Eigenfrequentie van gekromde panelen
Uitbreiding voor rechthoekige panelen

Door

Danny Fu

Studienummer:	4189701
Datum:	30 oktober 2017
Begeleiders:	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
	Dr. ir. K.N. van Dalen
Faculteit:	Civiele Techniek en Geowetenschappen
Afdeling:	Structural Engineering

Voorwoord

Dit onderzoek is een Bachelor Eindwerk naar de eigenfrequentie van gekromde panelen voor het departement Structural Engineering aan de Technische Universiteit Delft. Het is een vervolg op voorgaande Bachelor Eindwerken. Door de inzet van mijn voorgangers is er een ontwerpformule tot stand gekomen en dit project zal streven naar het verfijen van deze formule met de hulp van mijn begeleiders, de heer Hoogenboom en de heer Van Dalen.

Danny Fu

Oktober 2017

Samenvatting

Het doel van dit onderzoek is de huidige ontwerpformule voor de eigenfrequentie van gekromde panelen controleren bij positieve Gauss-kromming en de ontwerpformule uitbreiden, zodat het toegepast kan worden op rechthoekige panelen.

De huidige ontwerpformule ziet er uit als volgt:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left({k_m}^2 + {k_{xy}}^2 + \frac{{k_G}^2 l^2}{1110}\right)\frac{E}{4\pi^2\rho} + \frac{n_{xx}+n_{yy}}{4\rho h l^2} - \frac{(1-\nu^2){n_{xy}}^2}{71{,}1\rho E h^4}}$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy})$$

$$k_G = k_{xx}k_{yy} - {k_{xy}}^2$$

Het vinden van een nauwkeurige formule voor de eigenfrequentie is van belang, zodat men niet genoodzaakt is om software te gebruiken om dit te berekenen. Zo kan er snel vastgesteld worden of een schaalconstructie bestand is tegen een dynamische belasting.

De huidige ontwerpformule is tot stand gekomen door voorgaande Bachelor Eindwerken. In het meest recente onderzoek is er een term aan de formule toegevoegd die het gedrag van een paneel met negatieve Gauss-kromming beschrijft. De nieuwe term is echter nog niet getest op grote panelen met positieve Gauss-kromming. Het testen wordt met behulp van het eindige-elementenmethode programma ANSYS gedaan. Uit de resultaten blijkt dat de trillingsvorm die het paneel aanneemt, veel invloed heeft op de eigenfrequentie. De formule blijft accuraat bij lage krommingen en kleine lengtes, maar wordt onnauwkeurig bij hoge krommingen en grote lengtes. Er is een duidelijk verband te zien met de trillingsvorm en de nauwkeurigheid van de ontwerpformule. Wanneer de trillingsvorm afwijkt van de modus met een centrale buik, dan wordt de ontwerpformule onnauwkeurig.

Bij het testen van de panelen zijn er een paar vast waardes aangehouden:

- Stalen panelen met een elasticiteitsmodulus van 2,1e11 N/m^2
- Panelen met een dikte van 0,02 meter
- Poisson-factor van 0,3
- Panelen met afmetingen van 1-10 meter bij 1-10 meter
- Panelen met krommingen 0,05/meter, 0,1/meter en 0,2/meter
- Materiaal dichtheid van 7000 kg/m^3

Voor het vinden van een formule voor gekromde rechthoekige panelen is de differentiaalvergelijking voor het dynamisch gedrag van een schaal zonder membraankrachten gebruikt:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 u_z + Eh\Gamma\Gamma u_z = \nabla^2\nabla^2(p_z - \rho h\ddot{u}_z)$$

$$u_z = u\cos\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)\cos(2\pi f t)$$

De differentiaalvergelijking wordt met behulp van Maple opgelost en hieruit komt een formule die bestaat uit drie termen. Een algemene term voor vlakke panelen, een term voor de kromming en een term voor de twist. Samengevoegd resulteert dit in de volgende formule:

$$f = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3\left(l_x{}^2 + l_y{}^2\right)^2 h^2 \pi^2 E}{(1-\nu^2)\rho l_x{}^4 l_y{}^4} + \frac{36E\left(k_{xx} l_x{}^2 + k_{yy} l_y{}^2\right)^2}{\pi^2 \rho \left(l_x{}^2 + l_y{}^2\right)^2} + \frac{144 k_{xy}{}^2 l_x{}^2 l_y{}^2 E}{\left(l_x{}^2 + l_y{}^2\right)^2 \rho \pi^2}}$$

Ook deze formule wordt onnauwkeurig bij hoge positieve Gauss-krommingen en grote lengtes. De oorzaak hiervan ligt net als bij de huidige ontwerpformule voor gekromde vierkante panelen in de trillingsvorm. Bij afwijking van de trillingsvorm met een centrale buik wordt de formule onnauwkeurig.

Bij negatieve Gauss-kromming wordt de formule onnauwkeurig, wanneer deze wordt toegepast aan slanke panelen. Naarmate het paneel slanker wordt, neigt de trillingsvorm naar een modus met meerdere buiken. De formule houdt niet rekening met overgangen in trillingsvorm en berekent enkel de eigenfrequentie bij een trillingsvorm met een centrale buik.

Bij het testen van de rechthoekige panelen zijn er vaste waardes gekozen voor de lengte in y (1,0 meter, 2,0 meter en 5,0 meter).

Inhoudsopgave

Lijst met figuren

Lijst met tabellen

Symbolen en waardes

Symbool	Grootheid	Waarde	Eenheid
l	Lengtes van een vierkant paneel	1-10	m
l_x	Lengte in de x-richting van een paneel	1-10	m
l_y	Lengte in de y-richting van een paneel	1-10	m
h	Dikte van een paneel	0,02	m
E	Elasticiteitsmodulus	2,1e11	N/m^2
k_{xx}	Kromming om de x-as	0,05/1,0/0,2	1/m
k_{yy}	Kromming om de y-as	0,05/1,0/0,2	1/m
k_{xy}	Twist	-	1/m
ν	Poisson-factor	0,3	-
ρ	Dichtheid	7000	kg/m^3

1. Introductie

1.1 Inleiding

Met vooruitgang van technologie ontwikkelt ook de bouwwereld zich verder. Met innovaties wil men deviëren van het oude en vertrouwde. De kolommen en liggers maken plaats voor schaalconstructies. Schaalconstructies zijn constructies die bestaan uit een massieve schaal, die relatief dun is in vergelijking met zijn andere dimensies. Dit geeft een massief uiterlijk, terwijl er relatief weinig materiaal vereist is. Bij grote schaalconstructies is het vaak niet mogelijk dat de schaal een groot geheel is en bestaat de schaal uit meerdere elementen, zoals panelen. Bij het construeren met schaalconstructies zijn meer ronde en organische vormen mogelijk met behulp van gekromde panelen. Verder verhoogt de kromming zelfs de stijfheid van de panelen. Deze eigenschappen maakt het construeren met schalen zeer aantrekkelijk.

Door de grote variatie in vormen die de schaalelementen kunnen aannemen, zijn de bezwijkmechanismen anders dan bij gewone vlakke panelen. Een van deze bezwijkmechanismen is resonantie. De eigenfrequentie van de schaalconstructie resoneert dan met een dynamische externe belasting, wat resulteert in een toename van de amplitude en uiteindelijk bezwijking. Een goede benadering voor het bepalen van de eigenfrequentie kan voorkomen dat resonantie optreedt.

1.2 Probleemstelling

Er is een ontwerpformule ontwikkeld voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen. De foutmarge van deze ontwerpformule is niet groter dan 20%. De formule kan gebruikt worden voor verschillende afmetingen, krommingen en belastingen.

In het bacheloreindwerk van Joep Sluijs is een term toegevoegd aan deze formule die belangrijk is voor panelen met grote lengte en breedte bij negatieve krommingen. Niet bekend is of deze term ook correct is voor positieve krommingen.

De huidige formule kan alleen toegepast worden op vierkante panelen. In de formule is er geen onderscheid tussen de lengte en breedte van de panelen. Dus de huidige ontwerpformule heeft alleen betrekking op panelen waarbij de twee grootste dimensies gelijk aan elkaar zijn. In de praktijk is dit vaak niet het geval en daarom is er een uitbreiding nodig op de huidige ontwerpformule.

1.3 Doelstellingen

1) De formule voor de laagste eigenfrequentie van vierkante gekromde panelen controleren voor grote lengte en breedte bij positieve krommingen.

2) De formule uitbreiden voor rechthoekige gekromde panelen.

1.4 Aanpak

Het project wordt verricht door middel van literatuurstudie, een analytische benadering tot de formule en de programma's ANSYS en Maple.

In de literatuurstudie wordt onderzoek gedaan naar de eigenfrequentie van gekromde panelen, eigenfrequentie van vlakke panelen en Gauss-krommingen. Bronnen zullen zijn onder andere "Structural Shell Analysis" van Blauwendraad en Hoefakker en voorgaande bachelor eindwerken over gekromde panelen. Er wordt gezocht naar de effecten van een verandering in de lengte-breedteverhouding en de invloed hiervan op de huidige ontwerpformule.

Het eindige-elementenmethode programma ANSYS wordt gebruikt voor het modelleren en toetsen van constructies. De huidige ontwerpformule wordt getoetst op positief gekromde panelen om de huidige ontwerpformule te controleren. De resultaten worden geanalyseerd bij verschillende krommingen en lengtes. De eigenfrequenties uit de huidige ontwerpformule worden vergeleken met de resultaten uit ANSYS.

Na eventuele correcties wordt de de ontwerpformule aangepast om een gewenste model te krijgen van rechthoekige panelen. Dit wordt gedaan met behulp van de software Maple. De resultaten worden geanalyseerd en vergeleken met resultaten uit ANSYS met als doel de ontwerpformule te optimaliseren en uit te breiden.

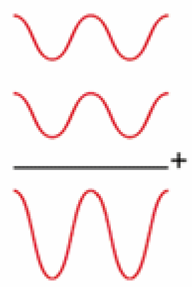
In dit project wordt alleen gekeken naar panelen zonder belasting.

2. Achtergrond

Dit project richt zich op de eigenfrequentie van gekromde panelen, vaak ook schaalconstructies genoemd. Een schaal kan gegeneraliseerd worden tot een plaat. De karakteristieken van een plaat zijn de lengte en breedte die in verhouding vele malen groter zijn dan de dikte. Hetgeen wat schalen onderscheidt van platen is dat de schalen een gekromd middenvlak hebben. Als gevolg hiervan worden krachten anders overgedragen.

2.1 Eigenfrequentie

De eigenfrequentie is de natuurlijke frequentie waarin een object of voorwerp oscilleert. De eigenschappen van het object of voorwerp bepalen wat de eigenfrequentie is. Wanneer er een externe dynamische kracht het object met dezelfde frequentie belast, treedt er resonantie (Figuur 1) op. Resonantie is een natuurkundig verschijnsel waarbij de amplitude groter wordt doordat de trilling weerklank vindt. In de Civiele Techniek wil men dit verschijnsel vermijden. Toenemende trillingen kunnen leiden tot het bezwijken van een constructie. De laagste eigenfrequentie van een vlak paneel kan berekend worden met volgende formule:

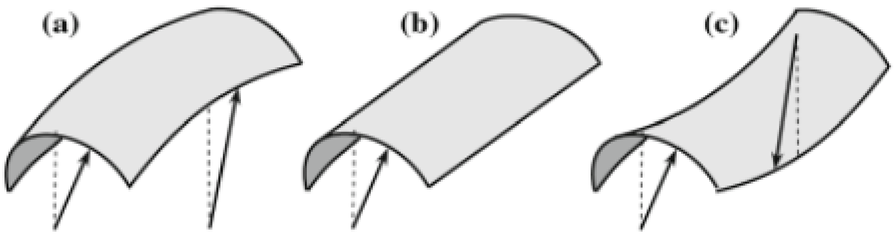


Figuur 1: Resonantie

$$f_{vlak} = \frac{\pi}{l^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad [2.1]$$

2.2 Gauss-kromming

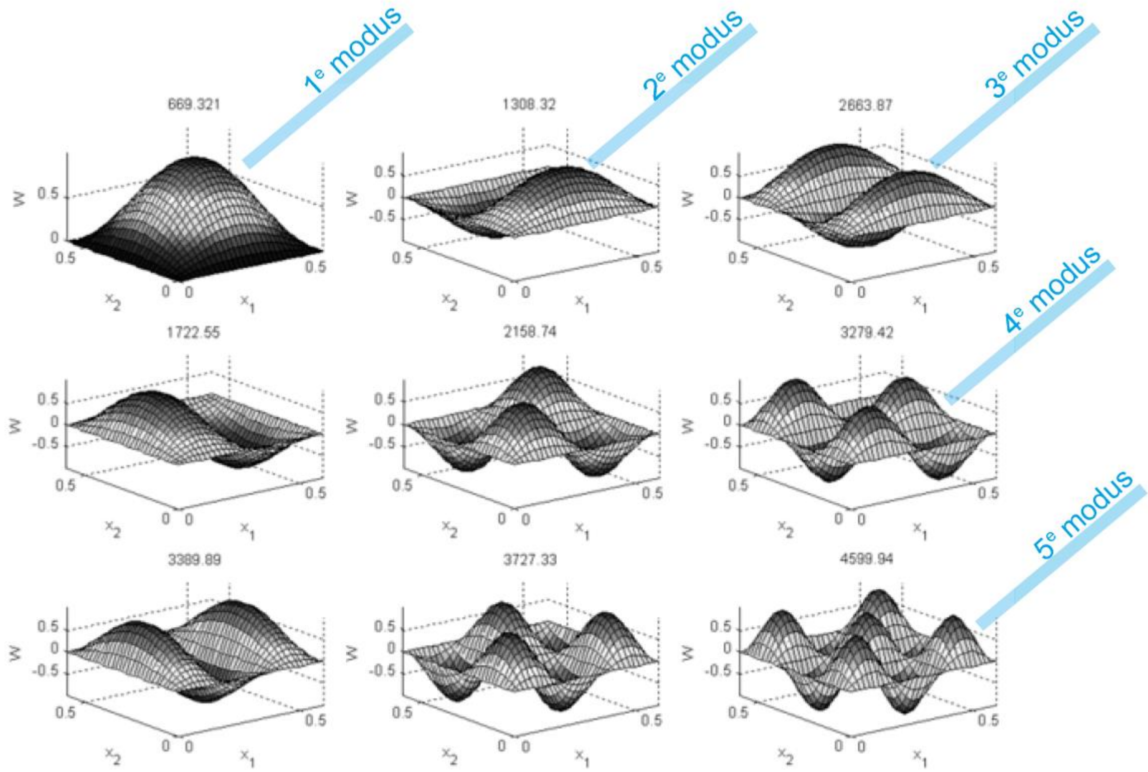
De Gauss-kromming (Figuur 2) is een product van de hoofdkrommingen in een oppervlak en wordt gedefinieerd als: $k_G = k_{xx}\,k_{yy} - {k_{xy}}^2$. De Gauss-kromming heeft drie verschillende vormen: positief, neutraal en negatief. Bij een positieve Gauss-kromming neigt de plaat naar de vorm van een bol. Bij een neutrale Gauss-kromming is deze gelijk aan nul en neemt de plaat de vorm aan van een cilinder. Bij een negatieve Gauss-kromming is de plaat zadelvormig.



Figuur 2: Gauss-kromming - (a) positief (b) neutraal (c) negatief (1)

2.3 Trillingsvorm

De trillingsvorm (Figuur 3) is een belangrijke factor waar rekening gehouden moet worden bij het bepalen van de laagste eigenfrequentie. De meest voorkomende trillingsvorm van een vierkant paneel is de modus met een buik. Bij deze modus wordt de gehele lengte van het paneel benut en is het gedrag van het paneel vrij voorspelbaar. Wanneer het paneel trillingsmodi met meerde buiken aanneemt, begint het bepalen van de eigenfrequentie gecompliceerd te worden. Bij deze trillingsvormen gedraagt het paneel zich als een combinatie van meerdere panelen. Een paneel met een trillingsmodus met vier buiken kan gezien worden als vier panelen met ieder een trillingsmodus met een buik. Dit maakt het lastig om een formule voor de laagste eigenfrequentie op te stellen waarin de lengtes van het paneel verwerkt zijn.



Figuur 3: Trillingsvormen (2)

2.4 ANSYS

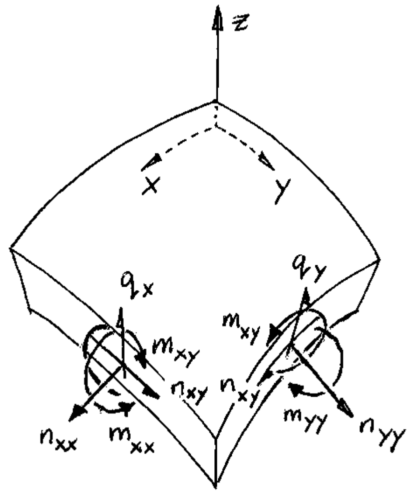
ANSYS, Inc. is opgericht in 1970 door bijna 3000 ingenieurs van Master en Ph.D niveau. Het bedrijf publiceert de software ANSYS Mechanical voor het modeleren met de eindige-elementenmethode. Het modelleren met ANSYS is verdeeld in drie fases: preprocessor, solution en postprocessor. In de preprocessor worden onder andere de knopen en elementen geplaatst. In de solution worden de relevante berekeningen gedaan, waarna in de postprocessor de resultaten geanalyseerd kunnen worden. Voor het programma is er een script (Bijlage B) ontwikkeld door Pierre Hoogenboom en Luuk Metselaar, die de trilling van een gekromd paneel modeleert.

2.5 Randvoorwaarden

In het ANSYS script (Bijlage B) zijn de volgende randvoorwaarden gedefinieerd:

- Geen verplaatsing loodrecht op het vlak
- Geen verplaatsing in de richting van de randen

Er is dus wel vrijheid in het vlak van het paneel loodrecht op de rand. Dit geeft het paneel de mogelijkheid om te ademen. In de afbeelding (Figuur 4) zijn de vrijheidsgraden van een paneel weergegeven. Met de randvoorwaarden in het script is er bij de randen naast rotaties alleen verplaatsing mogelijk in de richtingen n_{xx} en n_{yy}.



Figuur 4: Vrijheidsgraden

2.6 Ontwikkeling van de formule

De huidige ontwerpformule is tot stand gekomen door diverse voorgaande onderzoeken.

Moerbeek (3) heeft in 2012 gekeken naar de invloed op oppervlaktes met verschillende vormen van krommingen, waaronder cilinder, ellipsoïde en bol. Uit zijn onderzoek werd geconcludeerd:

- een toename van de dikte geeft een toename van de eigenfrequentie
- een toename van de lengte geeft een afname van de eigenfrequentie
- een toename van de kromming geeft een toename van de eigenfrequentie

Metselaar (4) heeft in 2013 voor het eerst geprobeerd een ontwerpformule op te stellen voor gekromde panelen. Daarbij hield hij rekening met limietgevallen, zoals een vlakke plaat en een deel van een cilinder. Er werd onderzoek gedaan naar vierkante gekromde panelen, met krommingen in twee richtingen, een bepaalde dikte, bepaalde afmetingen en een bepaald materiaal. Door de overgangen tussen verschillende trillingsvormen was het niet mogelijk een algemene formule op te stellen en in plaats daarvan zijn er meerdere ontwerpformules opgesteld met randvoorwaarden.

Schelterma (5) heeft in 2013 een ontwerpformule opgesteld bestaande uit meerdere termen:

$$f_{algemeen} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi^4 h^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right)} \qquad [2.2]$$

De formule is geldig mits de parameters voor dimensies, kromming en twist zich in de grenzen bevinden. Opmerkelijk is dat deze ontwerpformule ook toegepast kan worden op rechthoekige panelen.

Van Dijk (6) heeft in 2014 onderzoek gedaan naar de invloeden van membraankrachten op de eigenfrequentie van een paneel. Er is getracht een term te vinden voor de membraankrachten die toegevoegd kan worden aan de ontwerpformule. De formule die tot stand is gekomen, heeft begrenzingen voor o.a. de elasticiteitsmodulus, schuifkracht en kromtestraal.

$$f_{11,curve,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\rho\pi^2}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{n_{xx}+n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{1{,}06 n_{xy}{}^2}{100\rho h^4 E}\right)} \qquad [2.3]$$

Noortman (7) heeft in 2014 onderzoek gedaan naar de kromming en twist in panelen en hun invloed op de eigenfrequentie. Uit zijn onderzoek bleek dat bij de aanwezigheid van krommingen in twee richtingen en twist de ontwerpformule onnauwkeurig werd. Er werd daarom gekozen om twee formules op te stellen.

$$f_{schaal,kromming} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)l^4} + \frac{(k_{xx}+k_{yy})^2}{16\pi^2}\right)}$$

$$f_{schaal,twist} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)l^4} + \frac{k_{xy}}{4\pi^2}\right)} \qquad [2.4]$$

Greijmans (8) heeft in 2016 naar een relatie gezocht tussen Gauss-krommingen en de eigenfrequentie in gekromde panelen. Er werd geconcludeerd dat de panelen een andere eigenfrequentie hebben afhankelijk van de Gaus-kromming. Schaaldelen werden gecategoriseerd met elk een andere formule voor de eigenfrequentie.

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left[A\left(k_{xx}{}^2 + k_{yy}{}^2\right) + Bk_{xx}k_{yy} + Ck_{xy}{}^2\right]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \qquad [2.5]$$

De variabelen A,B en C zijn afhankelijk van de categorie van het schaaldeel.

Paasman (9) heeft in 2016 de ontwerpformule proberen te herschrijven naar een algemene formule die van toepassing is op alle krommingen. Dat resulteerde in de volgende ontwerpformule met een foutmarge van 20%:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left[\left(k_{xx}+k_{yy}\right)^2 + 4k_{xy}{}^2\right]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \qquad [2.6]$$

Sluijs (10) heeft in 2017 onderzoek gedaan naar de toepasbaarheid van de formule op zadelvormige krommingen. Bij negatieve krommingen bleek de formule niet accuraat. Het toevoegen van een term voor zadelvormige krommingen zou de ontwerpformule binnen een foutmarge van 20% houden.

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left[\left(k_{xx}+k_{yy}\right)^2 + 4k_{xy}{}^2 + \frac{\left(k_{xx}k_{yy}\right)^2 l^2}{276{,}75}\right]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \qquad [2.7]$$

De huidige totale ontwerpformule is de formule van Sluijs met de invloed van membraankrachten en ziet er als volgt uit:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-v^2)}\frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left({k_m}^2 + {k_{xy}}^2 + \frac{{k_G}^2 l^2}{1110}\right)\frac{E}{4\pi^2\rho} + \frac{n_{xx}+n_{yy}}{4\rho h l^2} - \frac{(1-v^2){n_{xy}}^2}{71{,}1\rho E h^4}}$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy})$$

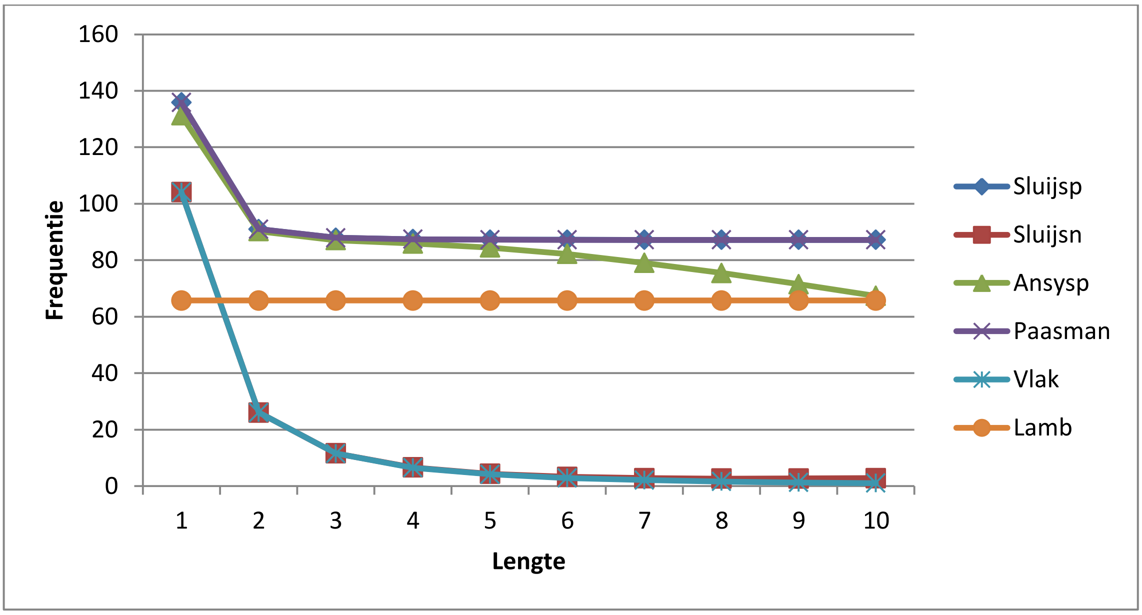
$$k_G = k_{xx}k_{yy} - {k_{xy}}^2 \qquad [2.8]$$

3. Positieve Gauss-kromming

In het BSc eindwerk van Joep Sluijs (10) is gekeken naar de nauwkeurigheid van de formule van Paasman [2.6] op zadelvormige panelen. Zadelvormige panelen zijn panelen met een negatieve Gauss-kromming (Figuur 2). Uit zijn onderzoek bleek dat er een term in de formule ontbrak. Naarmate de lengtes van de panelen toenamen, werd de formule onnauwkeuriger. Door een term aan de formule toe te voegen die recht evenredig is met de lengte kon deze groeiende onnauwkeurigheid worden verholpen. In het onderzoek van Sluijs is echter niet gekeken welke invloed deze nieuwe term heeft op grote panelen met een positieve Gauss-kromming.

3.1 Controle van de formule

In de onderstaande grafiek zijn de laagste eigenfrequentie tegenover de lengtes gezet met een kromming van 0,1. Hierin zijn de lengtes l_x en l_y gelijk aan elkaar, dus vierkante panelen.



Figuur 5: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,1 kromming

In de grafiek (Figuur 5) zijn de volgende gegevens verwerkt:

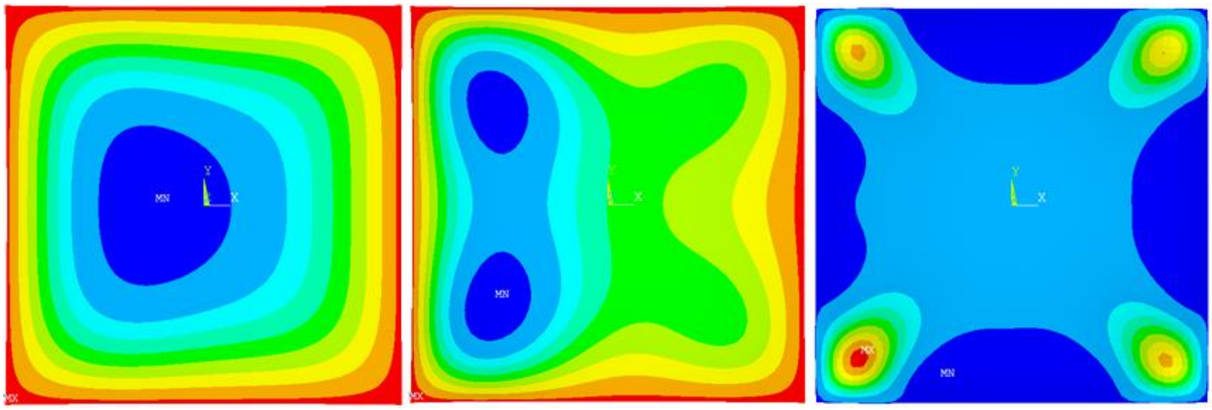
- **Sluijsp**: De huidige ontwerpformule [2.8] met positieve Gauss-kromming
- **Sluijsn**: De huidige ontwerpformule [2.8] met negatieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Paasman**: De formule van Paasman [2.5] met positieve Gauss-kromming
- **Vlak**: De formule voor een vlak paneel zonder krommingen [2.1]
- **Lamb**: De formule van Horace Lamb [3.1]

Er is te zien in de grafiek (Figuur 5) dat de toegevoegde term van Sluijs een subtiele werking heeft op de formule. De eigenfrequenties van de huidige ontwerpformule met negatieve Gauss-kromming zijn bij kleine lengtes gelijk aan de eigenfrequenties van de formule voor een vlak paneel. Bij grotere lengtes beginnen deze eigenfrequenties van elkaar te verschillen en dat is de werking van Sluijs' term. De term heeft echter bijna geen invloed op panelen met een positieve Gauss-kromming. De verschillen in eigenfrequentie tussen de huidige ontwerpformule met positieve Gauss-kromming en de formule van Paasman met positieve Gauss-kromming zijn verwaarloosbaar klein.

De formule van Horace Lamb [3.1] dient als referentie voor de eigenfrequentie van een paneel met positieve Gauss-kromming. De formule van Lamb, die afhankelijk is van kromming en niet afhankelijk van lengtes, berekent de laagste eigenfrequentie van een dunne bolvormige schaal.

$$f_n = 0{,}12 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.1}$$

In de grafiek (Figuur 5) is duidelijk te zien dat naarmate de lengtes noemen, de nauwkeurigheid van de huidige ontwerpformule met positieve Gauss-kromming afneemt. Bij grote lengtes verschillen de eigenfrequenties van de huidige ontwerpformule met positieve Gauss-kromming en de eigenfrequenties uit ANSYS steeds meer van elkaar. Wanneer gekeken wordt naar de trillingsvormen van de ANSYS resultaten, wordt het duidelijk waarom deze eigenfrequenties van elkaar verschillen.



Figuur 6: Trillingsvormen 0,1 parabolische kromming met lengtes 4m (links), 5m (midden), 10m (rechts)

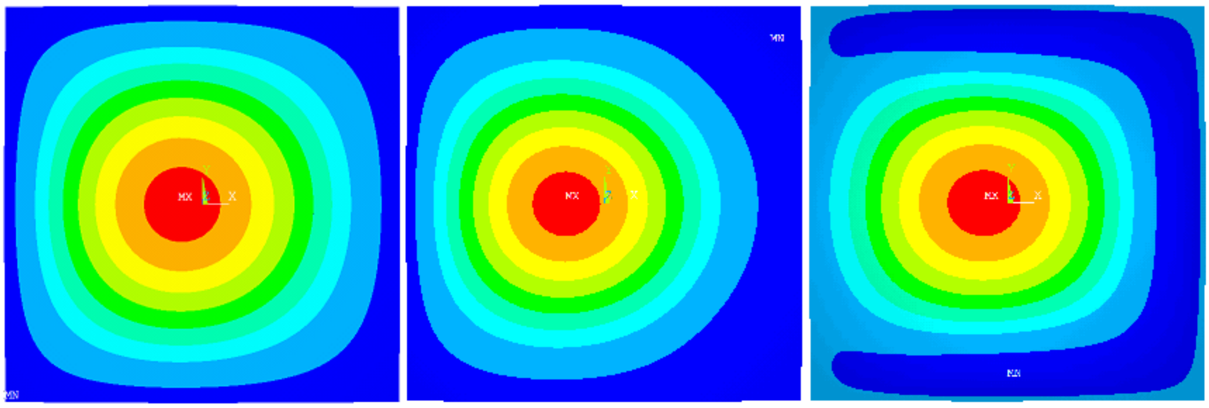
Er is een duidelijk verschil in trillingsvormen van panelen met verschillende lengtes (Figuur 6). De trillingsvorm van de laagste eigenfrequentie wijkt bij grote lengtes af van de trillingsmodus met een buik. De buiken schijnen zich ook te verplaatsen naar de hoeken van het paneel en de trillingsvorm wordt asymmetrisch. Een mogelijke verklaring voor de verplaatste buiken is de wijze waarin het paneel kromt. In het ANSYS script (Bijlage B) is de kromming van het paneel parabolisch, waardoor er minder kromming aanwezig is bij de randen van het paneel. De lagere kromming zorgt voor een lagere stijfheid en hierdoor ontstaan de trillingsbruiken bij deze vlakkere gedeeltes. Dit verschijnsel komt alleen voor bij hoge krommingen en en grote lengtes. Bij lage krommingen zijn de verschillen in kromming over het paneel niet significant voor een verandering van trillingsvorm. Bij kleine lengtes zijn de vlakke gedeeltes van het paneel niet groot genoeg voor het ontstaan van trillingsbuiken.

3.2 Bolle kromming

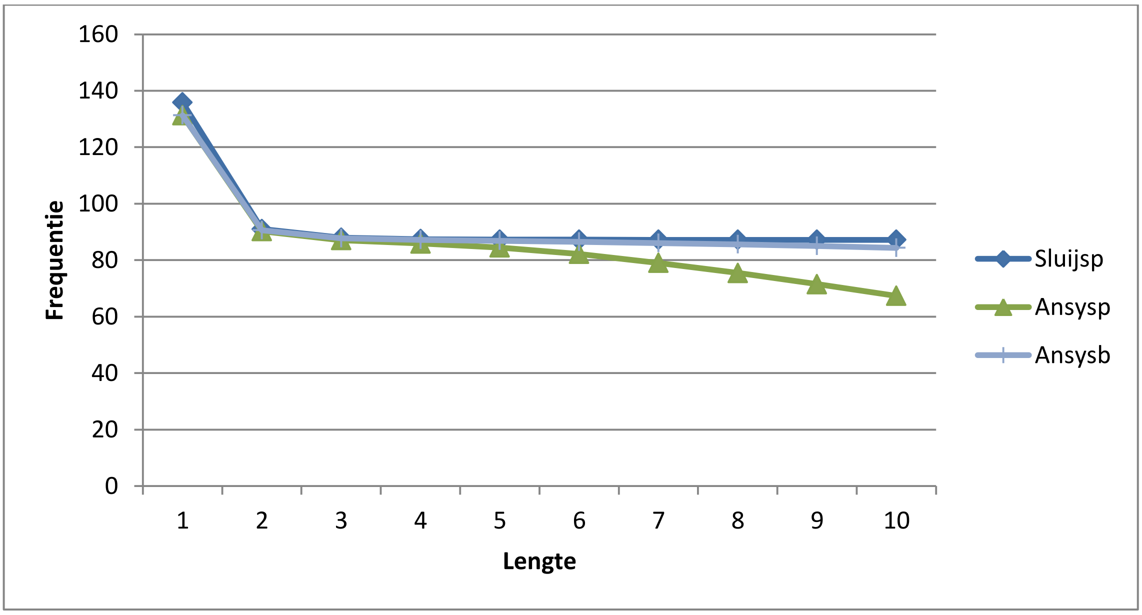
Om te achterhalen of afwijkende trillingsvormen (Figuur 6) echt veroorzaakt worden door parabolische kromming, wordt het ANSYS script (Bijlage B) aangepast. In plaats van een parabolische kromming wordt er een bolle kromming aan het paneel toegepast. Bij een bolle kromming is de kromming over het gehele paneel gelijk en ontstaan er geen vlakke gedeeltes.

$$Parabolische\ kromming: k_{xx}x^2 + k_{yy}y^2 + 2z = 0$$

$$Bolle\ kromming: x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k_{xx}k_{yy}}$$



Figuur 7: Trillingsvormen 0,1 bolle kromming met lengtes 4m (links), 5m (midden), 10m (rechts)



Figuur 8: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,1 kromming

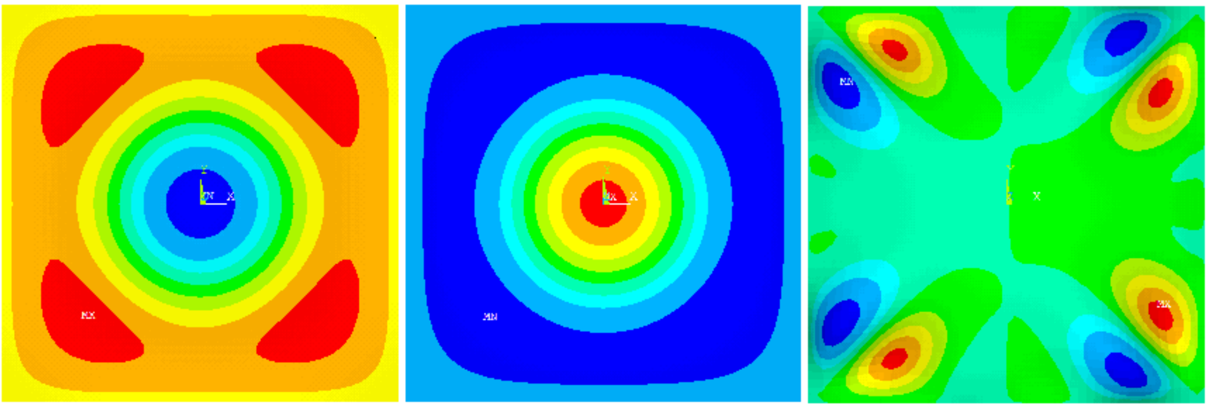
In de grafiek (Figuur 8) zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Sluijsp**: De huidige ontwerpformule [2.8] met positieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Ansysb**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (bolvormig)

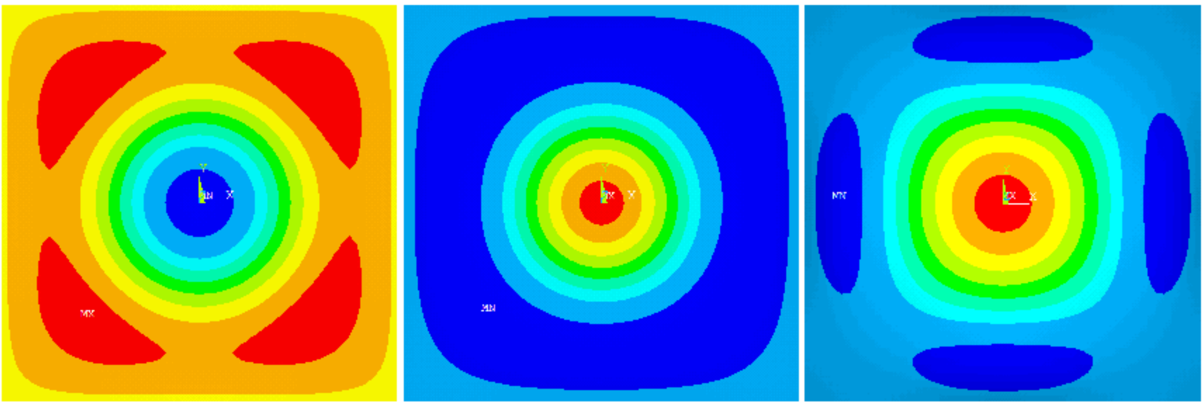
Bij een transitie van een parabolische kromming naar een bolle kromming is er minder variatie in trillingsvorm (Figuur 7). De trillingsvormen hebben een buik die zich in het midden van het paneel bevindt. Als gevolg is er minder verschil tussen de eigenfrequenties verkregen uit de ontwerpformule en de resultaten uit ANSYS (Figuur 8) bij grote lengtes en hoge kromming. Het is dus heel goed mogelijk dat de vlakke gedeeltes die ontstaan bij een parabolische kromming, de afwijkende trillingsvormen veroorzaken. Bij hele hoge krommingen en grote lengtes (Bijlage A) geeft ANSYS een foutmelding bij het script met bolle kromming (Bijlage B), omdat er bij het modelleren geprobeerd wordt om de wortel te trekken van een negatief getal.

3.3 Vastgezette randen

Wanneer naar de trillingsvormen wordt gekeken bij een bolle kromming (Figuur 7) is te zien dat bij grote lengtes nog steeds asymmetrie optreedt. De asymmetrie wordt dus niet veroorzaakt door de parabolische kromming, omdat bij de overgang van parabolische kromming naar bolle kromming asymmetrie zich nog steeds voordoet. Een andere mogelijkheid is dat de bron van het verschijnsel in de wijze zit waarop de randvoorwaarden gedefinieerd worden in het script. Om dit te testen worden de randen van het paneel vastgezet (Bijlage B). In het originele script kunnen de randen van het paneel ademen en lichtelijk bewegen. Met deze aanpassing is er geen verplaatsing meer mogelijk in de randen, maar rotatie is nog wel steeds mogelijk. Met vastgezette randen zijn de trillingsvormen geheel symmetrisch bij zowel een parabolische kromming (Figuur 9) als een bolle kromming (Figuur 10). Het is heel goed mogelijk dat er een fout zit in het originele script rondom de randvoorwaarden.

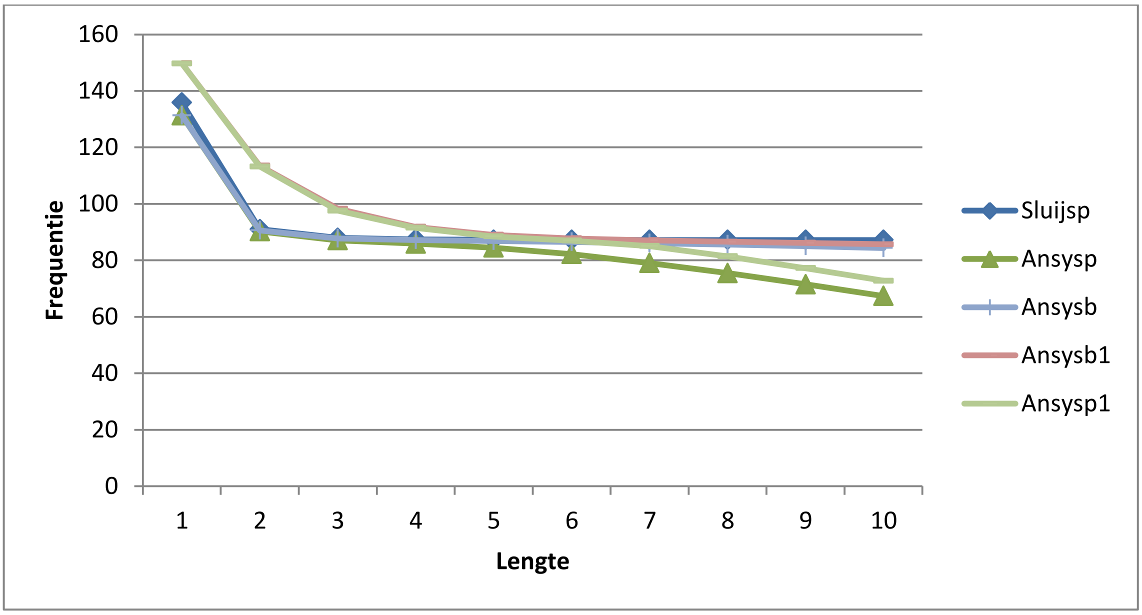


Figuur 9: Trillingsvormen 0,1 parabolische kromming met vastgezette randen met lengtes 4m (links), 5m (midden), 10m (rechts)



Figuur 10: Trillingsvormen 0,1 bolle kromming met vastgezette randen met lengtes 4m (links), 5m (midden), 10m (rechts)

In de grafieken (Figuur 11) zijn de resultaten van ANSYS verwerkt bij een parabolische en bolle kromming met en zonder vastgezette randen. Bij kleine lengtes zijn er grote verschillen tussen de eigenfrequenties van de ontwerpformule en de resultaten uit ANSYS met vastgezette randen. Deze resultaten verschillen aanzienlijk meer van de ontwerpformule in vergelijking met de resultaten zonder vastgezette randen. Bij grote lengtes zijn echter de verschillen enigzins kleiner. Opmerkelijk is ook dat de resultaten bij grote lengtes met en zonder vastgezette randen vrijwel parallel aan elkaar lopen. Dit wordt hoogstwaarschijnlijk veroorzaakt door de trillingsvormen met meerdere buiken die ontstaan bij grote lengtes en hoge krommingen. Als er geen verplaatsing mogelijk is in de randen, vindt de overgang in trillingsvorm van een buik naar meerdere buiken bij grotere lengtes plaats.



Figuur 11: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,1 kromming

In de grafiek (Figuur 11) zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Sluijsp**: De huidige ontwerpformule [2.8] met positieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Ansysb**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (bolvormig)
- **Ansysp1**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming met vastgezette randen (parabolisch)
- **Ansysb1**: De resultaten uit ANSYS met postieve Gauss-kromming met vastgezette randen (bolvormig)

4. Rechthoekige panelen

Annemette Scheltema heeft in haar BSc Eindwerk (5) een formule [2.2] opgesteld voor gekromde rechthoekige panelen. De formule behoudt een nauwkeurigheid tot 5% wanneer het voldoet aan de volgende eisen:

- l_x, $l_y \leq 1{,}0$m
- $0{,}1 \leq l_x/l_y \leq 10$
- h << l
- Voor slanke schalen R/h ≥ 2000 is de formule geldig als R/l ≥ 10
- Voor dikke schalen R/h ≤ 30 is de formule geldig als R/l ≥ 1
- Bij aanwezige twist $R_{xy} > 1$m

De eisen die opgesteld zijn, maken de toepasbaarheid van de formule heel beperkt, met name de eis dat de lengtes maximaal 1 meter moeten zijn. De formule van Scheltema is dan ook alleen toepasbaar op kleine schalen, wat in de praktijk niet altijd het geval is.

4.1 Opstellen van de formule

Afgeleid uit de bewegingsvergelijking is een differentiaalvergelijking voor het dynamisch gedrag van een schaal zonder membraankrachten.

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 u_z + Eh\Gamma\Gamma u_z = \nabla^2\nabla^2(p_z - \rho h\ddot{u}_z) \qquad [4.1]$$

Waarin de verplaatsing gedefinieerd wordt als volgt:

$$u_z = u\cos\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)\cos(2\pi f t) \qquad [4.2]$$

Deze differentiaalvergelijking kan met behulp van Maple analytisch worden opgelost (Bijlage B). De oorspronkelijke oplossing uit Maple geeft een lange ingewikkelde formule voor de eigenfrequentie die in de praktijk niet bruikbaar is. In plaats daarvan wordt er gezocht naar een samengestelde formule bestaande uit termen die gevonden worden door middel van randvoorwaarden.

De eerste term wordt gevonden door de kromming (k_{xx}, k_{yy}) en twist (k_{xy}) gelijk te stellen aan nul. De term T_1 [4.3] is het gekwadrateerde van de oplossing, die hieruit komt.

$$T_1 = \frac{1}{48}\frac{\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2 h^2\pi^2 E}{(1-\nu^2)\rho {l_y}^4 {l_x}^4} \qquad [4.3]$$

De tweede term wordt gevonden door de twist (k_{xy}) gelijk te stellen aan nul en de term T_1 [4.3] van de gekwadrateerde uitkomst af te trekken.

$$T_2 = \frac{1}{4}\frac{E\left(k_{xx}{l_x}^2 + k_{yy}{l_y}^2\right)^2}{\pi^2\rho\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2} \qquad [4.4]$$

De derde term wordt gevonden door de termen T_1 [4.3] en T_2 [4.4] van de gekwadrateerde oplossing af te trekken.

$$T_3 = \frac{\left(\tan\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)\tan\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)k_{xx}{l_x}^2 + \tan\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)\tan\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)k_{yy}{l_y}^2 + k_{xy}l_x l_y\right)l_y l_x k_{xy}E}{\pi^2\rho\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2} \qquad [4.5]$$

Deze term is niet accuraat, want in de oplossing dienen de coördinaten (x, y) weg te vallen. De term T_3 [4.5] wordt daarom verdeeld in een bruikbaar deel en een residu.

$$T_3 = \frac{{k_{xy}}^2{l_x}^2{l_y}^2E}{\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2\rho\pi^2} \qquad [4.6]$$

$$residu = \frac{\left(k_{xx}{l_x}^2 + k_{yy}{l_y}^2\right)l_y l_x k_{xy}\tan\left(\frac{\pi y}{l_y}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{l_x}\right)E}{\pi^2\rho\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2} \qquad [4.7]$$

De formule voor de eigenfrequentie van gekromde rechthoekige panelen is de wortel van de som van de termen T_1 [4.3], T_2 [4.4] en T_3 [4.6].

$$f = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2h^2\pi^2E}{(1-\nu^2)\rho{l_x}^4{l_y}^4} + \frac{36E\left(k_{xx}{l_x}^2 + k_{yy}{l_y}^2\right)^2}{\pi^2\rho\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2} + \frac{144{k_{xy}}^2{l_x}^2{l_y}^2E}{\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)^2\rho\pi^2}} \qquad [4.8]$$

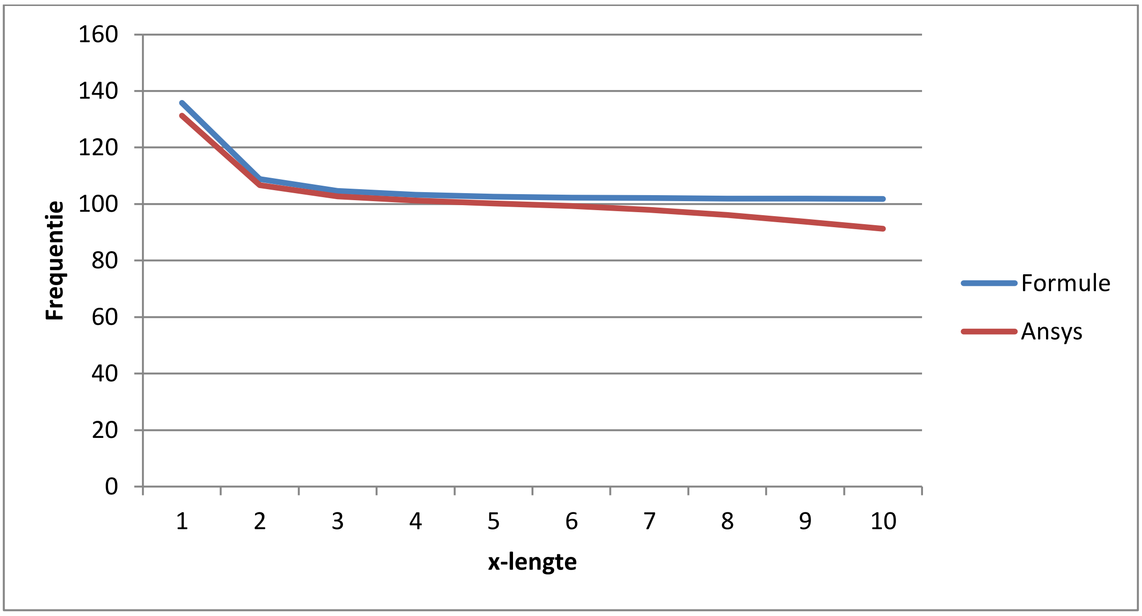
4.2 Controle van de formule bij positieve Gauss-kromming

Nu er een formule is opgesteld, moet deze getest worden. Dit wordt gedaan met behulp van ANSYS. In het ANSYS script (Bijlage B) worden l_x en l_y al apart gedefinineerd, wat het modelleren van rechthoekige panelen makkelijk maakt. Bij het testen wordt er een positieve Gauss-kromming (Figuur 2) toegepast en wordt er voor l_y vaste waardes gekozen, zodat de invloed van de verhouding l_x/l_y zichtbaar wordt.

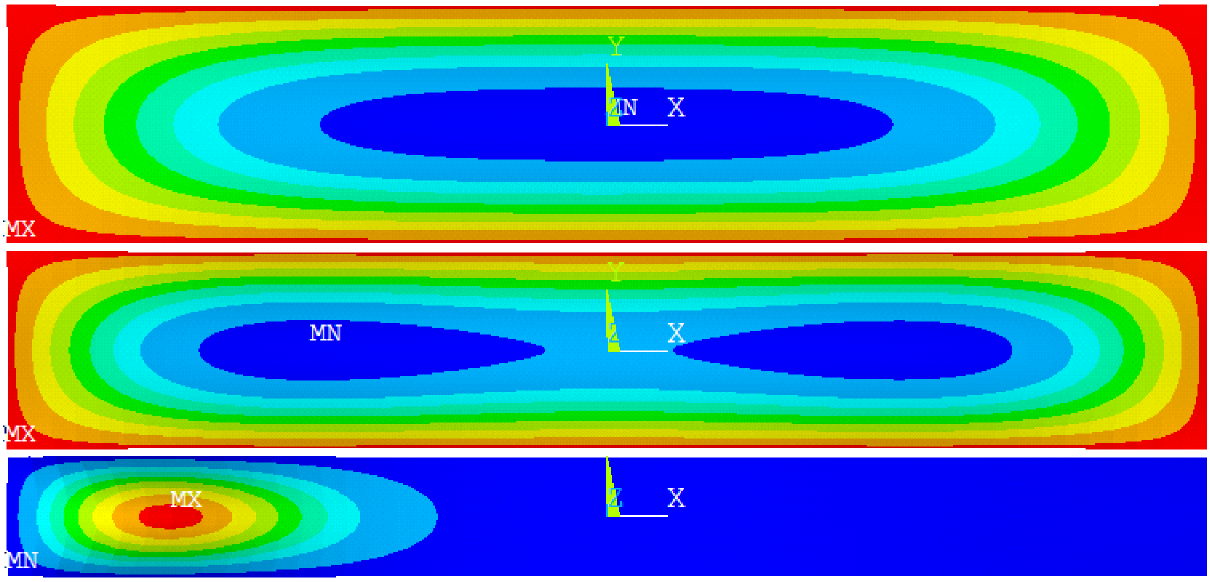
In de grafiek (Figuur 12) zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Formule**: De formule voor rechthoekige panelen [4.8] met positieve Gauss-kromming
- **Ansys**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)

Er is te zien dat de formule redelijk nauwkeurig is bij kleine lengtes. Bij grote lengtes beginnen de eigenfrequenties van de formule af te wijken van de resultaten uit ANSYS. Bij grote kromming (Bijlage C) is deze afwijking aanzienlijk groter. Deze afwijking kan verholpen worden door een term toe te voegen, die afhankelijk is van de kromming en lengtes.



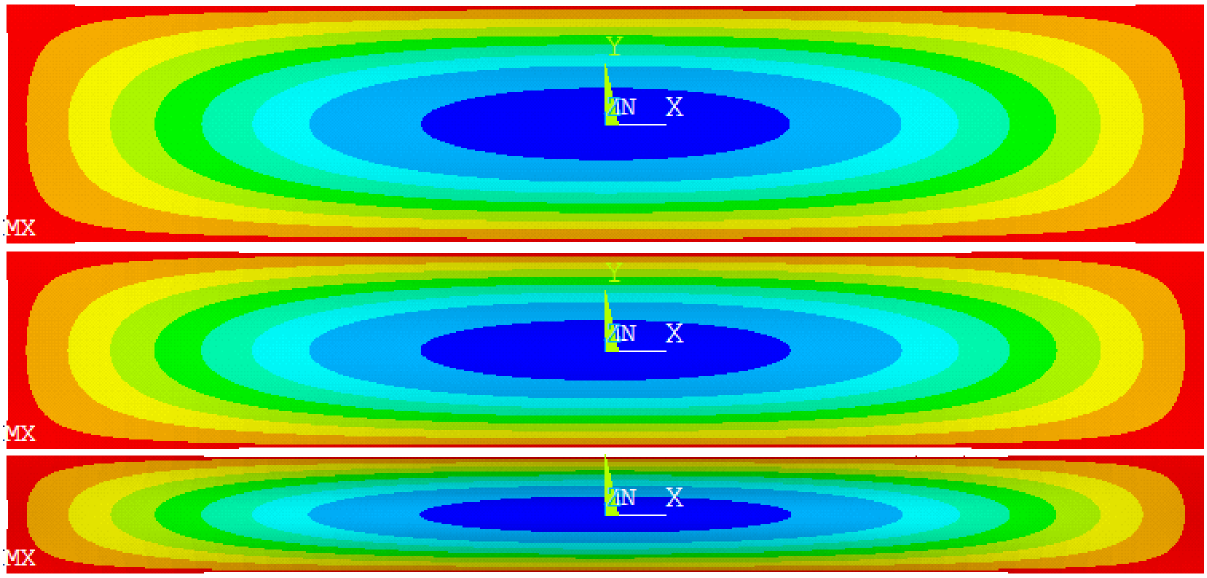
Figuur 12: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen (1,0m y-lengte) met 0,1 kromming



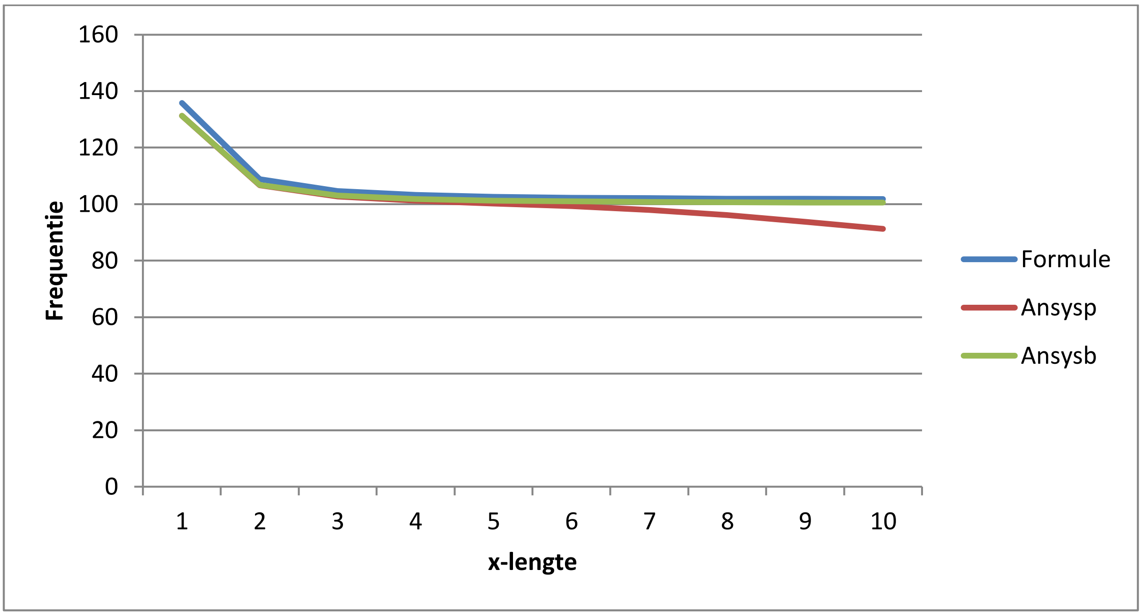
Figuur 13: Trillingsvormen 0,1 parabolische kromming (1,0m y-lengte) met x-lengtes 5m (boven), 6m (midden), 10m (onder)

De verandering in trillingsvorm (Figuur 13) geeft een verklaring voor de afwijking die ontstaat bij grotere lengtes. Net als bij vierkante panelen wijkt de trillingsvorm af van de modus met een centrale buik. Wanneer dit verschijnsel plaatsvindt, wordt de formule onnauwkeuriger ten opzichte van de resultaten uit ANSYS. Om te achterhalen of deze deviatie van de trillingsvorm weer wordt veroorzaakt door de parabolische kromming, worden er panelen met bolle kromming gemodelleerd, zodat de resultaten met elkaar vergeleken kunnen worden.

Wanneer de panelen bol gekromd zijn in plaats van parabolisch gekromd, behoudt het paneel bij grote lengtes de trillingsvorm met een centrale buik bij de laagste eigenfrequentie (Figuur 14). De grafiek (Figuur 15) laat zien dat als gevolg de resultaten uit ANSYS nu wel overeen komen met de formule bij grote lengtes.



Figuur 14: Trillingsvormen 0,1 bolle kromming (1,0m y-lengte) met x-lengtes 5m (boven), 6m (midden), 10m (onder)



Figuur 15: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen (1,0m y-lengte) met 0,1 kromming

In de grafiek (Figuur 15) zijn de volgende gegevens verwerkt:

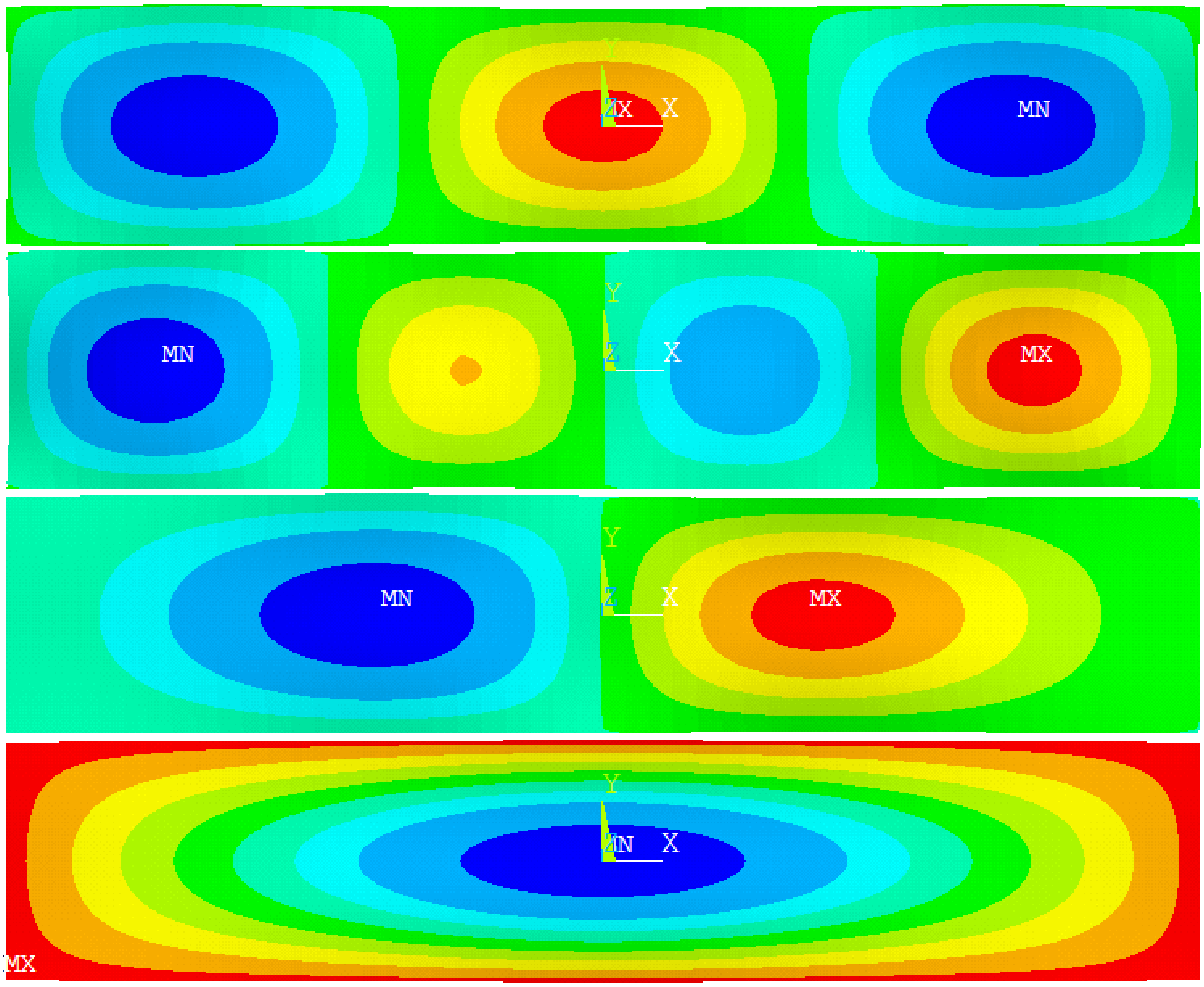
- **Formule**: De formule voor rechthoekige panelen [4.8] met positieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Ansysb**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (bolvormig)

Bij slanke panelen is de formule bij hoge kromming onnauwkeurig in vergelijking met de resultaten uit ANSYS. Dit is te zien bij panelen van 9mx1m en 9mx2m bij 0,2 bolle kromming (Bijlage C). De oorzaak hiervan ligt hoogstwaarschijnlijk in de trillingsvorm, maar verder onderzoek is hiervoor nodig.

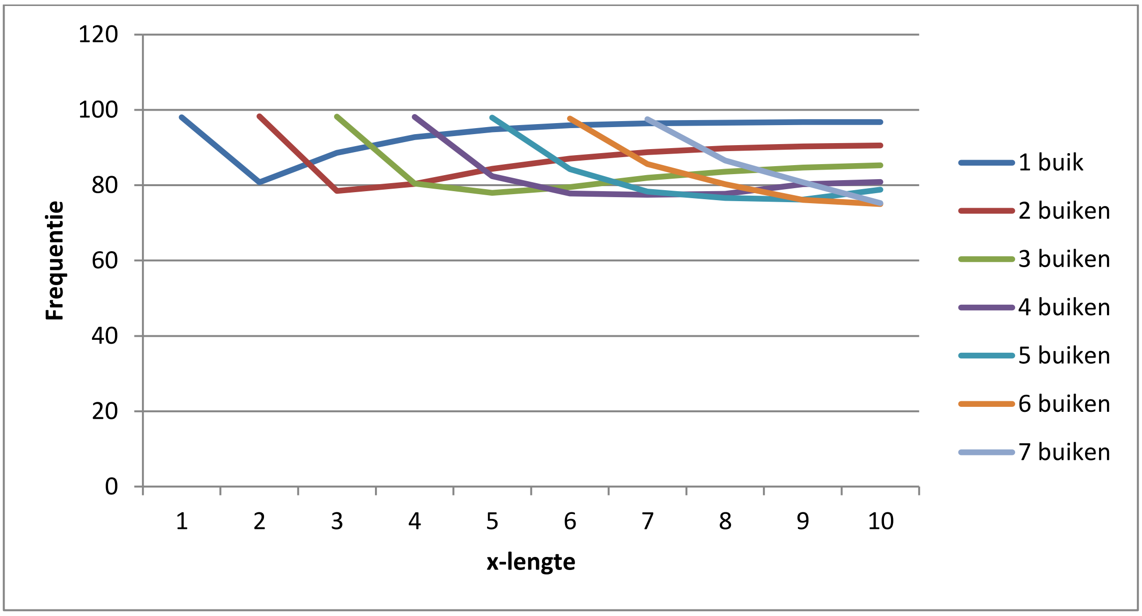
4.3 Controle van de formule bij negatieve Gauss-kromming

Panelen met een negatieve Gauss-kromming hebben de vorm van een zadel (Figuur 2), waarbij een van de krommingen (k_{xx} of k_{yy}) negatief is. Het testen van de formule voor rechthoekige panelen [4.8] wordt gedaan met behulp van ANSYS. In het script (Bijlage B: ANSYS en Maple wordt er een negatieve Gauss-kromming toegepast en er worden vaste waardes gekozen voor l_y. Bij het vergelijken van de resultaten voor de laagste eigenfrequentie uit ANSYS en de eigenfrequenties uit de formule is te zien dat er grote verschillen zijn (Figuur 18, Bijlage D).

Als er naar de trillingsvormen wordt gekeken, wordt het duidelijk wat de oorzaak is van deze grote verschillen. Wanneer l_x en l_y even groot zijn, is de formule [4.8] accuraat met de resultaten uit ANSYS. Bij deze vierkante panelen is de trillingsvorm een modus met een centrale buik. De formule neigt af te wijken van de resultaten uit ANSYS wanneer de panelen rechthoekig zijn. De afwijking is groter bij hoge kromming. Een verklaring is dat door de vorm van het paneel een trillingsvorm met meerdere buiken makkelijker tot stand komt (Figuur 16). De overgangen in trillingsmodus (Figuur 17) maken de formule onnauwkeurig.

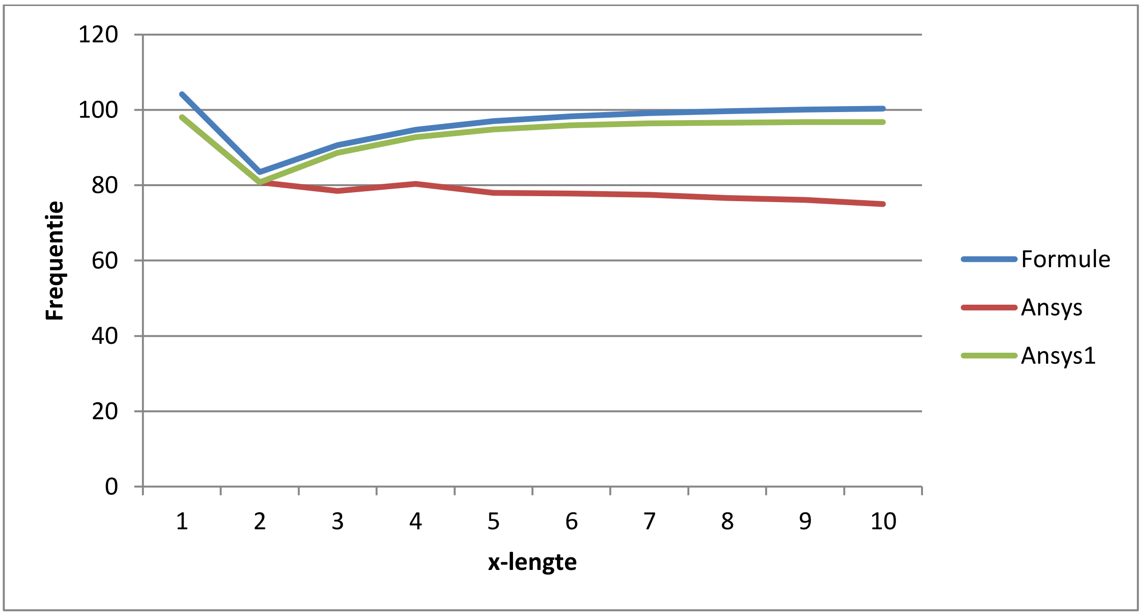


Figuur 16: Trillingsvormen 5mx1m negatieve 0,1 kromming met eigenfrequentie van laag (top) naar hoog (onder)



Figuur 17: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen (1,0m y-lengte) met negatieve 0,1 kromming

Om te controleren of de afwijkende trillingsvormen de nauwkeurigheid van de formule [4.8] beïnvloeden, worden de eigenfrequenties van de trillingsvorm met een centrale buik geplot (Figuur 18, Bijlage D). Als de kromming en lengtes zeer groot zijn, is het mogelijk dat het paneel geen trillingsvorm heeft met een centrale buik.



Figuur 18: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen (1,0m y-lengte) met 0,1 kromming

In de grafiek (Figuur 18) zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Formule**: De formule voor rechthoekige panelen [4.8] met negatieve Gauss-kromming
- **Ansys**: De laagste eigenfrequentie uit ANSYS met negatieve Gauss-kromming
- **Ansys1**: De eigenfrequentie met een trillingsbuik uit ANSYS met negatieve Gauss-kromming

De eigenfrequentie van de trillingsvormen met een centrale buik komen veel meer overeen met de eigenfrequenties van de formule [4.8]. Hieruit blijkt dat de formule de eigenfrequentie berekent van panelen, waarvan de trillingsvorm een modus is met een centrale buik. Het is belangrijk hier op te merken dat de trillingsvorm met een centrale buik niet altijd correspondeert met de laagste eigenfrequentie.

Conclusies

Dit project heeft twee doelstellingen. De eerste doelstelling is het controleren van de huidige ontwerpformule [2.8] bij positieve Gauss-kromming. De tweede doelstelling is een formule opstellen die toegepast kan worden op gekromde rechthoekige panelen.

Doelstelling 1: *De formule voor de laagste eigenfrequentie van vierkante gekromde panelen controleren voor grote lengte en breedte bij positieve* krommingen.

De toegevoegde term van Joep Sluijs aan de ontwerpformule [2.7] heeft insignificante invloed, wanneer de formule wordt toegepast op panelen met positieve Gauss-kromming.

De huidige ontwerpformule [2.8] wordt onnauwkeuriger bij positieve Gauss-kromming naarmate de kromming en lengtes groter worden (Bijlage A). De trillingsvorm van het paneel (Figuur 6) heeft een grote invloed op deze stijgende onnauwkeurigheid. Wanneer de trillingsvorm voor de laagste eigenfrequentie veel afwijkt van de trillingsvorm met een centrale buik, wordt de ontwerpformule onnauwkeurig.

De afwijking van de trillingsvorm met een centrale buik wordt veroorzaakt door de vlakke gedeeltes in het paneel. Bij panelen met grote lengtes hebben de vlakke gedeeltes grote afmetingen, waardoor er hier snel trillingsbuiken ontstaan. Bij grote krommingen wijkt de trillingsvorm voor de laagste eigenfrequentie sneller af van de trillingsvorm met een centrale buik (Bijlage A). De reden hiervoor is het grote contrast in kromming tussen het middelpunt en de randen. Als gevolg is er relatief minder stijfheid in de randen, waardoor er trillingsbuiken hier ontstaan. De exacte voorwaarden voor deze deviatie van de trillingsvorm met een buik moet verder onderzocht worden.

Het toepassingsgebied van de huidige ontwerpformule [2.8] wordt groter mits de kromming hetzelfde is over het gehele paneel, wat bereikt kan worden door een bolle kromming toe te passen (Bijlage A: Vierkante panelen.

Er ontstaat asymmetrie in de trillingsvorm bij panelen met grote lengtes (Figuur 6, Figuur 7), wanneer het paneel de vrijheid heeft in het vlak van het paneel loodrecht op de rand. Deze asymmetrie verdwijnt wanneer er niet langer verplaatsing mogelijk is in de randen van het paneel. Het is nog niet duidelijk of er een fout zit in het ANSYS script of dat er een andere oorzaak is. Verder onderzoek is hiervoor nodig.

Doelstelling 2: *De formule uitbreiden voor rechthoekige gekromde panelen.*

Een formule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde rechthoekige panelen kan gevonden worden door de differentiaalvergelijking voor het dynamisch gedrag van een schaal zonder membraankrachten [4.1] op te lossen. Dit resulteert in de volgende formule:

$$f = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3\left(l_x^{\,2}+l_y^{\,2}\right)^2 h^2\pi^2 E}{(1-\nu^2)\rho l_x^{\,4} l_y^{\,4}} + \frac{36E\left(k_{xx}l_x^{\,2}+k_{yy}l_y^{\,2}\right)^2}{\pi^2\rho\left(l_x^{\,2}+l_y^{\,2}\right)^2} + \frac{144k_{xy}^{\,2}l_x^{\,2}l_y^{\,2}E}{\left(l_x^{\,2}+l_y^{\,2}\right)^2\rho\pi^2}} \qquad [4.8]$$

De formule [4.8] ondervindt hetzelfde probleem als de huidige ontwerpformule [2.8] ten aanzien van de trillingsvorm bij positieve Gauss-kromming. Bij parabolisch gekromde panelen wordt de formule onnauwkeuriger naarmate de kromming en lengtes groter worden (Bijlage C). De oorzaak hiervan ligt in de afwijking van de trillingsvorm met een centrale buik (Figuur 13). De afwijking verdwijnt wanneer de kromming bolvormig is en dus gelijk over het hele paneel (Figuur 14). Hierdoor zijn er geen vlakke gedeeltes in het paneel en als gevolg komen de resultaten uit ANSYS en de formule meer overeen (Figuur 15). De formule heeft een groter toepassingsgebied indien de kromming gelijk is over het gehele paneel.

Bij negatieve Gauss-kromming is de formule [4.8] alleen accuraat als deze enkel wordt toegepast aan panelen, waarvan de trillingsvorm een centrale buik heeft (Bijlage D: Rechthoekige panelen met negatieve Gauss-kromming). De formule is niet geschikt om ongeacht de trillingsvorm de laagste eigenfrequentie te berekenen.

Voor alle proeven die in dit onderzoek zijn verricht, is de nieuwe formule [4.8] accuraat, indien de trillingsvorm een modus is met een centrale buik.

Voor de volgende punten is verder onderzoek vereist en dit zijn aanbevelingen voor een vervolg project:

- Hoewel de formule voor gekromde rechthoekige panelen [4.8] een term bevat voor twist, is deze nog niet getest. De invloed van deze term moet onderzocht worden.
- Bij het opstellen van de formule voor gekromde rechthoekige panelen [4.8] zijn membraankrachten niet meegenomen. De formule kan op dit gebied uitgebreid worden.

Bibliografie

1. **Johan Blaauwendraad, Jeroen H. Hoefakke.** *Structural Shell Analysis: Understanding and Application.* 2014.

2. **Malekzadeh, K., Mozafari, A. en Ghasemi, Faramarz Ashenai.** Free vibration response of a multilayer smart hybrid composite plate with embedded SMA wires. 2014.

3. **Moerbeek, C.M.** *De invloed van kromming op de eigenfrequentie van oppervlaktes.* 2012.

4. **Metselaar, L.** *Een ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen.* 2013.

5. **Scheltema, A.** *Eigenfrequenties, dubbele krommingen & twist.* 2013.

6. **Dijk, R. van.** *Eigenfrequentie van belaste panelen.* 2014.

7. **Noortman, F.J.** *Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen.* 2015.

8. **Greijmans, M.A.** *Eigenfrequenties van schalen; Uitbreiding van de ontwerpformule.* 2016.

9. **Paasman, Y.** *Eigenfrequentie van gekromde panelen.* 2016.

10. **Sluijs, J.** *Eigenfrequentie van gekromde panelen; Uitbreiding van de ontwerpformule voor zadelvormige panelen.* 2017.

Bijlage A: Vierkante panelen

In de grafieken en tabellen zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Sluijsp**: De huidige ontwerpformule [2.8] met positieve Gauss-kromming
- **Sluijsn**: De huidige ontwerpformule [2.8] met negatieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Paasman**: De formule van Paasman [2.6]met positieve Gauss-kromming
- **Vlak**: De formule voor een vlak paneel zonder krommingen [2.1]
- **Lamb**: De formule van Horace Lamb [3.1]
- **Ansysb**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (bolvormig)
- **Ansysp1**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming met vastgezette randen (parabolisch)
- **Ansysb1**: De resultaten uit ANSYS met postieve Gauss-kromming met vastgezette randen (bolvormig)

L	Sluijsp	Sluijsn	Ansysp	Paasman	Lamb	Ansysb	Ansysb1	Ansysp1
1	135,812	104,143	131,270	135,812	65,727	131,320	149,780	149,710
2	90,979	26,041	90,282	90,978	65,727	90,585	113,500	113,200
3	87,941	11,598	87,093	87,937	65,727	87,798	98,235	97,584
4	87,422	6,593	85,910	87,415	65,727	87,227	91,846	91,501
5	87,282	4,366	84,493	87,272	65,727	86,893	89,020	88,473
6	87,235	3,291	82,191	87,221	65,727	86,521	87,785	86,972
7	87,218	2,806	79,072	87,199	65,727	86,088	87,097	85,025
8	87,213	2,651	75,459	87,188	65,727	85,595	86,603	81,404
9	87,214	2,683	71,514	87,182	65,727	85,031	86,160	77,216
10	87,218	2,816	67,370	87,179	65,727	84,378	85,702	72,752

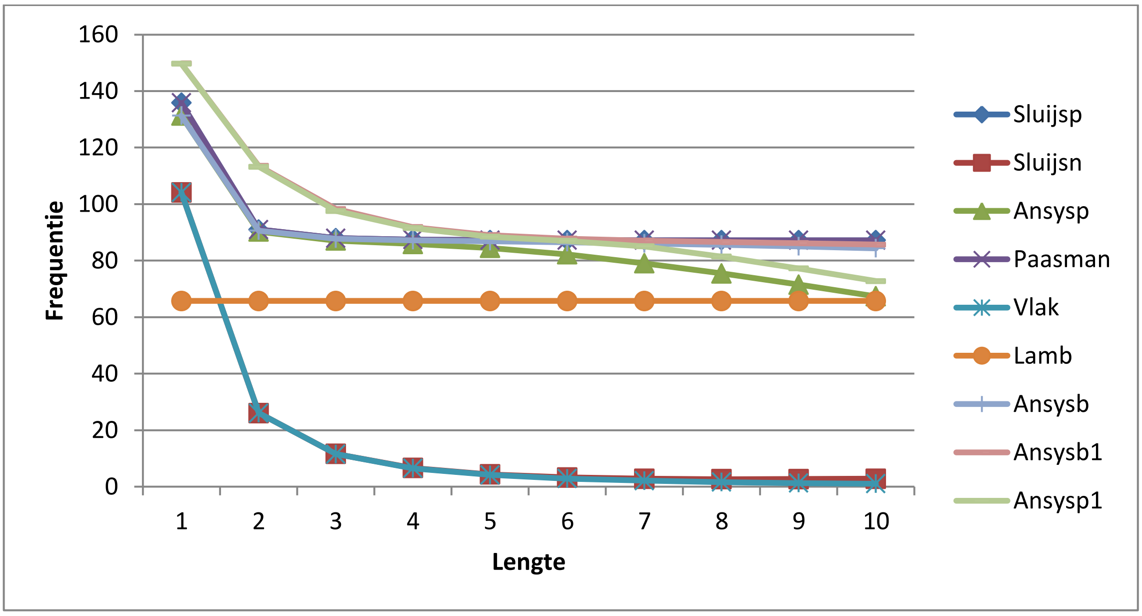
Tabel 1: Eigenfrequenties voor 0,1 kromming

L	Sluijsp	Sluijsn	Ansysp	Paasman	Lamb	Ansysb	Ansysb1	Ansysp1
1	112,896	104,143	107,540	112,896	32,863	107,55	113,440	113,430
2	50,771	26,036	50,093	50,770	32,863	50,128	61,552	61,509
3	45,097	11,573	44,878	45,096	32,863	44,964	55,009	54,923
4	44,070	6,514	43,869	44,070	32,863	44,026	49,812	49,662
5	43,786	4,179	43,508	43,785	32,863	43,756	47,348	47,286
6	43,684	2,919	43,275	43,682	32,863	43,643	45,550	45,453
7	43,641	2,174	43,035	43,638	32,863	43,573	44,673	44,542
8	43,620	1,709	42,713	43,617	32,863	43,508	44,199	44,029
9	43,609	1,414	42,266	43,605	32,863	43,437	43,918	43,697
10	43,604	1,230	41,692	43,599	32,863	43,359	43,735	43,444

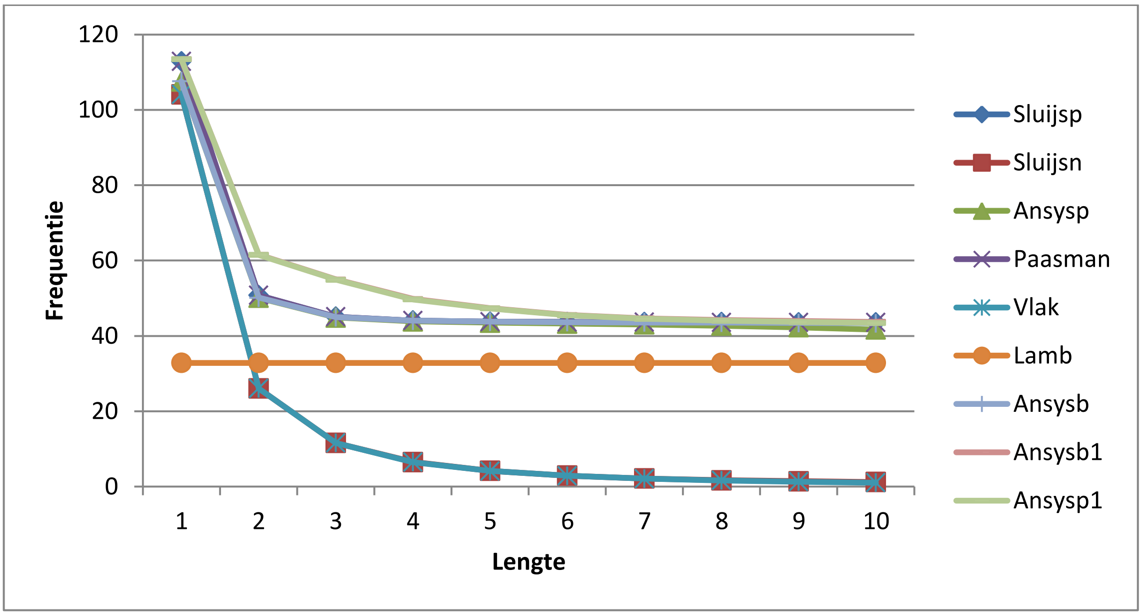
Tabel 2: Eigenfrequenties voor 0,05 kromming

L	Sluijsp	Sluijsn	Ansysp	Paasman	Lamb	Ansysb	Ansysb1	Ansysp1
1	203,084	104,148	199,290	203,081	131,453	199,840	245,75	245,070
2	176,291	26,120	173,250	176,279	131,453	175,730	198,23	195,880
3	174,757	11,990	167,230	174,729	131,453	173,590	180,96	179,340
4	174,517	7,739	156,360	174,467	131,453	171,630	175,05	169,870
5	174,474	6,689	141,280	174,395	131,453	169,080	172,26	155,050
6	174,483	6,914	125,070	174,370	131,453	165,730	169,81	137,560
7	174,512	7,628	109,100	174,358	131,453	161,030	166,75	120,130
8	174,554	8,529	94,244	174,353	131,453			104,040
9	174,605	9,507	80,974	174,350	131,453			89,810
10	174,662	10,518	69,450	174,349	131,453			77,529

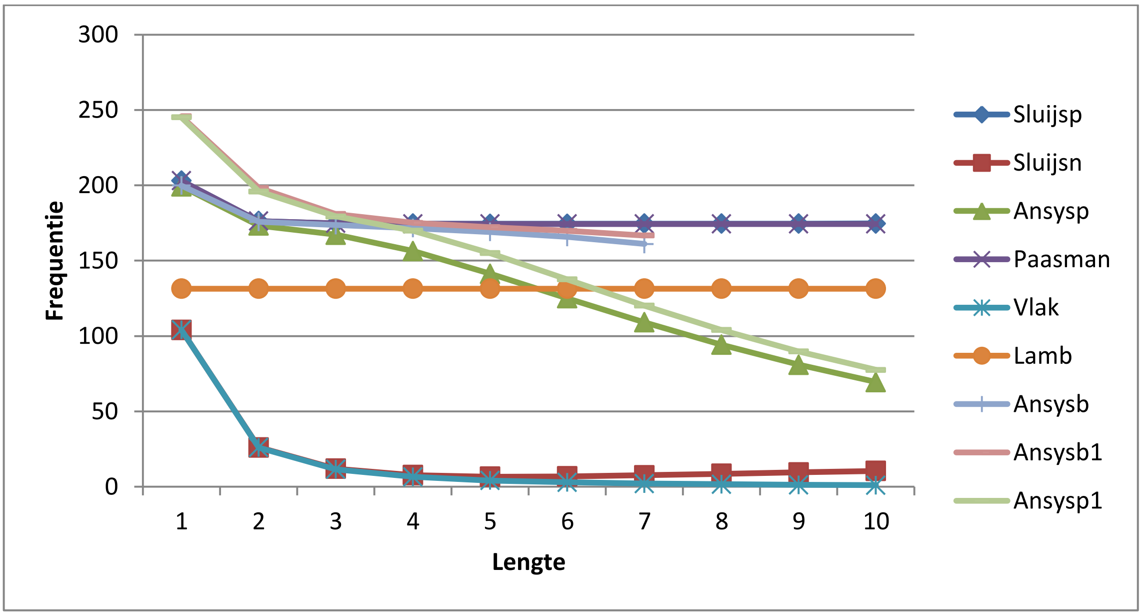
Tabel 3: Eigenfrequenties voor 0,2 kromming



Figuur 19: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,1 kromming



Figuur 20: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,05 kromming



Figuur 21: Eigenfrequenties van vierkante panelen met 0,2 kromming

Bijlage B: ANSYS en Maple

ANSYS script

```
lx =    10.00   ! m     lengte in de x-richting
ly =    10.00   ! m     breedte in de y-richting
h =     0.020   ! m     dikte
kxx =   1/10.0  ! 1/m   kromming
kyy =   1/10.0  ! 1/m
kxy =   0.0     ! 1/m
E =     2.1e11  ! N/m2  elastiteitsmodulus
nu =    0.0     ! -     dwarscontractiecoefficient
rho =   7000    ! kg/m3 massadichtheid
n =     50      ! -     aantal elementen in beide richtingen
nxx =   0.0     ! N/m   membraankrachten
nyy =   0.0     ! N/m
nxy =   0.0     ! N/m

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,            ! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,rho
ET,1,SHELL181             ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h, , ,   ! element dikte

*DO,i,0,n                 ! plaats knopen
 *DO,j,0,n
  x=lx/n*i-lx/2
  y=ly/n*j-ly/2
  z1=0.5*x*x*kxx
  z2=x*y*kxy
  z3=0.5*y*y*kyy
  z=z1+z2+z3
  N,,x,y,z,,,
 *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,n                 ! plaats elementen
 *DO,j,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
 *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,(n+1)*(n+1)       ! roteer de assenstelsels van alle knopen
 xx=1
 xy=0
 xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
 lx=SQRT(1+xz*xz)
 zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
```

```
 zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
 zz=1
 lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
 NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n                    ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=-lx/2
 yx=0
 yy=1
 yz=NX(i)*kxy+NY(i)*kyy
 ly=SQRT(1+yz*yz)
 zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
 zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
 zz=1
 lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
 NANG,j,,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n                    ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=lx/2
 j=n*(n+1)+i
 yx=0
 yy=1
 yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
 ly=SQRT(1+yz*yz)
 zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
 zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
 zz=1
 lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
 NANG,j,,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,1,n                    ! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het vlak
 D,i,UZ,0
 D,i*(n+1),UZ,0
 D,i*(n+1)+1,UZ,0
 D,i+n*(n+1)+1,UZ,0
*ENDDO

*DO,i,1,n+1                  ! randvoorwaarde: geen verplaatsing in de richting van de randen
 D,i,UY,0
 D,i*(n+1),UX,0
 D,i+n*(n+1),UY,0
 D,i*(n+1)-n,UX,0
*ENDDO

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 20,,,
MXPAND,20
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH
```

ANSYS script wijziging: bolle kromming

```
*DO,i,0,n                    ! plaats knopen
 *DO,j,0,n
  x=lx/n*i-lx/2
  y=ly/n*j-ly/2
  z1=1/(kxx*kyy)
  z2=x*x
  z3=y*y
  z=-SQRT(z1-z2-z3)
  N,,x,y,z,,,
 *ENDDO
*ENDDO
```

ANSYS script wijziging: vastgezette randen

```
*DO,i,1,n                    ! randvoorwaarde: geen verplaatsing van de randen
 D,i,UX,0
 D,i,UY,0
 D,i,UZ,0
 D,i*(n+1),UX,0
 D,i*(n+1),UY,0
 D,i*(n+1),UZ,0
 D,i*(n+1)+1,UX,0
 D,i*(n+1)+1,UY,0
 D,i*(n+1)+1,UZ,0
 D,i+n*(n+1)+1,UX,0
 D,i+n*(n+1)+1,UY,0
 D,i+n*(n+1)+1,UZ,0
*ENDDO
```

Maple sheet

> $restart :$

> $uz := u \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot x}{lx}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot y}{ly}\right) \cdot \cos(2 \cdot \mathrm{Pi} \cdot f \cdot t) :$

> $G1 := kxx \cdot diff(uz, y, y) - 2 \cdot kxy \cdot diff(uz, x, y) + kyy \cdot diff(uz, x, x) :$

> $G2 := kxx \cdot diff(G1, y, y) - 2 \cdot kxy \cdot diff(G1, x, y) + kyy \cdot diff(G1, x, x) :$

> $N1 := diff(uz, x, x) + diff(uz, y, y) :$

> $N2 := diff(N1, x, x) + diff(N1, y, y) :$

> $N3 := diff(N2, x, x) + diff(N2, y, y) :$

> $N4 := diff(N3, x, x) + diff(N3, y, y) :$

> $N5 := pz - \mathrm{rho} \cdot h \cdot diff(uz, t, t) :$

> $N6 := diff(N5, x, x) + diff(N5, y, y) :$

> $N7 := diff(N6, x, x) + diff(N6, y, y) :$

> $eq := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot N4 + E \cdot h \cdot G2 = N7 :$

> $opl := solve(eq, f);$

$$opl := \frac{1}{12} \frac{1}{\pi \rho (\nu^2 - 1)(lx^2 + ly^2) ly^2 lx^2} \Bigg(\sqrt{3} \Big(\rho (\nu^2 - 1) E \Big(48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxx\, kxy\, lx^7 ly^5 \nu^2 + 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxy\, kyy\, lx^5 ly^7 \nu^2 - 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxx\, kxy\, lx^7 ly^5 - 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxy\, kyy\, lx^5 ly^7 + 12\, kxx^2 lx^8 ly^4 \nu^2 + 24\, kxx\, kyy\, lx^6 ly^6 \nu^2 + 48\, kxy^2 lx^6 ly^6 \nu^2 + 12\, kyy^2 lx^4 ly^8 \nu^2 - \pi^4 h^2 lx^8 - 4 \pi^4 h^2 lx^6 ly^2 - 6 \pi^4 h^2 lx^4 ly^4 - 4 \pi^4 h^2 lx^2 ly^6 - \pi^4 h^2 ly^8 - 12\, kxx^2 lx^8 ly^4 - 24\, kxx\, kyy\, lx^6 ly^6 - 48\, kxy^2 lx^6 ly^6 - 12\, kyy^2 lx^4 ly^8 \Big) \Big)^{1/2} \Bigg),$$

$$-\frac{1}{12} \frac{1}{\pi \rho (\nu^2 - 1)(lx^2 + ly^2) ly^2 lx^2} \Bigg(\sqrt{3} \Big(\rho (\nu^2 - 1) E \Big(48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxx\, kxy\, lx^7 ly^5 \nu^2 + 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxy\, kyy\, lx^5 ly^7 \nu^2 - 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxx\, kxy\, lx^7 ly^5 - 48 \tan\left(\frac{\pi y}{ly}\right) \tan\left(\frac{\pi x}{lx}\right) kxy\, kyy\, lx^5 ly^7 + 12\, kxx^2 lx^8 ly^4 \nu^2 + 24\, kxx\, kyy\, lx^6 ly^6 \nu^2 + 48\, kxy^2 lx^6 ly^6 \nu^2 + 12\, kyy^2 lx^4 ly^8 \nu^2 - \pi^4 h^2 lx^8 - 4 \pi^4 h^2 lx^6 ly^2 - 6 \pi^4 h^2 lx^4 ly^4 - 4 \pi^4 h^2 lx^2 ly^6 - \pi^4 h^2 ly^8 - 12\, kxx^2 lx^8 ly^4 - 24\, kxx\, kyy\, lx^6 ly^6 - 48\, kxy^2 lx^6 ly^6 - 12\, kyy^2 lx^4 ly^8 \Big) \Big)^{1/2} \Bigg), \frac{1}{4t}$$

```
> T1 := 1/48 * ((lx^2 + ly^2)^2 h^2 π^2 E) / ((1 - ν^2) ρ ly^4 lx^4) :
> T2 := 1/4 * (E (kxx lx^2 + kyy ly^2)^2) / (π^2 ρ (lx^2 + ly^2)^2) :
> T3 := (kxy^2 lx^2 ly^2 E) / ((lx^2 + ly^2)^2 ρ π^2) :
> residu := factor(opl[1]^2 - T1 - T2 - T3);
> f := sqrt(T1 + T2 + T3);
```

$$f := \frac{1}{12} \sqrt{ \frac{3 (lx^2 + ly^2)^2 h^2 \pi^2 E}{(-\nu^2 + 1) \rho\, ly^4 lx^4} + \frac{36 E (kxx\, lx^2 + kyy\, ly^2)^2}{\pi^2 \rho (lx^2 + ly^2)^2} + \frac{144\, kxy^2 lx^2 ly^2 E}{\pi^2 \rho (lx^2 + ly^2)^2} }$$

Bijlage C: Rechthoekige panelen met positieve Gauss-kromming

In de grafieken en tabellen zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Formule**: De formule voor rechthoekige panelen [4.8] met positieve Gauss-kromming
- **Ansysp**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (parabolisch)
- **Ansysb**: De resultaten uit ANSYS met positieve Gauss-kromming (bolvormig)

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb
1	135,812	131,270	131,320	112,896	107,540	107,550	203,081	199,290	199,840
2	108,792	106,640	106,810	78,335	75,610	75,625	186,099	183,260	184,800
3	104,626	102,710	103,060	72,438	70,183	70,215	183,695	179,180	182,690
4	103,247	101,190	101,820	70,432	68,321	68,378	182,913	173,570	182,010
5	102,624	100,230	101,260	69,516	67,449	67,538	182,562	163,950	181,710
6	102,290	99,280	100,960	69,021	66,956	67,085	182,375	152,260	181,540
7	102,090	97,979	100,780	68,724	66,636	66,813	182,262	139,780	181,440
8	101,960	96,113	100,670	68,532	66,401	66,637	182,190	127,350	181,380
9	101,872	93,803	100,590	68,400	66,208	66,516	182,140	115,550	166,470
10	101,809	91,229	100,530	68,306	66,031	66,430	182,105	104,780	

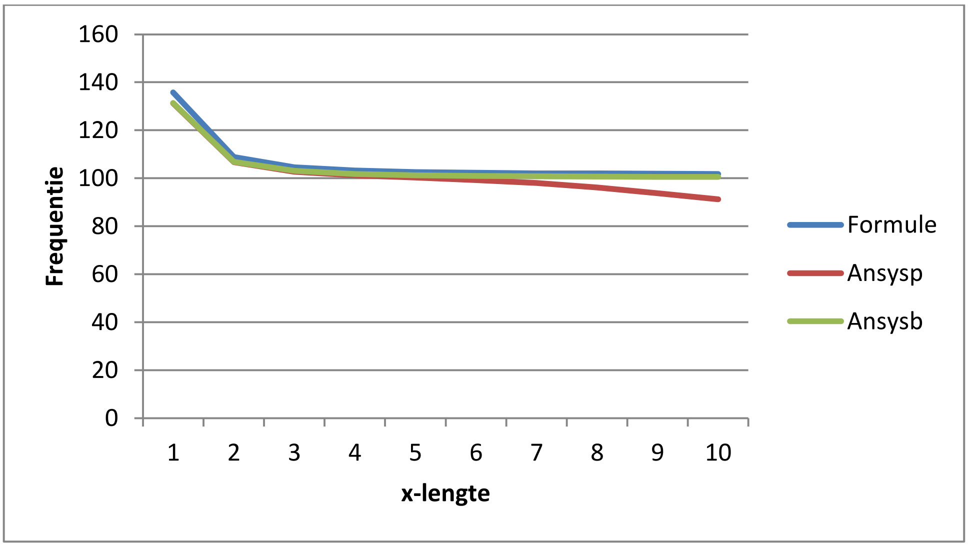
Tabel 4: Eigenfrequenties voor 1,0m y-lengte

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb
1	108,792	106,630	106,790	78,335	75,609	75,623	186,099	183,100	184,640
2	90,978	90,282	90,585	50,770	50,093	50,128	176,279	173,250	175,730
3	89,178	88,465	88,975	47,469	47,066	47,126	175,357	170,320	174,920
4	88,679	87,702	88,537	46,525	46,175	46,271	175,103	164,710	174,720
5	88,471	86,966	88,358	46,128	45,770	45,913	174,998	156,270	174,650
6	88,365	85,816	88,267	45,924	45,525	45,729	174,944	146,050	174,620
7	88,303	84,077	88,214	45,804	45,339	45,621	174,913	134,740	174,590
8	88,263	81,902	88,181	45,728	45,164	45,553	174,893	122,940	174,550
9	88,237	79,407	88,158	45,677	44,967	45,507	174,880	111,130	163,290
10	88,218	76,660	88,141	45,641	44,714	45,474	174,870	99,705	

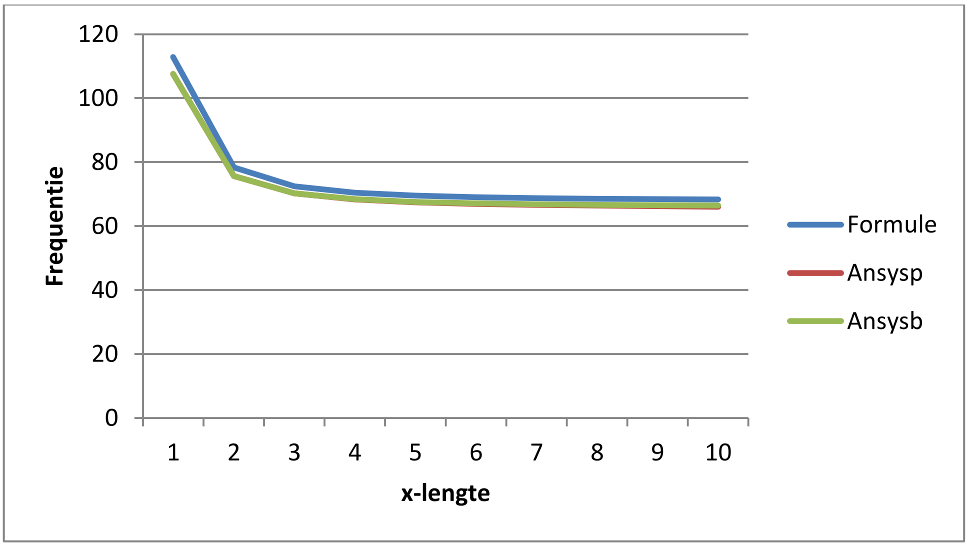
Tabel 5: Eigenfrequenties voor 2,0m y-lengte

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb	Formule	Ansysp	Ansysb
1	102,624	100,200	101,230	69,516	67,446	67,535	182,562	163,890	181,400
2	88,471	86,879	88,248	46,128	45,757	45,900	174,998	156,640	173,680
3	87,527	85,754	87,300	44,291	44,052	44,222	174,523	154,640	171,800
4	87,336	85,217	87,035	43,912	43,670	43,873	174,427	148,630	170,260
5	87,272	84,493	86,893	43,785	43,508	43,756	174,395	141,280	169,080
6	87,244	83,371	86,806	43,729	43,395	43,705	174,381	132,770	168,230
7	87,229	81,925	86,758	43,700	43,279	43,679	174,374	123,310	167,590
8	87,221	80,188	86,736	43,683	43,127	43,665	174,370	113,260	166,020
9	87,215	78,023	86,729	43,672	42,912	43,657	174,367	103,010	
10	87,212	75,478	86,730	43,664	42,636	43,652	174,365	92,967	

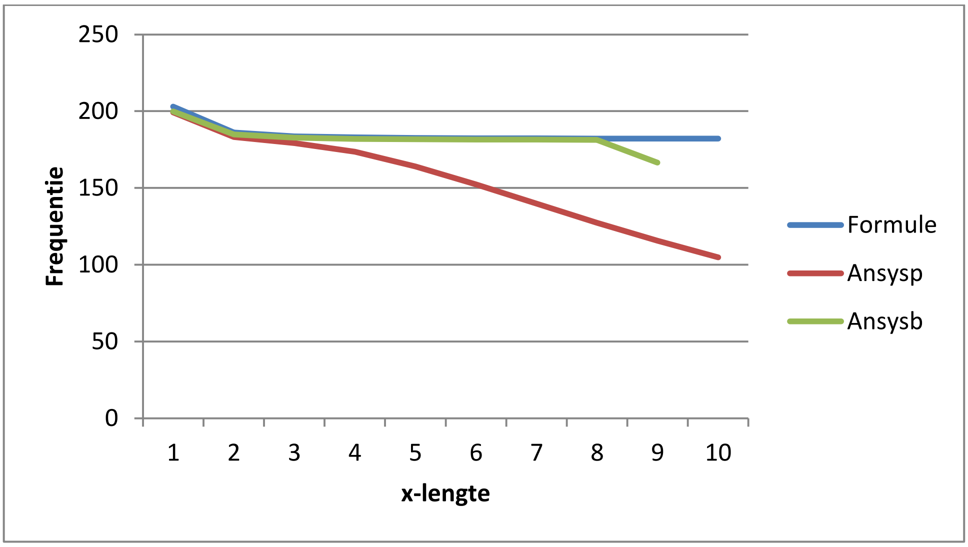
Tabel 6: Eigenfrequenties voor 5,0m y-lengte



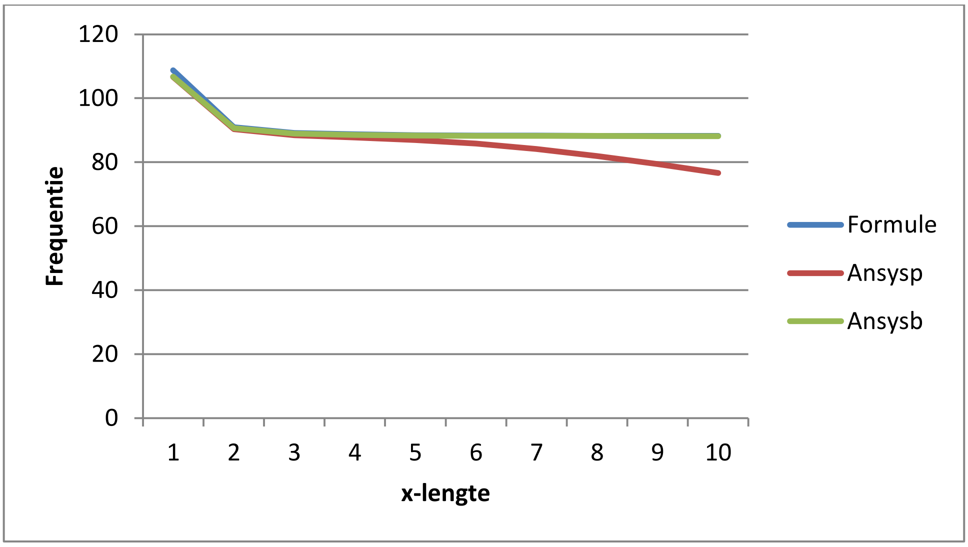
Figuur 22: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 1,0m y-lengte



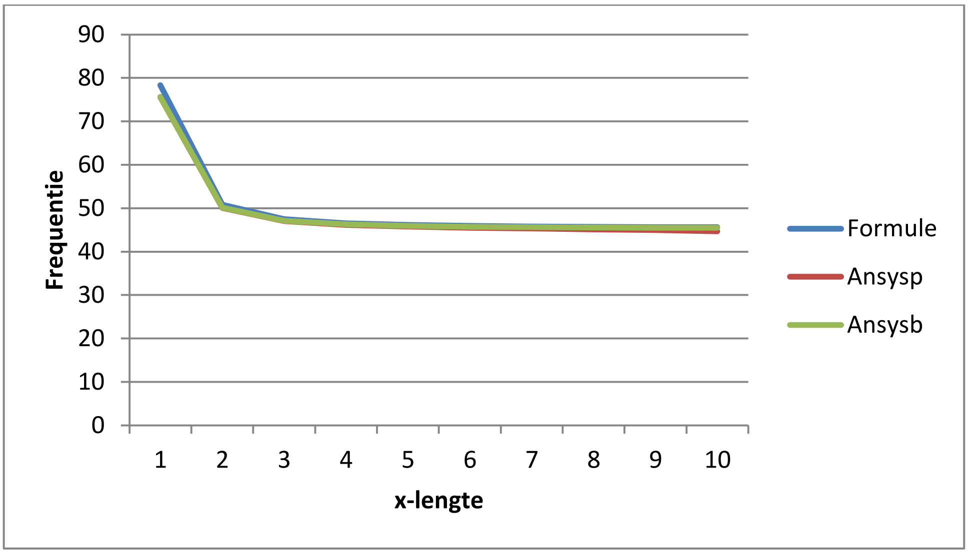
Figuur 23: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 1,0m y-lengte



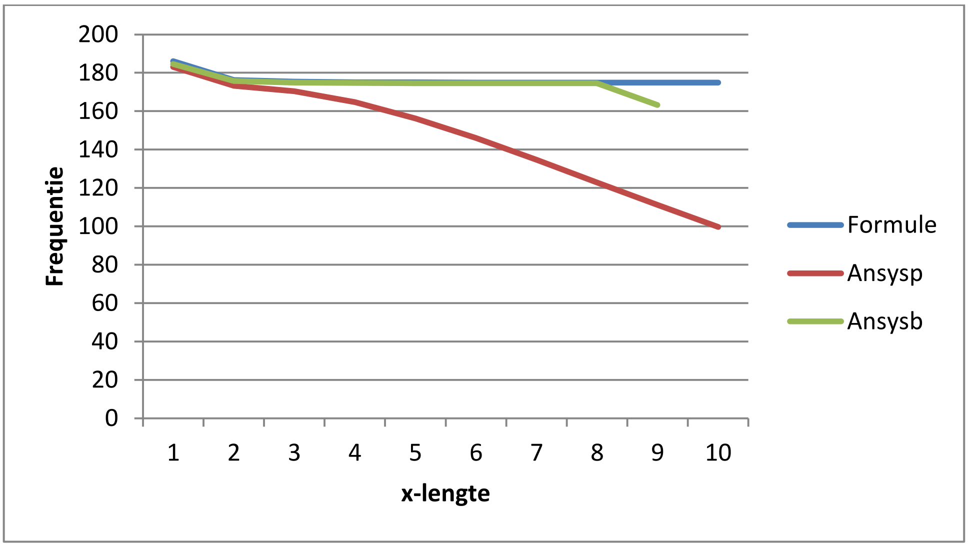
Figuur 24: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 1,0m y-lengte



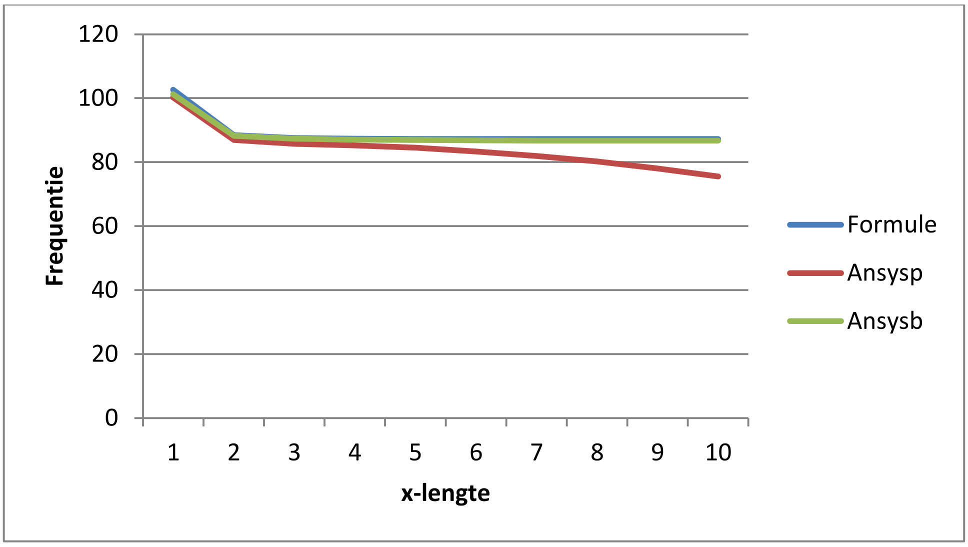
Figuur 25: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 2,0m y-lengte



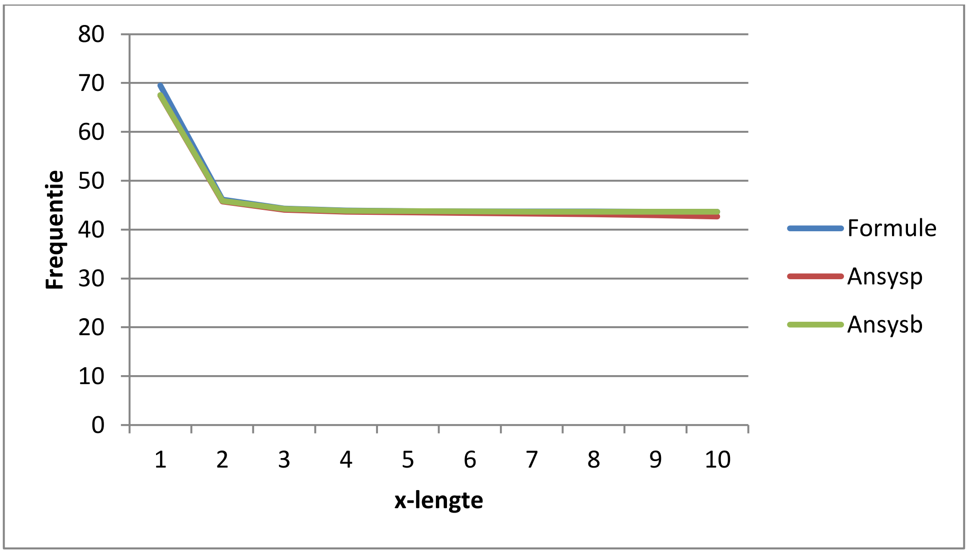
Figuur 26: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 2,0m y-lengte



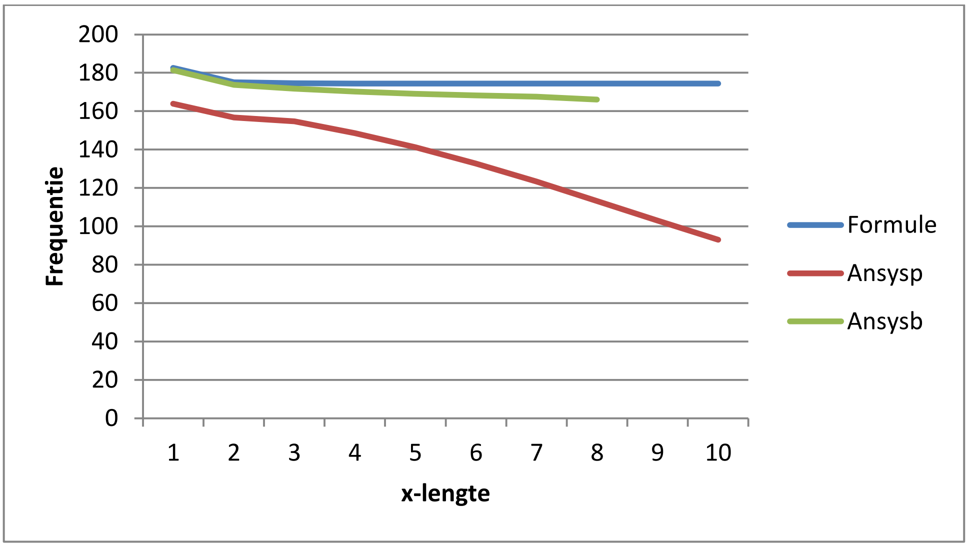
Figuur 27: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 2,0m y-lengte



Figuur 28: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 5,0m y-lengte



Figuur 29: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 5,0m y-lengte



Figuur 30: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 5,0m y-lengte

Bijlage D: Rechthoekige panelen met negatieve Gauss-kromming

In de grafieken en tabellen zijn de volgende gegevens verwerkt:

- **Formule**: De formule voor rechthoekige panelen [4.8] met negatieve Gauss-kromming
- **Ansys**: De laagste eigenfrequentie uit ANSYS met negatieve Gauss-kromming
- **Ansys1**: De eigenfrequentie met een trillingsbuik uit ANSYS met negatieve Gauss-kromming

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1
1	104,143	98,020	98,020	104,143	98,268	98,268	104,143	97,044	97,044
2	83,500	80,755	80,755	70,146	67,070	67,070	123,204	96,938	120,607
3	90,614	78,443	88,570	67,552	65,130	65,130	151,000	95,622	148,060
4	94,748	80,340	92,764	67,380	65,181	65,181	163,481	88,160	158,915
5	96,993	77,928	94,835	67,464	65,350	65,350	169,801	85,412	163,135
6	98,305	77,806	95,876	67,558	65,003	65,462	173,388	83,864	164,621
7	99,129	77,435	96,382	67,632	64,899	65,769	175,603	82,273	165,065
8	99,677	76,590	96,617	67,687	64,865	65,639	177,063	79,777	165,196
9	100,059	76,101	96,717	67,728	64,693	65,648	178,074	76,600	165,262
10	100,335	74,947	96,763	67,758	64,481	65,654	178,803	73,593	165,324

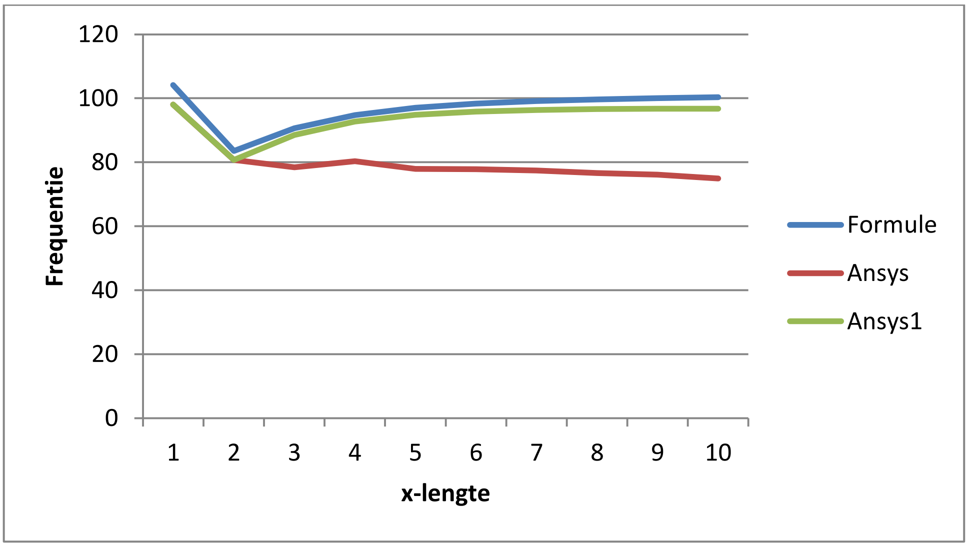
Tabel 7: Eigenfrequenties voor 1,0m y-lengte

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1
1	83,500	80,718	80,718	70,146	67,067	67,067	123,204	96,941	120,216
2	26,036	24,437	24,437	26,036	24,680	24,680	26,036	23,669	23,669
3	38,441	37,850	37,850	25,191	24,476	24,476	69,642	57,373	68,863
4	54,776	24,363	54,291	30,801	24,691	30,357	105,865	23,375	103,846
5	64,906	27,461	64,228	34,989	22,379	34,624	127,150	40,121	123,088
6	71,222	24,201	70,215	37,750	24,416	37,392	140,224	22,801	133,530
7	75,342	24,634	73,903	39,595	22,393	39,208	148,697	30,492	139,012
8	78,151	23,971	76,206	40,870	22,746	40,432	154,455	22,024	141,706
9	80,141	23,526	77,641	41,781	22,611	41,276	158,526	25,476	143,094
10	81,598	23,674	78,521	42,450	22,282	41,867	161,503	21,119	143,460

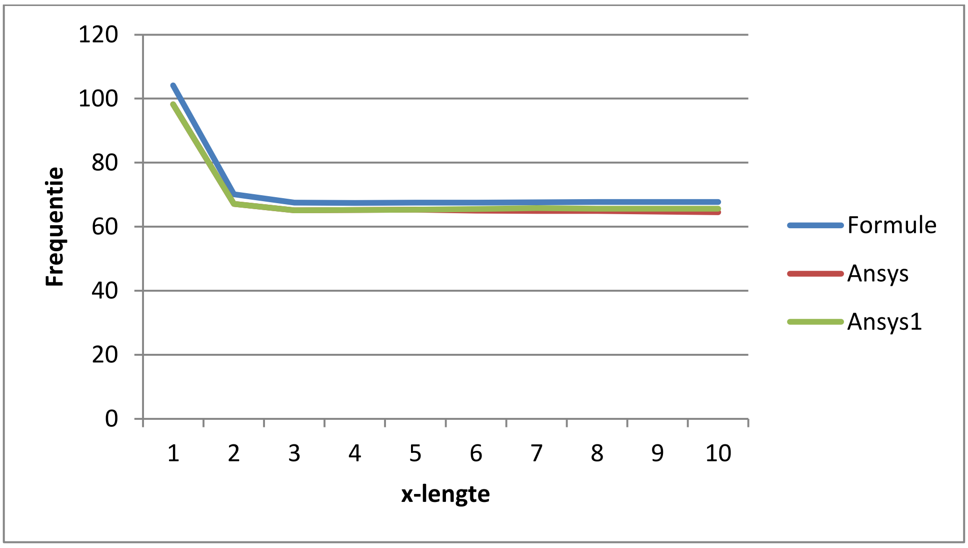
Tabel 8: Eigenfrequenties voor 2,0m y-lengte

k	0,1			0,05			0,2		
Lx	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1	Formule	Ansys	Ansys1
1	96,993	77,899	94,797	67,464	65,346	65,346	169,801	85,240	162,833
2	64,906	27,332	64,022	34,989	22,368	34,599	127,150	39,734	121,654
3	41,770	20,312	40,982	21,969	15,482	21,741	82,421	33,120	76,997
4	19,866	19,128	19,128	10,956	10,729	10,729	38,641	34,472	34,472
5	4,166	4,091	4,091	4,166	3,900	3,900	4,166	10,821	10,821
6	16,111	16,352	16,352	8,616	8,558	8,558	31,637	30,676	30,676
7	28,447	17,320	28,343	14,482	14,436	14,436	56,632	18,237	56,449
8	38,309	15,290	37,801	19,318	10,636	19,241	76,453	16,651	72,585
9	46,134	9,306	45,130	23,188	6,204	23,064	92,147	15,236	
10	52,368	4,057		26,281	3,880	26,095	104,640	8,067	

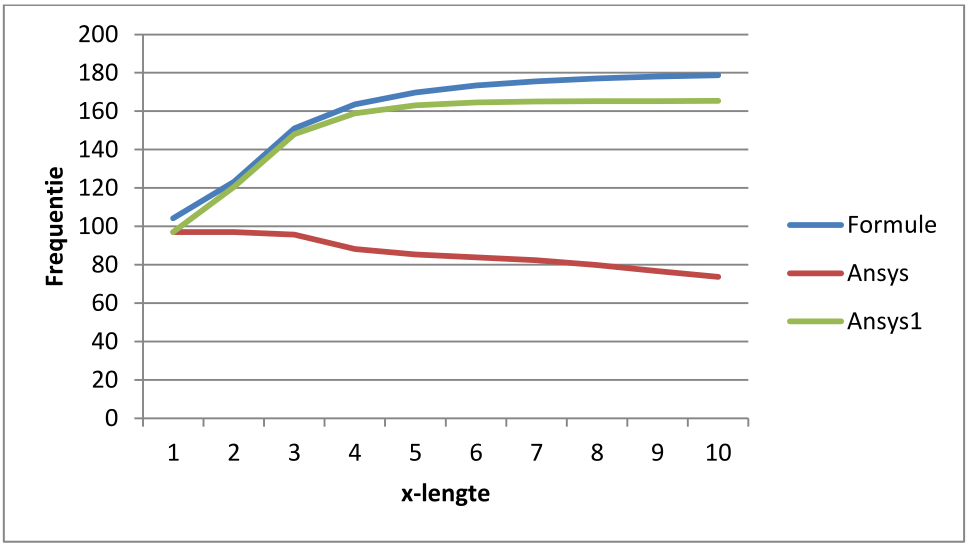
Tabel 9: Eigenfrequenties voor 5,0m y-lengte



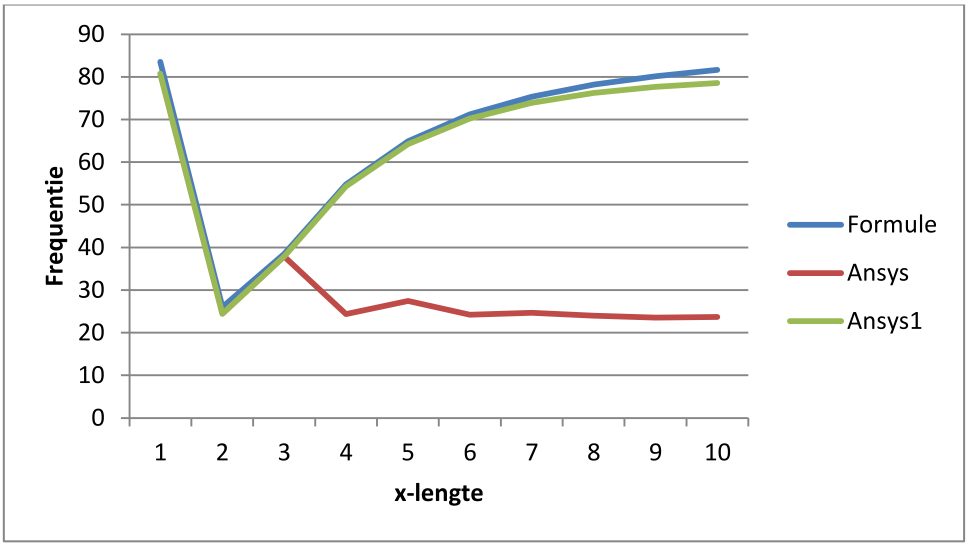
Figuur 31: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 1,0m y-lengte



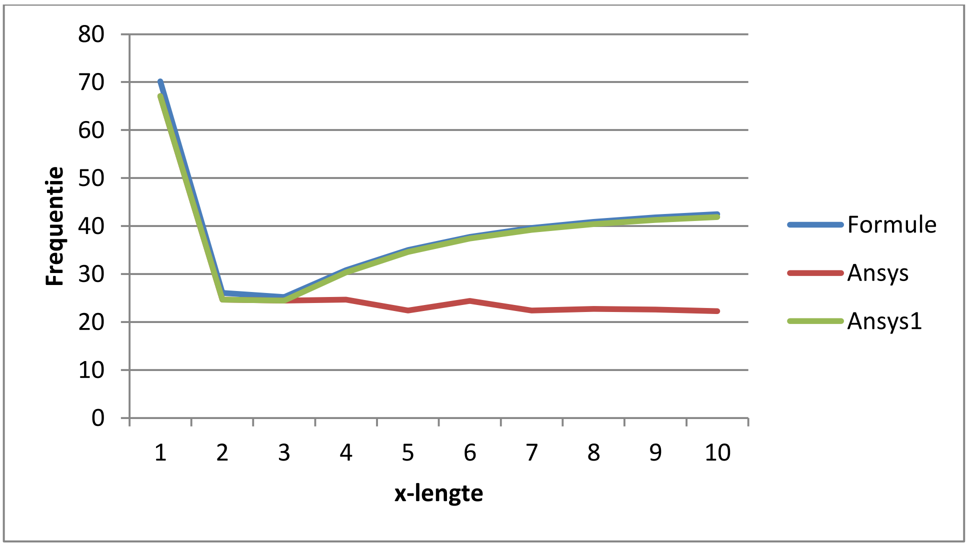
Figuur 32: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 1,0m y-lengte



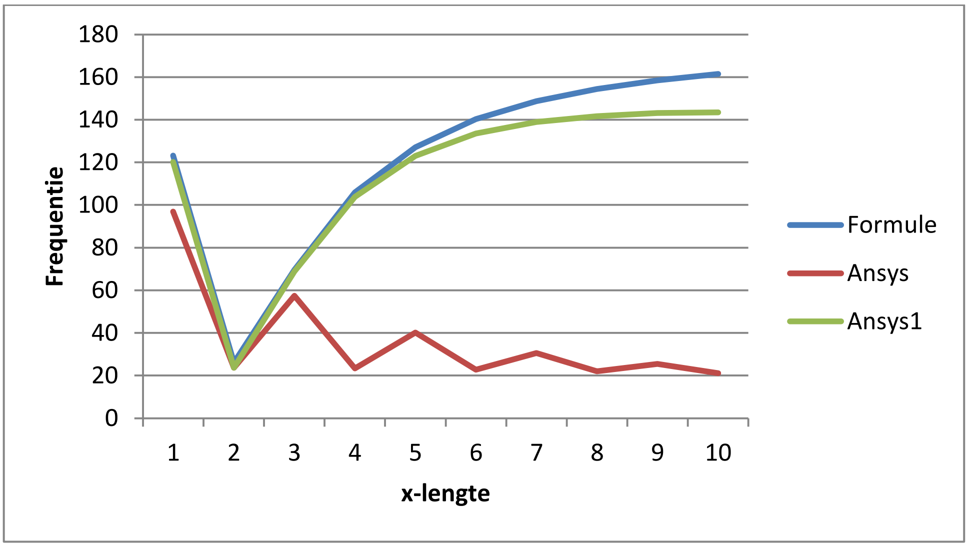
Figuur 33: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 1,0m y-lengte



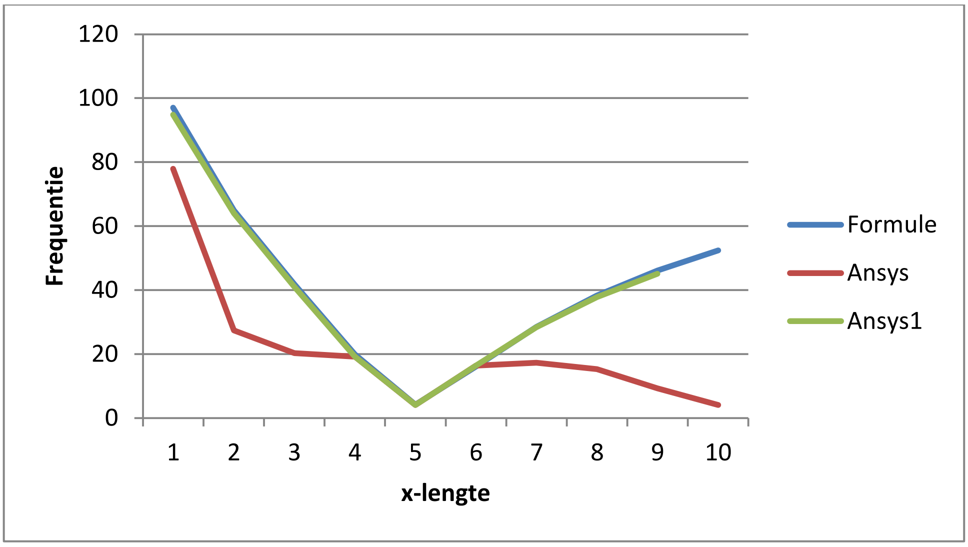
Figuur 34: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 2,0m y-lengte



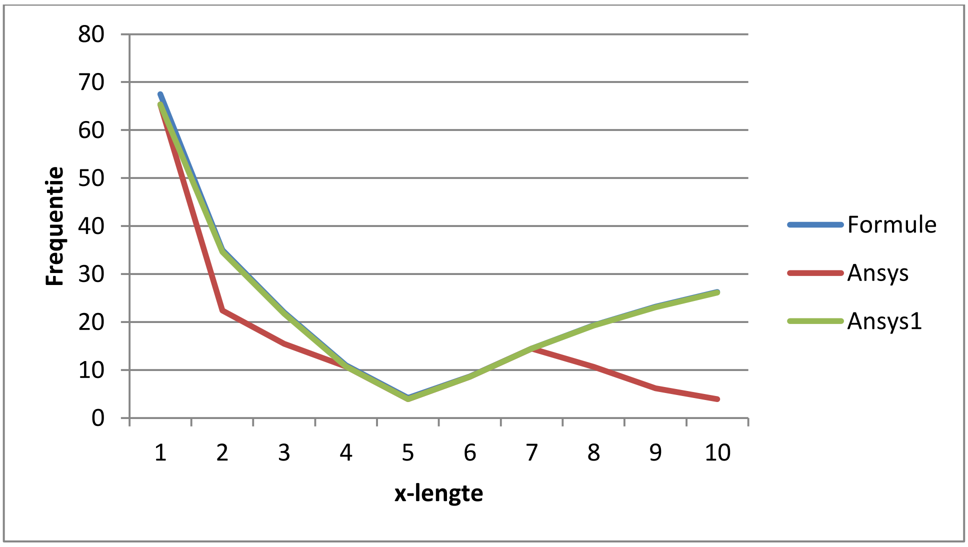
Figuur 35: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 2,0m y-lengte



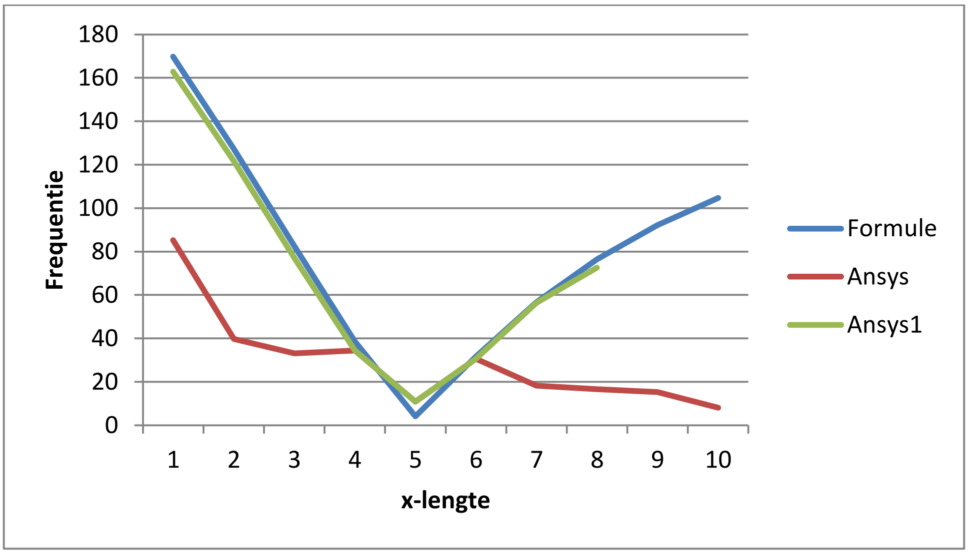
Figuur 36: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 2,0m y-lengte



Figuur 37: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,1 kromming en 5,0m y-lengte



Figuur 38: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,05 kromming en 5,0m y-lengte



Figuur 39: Eigenfrequenties van rechthoekige panelen met 0,2 kromming en 5,0m y-lengte