO
*ENDDO

*DO,j,1,n          ! put elements
*DO,i,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO

*DO,j,-n/2,n/2,1    ! rotate node coordinate systems
*DO,i,-n/2,n/2,1
  u= 2*i*b/n
  v= 2*j*b/n
  xi= 2*a*(1-u**2+v**2)
  yi=-4*a*v*u
  zi= 4*a*u
  li=SQRT(xi**2+yi**2+zi**2)
  xj= 4*a*v*u
  yj=-2*a*(1+u**2-v**2)
  zj=-4*a*v
  lj=SQRT(xj**2+yj**2+zj**2)
  NANG,1+(i+n/2)+(j+n/2)*(n+1),xi/li,yi/li,zi/li,xj/lj,yj/lj,zj/lj
*ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,n+1,1      ! put diaphragm boundary condition
D,i,UZ,0
D,i,UX,0
D,n*(n+1)+i,UZ,0
D,n*(n+1)+i,UX,0
D,i*(n+1)-n,UZ,0

```

```
D,i*(n+1)-n,UY,0
D,i*(n+1),UZ,0
D,i*(n+1),UY,0
*ENDDO

/SOLU          ! compute eigenfrequencies
ANTYPE,MODAL
MODOPT,LANB,20,,,,,
MXPAND,20
SOLVE
FINISH
```

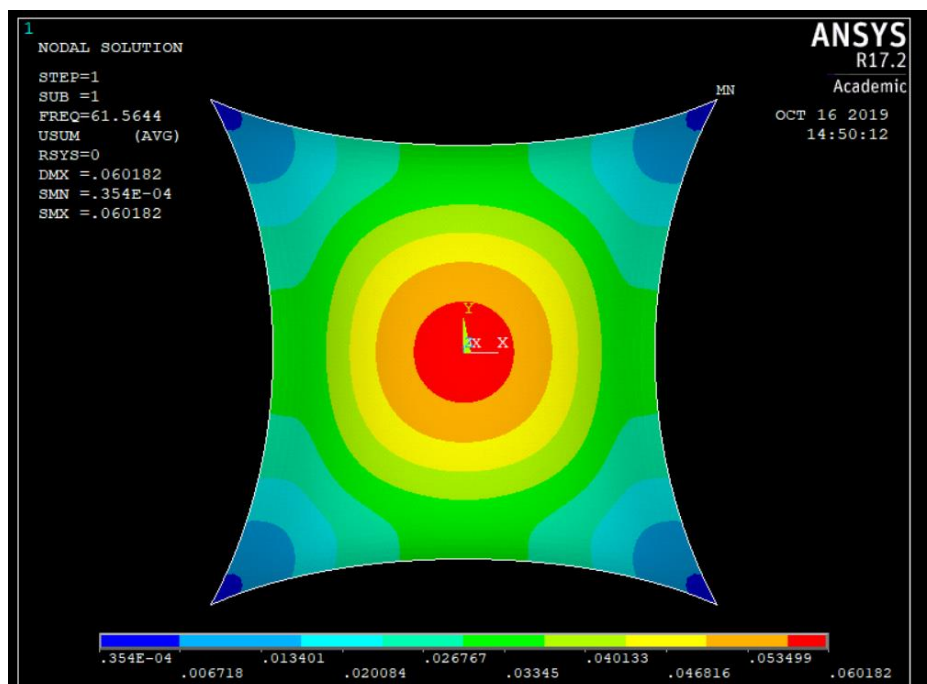
7.2 Appendix B: Python code – Bepaling absolute grenswaarde

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.figure(figsize=(20,10))

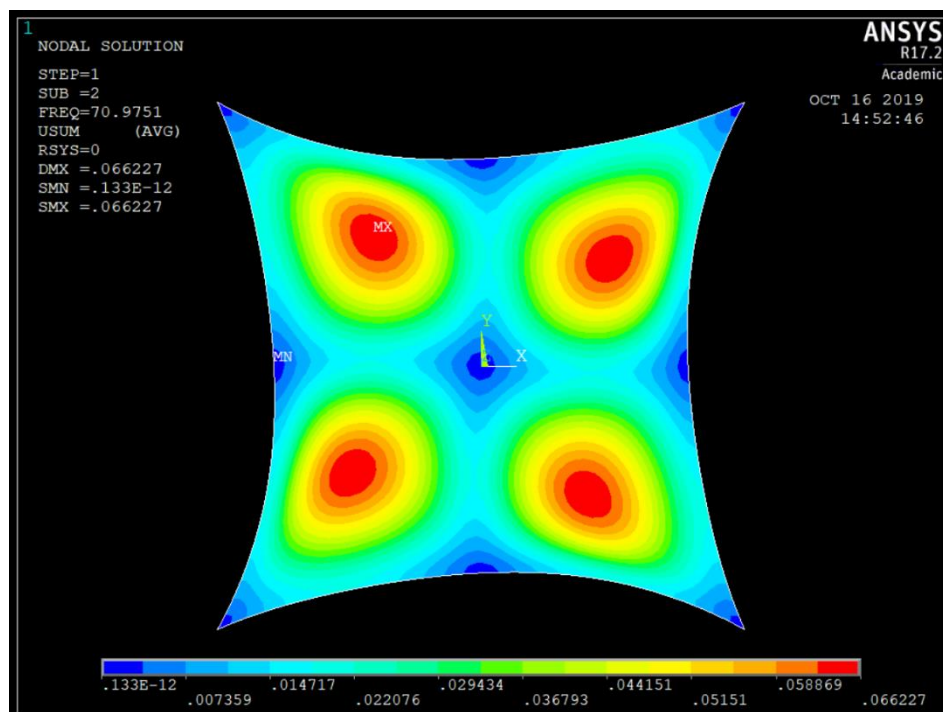
def constantlength():
    l = 5
    a = np.linspace(0.6,80,30)
    b = 1/2*((3*a**2*l + np.sqrt(16*a**6 + 9*a**4*l**2))**(1/3)/(2**(2/3)*a) -
    (2**(2/3)*a)/(3*a**2*l + np.sqrt(16*a**6 + 9*a**4*l**2))**(1/3))
    gc = -(1/a**2)
    return a,b,gc
```

7.3 Appendix C: Enneper-oppervlak – Modi voorbeelden

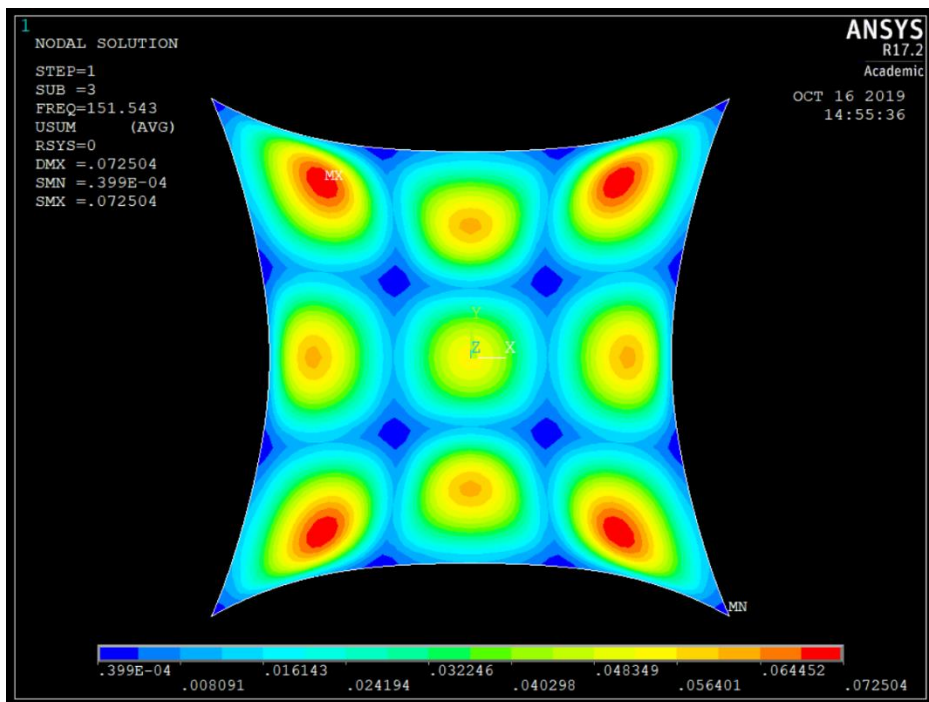
De onderstaande eerste vijf modi zijn gebaseerd op de waarden uit Tabel 4.1.



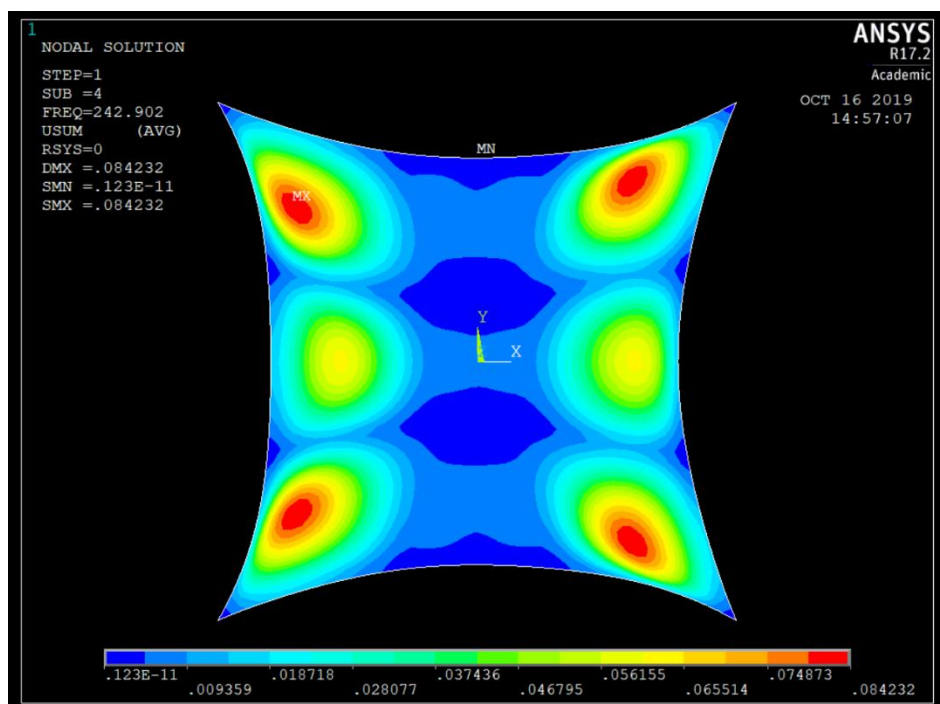
Figuur 7-1 Eerste modus van een Enneper-oppervlak.



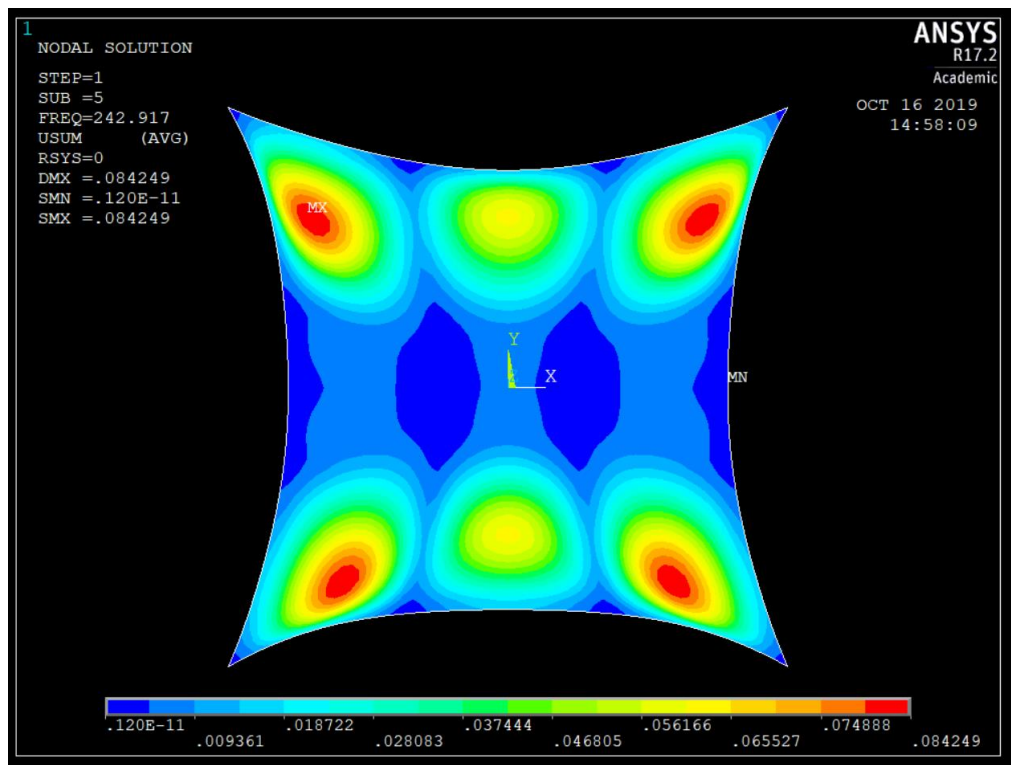
Figuur 7-2 Tweede modus van een Enneper-oppervlak.



Figuur 7-3 Derde modus van een Enneper-oppervlak.



Figuur 7-4 Vierde modus van een Enneper-oppervlak.



Figuur 7-5 Vijfde modus van een Enneper-oppervlak.

7.4 Appendix D: Tabel – Eerste eigenfrequentie uitgezet tegen gauss-kromming

L [m]	a [m]	b [-]	K [m ²]	f_0 [Hz]
5	62.467	0.020	-0.00026	3.9310
5	49.958	0.025	-0.00040	3.9295
5	41.617	0.030	-0.00058	3.9277
5	35.656	0.035	-0.00078	3.9257
5	31.183	0.040	-0.00102	3.9233
5	27.703	0.045	-0.00130	3.9207
5	24.917	0.050	-0.00160	3.9178
5	22.636	0.055	-0.00194	3.9148
5	20.734	0.060	-0.00230	3.9116
5	19.123	0.065	-0.00270	3.9084
5	17.741	0.070	-0.00314	3.9053
5	16.543	0.075	-0.00360	3.9023
5	15.493	0.080	-0.00410	3.8996
5	14.566	0.085	-0.00462	3.8974
5	13.740	0.090	-0.00518	3.8957
5	13.001	0.095	-0.00577	3.8949
5	12.336	0.100	-0.00640	3.8952
5	9.796	0.125	-0.010	3.9226
5	8.091	0.15	-0.0144	4.0287
5	6.863	0.175	-0.0196	4.2730
5	5.934	0.2	-0.0256	4.7171

Tabel 4 Berekende waarden van de invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie met $0 < b < 0.2$.

De tweede tabel maakt gebruik van een dikte $t = 0.001$ m. Alle overige materiaaleigenschappen zijn identiek aan de vorige tabel.

L [m]	a [m]	b [-]	K [m ²]	f_0 [Hz]
5	0.0987	2.0000	-6.9264	15.8825
5	0.0947	2.0312	-7.3097	15.8800
5	0.0908	2.0625	-7.7097	15.8760
5	0.0872	2.0938	-8.1268	15.8690
5	0.0838	2.1250	-8.5618	15.8610
5	0.0805	2.1562	-9.0150	15.8510
5	0.0774	2.1875	-9.4870	15.8390
5	0.0745	2.2188	-9.9785	15.8260
5	0.0717	2.2500	-10.4899	15.8120
5	0.0690	2.2812	-11.0218	15.7970
5	0.0665	2.3125	-11.5749	15.7800
5	0.0641	2.3438	-12.1497	15.7620
5	0.0618	2.3750	-12.7468	15.7440
5	0.0596	2.4062	-13.3669	15.7240
5	0.0575	2.4375	-14.0105	15.7040
5	0.0555	2.4688	-14.6783	15.6820
5	0.0536	2.5000	-15.3710	15.6610

Tabel 5 Berekende waarden van de invloed van de gauss-kromming op de eerste eigenfrequentie met $2 < b < 2.5$.

7.5 Appendix E: Python script – Gemiddelde gauss-kromming Enneper-oppervlak

```
def averageK(b,a):  
    n = 48  
    c = np.linspace(0,b,n+1)  
    p = 0  
    for i in range(len(c)):  
        for j in range(len(c)):  
            kxx, kyy = -1/(a*(1+c[i]**2+c[j]**2)**2),1/(a*(1+c[i]**2+c[j]**2)**2)  
            p+= kxx*kyy  
    return p/len(c)**2
```

7.6 Appendix F: Python code - Kwadratische regressie

```
font = {'family': 'serif',  
        'color': 'darkred',  
        'weight': 'normal',  
        'size': 25,  
        }
```

```
plt.figure(figsize=(20,10))  
plt.xticks(fontsize=20)  
plt.yticks(fontsize=20)
```

```
def func(x,a,b):  
    return a*x**2+b*x+3.9337  
a,b = curve_fit(func,xf,fn1)[0]  
plt.plot(xf,fn1,'rs')  
plt.plot(xf,func(xf,a,b),'purple',linewidth=3)  
plt.xlabel('Gauss-kromming [m^-2]',font)  
plt.ylabel('Eigenfrequentie [Hz]',font)  
plt.legend(['Gemeten waardes','Uitkomst functie'],fontsize=20)  
plt.title('Functie opstellen a.d.v. kwadratische regressie',font)
```