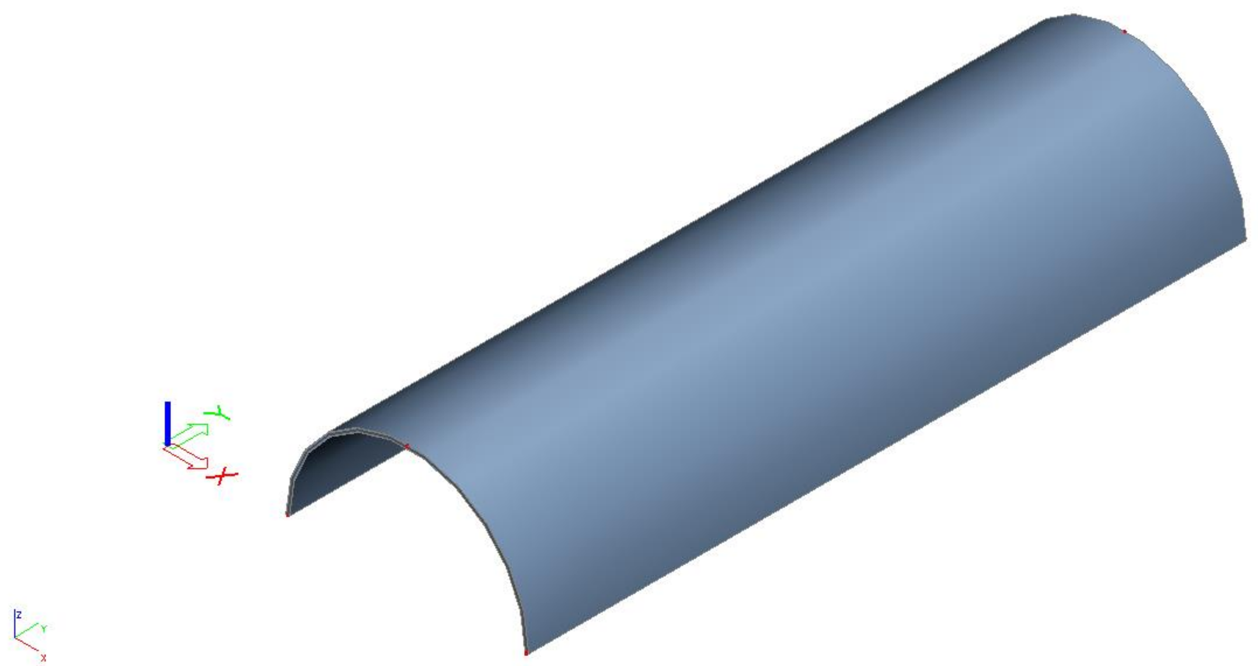
M. Farchich
4914341

Eindige-elementenmethode voor schaalconstructies

Het verband tussen rekenresultaat en elementgrootte in SCIA Engineer



Eindige-elementenmethode voor schaalconstructies

Het verband tussen rekenresultaat en elementgrootte in SCIA Engineer

Door

M. Farchich
4914341

in gedeeltelijke vervulling van de eisen voor de graad van

Bachelor of Science
in Civil Engineering

aan de Technische Universiteit Delft

Begeleiders: Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. C. Kasbergen

TU Delft

Voorwoord

Voor u ligt het eindrapport van een onderzoek naar de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode voor schaalconstructies in het programma SCIA Engineer. Het onderzoek is gedurende acht weken door mij uitgevoerd in het kader van de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft.
Dit rapport kan gebruikt worden door lezers die geïnteresseerd zijn in de eindige-elementenmethode en door onderzoekers die een vergelijkbaar onderzoek uitvoeren naar de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode voor schaalconstructies in eindige-elementenprogramma's. Lezers die geïnteresseerd zijn in de ordegroottes van de convergentie van de krachten in de schaalconstructie kunnen deze vinden in de resultatentabel in paragraaf 4.2.
Ik ben veel dank verschuldigd aan dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. C. Kasbergen voor de goede begeleiding, hun waardevolle adviezen en voor de tijd die ze hebben vrijgemaakt om mij te ondersteunen tijdens het onderzoek.

M. Farchich
Utrecht, Juni 2021

Samenvatting

De eindige-elementenmethode is een numerieke methode waarmee het fysische gedrag van complexe constructies kan worden benaderd. Vanwege de grote hoeveelheid berekeningen die doorgaans daarbij gemaakt moeten worden, worden deze door speciale eindige-elementenprogramma's uitgevoerd. In dit rapport wordt er gebruik gemaakt van het programma SCIA Engineer. De nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode is afhankelijk van de elementgrootte. Kleinere elementen zorgen voor een grotere nauwkeurigheid. Echter, bij veel elementen moeten er veel bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen) uitgevoerd worden door de computer. Dit leidt tot het verliezen van nauwkeurigheid. Het exacte antwoord kan niet worden berekend. Voor normale constructieberekeningen is dat geen probleem, want deze hoeven geen grote nauwkeurigheid te hebben. Toch is er wetenschappelijk gezien wel een probleem. Het is namelijk lastig om het verband vast te stellen tussen het rekenresultaat en de elementgrootte; er zit ruis op de data. Het is moeilijk om de nauwkeurigheid van de elementen te bepalen.

In 2020 is door Xinrui Zhang voor het vak schalen een onderzoek uitgevoerd naar het verband tussen rekenresultaat en elementgrootte in SCIA Engineer. Volgens de theorie zouden de resultaten moeten convergeren met een ordegrootte van 2 (Hoogenboom, 2016). Uit de resultatentabel van het onderzoek blijkt echter dat er te veel ruis op de resultaten zit (Xinrui Zhang, 2020). Er is behoefte aan data zonder ruis.
Er moest dus gezocht worden naar een oplossing. Daarom is er na aanleiding van het onderzoek van Xinrui Zhang een nieuw, vergelijkbaar onderzoek uitgevoerd. Daarbij is het onderzoek van Xinrui Zhang gebruikt als voorkennis. De doelstelling van dit onderzoek is om de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode voor schaalconstructies in SCIA Engineer te bepalen. Er wordt gezocht naar een verband tussen rekenresultaat en elementgrootte.

Voor het onderzoek is de schaalconstructie, in de vorm van een halve cilinder, gemodelleerd in SCIA. Vervolgens zijn voor verschillende elementgroottes de berekeningen uitgevoerd en de daaruit verkregen resultaten zijn verzameld in een tabel. Er is vervolgens op zoek gegaan naar een verband tussen de resultaten. Na analyse van de resultaten is geconcludeerd dat de meeste rekenresultaten in SCIA Engineer naar een bepaalde waarde toe convergeren bij het verkleinen van de elementgrootte. Voor de rekenresultaten zijn de ordegroottes van de fouten berekend. Uit de berekeningen volgde dat de ordegrootte van de fouten over het algemeen 2 is.

Inhoud

1. Inleiding

Met de eindige-elementenmethode kan het fysische gedrag van complexe constructies worden berekend. De eindige-elementenmethode zorgt enkel voor een benadering van de werkelijkheid. Het exacte resultaat kan niet worden berekend, wat voor normale constructieberekeningen geen probleem is. Eén van de programma's die worden gebruikt voor berekeningen met de eindige-elementenmethode is SCIA Engineer. In SCIA Engineer wordt de constructie opgedeeld in elementen met eindige afmetingen, waardoor er een "net" ontstaat van kleinere elementen. Deze elementen, met ieder een bepaalde grootte en aantal vrijheidsgraden, zijn allemaal met elkaar verbonden.

De nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode is een functie van de elementgrootte. Kleinere elementen zorgen voor een hogere nauwkeurigheid, maar te veel elementen zorgen op hun beurt voor verlies van nauwkeurigheid. Er dient dus een juiste balans gevonden te worden om tot het meest nauwkeurige resultaat te kunnen komen. In dit rapport zal er daarnaar gezocht worden.

In dit rapport wordt de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode voor schaalconstructies in SCIA Engineer onderzocht. Het doel is om met behulp van SCIA Engineer tot zo nauwkeurig mogelijke resultaten te komen zonder ruis.

Aanleiding voor het onderzoek is een vergelijkbaar onderzoek dat uitgevoerd is door Xinrui Zhang. Uit dat onderzoek blijkt dat er te veel ruis op de resultaten zit (Zhang, 2020). De resultaten zijn echter ongeldig, omdat ze in een onvoldoende aantal decimalen zijn berekend. In dit rapport zal worden onderzocht wat de invloed van de elementgrootte en het aantal decimalen is op de resultaten.

Het rapport is als volgt opgebouwd. In hoofdstuk 2 wordt de eindige-elementenmethode besproken. Daarbij worden de werking van de eindige-elementenmethode toegelicht en wordt er uitgelegd hoe de nauwkeurigheid ervan kan worden bepaald. In hoofdstuk 3 staan de modelgegevens en randvoorwaarden beschreven. Daarnaast wordt er toegelicht hoe de schaalconstructie in SCIA wordt gemodelleerd. In hoofdstuk 4 worden de uit SCIA verkregen resultaten geanalyseerd. In hoofdstuk 5 worden vervolgens de berekeningen uitgevoerd aan de hand van de resultaten. Daarbij worden de fouten bepaald en getoetst. In hoofdstuk 6 staat de discussie. Daarin wordt ook de vergelijking gemaakt met het onderzoek van Xinrui Zhang. Tot slot worden in hoofdstuk 7 de conclusies getrokken en aanbevelingen gegeven voor eventuele toekomstige onderzoeken.

2. Eindige-elementenmethode

In dit hoofdstuk wordt de werking van de eindige-elementenmethode besproken. Daarbij wordt uitgelegd hoe de eindige-elementenmethode werkt, waarvoor het gebruikt wordt en hoe de nauwkeurigheid ervan kan worden bepaald. Verder worden ook de mogelijke resultaten besproken.

2.1. Toelichting

De eindige-elementenmethode is een numerieke methode waarmee de fysische eigenschappen van complexe constructies kunnen worden berekend. De oplossingen die met de eindige-elementenmethode gevonden worden, zijn benaderingen van de exacte oplossingen. Het basisidee is om het complexe probleem te vervangen door een versimpelde versie. Hierdoor is het niet mogelijk om de exacte oplossing te bepalen (Rao, 2011). Vanwege het grote aantal differentiaalvergelijkingen dat moet worden opgelost, is het raadzaam om de berekeningen door een computerprogramma te laten uitvoeren. In dit rapport wordt er voor de berekeningen gebruik gemaakt van de studentenversie van het programma SCIA Engineer (versie 20.0.4012). In SCIA worden de constructies opgedeeld in een eindig aantal elementen, waardoor er een "net" van elementen ontstaat. Deze elementen hebben randvoorwaarden waaraan voldaan moet worden, zodat de oplossingen voor de differentiaalvergelijkingen gevonden kunnen worden. De grootte van de elementen bepaalt het aantal vergelijkingen dat opgelost moet worden en daarmee de benodigde rekentijd. De rekentijd wordt ook bepaald door de kracht van de processor van de computer waarop de berekeningen worden uitgevoerd. Een krachtigere computer zal vanzelfsprekend de berekeningen sneller kunnen uitvoeren. Ook moet er voldoende vrije geheugen beschikbaar zijn op de computer. Bij te weinig beschikbare vrije geheugen kunnen de berekeningen niet uitgevoerd worden.
Daarnaast heeft de elementgrootte ook invloed op de nauwkeurigheid. Het is dus belangrijk dat er een elementgrootte gekozen wordt met voldoende nauwkeurigheid en een aanvaardbare rekentijd.

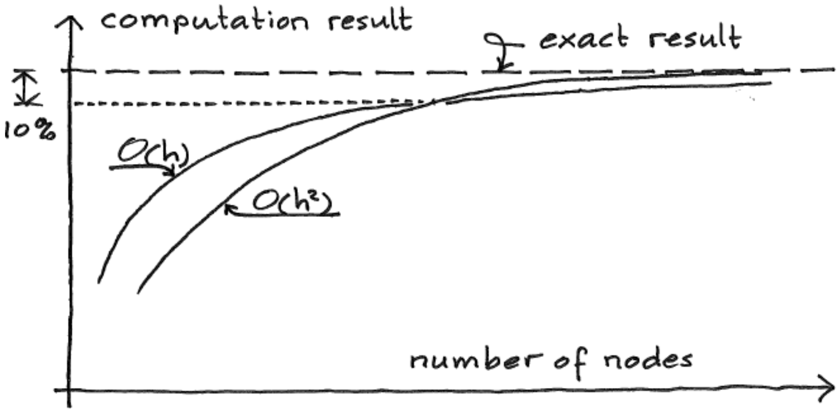
2.2. Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid van de elementen kan niet worden uitgedrukt in een percentage. De reden daarvoor is dat de nauwkeurigheid afhangt van de situatie waarin een element wordt gebruikt. Wat bekend is, is dat de fout kleiner is bij kleinere elementen. De fout wordt uitgedrukt in termen van de elementgrootte h. De elementvervorming kan bijvoorbeeld een fout hebben van $O(h)$ (spreek uit als orde "h"). Dit betekent dat de fout evenredig is met de elementgrootte h (Hoogenboom, 2016).
De elementnauwkeurigheid kan bepaald worden door drie analyses uit te voeren. De eerste met een elementgrootte h, de tweede met een elementgrootte $h/2$ en de laatste met een elementgrootte $h/4$. Dit levert drie vergelijkingen op. Het oplossen van deze vergelijkingen resulteert in de volgende formule voor de ordegrootte van de fout:

$$b = \log_2 \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_2}$$

Hierin is b de ordegrootte van de fout en zijn u_1, u_2 en u_3 de verplaatsingen voor de verschillende elementgroottes. De waarde van b is altijd een geheel getal. Na het bepalen van deze waarde kan de orde van de fout genoteerd worden als $O(h^b)$. Voor de berekeningen in dit rapport worden de waardes van u vervangen door de dwarskrachten v de normaalkrachten n en de momenten m. In hoofdstuk 4 wordt dit verder toegelicht.

In figuur 1 is de typische convergentie van een eindige-elementen resultaat te zien voor *O(h)* en *O(h²)* elementen.



Figuur 1: Typische convergentie van een eindige-elementen resultaat voor O(h) en O(h2) elementen (Hoogenboom, 2016)

2.3. Netverfijning

Ingenieurs die veel ervaring hebben met het toepassen van de eindige-elementenmethode zien doorgaans meteen of een bepaalde elementgrootte voldoende klein is. Indien men geen of weinig ervaring heeft met de eindige-elementenmethode of wanneer men twijfelt, kunnen de volgende stappen doorlopen worden om erachter te komen welke elementgrootte voldoende klein is (Hoogenboom, 2016):

1. Kies een willekeurige elementgrootte en doe de analyse
2. Halveer de gekozen elementgrootte
3. Doe de analyse opnieuw
4. Controleer of de belangrijke resultaten significant veranderen. Als dat het geval is, ga dan verder bij stap 2. Als dat niet het geval is, is het laatste net voldoende.

Bij de netverfijning moet er rekening worden gehouden met een toename van de rekentijd, als gevolg van de toename van het aantal vergelijkingen dat moet worden opgelost. Ook het geheugengebruik neemt toe bij netverfijning. Het halveren van de elementgrootte resulteert in ongeveer 4 keer zoveel knopen, 16 keer zoveel geheugen en harde schijfruimte en 64 keer zoveel rekentijd.

2.4. Verwachting van de resultaten

In een ideale scenario convergeren de resultaten netjes naar een bepaalde waarde toe. De convergentie is dan bij alle resultaten duidelijk zichtbaar. De resultaten hebben dan geen last van zogenaamde ruis. Wanneer er wel ruis optreedt, is er geen duidelijke convergentie te zien en schommelen de resultaten als het ware. Het schommelen van de resultaten kan veroorzaakt worden door rekenafrondingen. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer het aantal vergelijkingen dat opgelost moet worden te groot is. Het kan ook zo zijn dat er nog geen convergentie optreedt waardoor de resultaten schommelen. Bijvoorbeeld vanwege een te grote elementgrootte. Het kan ook zo zijn dat er helemaal geen convergentie te zien is en dat te resultaten ook niet schommelen, maar juist divergeren. Er is dan sprake van een singulariteit. Bij een singulariteit heeft het geen nut om een halvering van de elementgrootte toe te passen. De resultaten worden immers steeds groter en gaan naar oneindig.

Tijdens het onderzoek is het mogelijk een of meerdere van deze scenario's tegen te komen. Zo is het mogelijk dat de resultaten eerst schommelen, omdat er nog geen convergentie optreedt. Vervolgens kunnen de resultaten wel netjes convergeren om tot slot weer als gevolg van rekenafrondingen te schommelen. Het kan echter ook zo zijn dat er alleen een schommeling van de resultaten optreedt, bijvoorbeeld vanwege een beperking in het eindige-elementenprogramma. Een andere mogelijkheid is dat er bij een aantal resultaten divergentie te zien is, wat duidt op een of meerdere singulariteiten waardoor de resultaten onbruikbaar zijn.

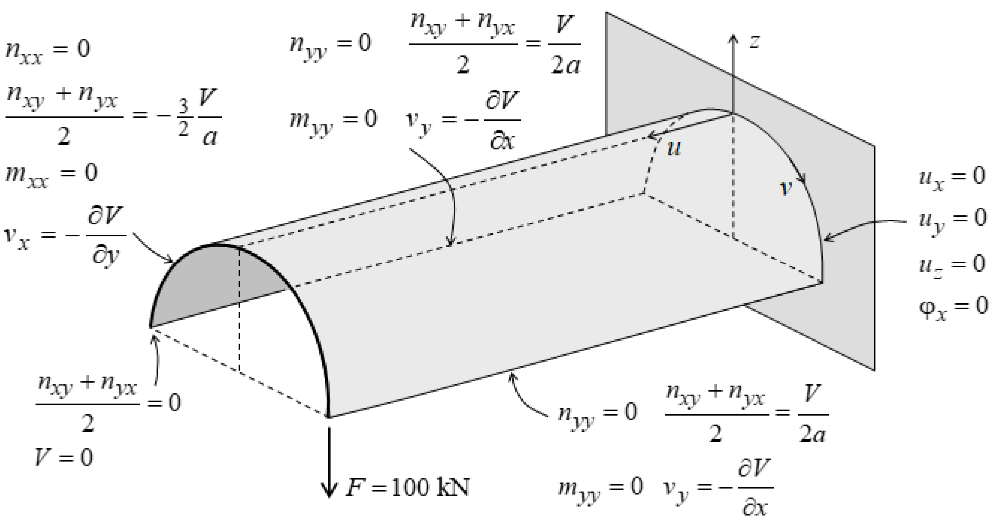
3. Model

In dit hoofdstuk wordt het model van de schaalconstructie beschreven. Daarbij worden de vorm, de afmetingen, de belastingen en de randvoorwaarden. Ook wordt er beschreven hoe de constructie in SCIA Engineer wordt gemodelleerd en hoe SCIA de in dit rapport gebruikte resultaten van 2D elementen beschouwd/berekend.

3.1. Modelgegevens

Voordat de berekeningen kunnen worden gemaakt, moet de het model eerst opgesteld worden. Hiervoor moet de constructie getekend worden in SCIA en vervolgens moeten de bijbehorende eigenschappen toegevoegd worden aan het model. Het onderzoek zal worden uitgevoerd voor een uitkragende halve cilinder. Om te beginnen zal deze getekend worden in SCIA. Er is gekozen voor een lengte van 12 meter en een breedte van 4 meter. De straal *a* van de halve cilinder is 2 meter. De constructie heeft een dikte *t* van 60 millimeter.
Nadat de constructie getekend is, zullen de materiaaleigenschappen gespecificeerd worden. Het gekozen materiaal in SCIA is beton, maar de eigenschappen worden handmatig aangepast. De elasticiteitsmodulus E wordt aangepast naar 10^7 kN/m^2. De poisson-ratio, oftewel dwarscontractiecoëfficiënt, v is 0,15. Voor dit onderzoek wordt het eigen gewicht van de constructie buiten beschouwing gelaten. Tot slot wordt er een puntlast F van 100 kN op de constructie geplaatst. In figuur 2 is een schets van de constructie te zien waarin ook te zien is wat de theoretische randvoorwaarden zijn en waar de belasting aangrijpt op de constructie (Hoogenboom, 2016). Hieronder staan de eigenschappen van de constructie nogmaals opgesomd.

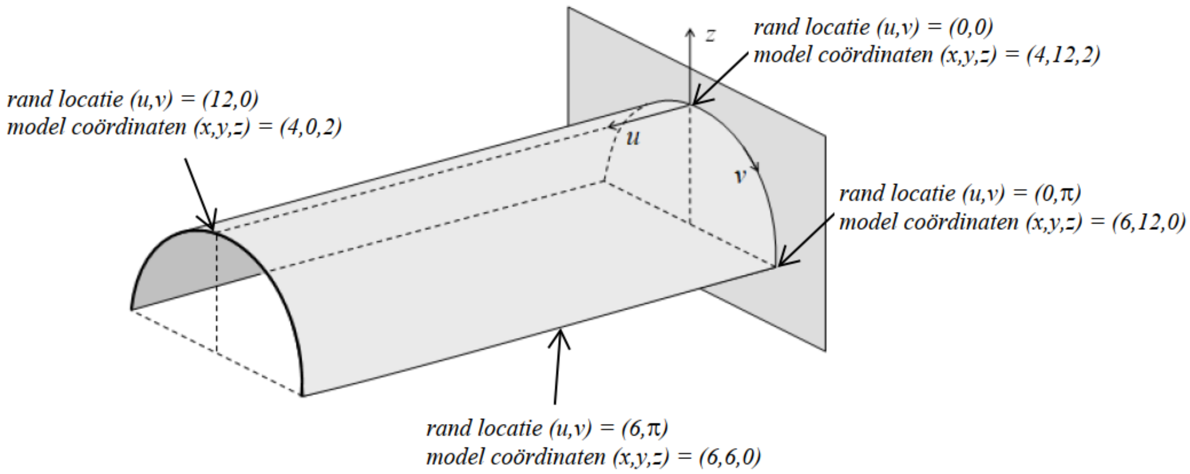
Vorm = halve cilinder
Lengte = 12 m
Breedte = 4 m
Straal a = 2 m
Dikte t = 0.060 m
Elasticiteitsmodulus E = 10^7 kN/m^2
Dwarscontractiecoëfficiënt v = 0.15
Puntlast F = 100 kN



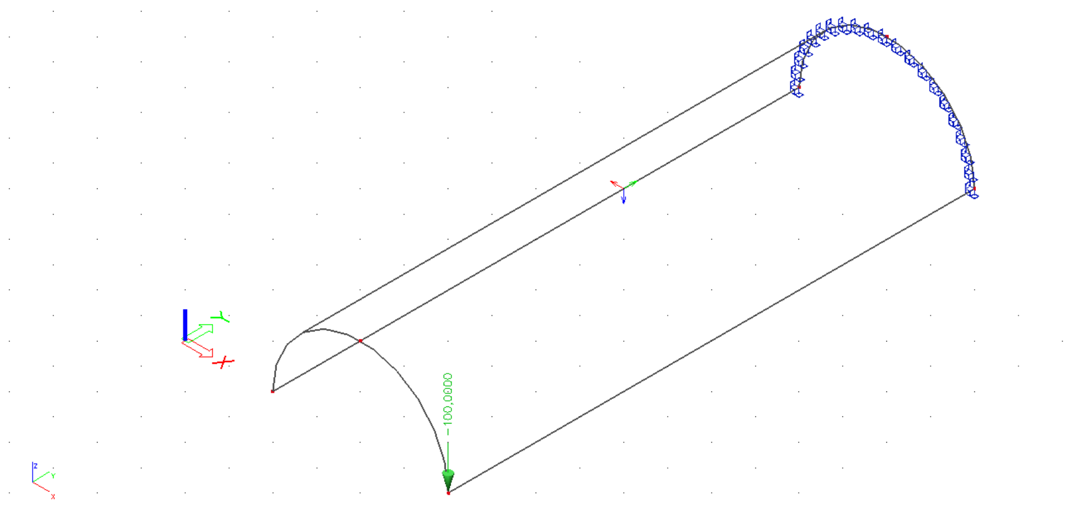
Figuur 2: Randvoorwaarden en belasting op de constructie (Hoogenboom, 2016)

3.2. Model in SCIA

De modelgegevens die in de vorige paragraaf zijn vermeld, zijn in SCIA verwerkt. Het eigen gewicht wordt voor de berekeningen in SCIA buiten beschouwing gelaten. Ook de dwarskrachtvervorming wordt niet meegenomen, deze is dan ook uitgeschakeld in SCIA. Voor de schaalconstructie is gebruik gemaakt van schaalelementen en isotroop materiaal. De ‘solver’ in SCIA is ingesteld op de buigingstheorie van Kirchoff. In bijlage 4 worden alle gebruikte instellingen weergegeven. De resultaten van de berekeningen worden in hoofdstuk 4 besproken. In figuur 3 is een schematisering van de schaalconstructie te zien, daarbij zijn de coördinaten vermeld van de locaties waarvoor de resultaten worden geanalyseerd. Ook is er aangegeven wat de coördinaten van die locaties zijn in het SCIA model. In figuur 4 is de schaalconstructie in SCIA te zien, inclusief de belasting en de lokale en globale assenstelsels. Merk daarbij op dat de lokale en globale assenstelsels een verschillende oriëntatie hebben. De resultaten van de berekeningen komen overeen met het lokale assenstelsel van de schaalconstructie.



Figuur 3: Locaties waarvoor de resultaten worden geanalyseerd

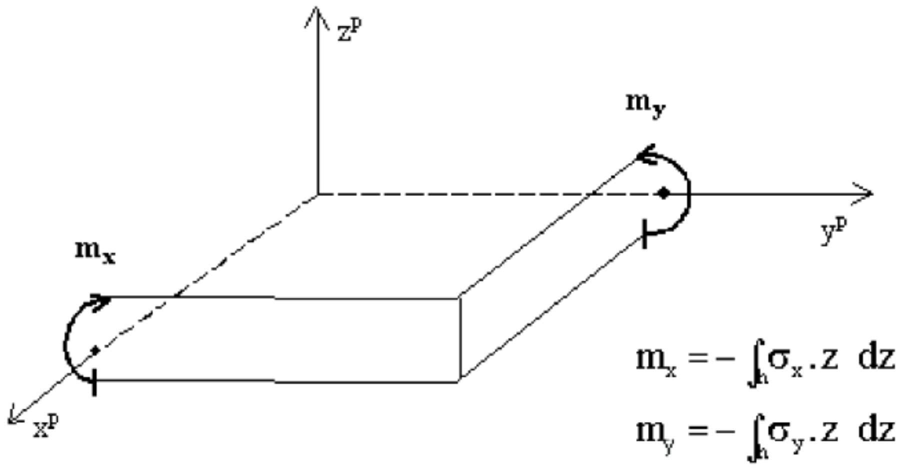


Figuur 4: SCIA model van de schaalconstructie met belasting en lokaal (in de constructie) en globaal assenstelsel (linksonder)

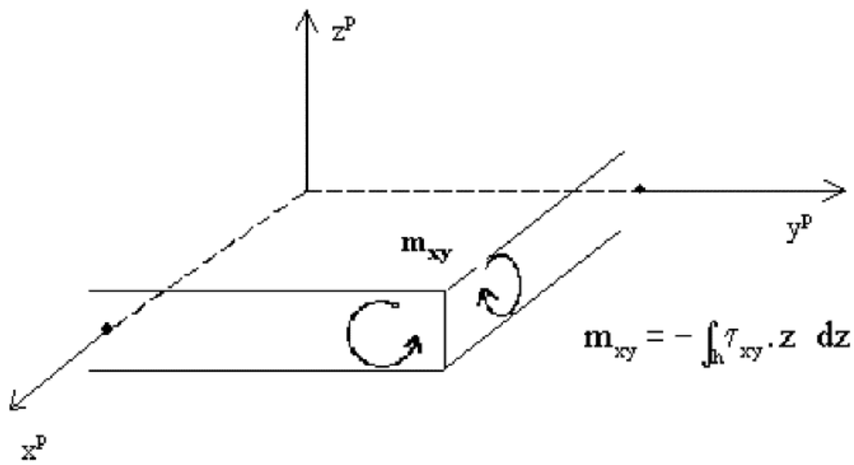
3.3. Beschouwing van 2D resultaten in SCIA

Voor de conventie van voor de tekens van normaalkrachten en normaalspanningen in SCIA - Engineer geldt het volgende in 2D-elementen: een positieve waarde betekent trek en een negatieve waarde betekent druk.
In de figuren 5 tot en met 9 zijn de formules te zien waarmee SCIA de basisgrootheden uitrekent. Hieronder worden de membraankrachten, momenten en dwarskrachten verstaan. Deze gegevens kunnen worden gebruikt bij het interpreteren van de rekenresultaten. Bovendien maakt dit het mogelijk om de resultaten om te rekenen indien dat gewenst is.

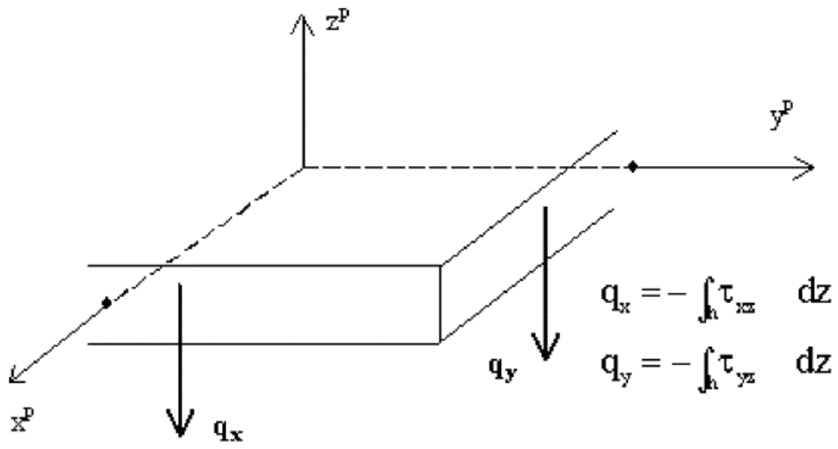
<u>Buiging:</u>



Figuur 5: Buigmomenten m_x en m_y (SCIA, z.d.)

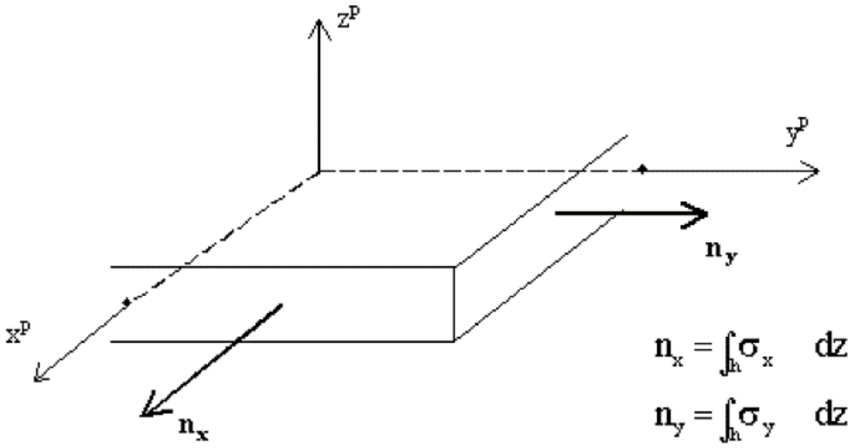


Figuur 6: Torsiemoment m_{xy} (SCIA, z.d.)

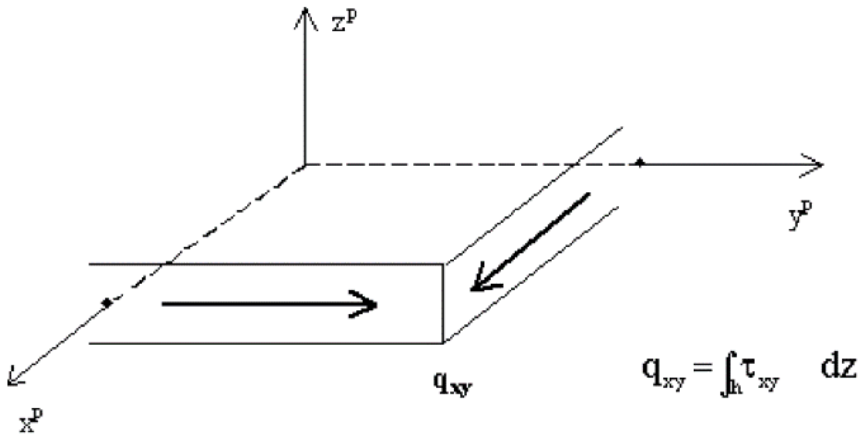


Figuur 7: Dwarskrachten q_x en q_y (= v_x en v_y) (SCIA, z.d.)

Membraaneffecten:



Figuur 8: Membraankrachten n_x en n_y (SCIA, z.d.)



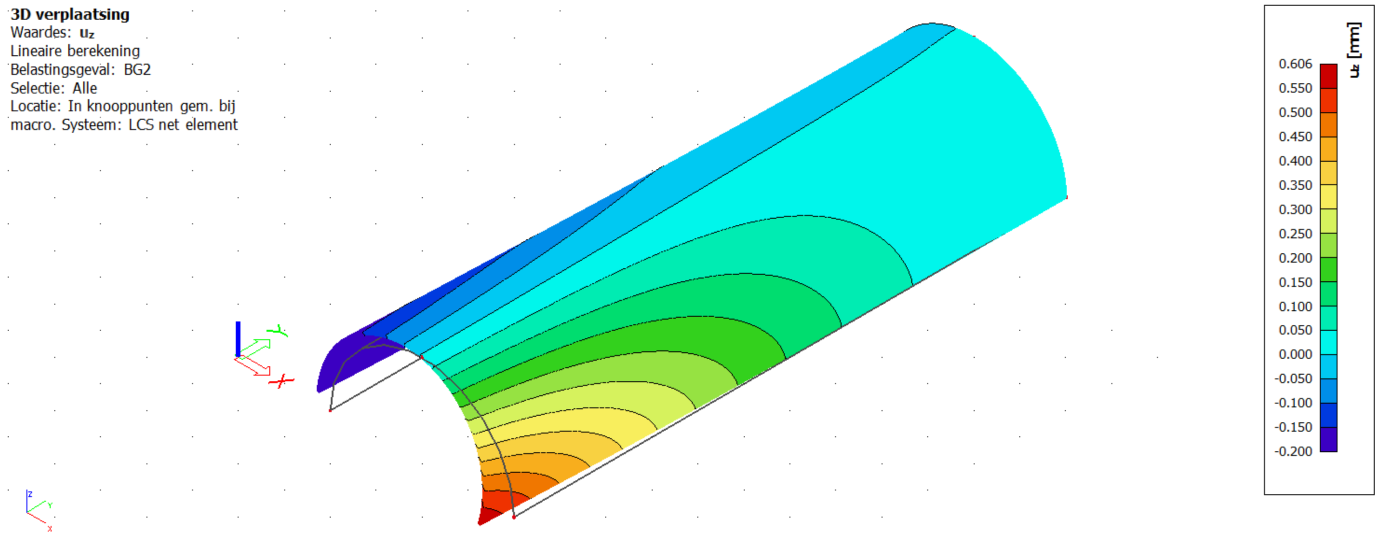
Figuur 9: Dwarskracht q_{xy} (= n_{xy} = $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$) (SCIA, z.d.)

4. Resultaten

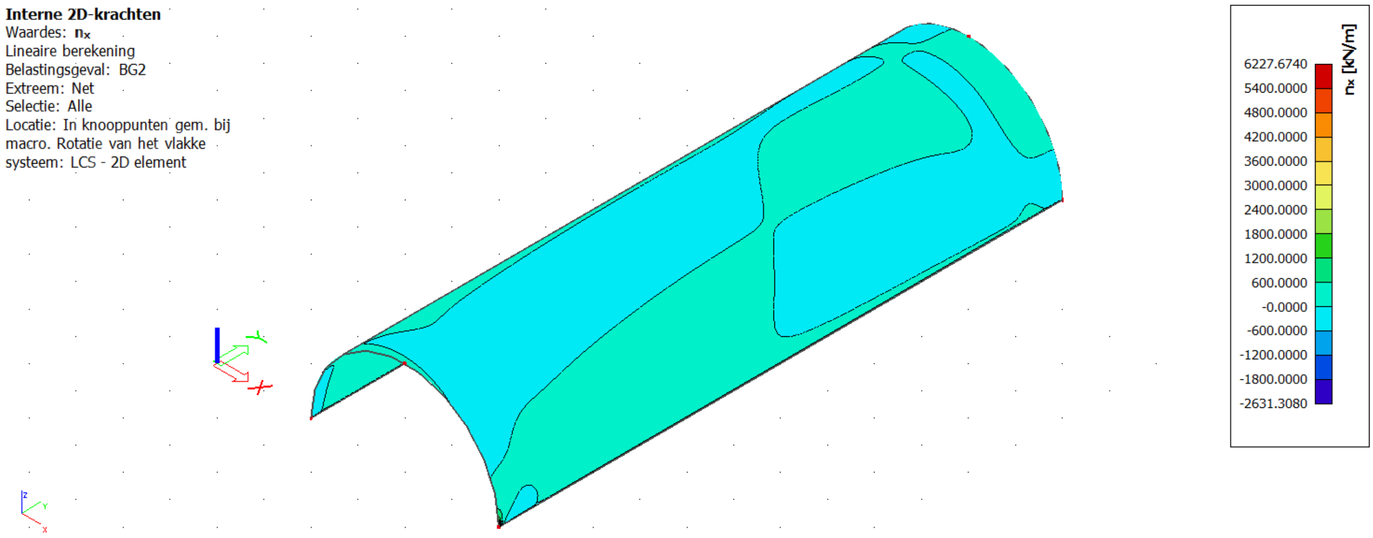
In dit hoofdstuk worden de resultaten van de berekeningen voor de schaalconstructie door SCIA geanalyseerd. De resultaten worden in een tabel weergegeven en aan de hand daarvan worden de fouten bepaald.

4.1. Resultaten SCIA berekening

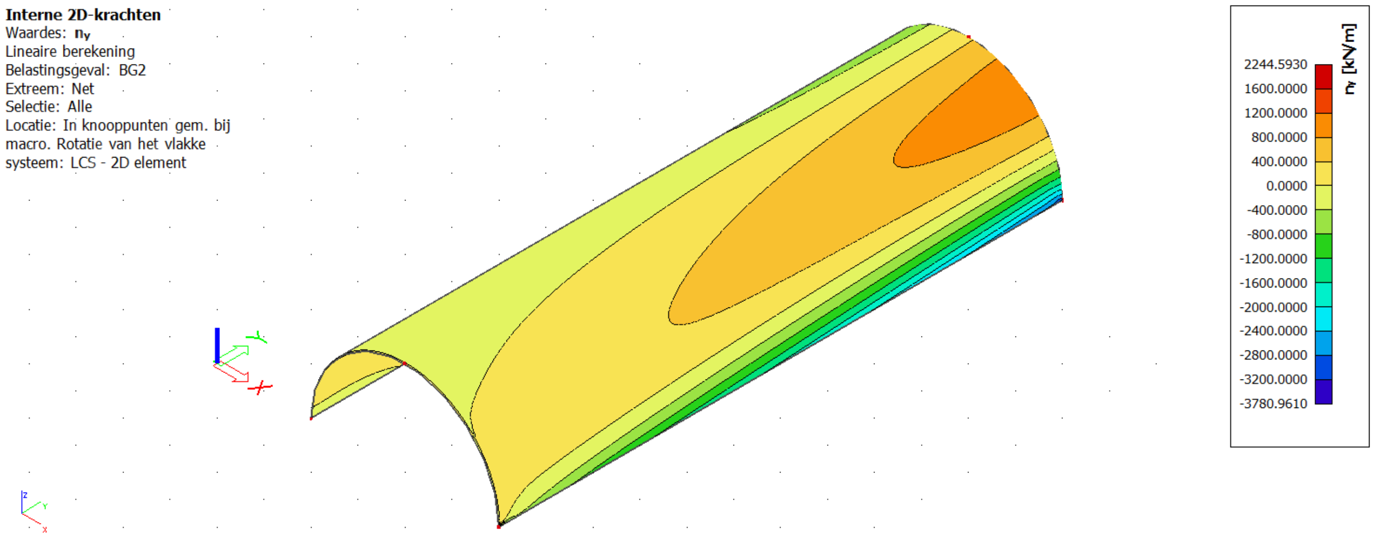
In de figuren 10 tot en met 18 zijn de resultaten te zien voor de hele constructie bij een elementgrootte van 50 mm. Bij het aflezen van de resultaten dient er rekeningen mee worden gehouden dat de resultaten overeenkomen met het lokale assenstelstel van de constructie. Het assenstelsel in de figuren is het globale assenstelsel. Het lokale assenstelsel is weergegeven in figuur 4. In tabel 1 staan de uit SCIA verkregen resultaten op de in figuur 3 weergegeven locaties. De berekeningen zijn uitgevoerd voor de volgende elementgroottes: 400 mm, 200 mm, 100 mm, 50 mm en 25 mm. Voor de keuze van deze elementgroottes is het in paragraaf 2.3 besproken stappenplan doorlopen.



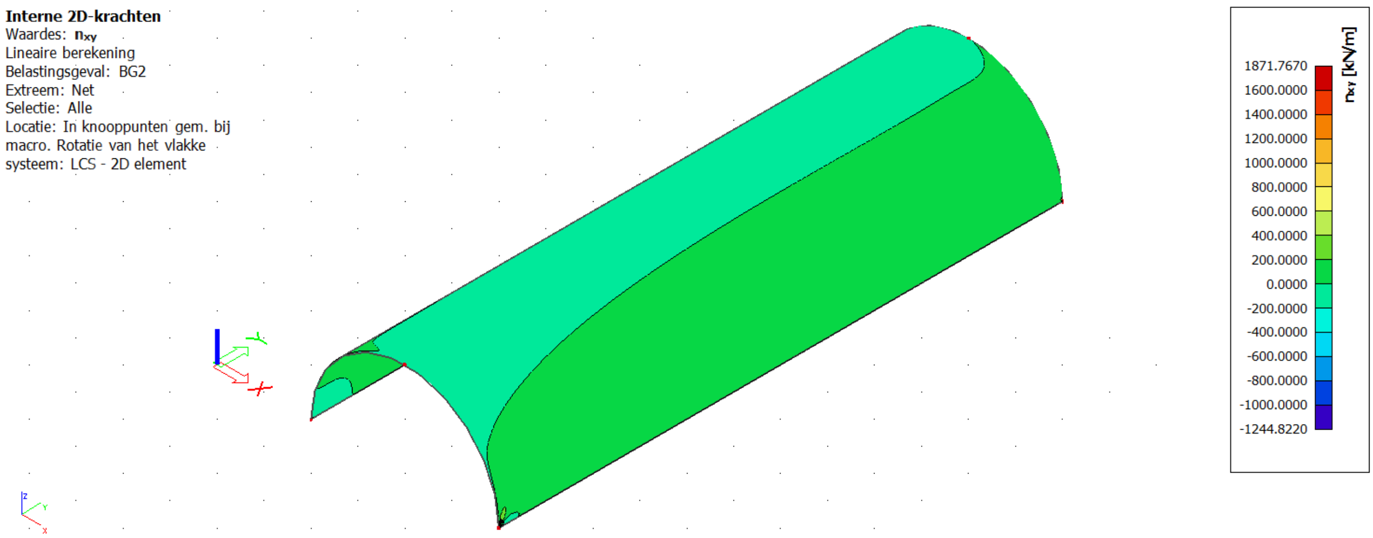
Figuur 10: Zakking ten gevolge van de puntlast in de globale z-richting [mm] (positief is omlaag, negatief is omhoog vanwege het volgen van het lokale assenstelsel)



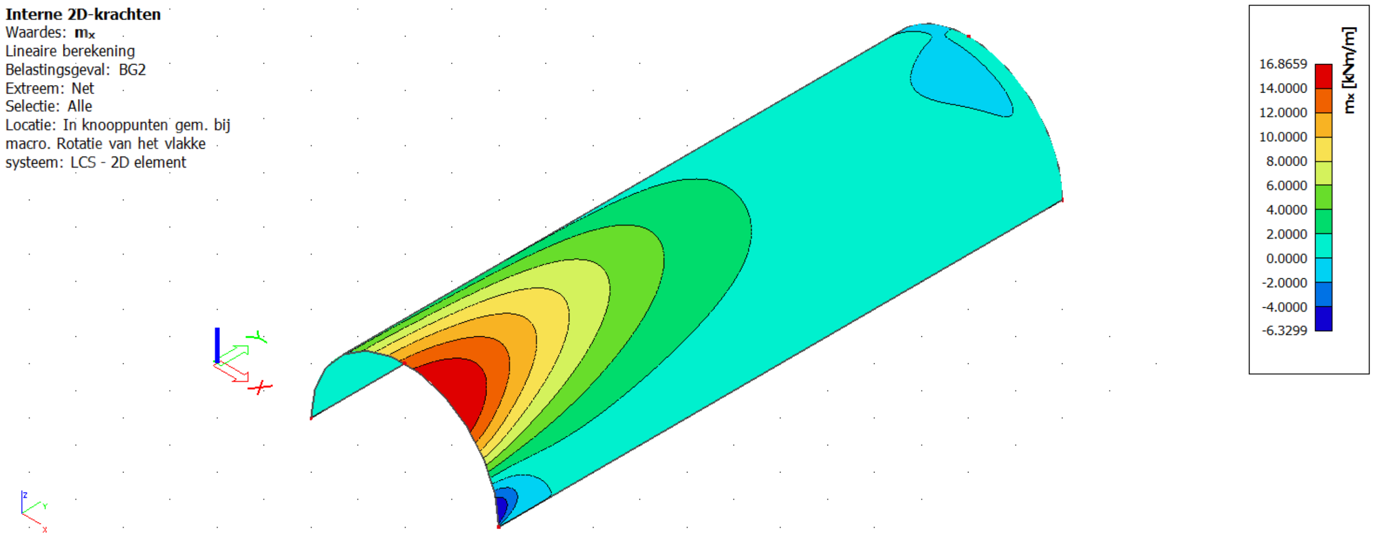
Figuur 11: Normaalkracht n_{xx} [kN/m]



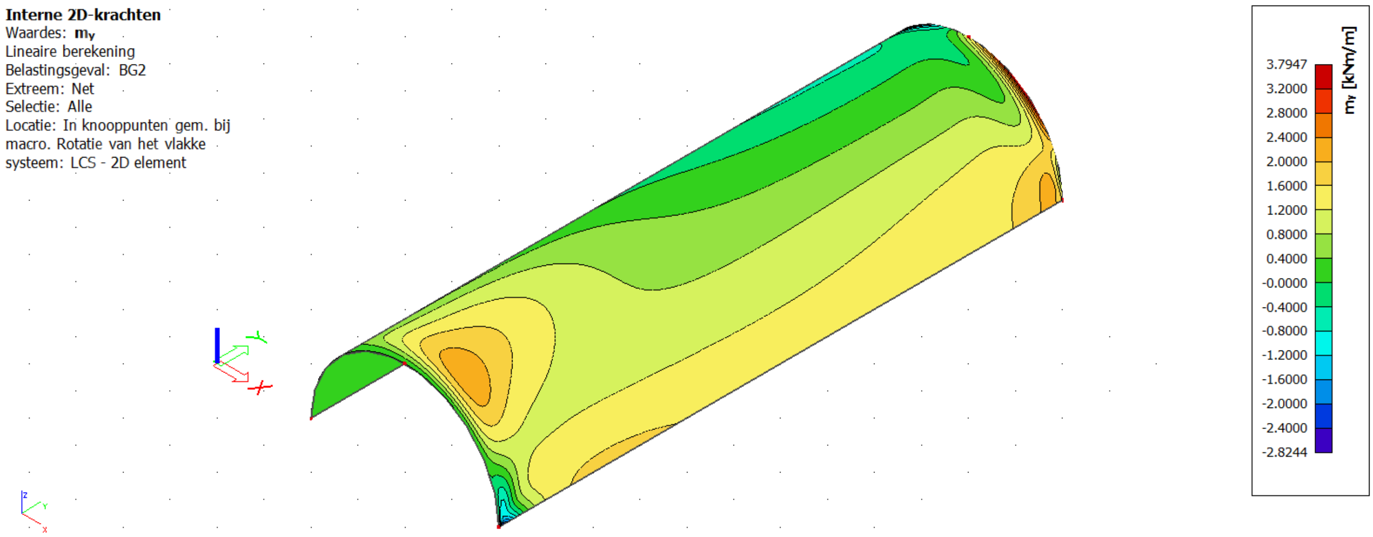
Figuur 12: Normaalkracht n_{yy} [kN/m]



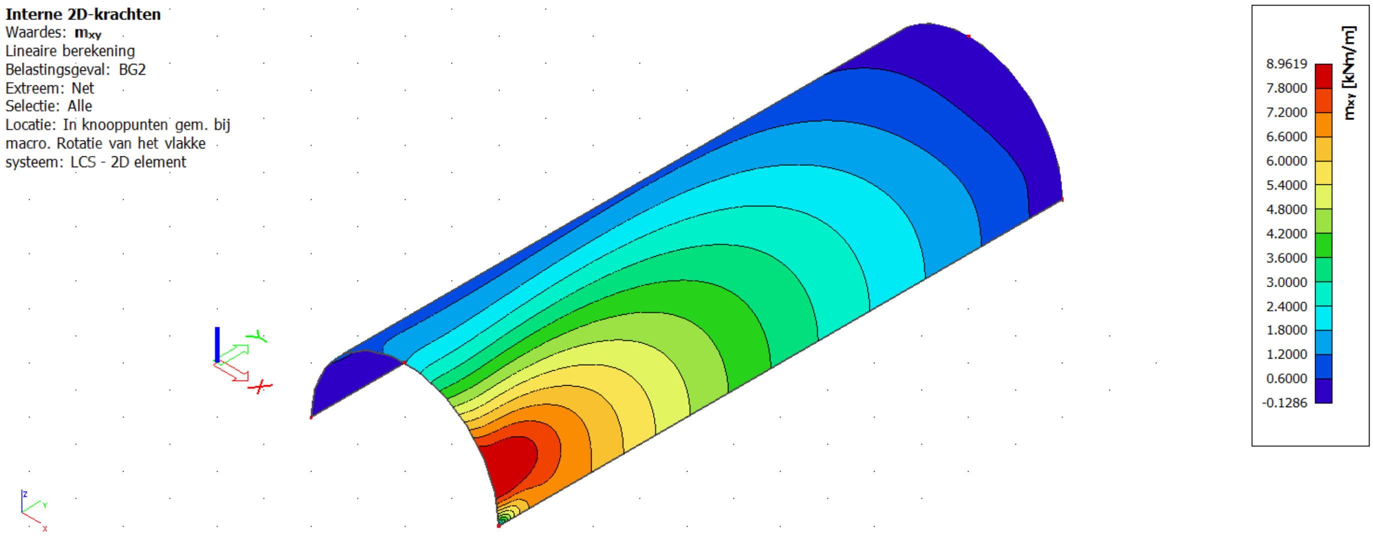
Figuur 13: Dwarskracht in het vlak ½(n_{xy} + n_{yx}) [kN/m]



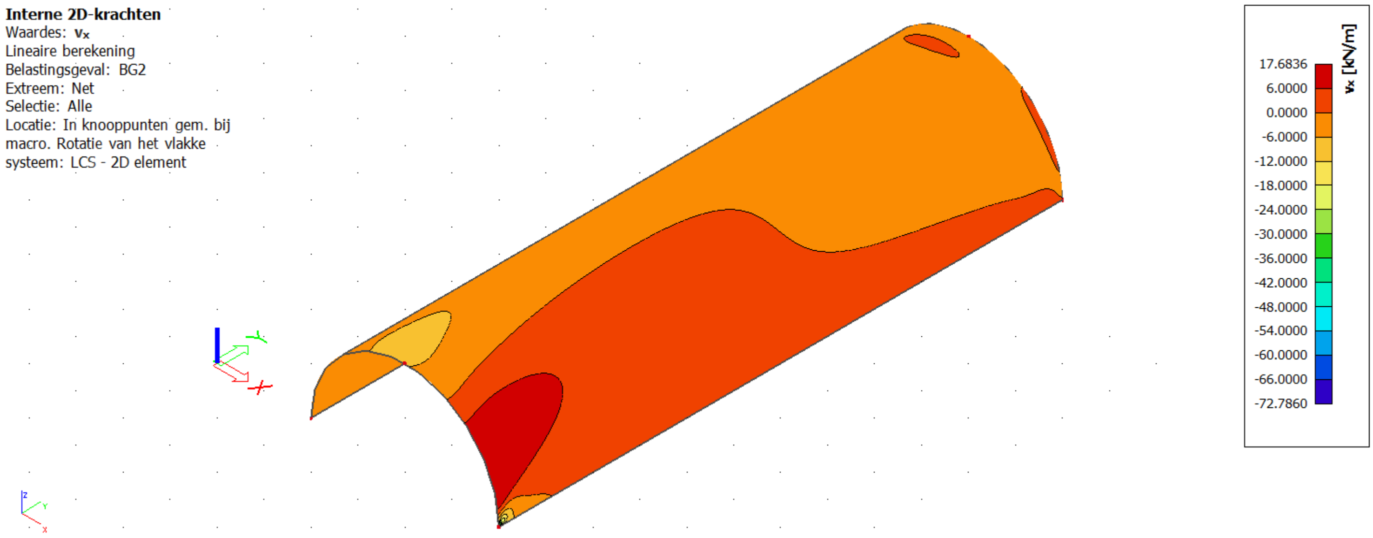
Figuur 14: Buigend moment m_{xx} [kNm/m]



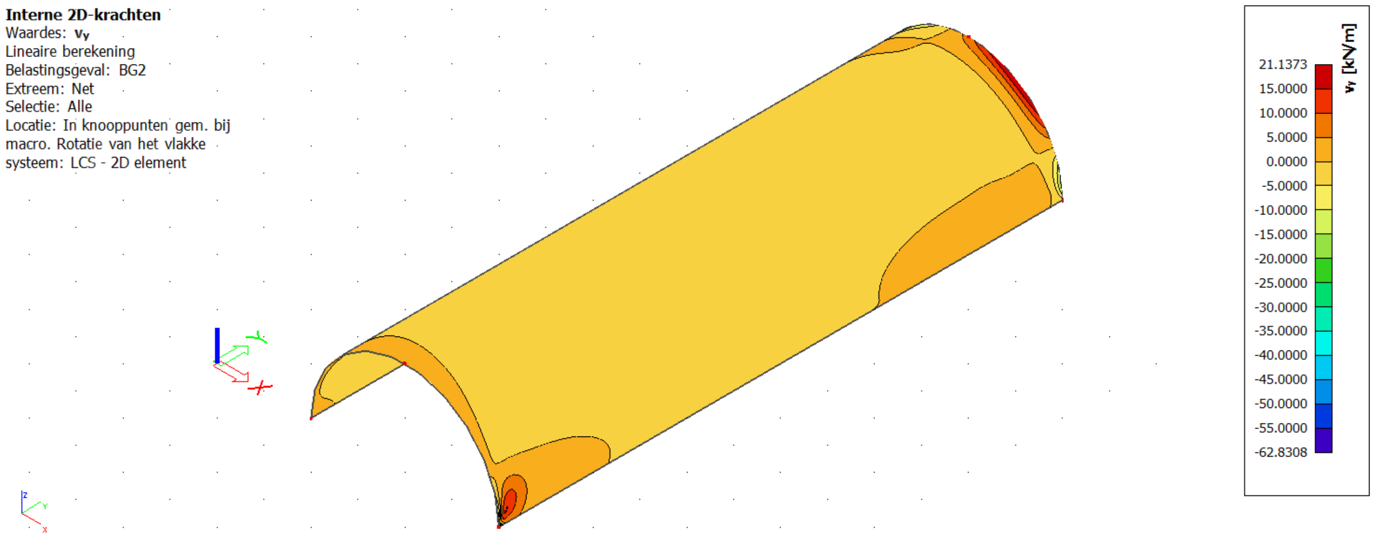
Figuur 15: Buigend moment m_{yy} [kNm/m]



Figuur 16: Wringend moment m_{xy} [kNm/m]



Figuur 17: Dwarskracht uit het vlak v_x [kN/m]



Figuur 18: dwarskracht uit het vlak v_y [kN/m]

Tabel 1
Resultaten uit SCIA op vier rand locaties voor vijf verschillende elementgroottes

Element - grootte	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u*, *v*) = (0, 0)							
400 mm	56,3099	315,0328	-6,9607	0,1715	0,9420	0,1136	-1,1247	4,2894
200 mm	51,0463	310,2148	-3,7839	0,2061	1,1912	0,0539	-2,2556	6,7972
100 mm	47,7544	309,3218	-2,8600	0,1939	1,2516	0,0191	-2,9089	7,4846
50 mm	46,7244	309,2762	-2,6892	0,1902	1,2618	0,0046	-3,1606	7,5897
25 mm	46,4654	309,2993	-2,6539	0,1897	1,2635	0,0005	-3,2514	7,6004
	rand locatie (*u*, *v*) = (0, π)							
400 mm	-460,5551	-3064,9600	230,2907	-0,0792	1,4524	0,3110	1,0232	-3,8521
200 mm	-500,4951	-3237,8780	332,8226	0,0693	1,4172	0,1121	0,3229	-3,9945
100 mm	-562,6193	-3475,1150	421,5518	0,1179	1,5008	0,0141	0,6421	-3,0948
50 mm	-640,0974	-3780,9610	502,9657	0,1300	1,4827	-0,0312	2,2137	-3,2192
25 mm	-726,3070	-4162,0120	585,3851	0,1213	1,3432	-0,0508	6,4897	-8,6338
	rand locatie (*u*, *v*) = (6, π)							
400 mm	-12,5478	-1638,3590	1,8226	0,0302	1,4533	3,5035	0,6357	-0,0577
200 mm	-3,2763	-1654,6560	-0,0439	0,0180	1,4203	3,4789	0,6179	-0,0563
100 mm	-0,8322	-1658,7380	-0,3383	0,0097	1,4064	3,4716	0,6141	-0,0532
50 mm	-0,2161	-1659,7480	-0,2564	0,0051	1,4002	3,4693	0,6133	-0,0518
25 mm	-0,0542	-1660,0110	-0,1493	0,0026	1,3972	3,4684	0,6131	-0,0511
	rand locatie (*u*, *v*) = (12, 0)							
400 mm	19,9123	4,4153	0,5417	12,8505	-0,0329	1,8623	-6,7646	4,2881
200 mm	46,5694	3,0583	-0,8098	12,8053	-0,0644	1,7954	-6,4733	3,8638
100 mm	55,3090	1,1427	-1,4361	12,8041	-0,0147	1,7755	-6,3546	2,5039
50 mm	57,5176	0,3360	-1,6548	12,8038	-0,0022	1,7712	-6,3197	1,8634
25 mm	58,0598	0,0900	-1,7299	12,8035	-0,0002	1,7703	-6,3071	1,6587

4.2. Koppeling met de theorie

In tabel 1 is te zien dat de meeste rekenresultaten uit SCIA duidelijk naar een bepaalde waarde toe convergeren bij het halveren van de elementgrootte. Dit is op te maken uit het steeds kleiner wordende verschil tussen de resultaten na een halvering. Zodoende lijkt het duidelijk te zijn dat rekenresultaten in SCIA in overeenstemming zijn met de theorie van de eindige-elementenmethode. Die vertelt ons namelijk dat de rekenresultaten nauwkeuriger zijn bij een kleinere elementgrootte.
Daarnaast valt de knoop op locatie (0, π) op ten opzichte van de andere knopen. De rekenresultaten in die knoop zijn opvallen te noemen, omdat ze geen duidelijke convergentie tonen, in tegenstelling tot de rekenresultaten in de andere knopen. Op m_{xy} na lijkt geen enkel rekenresultaat naar een bepaalde waarde toe te convergeren. Alle andere resultaten op locatie (0,π) schommelen of divergeren zelfs. Voor de rekenresultaten in die knoop kan niet gezegd worden dat ze nauwkeuriger worden bij kleinere elementgroottes. Er lijkt zodoende een singulariteit te zitten op locatie (0, π).
Verder is op locatie (6, π) te zien dat het resultaat van $\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ bij de eerste 2 halveringen van de elementgrootte nog niet convergeert. Het resultaat 'schommelt' eerst bij de eerste 2 halveringen en daarna convergeert het pas.

5. Berekeningen

In dit hoofdstuk worden de fouten berekend bij de rekenresultaten die verkregen zijn uit SCIA. Deze resultaten zijn te vinden in tabel 1. Vervolgens wordt een t-toets uitgevoerd om de betrouwbaarheid van de berekende fouten te controleren.

5.1. Foutbepaling

In tabel 2 staan de resultaten van de foutbepaling aan de hand van de resultaten uit tabel 1. De onderstaande formules zijn gebruikt om de berekeningen uit te voeren. Hierin worden de x'en vervangen door de normaalkrachten, dwarskrachten en de momenten. De subscripts 400, 200, 100, 50 en 25 staan voor de elementgroottes in mm.
Voor de resultaten worden de waardes van Δ_i en b_i afgerond op een geheel getal. De exacte resultaten van de foutberekeningen zijn te vinden in tabel 3.

$$\Delta_1 = \frac{x_{200} - x_{400}}{x_{100} - x_{200}}$$

$$\Delta_2 = \frac{x_{100} - x_{200}}{x_{50} - x_{100}}$$

$$\Delta_3 = \frac{x_{50} - x_{100}}{x_{25} - x_{50}}$$

$$b_1 = log_2(\Delta_1)$$

$$b_2 = log_2(\Delta_2)$$

$$b_3 = log_2(\Delta_3)$$

Ter verduidelijking van bovenstaande formules wordt een voorbeeldberekening laten zien van de convergentie van de membraankracht n_{xx} op locatie (0,0).

$$\Delta_1 = \frac{n_{xx,200} - n_{xx,400}}{n_{xx,100} - n_{xx,200}} = \frac{51{,}0463 - 56{,}3099}{47{,}7544 - 51{,}0463} \approx 1{,}599 \approx 2$$

$$b_1 = log_2(1{,}599) \approx 0{,}677 \approx 1$$

Het resultaat van deze berekening kan worden geïnterpreteerd als een convergentie met een fout van $O(h^1) = O(h)$.

Enkele opvallende waarden in tabel 2 zijn de negatieve delta's en de lege vakjes. De negatieve waarden van de delta's geven aan dat de resultaten nog niet aan het convergeren zijn of last hebben van ruis. De bijbehorende waarden van *b* zijn niet bepaald, omdat een logaritme van een negatief getal geen reëel antwoord oplevert. Bovendien zijn ruizige resultaten en singulariteiten niet bruikbaar voor het bepalen van de orde van de fout waarmee de resultaten convergeren.

Tabel 2
Resultaten van de foutbepaling

	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
Δ1	2	5	3	-3	4	2	2	4
Δ2	3	20	5	3	6	2	3	7
Δ3	4	-2	5	7	6	4	3	10
b1	1	2	2		2	1	1	2
b2	2	4	2	2	3	1	1	3
b3	2		2	3	3	2	1	3
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
Δ1	1	1	1	3	-0	2	-2	-0
Δ2	1	1	1	4	-5	2	0	-7
Δ3	1	1	1	-1	0	2	0	0
b1	-1	-0	0	2		1		
b2	-0	-0	0	2		1	-2	
b3	-0	-0	-0		-3	1	-1	-5
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
Δ1	4	4	6	1	2	3	5	0
Δ2	4	4	-4	2	2	3	5	2
Δ3	4	4	1	2	2	3	4	2
b1	2	2	3	1	1	2	2	-1
b2	2	2		1	1	2	2	1
b3	2	2	-0	1	1	1	2	1
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
Δ1	3	1	2	38	-1	3	2	0
Δ2	4	2	3	4	4	5	3	2
Δ3	4	3	3	1	6	5	3	3
b1	2	0	1	5		2	1	-2
b2	2	1	2	2	2	2	2	1
b3	2	2	2	-0	3	2	1	2

5.2. T-toets

De t-test, oftewel t-toets, wordt in de wetenschap doorgaans uitgevoerd om te toetsen of het gemiddelde van een dataset significant verschilt van een vooraf bepaalde waarde of dat de gemiddeldes van 2 steekproeven significant van elkaar verschillen. Voor dit onderzoek is het eerste geval van toepassing. Daarvoor wordt de zogenaamde ‘one-sample t-test’ uitgevoerd. Bij het uitvoeren van de t-toets wordt de aanname gedaan dat er sprake is van een standaardnormale verdeling $N(\mu,\sigma^2)$, waarin μ de verwachtingswaarde is en σ^2 de variantie. Deze aanname wordt onderbouwd door de centrale limietstelling. Voor onderzoeksresultaten is het doorgaans zo dat de waarden van μ en σ onbekend zijn. Toch is het mogelijk om een uitspraak te kunnen doen over de uitkomst. Dit wordt mogelijk gemaakt door de t-toets, waarbij de nulhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wordt getoetst tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de gestudentiseerde gemiddelde. Er kan worden gezegd dat voor een willekeurige steekproef X_1, X_2, …, X_n uit een $N(\mu,\sigma^2)$-verdeling, het gestudentiseerde gemiddelde $\frac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n}}$ een studentverdeling heeft met (n-1) vrijheidsgraden, ongeacht de waarden van μ en σ (Dekking et al., 2005). Hierin is *X* het gemiddelde van de steekproef en S_n de standaarddeviatie. De standaarddeviatie kan worden berekend met de volgende formule:

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Met behulp van deze gegevens kan de t-toets worden uitgevoerd. Dit leidt voor de nulhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ tot de volgende teststatistiek:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}}$$

Waardes van T die dichtbij de nul liggen, zijn in het voordeel van de nulhypothese. Deze kan dan niet verworpen worden. Bij grote positieve waarden van T wordt er gesuggereerd dat μ groter is dan μ_0. Grote negatieve waarden suggereren dat de waarde van μ kleiner is dan μ_0. Beiden zijn te interpreteren als bewijs tegen de nulhypothese. De nulhypothese moet in beide gevallen verworpen worden.

Deze theorie kan worden toegepast op de resultaten van de foutbepaling. Tabel 2 lijkt te laten zien dat de resultaten vooral convergeren met een ordegrootte van ongeveer 2, wat overeenkomt met de theoretische convergentie *$O(h^2)$* zoals vermeld in het schalendictaat (Hoogenboom, 2016). Om deze uitkomst te controleren zal er een t-toets uitgevoerd worden. Daarvoor worden de exacte waarden van de ordegroottes gebruikt, welke zijn te vinden in tabel 3. Uit die waarden is een selectie gemaakt van de beste resultaten. Daarbij is er in ieder punt voor iedere kracht gekeken naar de beste convergentie. Op locatie (12,0) lijkt de fout van n_{xx} te convergeren van 1,609 naar een waarde in de buurt van 2,026. Daarom is er voor n_{xx} op locatie (12,0) gekozen voor 2,026. Op dezelfde manier zijn alle andere keuzes gemaakt. Mogelijke singulariteiten zijn hierbij niet meegenomen. Op locatie (0, π) lijkt er een singulariteit te zitten, waardoor alle resultaten op die locatie buiten beschouwing zijn gelaten. De uiteindelijke selectie is te vinden in tabel 4. Op die selectie wordt de t-toets toegepast.

Tabel 3:
Exacte waarden van de ordegroottes van de fouten

	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
b_1	0,677	2,432	1,782		2,045	0,779	0,792	1,867
b_2	1,676	4,292	2,435	1,721	2,566	1,263	1,376	2,709
b_3	1,992		2,275	2,888	2,585	1,822	1,471	3,296
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
b_1	-0,637	-0,456	0,209	1,611		1,021		
b_2	-0,318	-0,366	0,124	2,006		1,113	-2,300	
b_3	-0,154	-0,317	-0,018		-2,946	1,209	-1,444	-5,444
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
b_1	1,923	1,997	2,664	0,556	1,247	1,753	2,228	-1,147
b_2	1,988	2,015		0,851	1,165	1,666	2,248	1,147
b_3	1,928	1,941	-0,387	0,880	1,047	1,354	2,000	1,000
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
b_1	1,609	-0.497	1,110	5,235		1,749	1,295	-1,680
b_2	1,984	1,248	1,518	2,000	1,991	2,210	1,766	1,086
b_3	2,026	1,713	1,542	-0,000	2,644	2,256	1,470	1,646

Tabel 4:
Selectie van ordegroottes

1,992	2,275	2,888	2,585	1,822	1,471	3,296
1,928	1,941	0,88	1,047	1,354	2	1
2,026	1,713	1,542	2,644	2,256	1,47	1,646

Bij tabel 4 zijn met behulp van het programma python een histogram en verdelingskromme gemaakt. Daarin is te zien dat de waarden ongeveer normaal verdeeld zijn. De grafieken zijn te zien in figuur 19. Daarin zijn ook het gemiddelde van de waarden, de nulhypothese en het 95%-betrouwbaarheidsinterval afgebeeld. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval loopt van 0,94 tot 3,09. Dit houdt in dat bij een herhaling van het onderzoek, het gemiddelde van de fout in 95% van de gevallen binnen dat interval ligt.

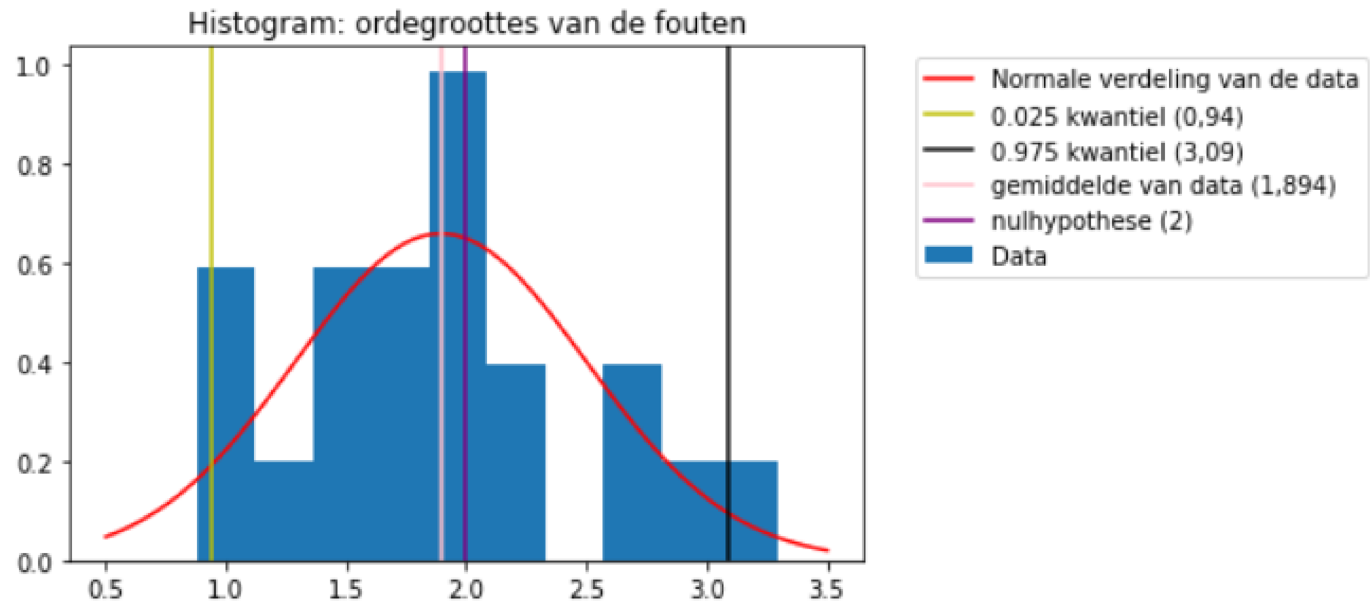
Het gemiddelde van de waarden in tabel 4 is 1,894. De standaarddeviatie S_n is 0,607. Nu deze gegevens bekend zijn, kan de t-toets uitgevoerd worden. Hierbij zal de nulhypothese $H_0 : \mu = 2$, getoetst worden tegen $H_1 : \mu \neq 2$ met een significantieniveau α = 0,05. Deze significantieniveau geeft aan wat de kans is dat de hypothese ten onrechte wordt verworpen. De nulhypothese moet dan verworpen worden in een van de volgende situaties:

$$T \leq -t_{n-1,\alpha/2} \quad of \quad T \geq t_{n-1,\alpha/2}$$

De kritieke waarde $t_{n-1,\alpha/2}$ is af te lezen uit de figuur in bijlage 5 (Dekking et al., 2005). De waarde van T wordt als volgt uitgerekend :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{1{,}894 - 2}{0{,}607/\sqrt{21}} = -0{,}80$$

Voor n = 21 en α = 0,05 is de kritieke waarde $t_{20,0.025}$ gelijk aan 2,086. De waarde van T ligt tussen -2,086 en 2,086. Dit betekent dat de nulhypothese niet verworpen kan worden.



Figuur 19: Histogram bij tabel 4

6. Discussie

Voor dit onderzoek is gebruik gemaakt van het programma SCIA Engineer om de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode voor schaalconstructies in dat programma te bepalen. De gebruikte instellingen voor het opgestelde model zijn te vinden in bijlage 4. Er is een halve cilinder gemodelleerd, welke aan een zijde is ingeklemd en aan de andere zijde vrij opgelegd is. De constructie is belast met een belasting van 100 kN, zoals in figuur 4 is weergegeven. Vervolgens zijn de berekeningen in uitgevoerd voor de volgende elementgroottes: 400mm, 200mm, 100mm, 50mm, en 25mm. Uit de resultaten van die berekeningen blijkt dat er op rand locatie $(0, \pi)$, aan de ingeklemde zijde, een singulariteit zit. Deze conclusie is getrokken op basis van de divergerende en ruizige resultaten in dat punt. Alle rekenresultaten in $(0, \pi)$ zijn daarom niet meegenomen voor de bepaling van de ordegrootte van de fouten.
Uit de resultatentabel van de ordegroottes van de fouten blijkt verder dat de fout vooral orde 2 is. Dit komt overeen met de theoretische waarde zoals vermeld in het schalendictaat (Hoogenboom, 2016). Aan de hand van een t-toets is deze uitkomst ook getoetst. Daaruit volgde dat voor de selectie waarop de toets is uitgevoerd kan worden gezegd dat de ordegrootte van de fout gelijk is aan 2. Echter is er niet met zekerheid te zeggen dat de fout voor alle krachten orde 2 is. Als er namelijk gekeken wordt naar de convergentie van de individuele krachten, dan zijn er toch wel verschillen te zien. De membraankrachten (n_x, n_y en $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$) hebben een fout van orde 2. Van de momenten en dwarskrachten kan dit met niet met zekerheid gezegd worden. De ordegrootte van de fout van de momenten en dwarskrachten lijkt afwisselend 1, 2 of 3 te zijn. Een vervolgonderzoek zou hier uitsluitsel over kunnen geven.

In 2020 heeft Xinrui Zhang een vergelijkbaar onderzoek uitgevoerd voor dezelfde schaalconstructie in SCIA Engineer. De resultaten van dat onderzoek zijn te vinden in bijlage 3. Daaruit is geconcludeerd dat de ordegroottes van de fouten niet overeenkomen met de ordegroottes zoals vermeld in het schalendictaat (Zhang, 2020). Die conclusie is tegenstrijdig met de conclusie uit dit rapport, namelijk dat de ordegroottes wel overeenkomen met die uit het schalendictaat. De hoofdoorzaak voor de verschillende conclusies lijkt het aantal gebruikte decimalen tijdens de berekeningen te zijn. In Xinrui's onderzoek is gebruik gemaakt van twee decimalen, waardoor er bij veel resultaten geen convergentie leek plaats te vinden. Dat resulteerde in oneindig grote waarden voor de bijbehorende delta's en b's. Vanwege het te kleine aantal decimalen zijn de resultaten ongeldig. In dit rapport zijn de berekeningen in vier decimalen uitgevoerd, waardoor de convergentie van de resultaten duidelijk zichtbaar is. Een overeenkomst tussen de resultaten van Xinrui Zhang's onderzoek en die van dit onderzoek is de singulariteit op locatie $(0, \pi)$. Het is mogelijk dat dit het gevolg is van een beperking in SCIA Engineer.

Ter controle van de onderzoeksresultaten zijn er twee extra berekeningen uitgevoerd. Eén berekening is gedaan met andere elementgroottes en de andere berekening is gedaan met een belasting van 200 kN (twee keer zo groot). In bijlagen 1 en 2 zijn de resultaten daarvan te vinden. De resultaten van de berekening met andere elementgroottes zijn vergelijkbaar met de resultaten van dit onderzoek. En in de resultaten van de berekeningen met een belasting van 200 kN is te zien dat de interne krachten twee keer zo groot zijn als bij een belasting van 100 kN. De verhoudingen zijn dus gelijk gebleven, waardoor de ordegroottes van de fouten identiek aan elkaar zijn bij beide berekeningen. Dat komt overeen met wat er vooraf werd verwacht.

7. Conclusies en aanbevelingen

Het doel van dit onderzoek was het vinden van een verband tussen rekenresultaat en elementgrootte in SCIA Engineer. De resultaten van dit onderzoek laten zien dat de meeste rekenresultaten naar een bepaalde waarde toe convergeren bij het verkleinen van de elementgrootte. Dit is in lijn met de theorie van de eindige-elementenmethode. Daarmee is er deen duidelijk verband gevonden tussen rekenresultaat en elementgrootte in SCIA Engineer, namelijk dat het resultaat over het algemeen nauwkeuriger wordt bij kleinere elementen.
Uit de berekeningen van de ordegroottes van de fouten is geconcludeerd dat de fout over het algemeen orde 2 heeft, hetgeen overeenkomt met de theoretische waarde van de convergenties voor schaalelementen. Dit is terug te zien in tabel 2. Deze conclusie lijkt echter vooral van toepassing te zijn op de membraankrachten. De orde van de fouten van de momenten en dwarskrachten lijken soms 1, soms 2 en soms 3 te zijn. Daardoor kan er op basis van de resultaten uit het onderzoek niet met zekerheid gezegd worden dat de momenten en dwarskrachten een fout hebben van orde 2. Het is belangrijk om daar rekening mee te houden.
Bij het trekken van de conclusies uit dit onderzoek zijn de rekenresultaten in het punt $(0, \pi)$ buiten beschouwing gelaten. Er is namelijk geconstateerd dat er op die locatie een singulariteit zit. Daarnaast ook geconstateerd dat niet alle resultaten netjes convergeren. Sommige resultaten zijn ruizig.

Voor toekomstige onderzoeken worden de volgende aanbevelingen gedaan:

- De resultaten van het onderzoek zijn gebaseerd op elementgroottes van 400 mm tot en met 25 mm. Het onderzoek zou aangevuld kunnen worden met resultaten van nog kleinere elementgroottes. Daarmee kan dan worden onderzocht of de kleinere elementen zorgen voor nog nauwkeurigere resultaten of dat er ruis ontstaat.

- Er kan een extra onderzoek worden gedaan naar de convergentie van de momenten en dwarskrachten. Deze lijken namelijk niet op dezelfde manier te convergeren als de membraankrachten.

- Het onderzoek is uitgevoerd voor een halve cilinder. Als aanvulling daarop zouden andere schaalconstructies onderzocht kunnen worden om vervolgens de resultaten van de verschillende constructies met elkaar te vergelijken

- Het onderzoek is uitgevoerd in SCIA Engineer. Vergelijkbare onderzoeken zouden uitgevoerd kunnen worden in andere eindige-elementenprogramma’s, zodat de resultaten die voortkomen uit verschillende programma’s met elkaar vergeleken kunnen worden.

- Er kan een vervolgonderzoek worden gedaan naar de singulariteit die geconstateerd is op rand locatie $(0, \pi)$. Daarbij kan worden onderzocht wat de oorzaak is van de singulariteit. Ook zou kunnen worden onderzocht of er bij grotere en/of kleinere elementen wel convergentie optreedt.

Verwijzingen

- Hoogenboom, P. C. J. (2016). *B17 handout 4*. Dictaat van het vak schalen. Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen. TU Delft. http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_schedule.html
- Rao, S. S. (2011). *The Finite Element Method in Engineering*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2009-0-04807-7
- Zhang, Xinrui (2020). *Accuracy of shell finite elements in SCIA Engineer*. Opdracht voor het vak schalen. Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen. TU Delft. http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_zhang.pdf
- SCIA. (z.d.). *Hoe worden 1D en 2D resultaten beschouwd/berekend?* SCIA Structural Design and Analysis Software. Geraadpleegd op 14 juni 2021, van https://www.scia.net/nl/support/faq/tips-and-tricks/hoe-worden-interne-krachten-en-spanningen-van-2d-elementen-voorgesteld
- Dekking, F. M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H. P., & Meester, L. E. (2005). *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How (Springer Texts in Statistics)* (1st ed.). Springer.

Bijlagen

Bijlage 1: Extra berekening en foutbepaling met andere elementgroottes

Tabel B-1
Resultaten uit SCIA op vier rand locaties voor vier verschillende elementgroottes

Element - grootte	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
360 mm	55,7141	313,7918	-6,4508	0,1848	0,9954	0,1033	-1,2797	4,7666
180 mm	50,2983	309,9160	-3,5171	0,2045	1,2082	0,0474	-2,3984	6,9922
90 mm	47,5065	309,3017	-2,8162	0,1928	1,2545	0,0157	-2,9645	7,5174
45 mm	46,6571	309,2799	-2,6797	0,1900	1,2622	0,0036	-3,1811	7,5934
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
360 mm	-462,3051	-3089,4450	247,4632	-0,0545	1,4173	0,2753	0,9829	-4,0072
180 mm	-508,4214	-3272,0590	348,4442	0,0809	1,4318	0,0900	0,3301	-3,8791
90 mm	-574,3404	-3513,6620	432,5905	0,1219	1,5077	0,0056	0,7268	-2,9468
45 mm	-652,8494	-3834,5760	515,4561	0,1298	1,4685	-0,0356	2,6467	-3,5541
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
360 mm Y=6.182	-9,9657	-1673,9850	1,3335	0,0281	1,4344	3,3858	0,6227	-0,0535
180 mm Y=6.090	-2,5870	-1670,9660	-0,1497	0,0163	1,4116	3,4223	0,6112	-0,0532
90 mm Y=6.045	-0,6946	-1666,5830	-0,3354	0,0090	1,4025	3,4436	0,6110	-0,0519
45 mm Y=6.022	-0,1749	-1663,6080	-0,2385	0,0046	1,3982	3,4554	0,6118	-0,0511
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
360 mm	24,9899	4,5089	0,2801	12,8323	-0,0675	1,8490	-6,7176	4,4629
180 mm	48,8266	2,6875	-0,9546	12,8045	-0,0534	1,7900	-6,4439	3,6188
90 mm	55,8572	0,9621	-1,4851	12,8042	-0,0113	1,7743	-6,3468	2,3637
45 mm	57,6570	0,2755	-1,6720	12,8037	-0,0016	1,7709	-6,3170	1,8134

Tabel B-2
Foutbepaling aan de hand van de resultaten in tabel B-1

	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
Δ_1	2	6	4	-2	5	2	2	4
Δ_2	3	28	5	4	6	3	3	7
b_1	1	3	2		2	1	1	2
b_2	2	5	2	2	3	1	1	3
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
Δ_1	1	1	1	3	0	2	-2	0
Δ_2	1	1	1	5	-2	2	0	-2
b_1	-1	-0	0	2	-2	1		-3
b_2	-0	-0	0	2		1	-2	
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
Δ_1	4	1	8	2	3	2	58	0
Δ_2	4	1	-2	2	2	2	-0	2
b_1	2	-1	3	1	1	1	6	-2
b_2	2	1		1	1	1		1
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
Δ_1	3	1	2	93	0	4	3	1
Δ_2	4	3	3	1	4	5	3	2
b_1	2	0	1	7	-2	2	1	-1
b_2	2	1	2	-1	2	2	2	1

Bijlage 2: Extra berekening en foutbepaling met belasting 200 kN

Tabel B-3
Resultaten uit SCIA op vier rand locaties voor vier verschillende elementgroottes

Element - grootte	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
400 mm	112,6198	630,0656	-13,9215	0,3429	1,8841	0,2272	-2,2495	8,5788
200 mm	102,0926	620,4296	-7,5678	0,4122	2,3825	0,1078	-4,5113	13,5943
100 mm	95,5088	618,6436	-5,7200	0,3878	2,5033	0,0382	-5,8179	14,9692
50 mm	93,4488	618,5524	-5,3784	0,3804	2,5235	0,0092	-6,3211	15,1795
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
400 mm	-921,1102	-6129,9200	460,5813	-0,1585	2,9049	0,6220	2,0464	-7,7042
200 mm	-1000,9700	-6475,7550	665,6452	0,1385	2,8345	0,2242	0,6457	-7,9890
100 mm	-1125,2380	-6950,2300	843,1036	0,2358	3,0016	0,0282	1,2842	-6,1896
50 mm	-1280,1950	-7561,9220	1005,9320	0,2601	2,9654	-0,0625	4,4273	-6,4384
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
400 mm	-25,0956	-3276,7180	3,6451	0,0604	2,9066	7,0069	1,2714	-0,1153
200 mm	-6,5526	-3309,3130	-0,0879	0,0359	2,8405	6,9578	1,2359	-0,1125
100 mm	-1,6643	-3317,4760	-0,6765	0,0194	2,8128	6,9432	1,2282	-0,1063
50 mm	-0,4321	-3319,4960	-0,5128	0,0102	2,8005	6,9386	1,2266	-0,1037
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
400 mm	39,8245	8,8306	1,0833	25,7011	-0,0659	3,7245	-13,5293	8,5762
200 mm	93,1388	6,1165	-1,6195	25,6106	-0,1289	3,5908	-12,9465	7,7276
100 mm	110,6180	2,2853	-2,8723	25,6083	-0,0294	3,5509	-12,7091	5,0077
50 mm	115,0352	0,6721	-3,3095	25,6076	-0,0043	3,5423	-12,6394	3,7268

Tabel B-4

Foutbepaling aan de hand van de resultaten in tabel B-3

	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kN]	m_{yy} [kN]	m_{xy} [kN]	v_x [kN/m]	v_y [kN/m]
	rand locatie (*u, v*) = (0, 0)							
Δ_1	2	5	3	-3	4	2	2	4
Δ_2	3	20	5	3	6	2	3	7
b_1	1	2	2		2	1	1	2
b_2	2	4	2	2	3	1	1	3
	rand locatie (*u, v*) = (0, π)							
Δ_1	1	1	1	3	-0	2	-2	-0
Δ_2	1	1	1	4	-5	2	0	-7
b_1	-1	-0	0	2		1		
b_2	-0	-0	0	2		1	-2	
	rand locatie (*u, v*) = (6, π)							
Δ_1	4	4	6	1	2	3	5	0
Δ_2	4	4	-4	2	2	3	5	2
b_1	2	2	3	1	1	2	2	-1
b_2	2	2		1	1	2	2	1
	rand locatie (*u, v*) = (12, 0)							
Δ_1	3	1	2	39	-1	3	2	0
Δ_2	4	2	3	3	4	5	3	2
b_1	2	-0	1	5		2	1	-2
b_2	2	1	2	2	2	2	2	1

Bijlage 3: Resultaten onderzoek Xinrui Zhang (2020)

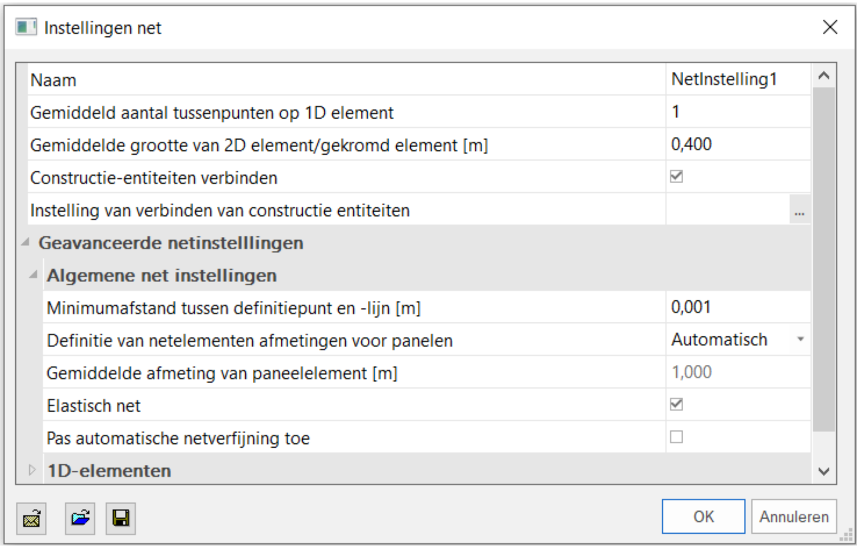
element size	n_{xx}	n_{yy}	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	v_x	v_y
	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN/m]	[kN/m]
edge location $(u, v) = (0, 0)$								
200 mm	124.34	19.41	1.18	-2.09	-0.34	-0.04	-6.31	5.24
100 mm	124.26	18.80	1.32	-2.11	-0.33	-0.02	-6.34	5.61
50 mm	124.27	18.66	1.34	-2.12	-0.32	-0.01	-6.33	5.76
25 mm	124.27	18.63	1.35	-2.12	-0.32	-0.01	-6.33	5.82
edge location $(u, v) = (0, \pi)$								
200 mm	-1553.23	-254.39	176.30	-16.97	-1.93	0.11	-29.49	4.71
100 mm	-1680.81	-281.00	212.40	-16.65	-1.75	0.51	-35.79	-3.93
50 mm	-1836.26	-315.82	248.41	-15.59	-1.53	0.78	-24.80	-28.81
25 mm	-2025.54	-355.75	286.32	-13.86	-1.27	0.94	39.09	-89.53
edge location $(u, v) = (3, \pi)$								
200 mm	-623.36	-0.77	0.06	-4.42	-0.07	-8.21	-0.51	-1.53
100 mm	-624.47	-0.18	-0.42	-4.37	-0.04	-8.19	-0.51	-1.51
50 mm	-624.75	-0.05	-0.35	-4.34	-0.02	-8.18	-0.51	-1.51
25 mm	-624.82	-0.01	-0.21	-4.33	-0.01	-8.18	-0.51	-1.51
edge location $(u, v) = (6, 0)$								
200 mm	0.07	-56.89	-5.24	-0.04	-17.23	-5.08	-4.11	5.53
100 mm	0.07	-55.85	-5.01	-0.01	-17.23	-5.06	-4.37	5.41
50 mm	0.03	-55.57	-4.99	0.00	-17.24	-5.05	-4.42	5.35
25 mm	0.01	-55.50	-5.01	0.00	-17.24	-5.05	-4.43	5.33

Figuur B-1: Rekenresultaten uit SCIA van Xinrui Zhang's onderzoek (2020)

Calculation	Components of internal forces							
	n_{xx}	n_{yy}	$\frac{1}{2}(n_{xy}+n_{yx})$	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	v_x	v_y
edge location $(u, v) = (0, 0)$								
Δ_1	8	4	7	2	1	2	3	2
Δ_2	∞	5	2	∞	∞	∞	∞	2
b_1	3	2	3	1	0	1	2	1
b_2	∞	2	1	∞	∞	∞	∞	1
edge location $(u, v) = (0, \pi)$								
Δ_1	1	1	1	0	1	2	1	0
Δ_2	1	1	1	1	1	2	0	0
b_1	0	0	0	∞	0	1	0	∞
b_2	0	0	0	0	0	1	∞	∞
edge location $(u, v) = (3, \pi)$								
Δ_1	4	4	7	2	2	2	∞	∞
Δ_2	4	3	1	3	2	∞	∞	∞
b_1	2	2	3	1	1	1	∞	∞
b_2	2	2	0	2	1	∞	∞	∞
edge location $(u, v) = (6, 0)$								
Δ_1	0	4	12	3	0	2	5	2
Δ_2	2	4	1	∞	∞	∞	5	3
b_1	∞	2	4	2	∞	1	2	1
b_2	1	2	0	∞	∞	∞	2	2

Figuur B-2: Resultatentabel van de foutbepaling door Xinrui Zhang (2020)

Bijlage 4: Gebruikte instellingen in SCIA

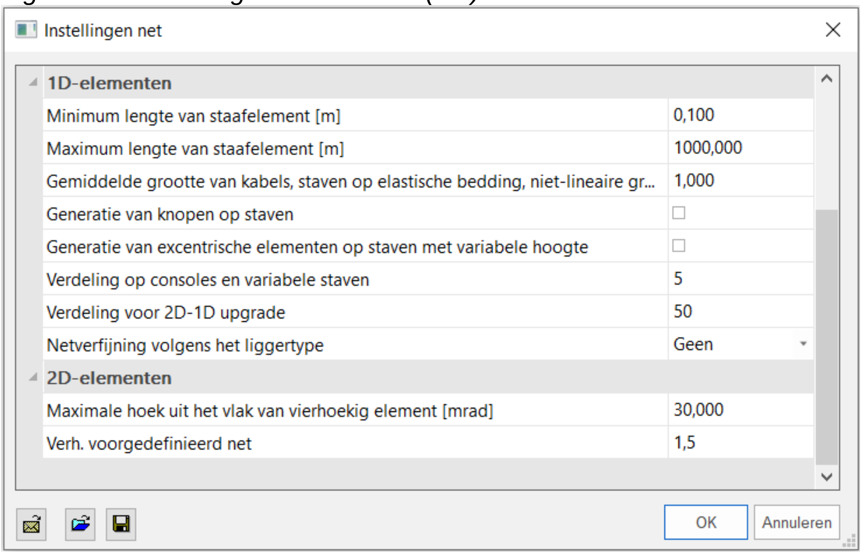


Instellingen net

Naam	NetInstelling1
Gemiddeld aantal tussenpunten op 1D element	1
Gemiddelde grootte van 2D element/gekromd element [m]	0,400
Constructie-entiteiten verbinden	☑
Instelling van verbinden van constructie entiteiten	...
Geavanceerde netinstellingen	
Algemene net instellingen	
Minimumafstand tussen definitiepunt en -lijn [m]	0,001
Definitie van netelementen afmetingen voor panelen	Automatisch
Gemiddelde afmeting van paneelelement [m]	1,000
Elastisch net	☑
Pas automatische netverfijning toe	☐
1D-elementen	

OK Annuleren

Figuur B-3: Instellingen net in SCIA (1/2)

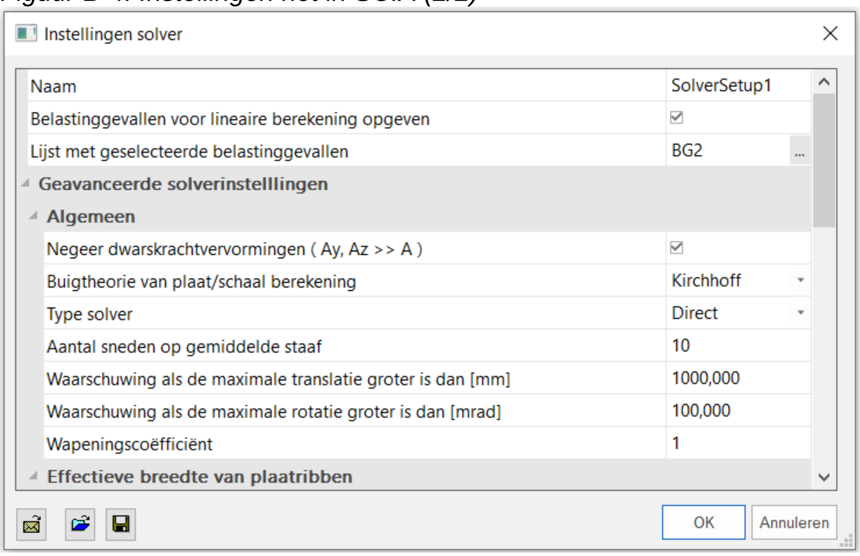


Instellingen net

1D-elementen	
Minimum lengte van staafelement [m]	0,100
Maximum lengte van staafelement [m]	1000,000
Gemiddelde grootte van kabels, staven op elastische bedding, niet-lineaire gr...	1,000
Generatie van knopen op staven	☐
Generatie van excentrische elementen op staven met variabele hoogte	☐
Verdeling op consoles en variabele staven	5
Verdeling voor 2D-1D upgrade	50
Netverfijning volgens het liggertype	Geen
2D-elementen	
Maximale hoek uit het vlak van vierhoekig element [mrad]	30,000
Verh. voorgedefinieerd net	1,5

OK Annuleren

Figuur B-4: Instellingen net in SCIA (2/2)

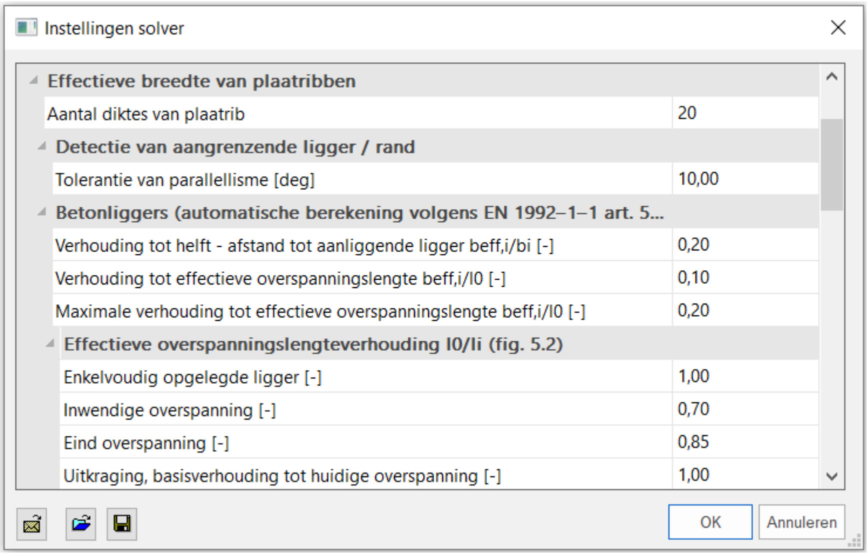


Instellingen solver

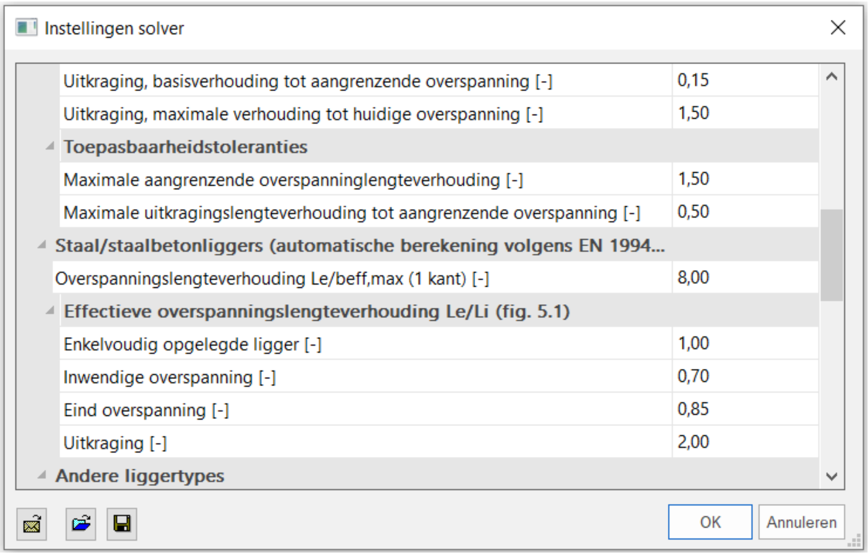
Naam	SolverSetup1
Belastinggevallen voor lineaire berekening opgeven	☑
Lijst met geselecteerde belastinggevallen	BG2 ...
Geavanceerde solverinstellingen	
Algemeen	
Negeer dwarskrachtvervormingen (Ay, Az >> A)	☑
Buigtheorie van plaat/schaal berekening	Kirchhoff
Type solver	Direct
Aantal sneden op gemiddelde staaf	10
Waarschuwing als de maximale translatie groter is dan [mm]	1000,000
Waarschuwing als de maximale rotatie groter is dan [mrad]	100,000
Wapeningscoëfficiënt	1
Effectieve breedte van plaatribben	

OK Annuleren

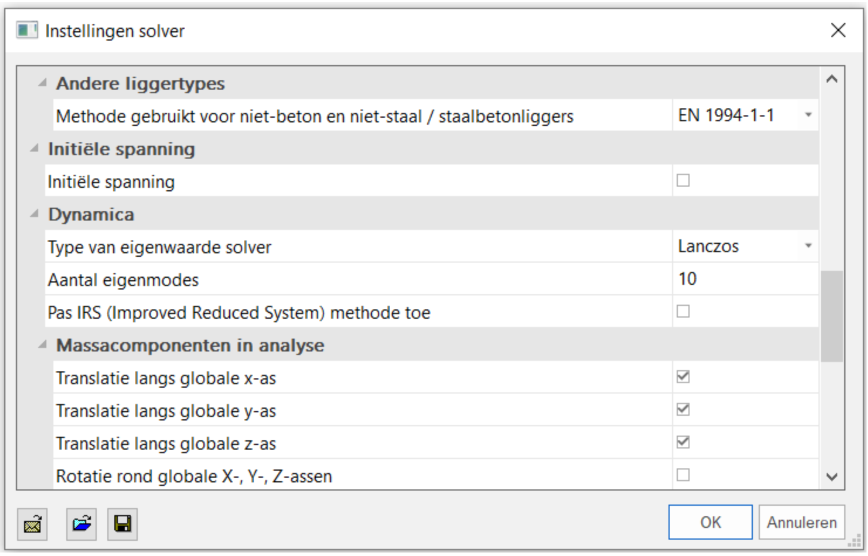
Figuur B-5: Instellingen solver in SCIA (1/5)



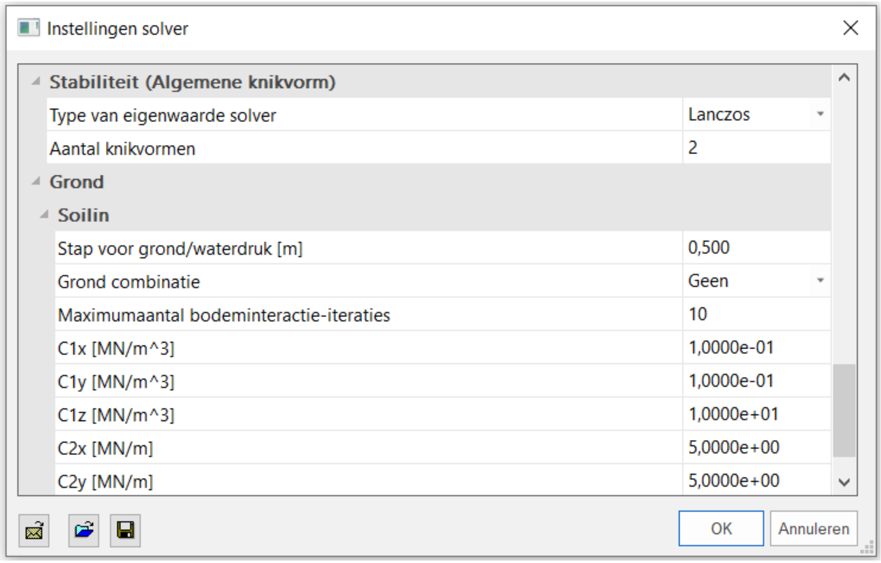
Figuur B-6: Instellingen solver in SCIA (2/5)



Figuur B-7: Instellingen solver in SCIA (3/5)



Figuur B-8: Instellingen solver in SCIA (4/5)



Figuur B-9: Instellingen solver in SCIA (5/5)

Bijlage 5: Tabel met kritieke waarden voor studentverdeling

Table B.2. Right critical values $t_{m,p}$ of the t-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $P(T_m \geq t_{m,p}) = p$. The last row in the table contains right critical values of the $N(0,1)$ distribution: $t_{\infty,p} = z_p$.

	Right tail probability p							
m	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Figuur B-10: Tabel met kritieke waarden voor studentverdeling (Dekking et al., 2005)