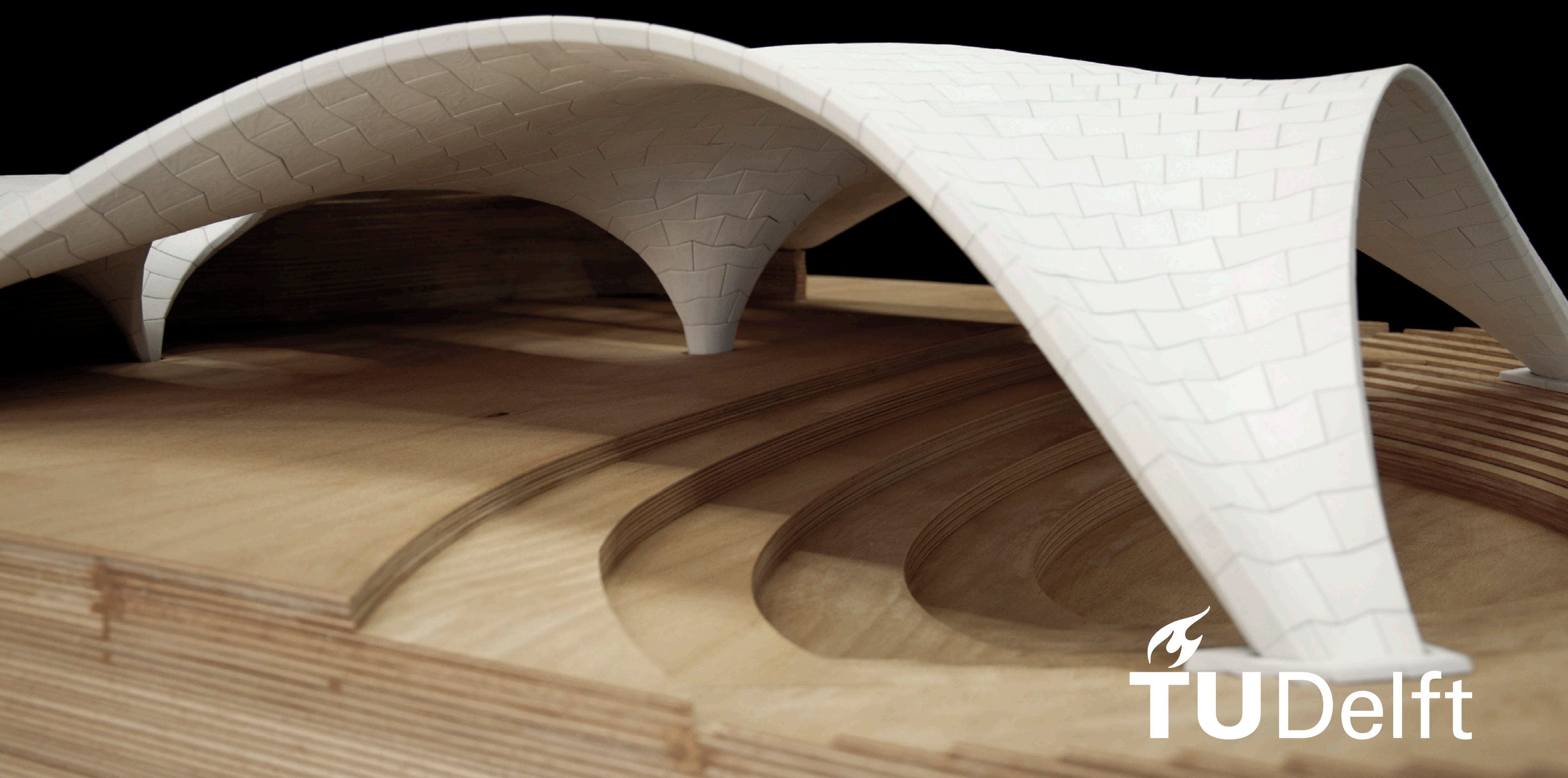
Eigenfrequenties van schalen

Uitbreiding van de ontwerpformule

M.A. Greijmans

Technische Universiteit Delft



TUDelft

Eigenfrequenties van schalen

Uitbreiding van de ontwerpformule

door

M. A. Greijmans
Bachelor student aan de Technische Universiteit Delft

Studienummer:	4195043
Projectduur:	18 april 2016 – 20 juni 2016
Begeleiders:	dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
	dr. ir. E.P. van der Meer
Faculteit:	Civiele Techniek en Geowetenschappen

TU Delft

Voorwoord

If I knew what I was doing, it wouldn't be called research. - A. Einstein.

Voor u ligt het eindrapport van het onderzoek naar de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schalen. Met dit onderzoek wordt de Bachelor opleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft afgesloten. Hier zijn acht weken onderzoek aan vooraf gegaan. Het onderzoek is zeer complex; de ontwerpformule is afhankelijk van acht verschillende parameters.

In de eerste paar weken heb ik combinaties van krommingstermen tegenover elkaar uitgezet, op zoek naar relaties. Er bleek een relatie te zijn met de Gauss-kromming. Deze relatie omschrijven naar een ontwerpformule ging echter niet 1, 2, 3. Het gros aan verschillende schaaldelen is in de weken erop opgedeeld en allerlei deelproblemen, de categorieëen, de doos van Pandora...

437 gemodelleerde schaaldelen verder en de ontwerpformule is geëxplodeerd tot een set van 13 ontwerpformules. Het is niet het resultaat waar ik op gehoopt had, maar ik denk wel dat dit onderzoek een goede basis biedt voor het vervolgonderzoek.

Ik heb met plezier aan dit uitdagende onderzoek gewerkt en ben ook erg blij dat dit onderzoek mij gegund is. Ik heb niet alleen veel geleerd over dit onderwerp, maar ook over het onderzoeksproces. Ik wil hiervoor mijn begeleiders dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en dr.ir F.P. van der Meer hartelijk bedanken. De adviezen waren erg hulpzaam en ik ben erg geënthousiasmeerd voor volgende onderzoeken.

Tot slot wens ik de lezer veel leesplezier toe.

M. A. Greijmans
20 juni 2016

Samenvatting

In dit onderzoek is de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen onderzocht. De eigenfrequentie is de natuurlijke frequentie waarin een object gaat oscilleren.

Als de eigenfrequentie van schaalconstructies bepaald kan worden, kan nagegaan worden of deze opgewassen is tegen een dynamische belasting. Als de frequentie van de dynamische belasting waaraan het schaalconstructie is blootgesteld, te dicht in de buurt komt van de laagste eigenfrequentie, gaat de constructie resoneren wat leidt tot het falen van de constructie.

Om in de ontwerpfase hier al rekening mee te houden, is er een ontwerpformule opgesteld welke de laagste eigenfrequentie benaderd. Deze formule was nog niet van toepassing op getwiste schalen met een dubbele kromming.

Er is expliciet gezocht naar de relatie met de Gauss-kromming.

$$k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2 \tag{1}$$

Deze term blijkt te dienen als indicator voor verschillende categorieën schaaldelen.

De algemene ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen ziet er als volgt uit:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [A \cdot (k_{xx}^2 + k_{yy}^2) + B \cdot k_{xx}k_{yy} + C \cdot k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{2}$$

waarbij A, B en C een andere waarde krijgen afhankelijk van de categorie.

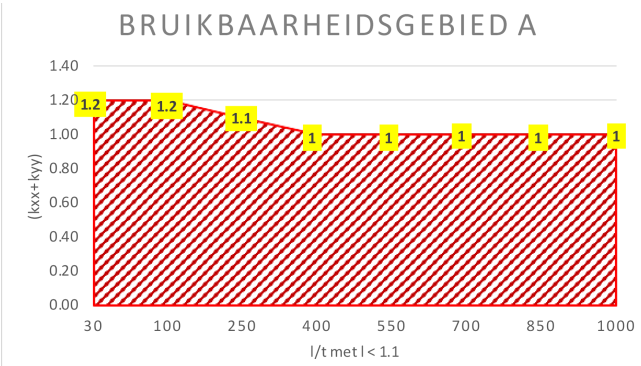
In dit onderzoek zijn er voor veel categorieën (A tot en met L) de factoren voor de krommingstermen onderzocht. Niet elke formule komt even goed overeen met de meetresultaten. Dit geldt wel voor categorie A tot en met E. Van deze set ontwerpformules zijn de bruikbaarheidsgrenzen opgezocht, waarbij er gekeken wordt bij welke schaalafmetingen en -dikte de formule nog correct is.

De ontwerpformule van categorie A en B was al bekend. De bruikbaarheidsgebieden zijn opnieuw opgesteld. De ontwerpformule voor de andere categorieën zijn nieuw. Ook hiervan zijn er bruikbaarheidsgebieden opgesteld.

Het resultaat van het onderzoek is een nog inclomplete algemene ontwerpformule, waarbij de factoren voor de krommingstermen, A, B en C, deels bepaald zijn. Als de invloed van elke krommingsterm apart onderzocht wordt, leidt dit tot een factor. Deze factoren hangen op een bepaalde manier af van de grootte van de krommingen en de twist van een schaaldeel. Als deze relatie omschreven kan worden en geïntegreerd kan worden in de ontwerpformule, zou deze compleet zijn.

A $[k_G > 0] - k_{xx} > 0 \wedge k_{yy} > 0 \wedge k_{xy} = 0$

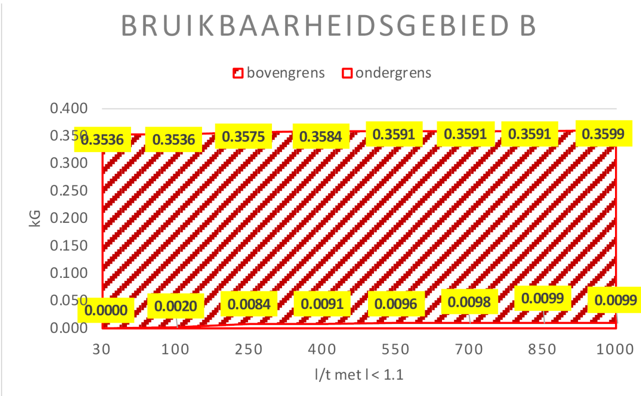
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy}]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \quad (3)$$



Figuur 1: Bruikbaarheidsgebied categorie A

B $[k_G > 0] - \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.08$

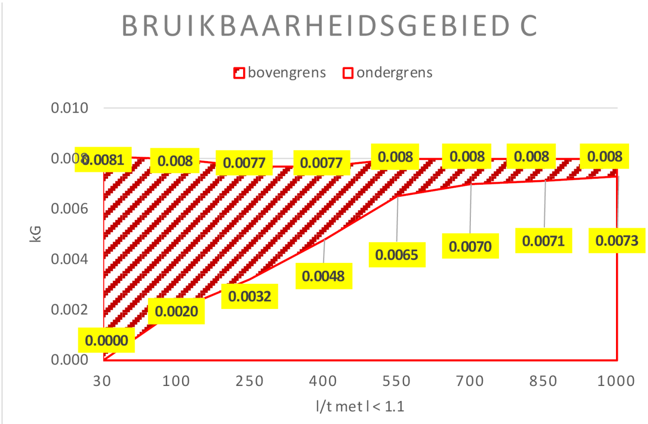
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \quad (4)$$



Figuur 2: Bruikbaarheidsgebied categorie B

C $[k_G > 0] - 0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.08$

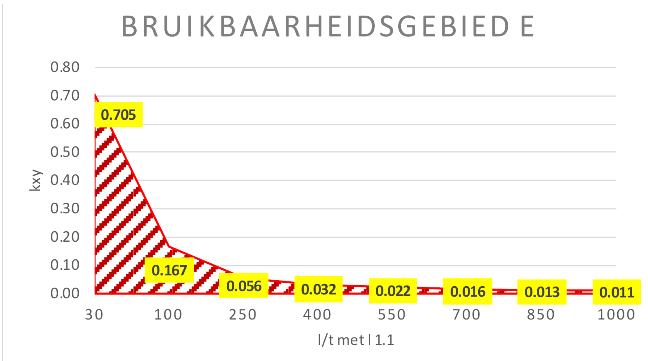
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{5}$$



Figuur 3: Bruikbaarheidsgebied categorie C

E $[k_G < 0] - k_{xx} = k_{yy} = 0 \wedge 0 < k_{xy} < 0.07$

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6}$$



Figuur 4: Bruikbaarheidsgebied categorie E

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

Lijst van tabellen

1 Introductie

Al eeuwen lang laat men zich niet beperken tot eenvoudige constructievormen. De Romeinen bouwden al veel in koepelvormen en tegenwoordig wordt er in de 'freeform architecture' ook steeds meer gekromde constructie elementen toegepast. Gekromde panelen (schalen) hebben hoge stijfheid, een voordelige eigenschap niet alleen in de constructie, maar ook in de luchtvaarttechniek en werktuigbouw. Er wordt steeds meer ontdekt over de krachtenverdeling en bezwijkmechanismen van gekromde schalen. Een mogelijk bezwijkmechanisme is het optreden van resonantie. Dit kan worden voorkomen als de frequentie van de dynamische belasting en de eigenfrequentie van het gekromde paneel bekend zijn. Dynamische belastingen kunnen aardbevingen zijn, maar ook turbulentie ten gevolge van de wind.

1.1. Probleemstelling

Tot op heden worden eigenfrequenties vaak genoeg nog bepaald aan de hand van eindige elementen pakketten. Deze gedetailleerde handeling kan tijdrovend zijn en vaak niet van toepassing tijdens de ontwerpfase van de constructie. Een ontwerpformule waarmee de eigenfrequentie van (dubbel) gekromde schalen bepaald kan worden zou een oplossing zijn voor het idealiseren van een ontwerp met een gekromd constructie element. Bij het bepalen van vorm van de constructie is het belangrijk dat de eigenfrequentie van het element boven de frequentie van de belasting blijft. Dit onderzoek zal zich daarom ook richten op de laagste eigenfrequentie (fundamentele frequentie).

1.2. Doelstelling

Het doel van het onderzoek kan als volgt worden geformuleerd:

De ontwerpformule voor eigenfrequenties van gekromde schalen is nog incompleet, deze moet aangevuld worden met een factor welke de onderlinge relatie tussen de krommingen omschrijft. De Gauss-kromming ligt hierbij voor de hand. De bijbehorende bruikbaarheidsgrenzen moeten ook onderzocht worden, welke de mogelijke toepassingen bepalen.

1.3. Onderzoeksvraag

Het onderzoek focust zich op de volgende vragen:

HOOFDVRAAG Is er een relatie, dan wel, wat is de relatie tussen de laagste eigenfrequentie van gekromde schalen en de Gauss-kromming?

DEELVRAAG Hoe kan de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schalen worden uitgebreid met deze relatie, met een maximale foutmarge van 5 procent?

DEELVRAAG Wat zijn de bruikbaarheidsgrenzen van de gevonden ontwerpformule?

1.4. Plan van aanpak

Het onderzoek borduurt voort op de formule van Blevins, welke de eigenfrequentie van rechte panelen omschrijft, en de formule van Rayleigh, welke de laagste eigenfrequentie van ‘hemispherical shell’ omschrijft.

De huidige formule is uitgebreid met de volgende factoren:

- Dubbele krommingen onder invloed van membraankrachten
- Dubbele krommingen en de twist (afzonderlijk van elkaar)

Deze laatste factor moet onderzocht worden en uitgebreid worden met de relatie welke de combinatie van dubbele krommingen en de twist omschrijft (mogelijk met de Gauss-kromming). Als de (nieuwe) relatie gedefinieerd is wordt het toepassingsveld afgebakend door de bruikbaarheidsgrenzen te onderzoeken. Dit gebeurt zowel voor de eerdere onderzochte factoren, als van andere relevante materiaaleigenschappen (lengte, elasticiteitsmodulus, dichtheid, t/a-ratio, Poisson’s ratio) van het paneel.

Deze factor wordt onderzocht aan de hand van een model in een eindig elementen pakket, Ansys, waarmee de laagste eigenfrequentie van het schaaldeel bepaald kan worden. De gecreëerde datasets worden in relatie gebracht met de aanwezige Gauss-kromming.

Het onderzoek beperkt zich tot de volgende uitgangspunten:

- De schaaldelen zijn homogeen en isotroop
- Schaaldelen waarvan de lengte gelijk is aan de breedte
- Schaaldelen met vlakke kromming (kromming relatief klein ten opzichte van de afmetingen)

1.5. Leeswijzer

De opzet van het rapport volgt de opzet van het Bachelor Eindwerk. Het Bachelor Eindwerk is als volgt opgebouwd:

Literatuurstudie: Voorgaande onderzoeken (*hoofdstuk 2*)

Literatuurstudie: Schaaltheorie en Gauss-kromming (*hoofdstuk 2*)

Testfase: Modelleren in Ansys (*hoofdstuk 3*)

Testfase: Relaties analyse (*hoofdstuk 4*)

Testfase: Formule definiëren (*hoofdstuk 4*)

Controle: Bruikbaarheidsgrenzen bepalen (*hoofdstuk 5*)

Conclusies en aanbevelingen (*hoofdstuk 6*)

2

Achtergrond

Het onderzoek richt zich op de eigenfrequenties van gekromde panelen, vaak ook schaalconstructies genoemd in de Civiele Techniek. De grootte van de eigenfrequenties komen voort uit de materiaaleigenschappen van het schaaldeel. Enige achtergrond informatie over gekromde panelen is nodig voor de voortgang van het onderzoek. Dit onderzoek is al meerdere jaren gaande. Voor de leesbaarheid van het document wordt er een overzicht gemaakt van de voorgaande onderzoeken. Tenslotte wordt er ingegaan op de verschillende trillingsvormen waarin een schaaldeel kan vibreren.

2.1. Theorie schalen

Platen zijn isotropisch, homogene panelen die gedefinieerd worden met door het middenpaneel, dikte en de materiaaleigenschappen. Dit middenvlak is bij platen vlak, in tegenstelling tot bij schalen. Krachten in de richting van het paneel werken als membraankrachten en krachten uit de richting van het paneel werken als momenten en dwarskrachten. Het aantal vrijheidsgraden van dit middenpaneel speelt in een rol de benadering van de (verschillende) eigenfrequenties van schaalconstructies. In de volgende paragrafen wordt hier verder op ingegaan.

2.1.1. Gauss-kromming

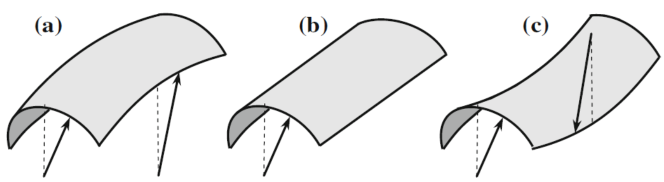
Schalen kunnen geclassificeerd worden aan de hand van verschillende geometrische eigenschappen. De Gauss-kromming is hier één van. Elk willekeurig punt van een schaal heeft een maximale en minimale kromming. Deze heten de hoofdkrommingen, k_1 en k_2. Het product van de hoofdkromming heet de Gauss-kromming. De Gauss-kromming is onafhankelijk van de richtingen van het lokale assenstelsel en kan daarom geschreven worden als $k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$. Door deze term kunnen schalen onderverdeeld worden in

synclastische schalen (hol of bol), hebben een positieve Gauss-kromming;

anticlastische schalen (zadelpuntvormig), hebben een negatieve Gauss-kromming;

of enkel gekromde schalen, met een Gauss-kromming van nul.

Dit is in het onderstaand figuur (2.1) afgebeeld.



Figuur 2.1: Gauss-krommingen. A Positieve Gauss-kromming, B Nul Gauss-kromming, C Negatieve Gauss-kromming (Blaauwendraad & Hoefakker , 2014)

De Gauss-kromming beïnvloedt de doorbuiging van een belaste schaal. Bij een schaal met een grote Gauss-kromming (in absolute zin), zal de belasting een kleinere doorbuiging veroorzaken. Als gedurende het belasten de Gauss-kromming veranderd, betekent het dat er membraankrachten optreden.

a/t-ratio Een andere classificatie is de a/t-ratio. Dit is de verhouding tussen de kromtestraal (*sagitta*) en de dikte van een schaalconstructie.

$a/t < 5$: Erg dikke schaal

$5 < a/t < 30$: Dikke schaal

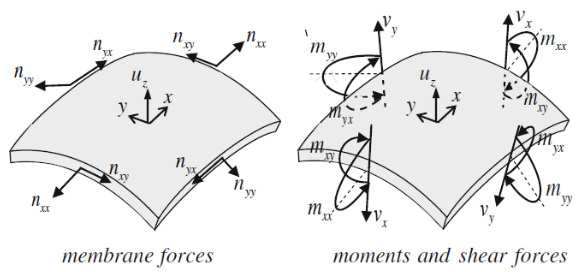
$30 < a/t < 4000$: Dunne schaal

$4000 < a/t$: Membraan

In het onderzoek worden er schalen gemodelleerd vanaf een a/t-ratio van 100. Het onderzoek richt zich dus voornamelijk op dunne schalen.

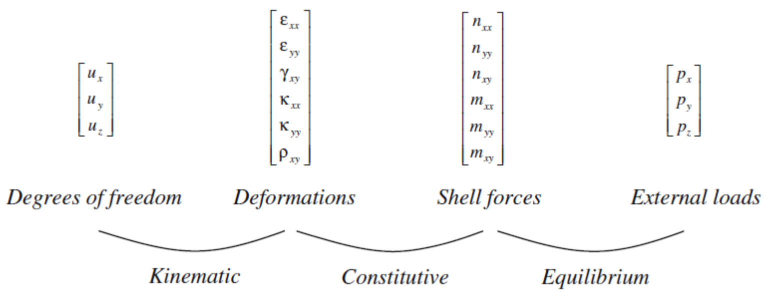
2.1.2. Membraankrachten

Dunne schalen kunnen gemodelleerd worden met de membraantheorie. Hierbij gaat men ervan uit dat er in de schaal een zuiver membraan spanningsveld wordt gecreëerd en geen momenten. Er zullen alleen normaalkrachten en schuifspanning in het vlak optreden. Donnell's buigtheorie voor dunne schalen bouwt voort op deze theorie. Echter is deze alleen van toepassing op ondiepe schalen (zoals dakconstructies) en niet op diepe schalen. De membraankrachten en momenten zijn in de figuur 2.2 weergegeven.



Figuur 2.2: Krachten en momenten weergegeven op een geschematiseerd deel van een schaal met een willekeurige kromming (Blaauwendraad & Hoefakker , 2014)

Donnell gebruikte de volgende relaties:



Figuur 2.3: Schema van relaties in de membraantheorie van Donell (Blaauwendraad & Hoefakker , 2014)

De kinematische relatie relateert de vervormingen met de verplaatsingen, de constitutieve relatie relateert de membraankrachten met de vervormingen en de evenwichtsrelatie relateert de membraankrachten met de belasting van het schaaldeel.

2.1.3. Eigenfrequentie

De frequentie waarbij een object gaat oscilleren (vibreren) zonder dat deze wordt aangedreven door externe kracht. De frequentie waarin het object trilt heet de natuurlijke frequentie, of eigenfrequentie.

Op het moment dat een externe kracht het object aandrijft met dezelfde frequentie als de eigenfrequentie, treedt er resonantie op. Resonantie kan leiden tot een faalmechanisme en kan fataal zijn voor een constructie.

Ter illustratie van het fenomeen eigenfrequentie wordt het voorbeeld van een massa-veersysteem met één vrijheidsgraad gegeven. Dit is een blokje massa gehecht aan een veer, die uit de rustpositie wordt gehaald. Voor dit systeem kunnen de bewegingsvergelijkingen (zie formule 2.5) opgesteld worden. Deze kan omgeschreven worden naar een differentiaalvergelijking met poolcoördinaten. Het ritme waarin de massa gaat bewegen is de eigenfrequentie en hangt af van de massa (m) en de stijfheid (k) van de veer (Blevins , 2011).

Van de bewegingsvergelijking kan de radiale frequentie worden bepaald ($\omega_0[rad/s]$) en kan de eigenfrequentie van het massa-veersysteem gedefinieerd worden:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = [Hz] \tag{2.1}$$

2.2. Totstandkoming van de huidige formule

De formule voor de laagste eigenfrequentie van dubbel gekromde schaaldelen wordt al jaren onderzocht. Deze huidige formule ziet er als volgt uit:

$$f_n = \sqrt{\underbrace{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4}} + \underbrace{[(k_{xx}+k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} + \frac{k_{xx}k_{yy}}{\dots} + \underbrace{\frac{n_{xx}+n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{(1-\nu^2)n_{xy}^2}{71.7\rho E t^4}}} \tag{2.2}$$

Het eerste deel van de formule omschrijft de buigstijfheid van een vlakke plaat. Dit was gedaan door Lord Rayleigh. De twee delen erna zijn tot stand gekomen door onderzoek van de laatste jaren onder leiding van dr.ir. Hoogenboom. Hierbij is van het principe van Blevins uitgegaan die stelde dat de uitdrukking voor de natuurlijke frequentie van een rechthoekige plaat dat in het vlak belast wordt (N) verkregen kan worden door de buigstijfheid van de plaat op te tellen bij de membraan stijfheid: (Blevins , 2016)

$$f_{plaat,N>0}^2 = f_{plaat,N=0}^2 + f_{membraan}^2 \tag{2.3}$$

Ook voor de krommingen heeft hij een dergelijke uitdrukking opgesteld: (Blevins , 2016)

$$f_{schaal}^2 = f_{plaat}^2 + C^2 \tag{2.4}$$

waarbij C de krommingsterm is.

Uit de relaties van Donnell (2.3) volgt een bewegingsvergelijking. Door hier de bewegingsformule in te vullen is deze krommingsterm C gedefinieerd.

$$u_z = \hat{u}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\cos 2\pi f t \tag{2.5}$$

In deze term worden de dubbele krommingen en de twist factor afzonderlijk omschreven. De huidige formule klopt bij het voorkomen van dubbele krommingen in een deel van een schaal, of bij het voorkomen van een twist in een deel van een schaal. Echter blijkt uit voorgaand onderzoek dat de huidige formule niet blijkt te kloppen bij schaaldelen met een dubbele kromming en een twist (Noortman , 2015). In dit onderzoek wordt onderzocht hoe het tweede deel van de huidige formule, de krommingsterm, uitgebreid of gecorrigeerd kan worden met de Gauss-kromming. Dit wordt in hoofdstuk 4 nader onderzocht.

Eenheden De eenheid van de frequentie is Hertz, $\frac{1}{s}$. Bij het zoeken naar een eventuele additionele term dient er rekening gehouden te worden met de eenheden. Immers, als de eenheid van de formule voor de laagste eigenfrequentie niet uit zal komen op Hertz, zal de formule niet kloppen. De eenheden van de formule worden in onderstaande regels herleid:

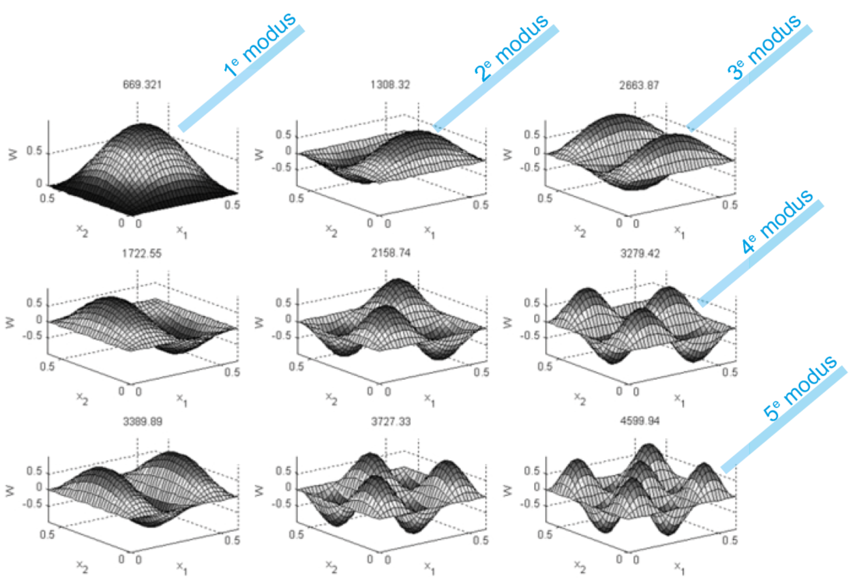
$$
\begin{aligned}
f_n = & \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx}+k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} = \\
& \sqrt{\frac{[-]}{[-]}\frac{[kg/m/s^2][m^2]}{[kg/m^3][m^4]} + [1/m^2]\frac{[kg/m/s^2]}{[kg/m^3][m^4]}} = \\
& \sqrt{[\frac{1}{s^2}] + [\frac{1}{s^2}]} = \\
& [\frac{1}{s}] = [Hz]
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

In dit onderzoek wordt de krommingsterm onderzocht waarbij ervan uitgegaan wordt dat een eventuele additionele krommingterm opgeteld wordt bij de huidige krommingsterm. Dit betekent dat deze krommingsterm altijd de eenheid $[1/m^2]$ moet behouden.

2.3. Trillingsmodi

In de loop van het onderzoek werd het duidelijk dat de trillingsvorm van belang was. In sommige gevallen heeft de trillingsmodus invloed op de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties.

Objecten kunnen verschillende trillingsvormen aannemen, afhankelijk van de frequentie. De meest simpele trillingsvorm bestaat uit één dal of heuvel; deze heet dan ook de eerste modus. De tweede modus bestaat uit twee heuvels of dalen, deze kunnen diagonaal georiënteerd zijn of evenwijdig aan de randen van het schaaldeel. Hogere modi bevatten meerdere heuvels of dalen. Dit gaat geleidelijk op.



Figuur 2.4: Trillingsmodi van vlakke platen (Malekzadeh , 2014)

Omdat de gemodelleerde schaaldelen gekromd en/of getwist zijn, treden er niet altijd zuivere trillingsmodi op. Het kan voorkomen dat een het schaaldeel in een overgangsmodus zit.

In dit onderzoek is het onderscheid maken tussen de trillingsmodi van groot belang voor de interpretatie van de resultaten.

3

Modellering

Het modelleren en het valideren van de uitkomsten gebeurt met het eindige elementen programma Ansys (zie bibliografie). Het script dat gebruikt wordt, was van tevoren al gebruikt voor eerdere onderzoeken. Door het aanpassen van verschillende parameters kunnen verbanden worden analyseerd. Het script wordt toegelicht en het aantal elementen voor het model wordt bepaald. Vervolgens wordt de referentieschaal gedefinieerd en tot slot de stappen die gemaakt worden voor de analyse.

3.1. Opbouw script

Het script (bijlage B) bestaat uit de volgende onderdelen:

Preprocess: hierin worden de materiaaleigenschappen, geometrische eigenschappen (afmetingen, krommingen en twist), eventuele belastingen en het aantal elementen gedefinieerd. De knopen worden geplaatst waartussen de elementen van het schaaldeel komen. Het assenstelsel per knoop wordt geroteerd, hierdoor werken de krachten in de richting van het schaaldeel.

Solution: de ”Modal analysis”wordt toegepast, waarmee de trillingskarakteristieken (eigenfrequentie met modus) van een constructie bepaald kunnen worden

Post process: de uitvoer wordt gegenereerd

3.2. Aantal elementen

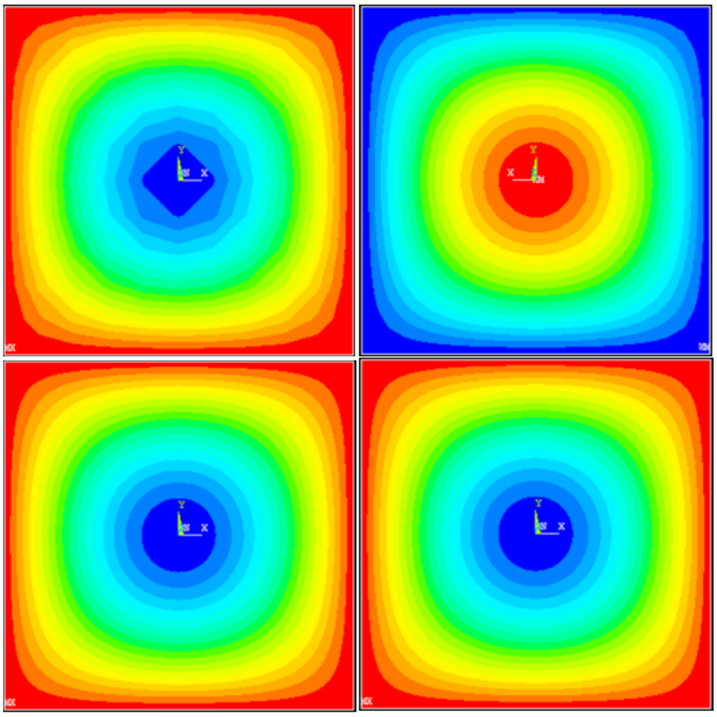
Doel van het onderzoek is tot een ontwerpformule komen met een foutmarge van maximaal 5 procent. Hierbij is het belangrijk dat de uitkomsten van het onderzochte model nauwkeurig genoeg zijn.

Vier scenarios worden onderzocht. Er wordt gekeken naar de hoeveelheid rekenstappen (hoe groter het aantal hoe langer de rekentijd), nauwkeurigheid en de fout ten opzichte van de analytische oplossing. Een vlakke plaat wordt gemodelleerd. n is het aantal elementen per x- en y-richting waarin het schaaldeel wordt opgedeeld. Het totaal aantal elementen van het gemodelleerde schaaldeel is n^2.

Tabel 3.1: Nauwkeurigheid van het aantal elementen

	frequentie [Hz]	**rekenstappen**	**fout [%]**
analytisch	*24.5857452*		
n = 10	24.8051	642	0.884313
n = 25	24.6119	3852	0.106269
n = 50	24.5781	15202	-0.03111
n = 100	24.5596	60402	-0.10646

Aan tabel 3.1 en figuur 3.1 is duidelijk te zien dat de frequentie nauwkeuriger wordt benaderd en dat de trillingsvorm nauwkeuriger is weergegeven. De stap van 50 elementen naar 100 elementen voegt nauwelijks is toe aan de nauwkeurigheid. De resultaten vallen nu allemaal binnen de 1 procent foutmarge. Er wordt gekozen voor een model met 50 elementen.



Figuur 3.1: n=10, n=25, n=50, n=100

3.3. Referentie schaal

Tijdens de analyse wordt er steeds een deel van een schaal gemodelleerd. Het uitgangspunt is een stalen schaaldeel met de volgende parameters:

$l_x = 1.00 \quad m$	$E = 2.1 \cdot 10^{11} \quad N/m^2$	k_{xx} (variabel)
$l_y = 1.00 \quad m$	$\nu = 0.3$	k_{yy} (variabel)
$t = 0.005 \quad m$	$\rho = 7850 \quad kg/m^3$	k_{xy} (variabel)

De schaal is scharnierend opgelegd langs alle randen. Dit betekent dat verticale (en horizontale) translatie verhinderd wordt en rotatie toegelaten wordt.

Zoals eerder vemeld wordt er in het onderzoek uit gegaan van ondiepe schalen met a/t-ratio > 100.

Het onderzoek gaat niet verder in op de membraankrachten.

3.4. Stappenplan analyse

De analyse deelt zich op in twee delen.

In het eerste gedeelte richt zich op de parameters k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}. Hierbij blijven alle andere parameters constant. De huidige relatie wordt eerst onderzocht (alle parameters afzonderlijk van elkaar). Vervolgens worden combinaties van parameters onderzocht (*hoofdstuk 4*).

Als er een verband is gevonden wordt er nagegaan of dit gedefinieerde verband ook klopt bij het aanpassen van de andere parameters. Tot slot worden er bruikbaarheidsgrenzen opgesteld welke het toepassingsgebied afbakend (*hoofdstuk 5*).

4

Resultaten en relaties

De factor die gezocht wordt moet de relatie omschrijven tussen het gedrag van dubbel gekromde schalen met een twist en de eigenfrequentie van het schaaldeel. Deze relatie wordt onderzocht aan de hand van een model in een eindig elementen pakket, Ansys, waarmee de laagste eigenfrequentie van het paneel bepaald kan worden. De gecreëerde datasets worden in relatie gebracht met de aanwezige Gauss-kromming en eventuele combinaties hiervan. Deze analyses lopen simultaan en de benadering van de relatie zal daarom ook een iteratief proces zijn. Het vorig onderzoek eindigde met de conclusie dat een term voor schaaldelen met dubbele krommingen en een twist mist, hier worden aanbevelingen voor gedaan (Noortman , 2015), welke in het hoofdstuk opgenomen zullen worden. De tabellen met de originele data zijn te vinden in bijlage C.

4.1. Analyse huidige formule

Uit voorgaand onderzoek is geconcludeerd dat er een krommingsterm mist welke de kromming en twist gecombineerd omschrijft. Verschillende combinaties van termen kunnen tegenover elkaar worden uitgezet. Dit begint met de huidige formule, met dubbele krommingen of een twist. Gedurende het onderzoek bleek dat de trillingsvorm van bepaalde invloed was op verschillende factoren. Bij elke relatie wordt deze toegelicht.

4.1.1. Dubbele kromming

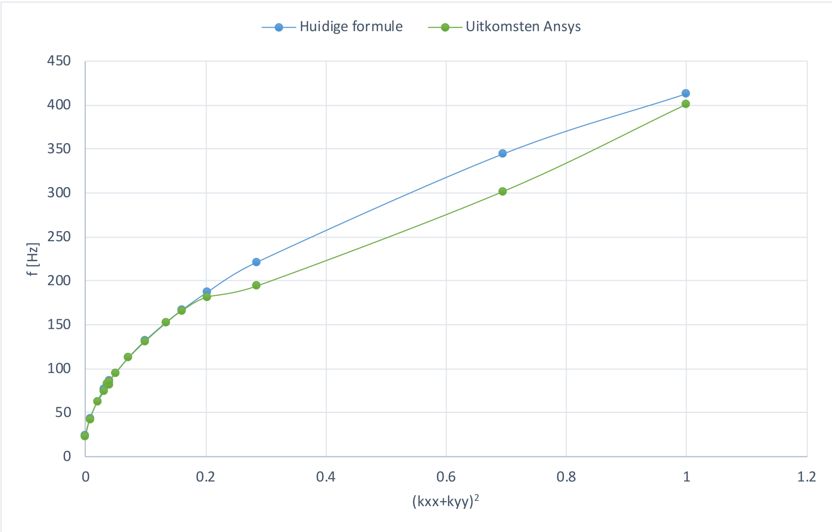
De factor $(k_{xx} + k_{yy})^2$ wordt uitgezet tegenover de eigenfrequentie die volgt uit Ansys. Krommingen van 0 tot 0.5 zijn gebruikt. Er zijn geen symmetrische krommingen gebruikt ($k_{xx} \neq k_{yy}$). In figuur 4.1 is te zien dat vanaf $(k_{xx} + k_{yy})^2 = 0.2025$ de eigenfrequenties van de formule afwijken van de eigenfrequenties van Ansys.

In het vorig onderzoek was geconcludeerd dat de grens voor deze relatie $l(k_{xx}k_{yy}) \leq 1.2$ moet zijn. Dit was bij het handhaven van een foutmarge van maximaal 10 procent. De fout uit figuur 4.1 is tot aan $(k_{xx} + k_{yy})^2 = 0.2025$ onder de 0.5 procent. Naarmate deze factor groter wordt, wordt de fout 14.2 procent [1]. In dit onderzoek wordt gestreven een foutmarge van maximaal 5 procent aan te houden.

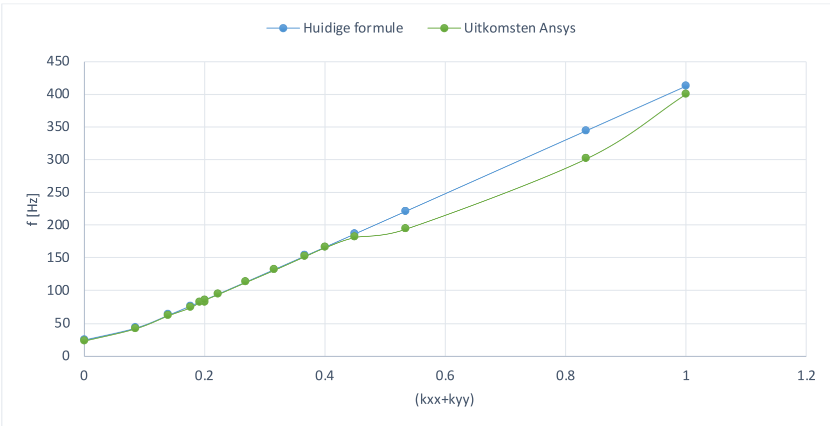
Het is duidelijk te zien dat de relatie de vorm aan neemt van een wortelfunctie. De factor $(k_{xx}+k_{yy})^2$ zit in de formule voor de laagste eigenfrequentie ook onder de wortel (4.3). Met andere woorden: er is een lineair verband tussen $\sqrt{(k_{xx} + k_{yy})^2}$ en de eigenfrequentie (zie figuur 4.2).

[1] De fout wordt berekend door

$$\frac{f_{formule} - f_{ansys}}{f_{ansys}} 100\% \tag{4.1}$$



Figuur 4.1: f(ansys) en f(formule) [Hz] uitgezet tegenover $(k_{xx} + k_{yy})^2$



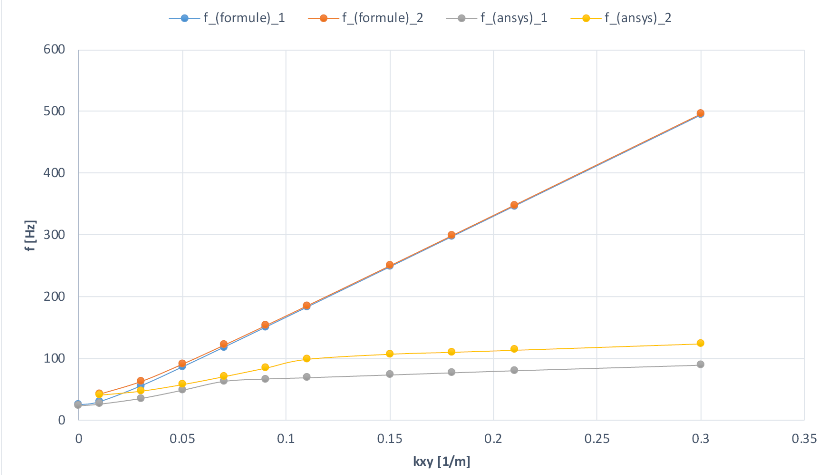
Figuur 4.2: Dubbele kromming: f(ansys) en f(formule) [Hz] uitgezet tegenover $(k_{xx} + k_{yy})$

Trillingsvorm In deze reeks data trillen de schalen vrijwel allemaal met een enkele heuvel of dal (eerste modus). Slechts bij twee datapunten blijkt dat er een dubbele trillingsvorm voor komt. Deze liggen op dezelfde lijn als frequenties met een enkele trillingsvorm. De trillingsvorm heeft dus geen invloed op de numerieke uitkomst van de laagste eigenfrequentie.

Conclusie De term die de dubbele krommingen omschrijft in de formule klopt tot op bepaalde hoogte. De fout blijft onder de 5 procent als $(k_{xx} + k_{yy})^2 < 0.2$.

4.1.2. Twist

Ook de relatie met de twist wordt onderzocht. De bruikbaarheidsgrens opgesteld in vorig onderzoek is $l(k_{xy}) \leq 0.04$ (Noortman , 2015. De frequenties van schaaldelen worden onderzocht met een twist van $0.01 \leq k_{kxy} \leq 0.3$. Hierbij wordt ook de huidige formule geplot (4.3). Dit wordt gedaan voor een schaaldeel van $1.00 \times 1.00 m^2$ met $t = 0.005m$ en $0.50 \times 0.50 m^2$ met $t = 0.002m$.



Figuur 4.3: Dubbele kromming: f(ansys) en f(formule) [Hz] uitgezet tegenover k_{xy}

Er is duidelijk te zien dat de formule een rechtevenredige relatie omschrijft, $f \sim k_{xy}$. Echter nemen de eigenfrequenties veel sterker toe dan de werkelijke situatie is (in Ansys). Dit betekent dat de factor voor de twist term onjuist is.

Wat op valt is dat er een knik in de relatie zit. De frequenties nemen sterker toe met een kleinere twist, dan bij een grotere twist. Dit omslagpunt is anders voor beiden platen. Vermoedelijk hangt deze dus af van de afmetingen en de dikte van de platen. Bij de referentieschaal zit het omslagpunt bij een twist van 0.07 1/m.

Er worden nu vijf verschillende platen gemodelleerd. Hierdoor kan er onderzocht worden hoe deze curve tot stand komt (4.4).

De volgende schalen zijn gemodelleerd:

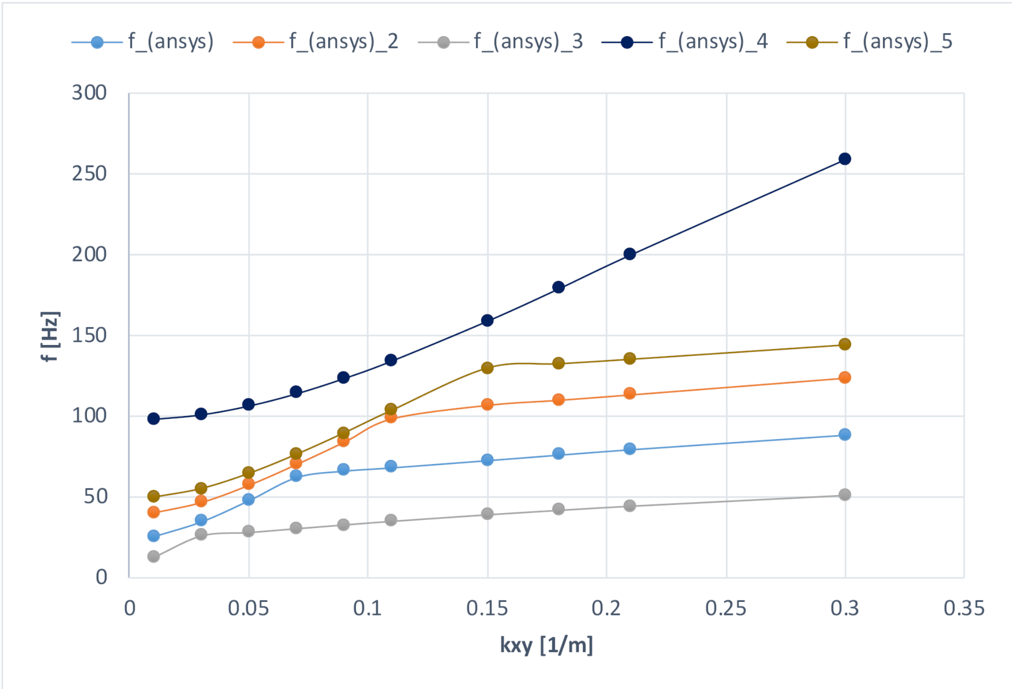
Tabel 4.1: Gemodelleerde schalen

	l [m]	**t [m]**
1	*1*	*0.005*
2	*0.5*	*0.002*
3	*1*	*0.002*
4	*0.5*	*0.005*
5	*1*	*0.01*

De volgende conclusie kan getrokken worden aan de hand van de grafiek: Naarmate de schaal grotere afmetingen krijgt, vindt het omslagpunt bij een kleinere twist plaats. Naarmate de schaal dikker wordt, vindt het omslagpunt bij een hogere twist plaats.

De factor voor de term k_{xy}^2 in de formule voor de laagste eigenfrequentie blijkt niet te kloppen. In de huidige formule is deze factor 4. Bij het plotten van meerdere verschillende schalen, blijken er twee factoren te zijn, voor en na het omslagpunt. De factor voor het omslagpunt is 2, en na het omslagpunt is deze 0.35. De invloed van de twist neemt dus duidelijk af naarmate de twist groter wordt.

In dit onderzoek zal vooral gekeken worden naar de omschrijving van het eerste deel van de grafiek. De formule die tot nu toe tot stand is gekomen, volgt uit de formule voor vlakke schalen (platen). Twisten van een (relatief) kleine orde zullen hierbij eerder aansluiten.

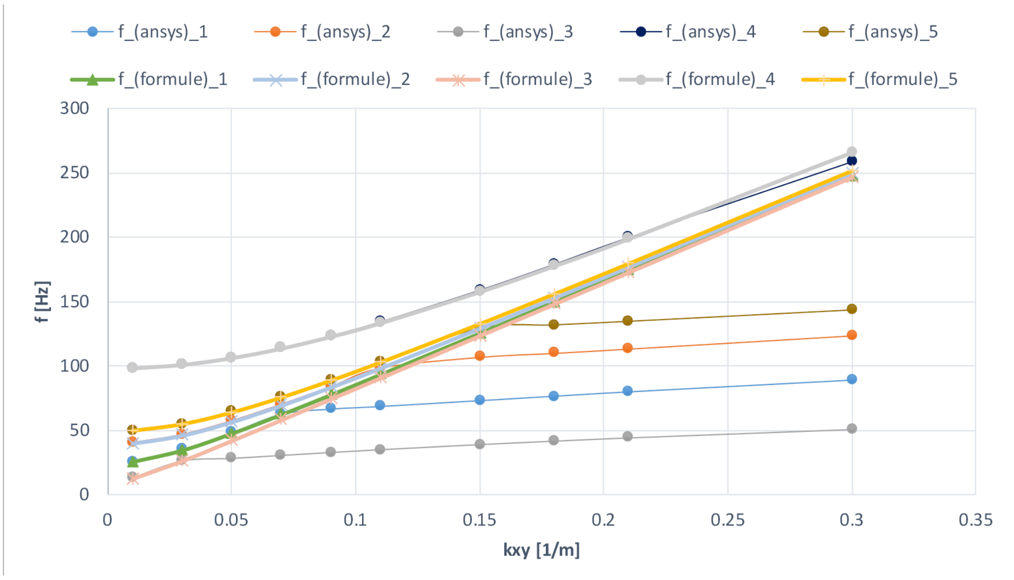


Figuur 4.4: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover k_{xy} van 5 verschillende schaaldelen

De factor 4 wordt vervangen door een factor 2. Hieruit volgt de formule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + 2k_{xy}^2\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.2}$$

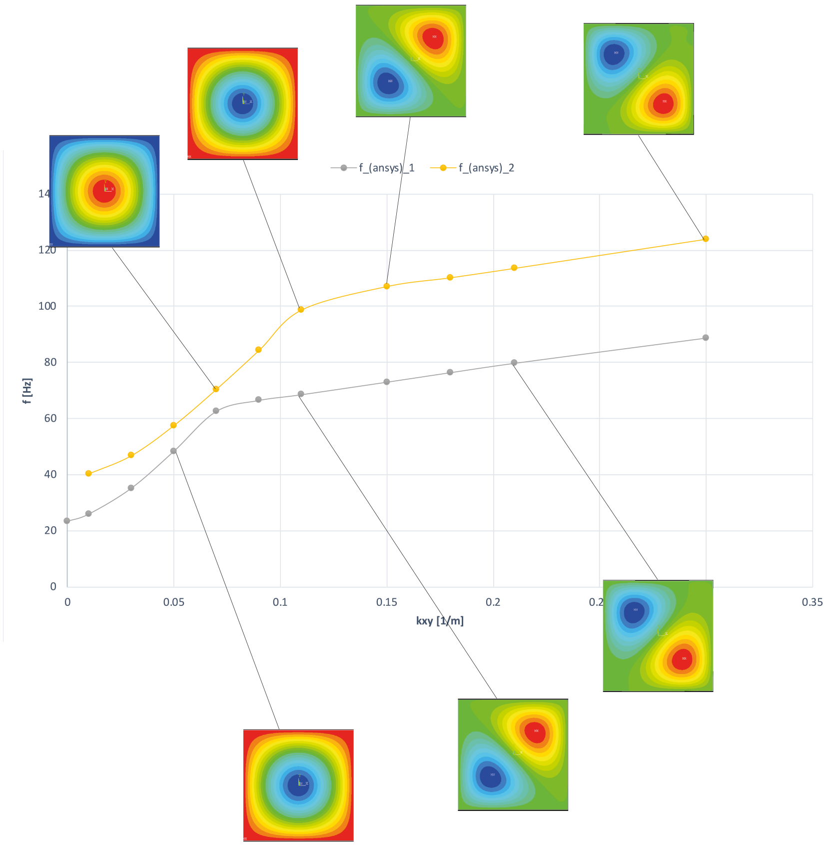
Deze wordt nu in dezelfde grafiek geplot. Het is duidelijk te zien dat formule 4.2 de relatie tussen de twist en de laagste eigenfrequentie goed omschrijft voor het omslagpunt.



Figuur 4.5: Twist: f(ansys) en f(formule) [Hz] uitgezet tegenover k_{xy} van 5 verschillende schaaldelen

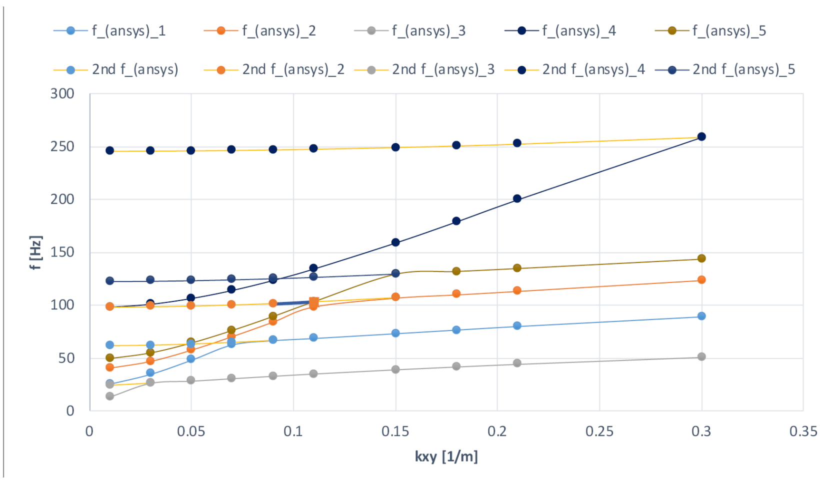
In hoofdstuk 5 wordt er bepaald bij welke afmetingen en diktes van de plaat dit omslagpunt plaats vindt.

Trillingsvorm Tijdens het modelleren valt het op dat de trillingsvorm invloed heeft op de numerieke uitkomst van de frequenties. Bij het eerste gedeelte van de grafiek, heeft de schaal een enkele trillingsvorm. Vanaf het omslagpunt krijgt de schaal een dubbele trillingsvorm. Dit is afgebeeld in 4.6.



Figuur 4.6: Trillingsvorm voor en na het omslagpunt

Bij de schalen van het eerste gedeelte van de grafiek wordt er ook gekeken naar de tweede eigenfrequentie. Deze punten liggen precies op de lijn na het omslagpunt (4.7). Trillen in de eerste modus vanaf een bepaald punt niet meer mogelijk is. De plaat neemt een tweede trillingsmodus aan. De factor voor de eerste trillingsmodus is anders dan voor de tweede trillingsmodus.



Figuur 4.7: Twist: f(ansys) 1^e en 2^e modus [Hz] uitgezet tegenover k_{xy}

Conclusie De twistterm k_{xy} is recht evenredig met de laagste eigenfrequentie. In de formule heeft deze een factor 2. Vanaf een bepaald punt kan de schaal met een twist niet meer trillen in de eerste modus (enkele trillingsvorm). Hierbij verandert de twistfactor naar 0.25.

Tot op dit punt klopt de formule: (voor schaaldelen met afzonderlijke kromming of twist)

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx}+k_{yy})^2 + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.3}$$

4.2. Analyse Gauss-kromming en varianten

Nu er bekend is hoe de krommingen en de twist afzonderlijk invloed hebben op de laagste eigenfrequentie van schalen kan er gekeken worden naar de combinatie van de twee termen. Uiteindelijk wordt er onderzocht of er een relatie is tussen de Gauss-kromming en de eigenfrequentie. Dit wordt op verschillende manieren gedaan. In de volgende analyses wordt er puur gekeken naar de relaties van de uitkomsten.

4.2.1. Enkele kromming met twist

In voorgaand onderzoek is er aanbevolen de relatie tussen $k_{xy}(k_{xx}+k_{yy})$ te onderzoeken. Of deze term terug komt in de onderzochte relatie kan getest worden door schaaldelen te analyseren met een enkele kromming met een twist, de factor $k_{xx}k_{xy}$. De resultaten worden uitgezet tegenover 3 krommingstermen: de aanbevolen krommingsterm, de Gauss-kromme en de bekende krommingsterm.

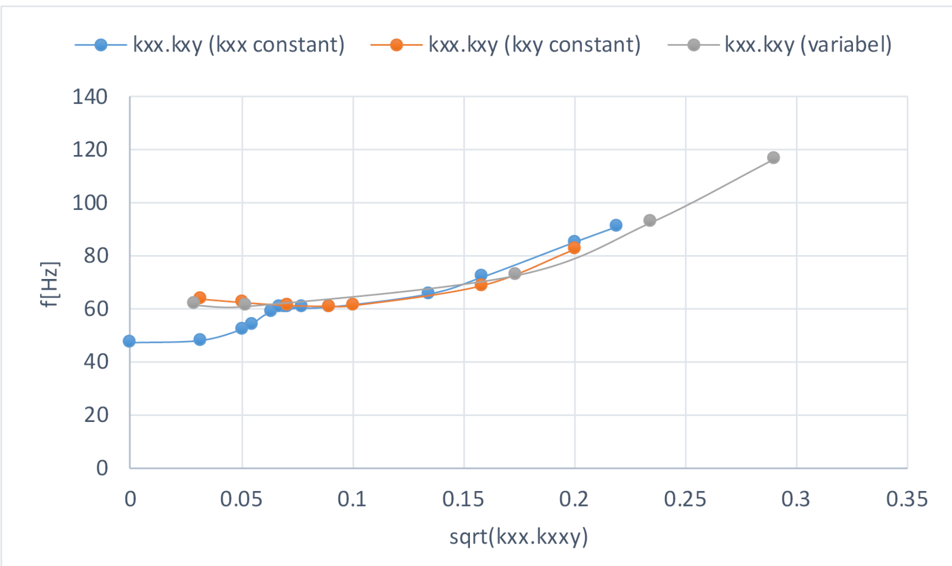
A $k_{xx}k_{xy}$

Deze factor kan dezelfde waarde behouden, terwijl de kromming of twist verschilde waardes aannemen. Daarom worden er verschillende plots gemaakt. De plots laten allemaal de relatie tussen $\sqrt{k_{xx}k_{xy}}$ en de laagste eigenfrequentie zien (zie figuur 4.8).

Bij de eerste plot (blauw) is de enkele kromming constant $k_{xx} = 0.1$, en neemt de twist toe tussen $0.01 < k_{xy} < 0.48$.

Bij de tweede plot (oranje) neemt de enkele kromming toe tussen $0.01 < k_{xx} < 0.4$, en is de twist constant $k_{xy} = 0.1$

Bij de derde plot (grijs) nemen beide parameters toe tussen $0.01 < k_{xx} < 0.7$ en $0.08 < k_{xy} < 0.12$



Figuur 4.8: Enkel kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover $k_{xx}k_{xy}$

Wat op valt van de plots is dat uit dezelfde $\sqrt{k_{xx}k_{xy}}$ factor, er verschillende eigenfrequenties volgen. Bij een toenemende twist wijken de resultaten in het begin af van bij een toenemende enkele kromming. De resultaten lijken vervolgens wel een trend te volgen.

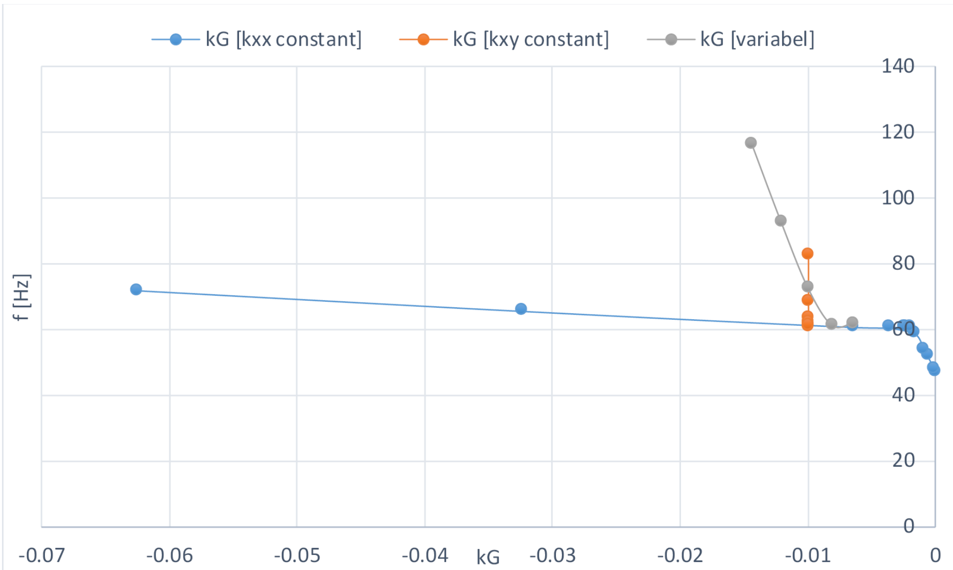
De trend van de plots duidt op een machtsfunctie. Dit betekent dat de factor $k_{xx}k_{xy}$ niet in kwadratisch verband voor komt in de formule voor de eigenfrequentie (onder de wortel), maar met een hogere macht. Dit heeft tot gevolg dat de eenheid van de formule niet meer klopt. Deze moet gecorrigeerd worden met een andere factor (bijvoorbeeld delen door een andere factor).

Ook is er te zien dat er uit dezelfde term $k_{xx}k_{xy}$ er verschillende eigenfrequenties volgen. Dit geldt voor $k_{xy} < 0.04$. Bij deze frequenties hoort een enkele trillingsvorm, terwijl bij de andere frequenties dubbele trillingsvorm hoort. Dit lijkt op het resultaat van 4.1.2. Dit duidt op het feit dat er twee factoren zijn voor de relatie tussen het product van de kromming en de twist en de laagste eigenfrequentie.

Conclusie Het is te zien dat er een verband is tussen $k_{xx}k_{xy}$ en de laagste eigenfrequentie van het schaaldeel. De uitkomsten nemen niet lineair toe en bij hetzelfde product zijn er meerdere uitkomsten. De eigenfrequenties zijn vermoedelijk afhankelijk van nog een andere factor.

B $k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$

Dezelfde dataset als bij vorig paragraaf wordt uitgezet tegenover de Gauss-kromming $k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$. Aangezien de kromming in y-richting nul is, zal het krommingsproduct nul worden en de Gauss-kromming neerkomen op alleen de twistterm $-k_{xy}^2$. Uit 4.9 is duidelijk te zien dat alleen de twistterm de relatie niet goed omschrijft.



Figuur 4.9: Enkele kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover k_G

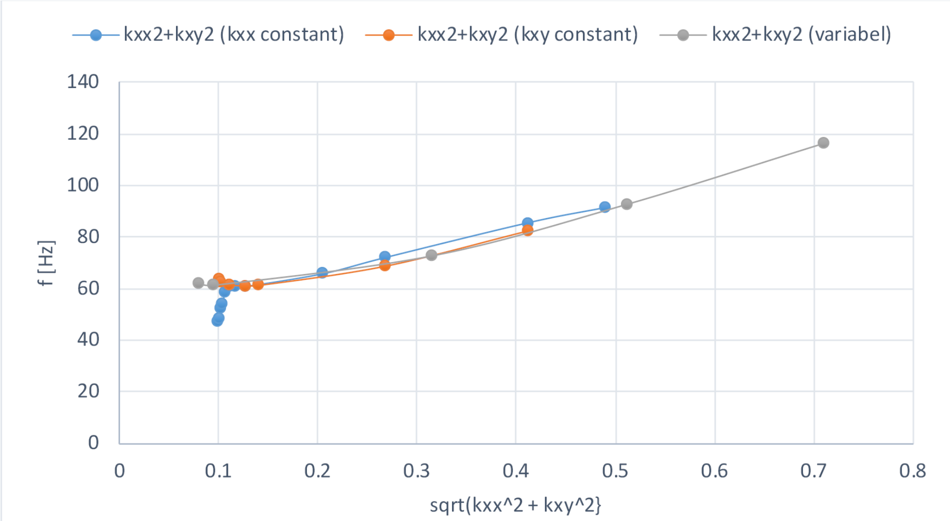
Conclusie Voor enkelgekromde schaaldelen met een twist is er geen direct verband te zien tussen de laagste eigenfrequentie en de Gauss-kromming. De formule voor de laagste eigenfrequenties van gekromde schaaldelen is dus niet alleen afhankelijk van de Gauss-kromming .

C $k_{xx}^2 + k_{xy}^2$

Ten slotte worden de resultaten uitgezet tegenover de afzonderlijke termen $k_{xx}^2 + k_{xy}^2$. De knik in de grafiek ten gevolge van de lage twistfactor en enkele trillingsvorm is weer duidelijk te zien.

Ook is er te zien dat $f \sim k_{xx}^2 + k_{xy}^2$ en dat deze termen met een bepaalde factor terug komt in de formule. Dit komt overeen met de huidige formule.

Conclusie Voor schaaldelen met een enkele kromming en een twist is er een duidelijk verband tussen de som van deze termen en de laagste eigenfrequentie. Hoe deze termen in de huidige formule zijn omschreven klopt met het bovenstaande verband.



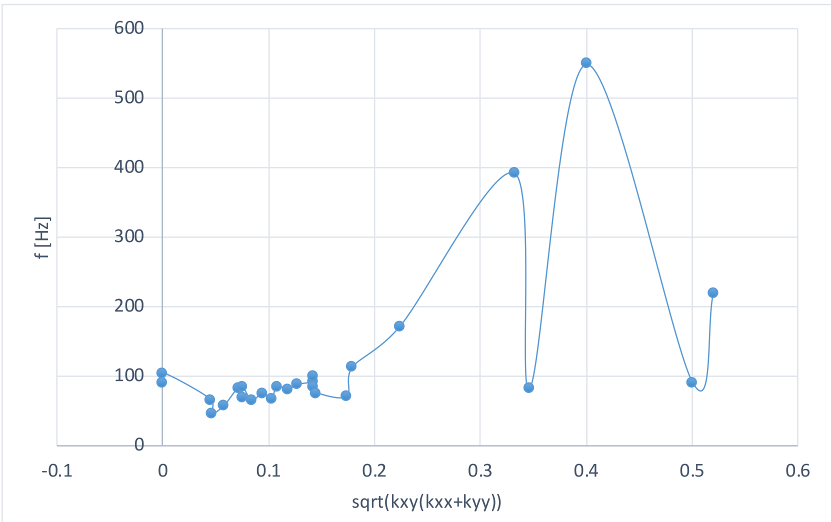
Figuur 4.10: Enkele kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover $(k_{xx}^2 + k_{xy}^2)$

4.2.2. Dubbele kromming met twist

In het vorig deel zijn schaaldelen met een enkele kromming en een twist gemodelleerd. Hierbij zijn bepaalde aannames uitgesloten. Zo is er een zuiver verband, $f \sim k_{xx}^2 + k_{xy}^2$, te zien. Er is nog geen duidelijk verband met $k_{xx}k_{xy}$ en geen verband met $k_G = -k_{xy}^2$. Nu worden er dubbel gekromde schaaldelen met een twist gemodelleerd en worden de bovenstaande verbanden weer onderzocht (de aanbeveling, de Gauss-kromming en de huidige formule). Net zoals bij de vorige analyse worden dezelfde resultaten uitgezet tegenover 3 verschillende krommingstermen: de aanbevolen krommingsterm, de Gauss-kromming en de bekende krommingsterm.

A $k_{xy}(k_{xx}k_{yy})$

In het vorig onderzoek (Noortman , 2015) is aanbevolen dat een term in deze vorm $k_{xy}(k_{xx}k_{yy})$ nog mist in de formule. De eigenfrequenties worden tegen deze term uitgezet, zie 4.11.



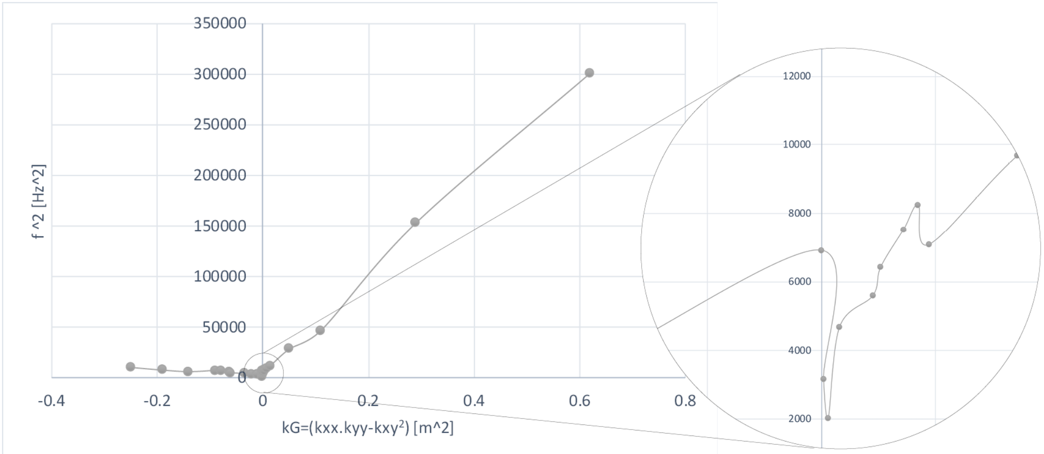
Figuur 4.11: Dubbele kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover $k_{xy}(k_{xx}k_{yy})$

Het is duidelijk te zien dat deze term geen eenduidig verband heeft met de laagste eigenfrequenties van de schaaldelen.

Conclusie Er is geen duidelijke trend te zien bij de relatie tussen de laagste eigenfrequentie en de term $k_{xy}(k_{xx}k_{yy})$. Bij deze wordt de mogelijkheid dat een dergelijke term in de formule hoort uitgesloten bij dit onderzoek.

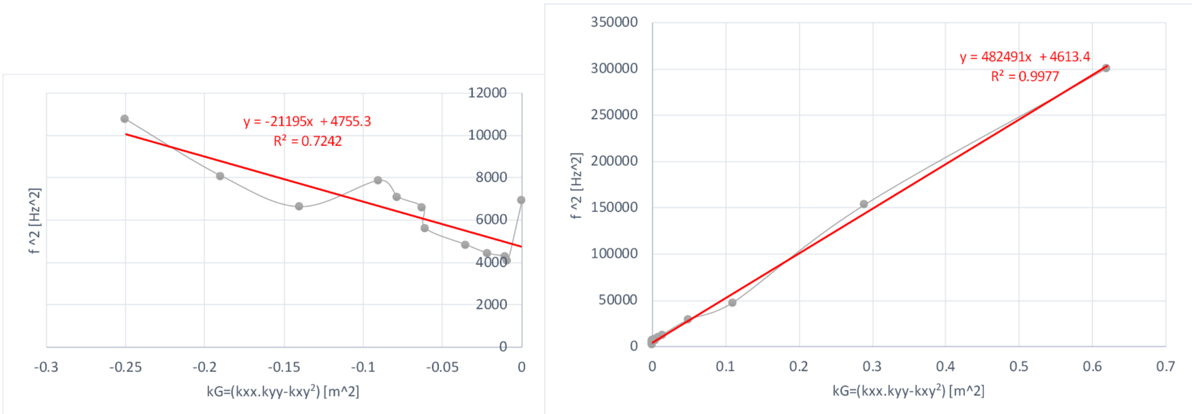
B $k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$

De Gauss-kromming kan een negatieve waarde aannemen als de twist groter wordt dan de krommingen of als het schaaldeel een zadelpunt heeft (positieve en negatieve kromming). Aangezien er geen wortel uit een negatief getal getrokken kan worden, wordt deze term gekwadrateerd en de eigenfrequenties ook. De relatie wordt nu met dezelfde verhouding benaderd.



Figuur 4.12: Dubbele kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover k_G)

De data die nu gepresenteerd wordt bevat alleen positieve krommingen en twisten. Het is duidelijk te zien dat er een lineair verband is tussen $f^2 \sim k_G$, echter ziet hier wel een knik in.



Figuur 4.13: Interpolatie van f(ansys)^2 met positieve en negatieve k_G

Door lineaire interpolatie toe te passen op de meetresultaten, positieve en negatieve Gauss-kromming apart, kan er achterhaald worden met welke factor de Gauss-kromming invloed heeft op de eigenfrequentie, zie figuur 4.13. De correlatie coëfficient bij de negatieve Gauss-kromming verder van 1 af zit ten opzichte van de positieve Gauss-kromming. Het geïnterpoleerde lineair verband is dus nog erg onnauwkeurig.

Hoe groter dan krommingen en twist worden, hoe zuiverder het lineaire verband lijkt. De laatste datapunten hebben een a/t-ratio van rond de 100, relatief erg kromme schalen. Naarmate er wordt ingezoomd op kleinere krommingen en twisten (Gauss-kromming rond de nul), neemt de onregelmatigheid toe.

De figuur 4.12 is tot stand gekomen door willekeurige krommingen en twisten in te voeren en de Gauss-kromming toe te laten nemen.

Om te achterhalen waar de onregelmatigheden vandaan komen worden er extra schaaldelen gemodelleerd op dezelfde manier als in 4.2.1. Er wordt onderscheid gemaakt tussen een positieve en negatieve Gauss-kromming en de variaties hierin.

Positieve Gauss-kromming (4.14)

Bij de eerste plot (groen) is de twist constant $k_{xy} = 0.1$, en nemen de krommingen afzonderlijk toe tussen 0.1 en 0.9. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $0 < k_G < 0.62$.

Bij de tweede plot (oranje) zijn de krommingen constant $k_{xx} = k_{yy} = 0.1$, en neemt de twist toe tussen $0 < k_{xy} < 0.08$. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $0.0036 < k_G < 0.01$.

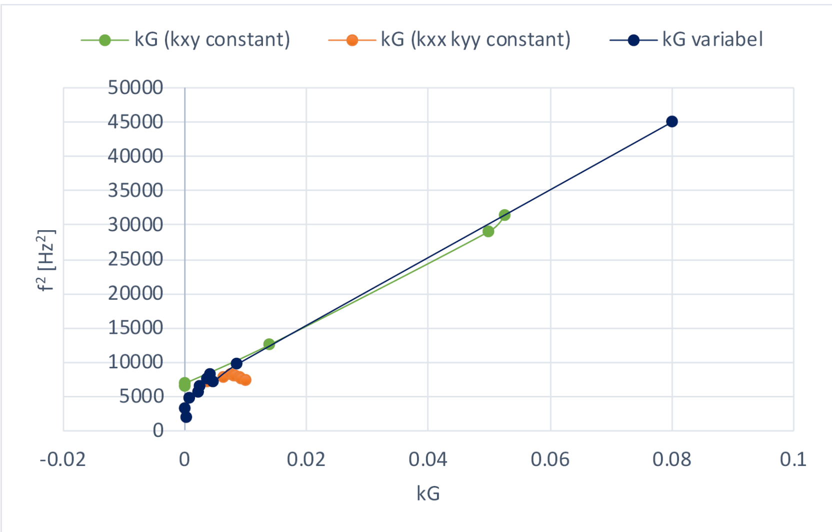
Bij de derde plot (donkerblauw) nemen alle drie de parameters toe tussen $0.01 < k_{xx=yy} < 0.3$ en $0.03 < k_{xy} < 0.1$. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $0.0001 < k_G < 0.08$. Grotere k_G-waardes zijn niet geplot, aangezien deze dezelfde rechte lijn volgen.

Negatieve Gauss-kromming (4.15)

Bij de eerste plot (grijs) is de twist constant $k_{xy} = 0.1$, en nemen de krommingen afzonderlijk toe tussen 0.01 en 0.08. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $-0.01 < k_G < -0.004$.

Bij de tweede plot (oranje) zijn de krommingen constant $k_{xx} = k_{yy} = 0.1$, en neemt de twist toe tussen $0.18 < k_{xy} < 0.48$. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $-0.22 < k_G < -0.022$.

Bij de derde plot (blauw) nemen alle drie de parameters toe tussen $0 < k_{xx=yy} < 0.3$ en $0.08 < k_{xy} < 0.5$. De Gauss-kromming krijgt een waarde: $-0.25 < k_G < -0.006$.

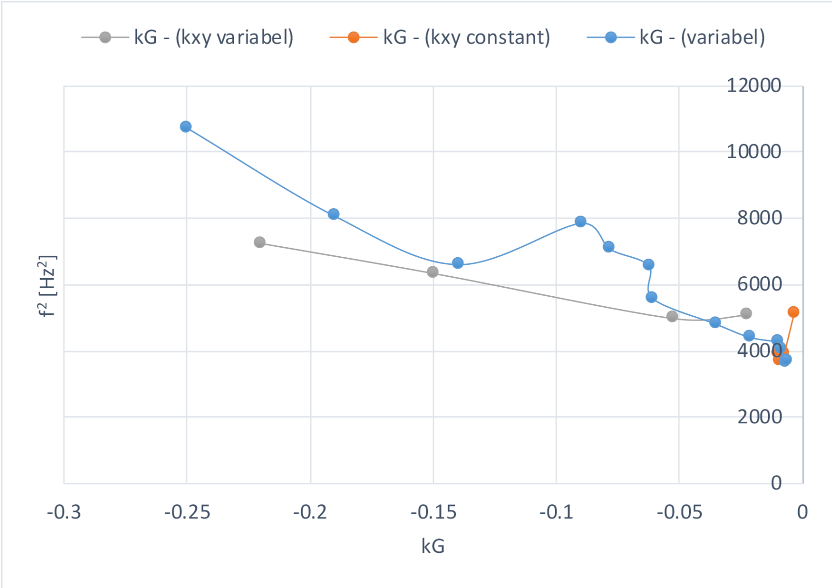


Figuur 4.14: Dubbele kromming met twist: f(ansys)^2 [Hz^2] uitgezet tegenover positieve k_G

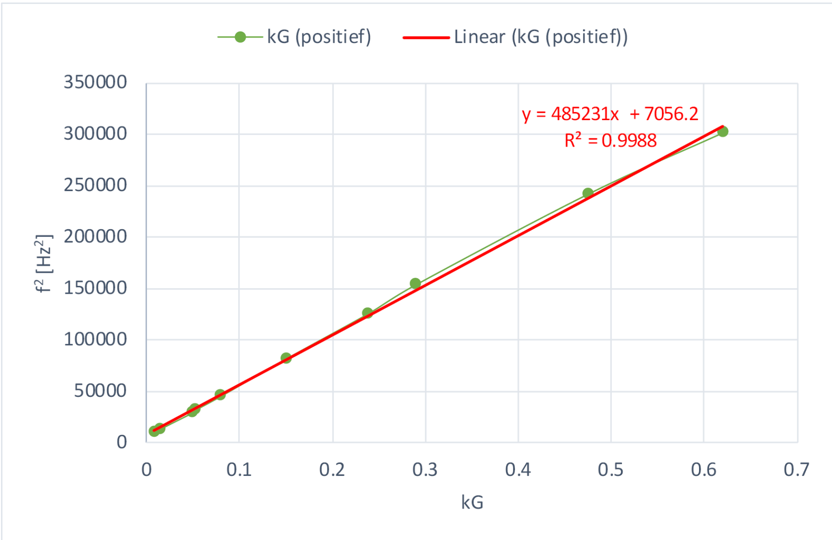
Te zien is dat niet elke dataset dezelfde (zuivere) relatie weer geeft. Aan de hand van de date kan er geconcludeerd worden dat vanaf een bepaalde twist en bepaalde krommingen de relatie tussen de eigenfrequenties en de Gauss-kromming lineair is. Bij $k_{xy} \geq 0.1 \wedge \frac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) \geq 0.1$, is $f^2 \sim k_G$. Hierbij kan gezegd worden dat vanaf $k_G \geq 0.01$ de relatie zuiver is (met de eerder genoemde voorwaarde kan k_G ook kleiner dan 0.01 zijn).

Met lineair interpolatie kan de factor in de formule (onder de wortel) achterhaald worden. De factor (helling van de plot) blijkt $485231 k_G$ te zijn.

Conclusie Er is een duidelijk verband tussen de laagste eigenfrequentie en de positieve Gauss-kromming te zien bij krommingen vanaf 0.1 en een twist vanaf 0.1. Bij $k_{xy} \geq 0.1 \wedge \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1$, is $f^2 \sim k_G$. Voor schaaldelen met krommingen en een twist kleiner dan 0.1 en een negatieve Gauss-kromming is er nog geen duidelijk verband te zien.



Figuur 4.15: Dubbele kromming met twist: f(ansys)^2 [Hz^2] uitgezet tegenover negatieve k_G



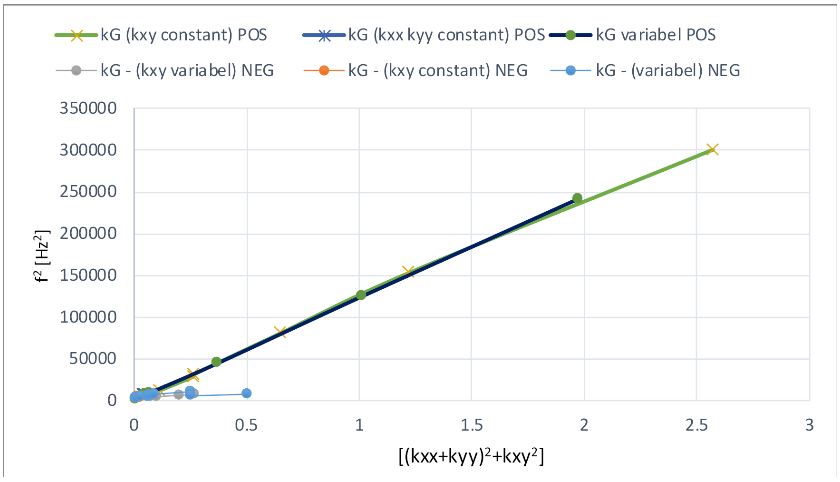
Figuur 4.16: Interpolatie van f(ansys)^2 met $k_G \geq 0.01$

C $(k_{xx} + k_{yy})^2 + k_{xy}^2$

Er is geconstateerd dat er een verband is tussen de Gauss-kromming en de laagste eigenfrequenties van schaaldelen. Nu is het interessant te onderzoeken met welke factor de huidige term, die in de huidige formule voor komt, de relatie omschreven wordt. Op deze manier is het duidelijk of de Gauss-kromming relatief veel of weinig invloed heeft.

Dezelfde dataset waarmee de Gauss-kromming onderzocht is, wordt nu uitgezet tegenover $(k_{xx} + k_{yy})^2 + k_{xy}^2$ (zie 4.2.2), in figuur 4.17.

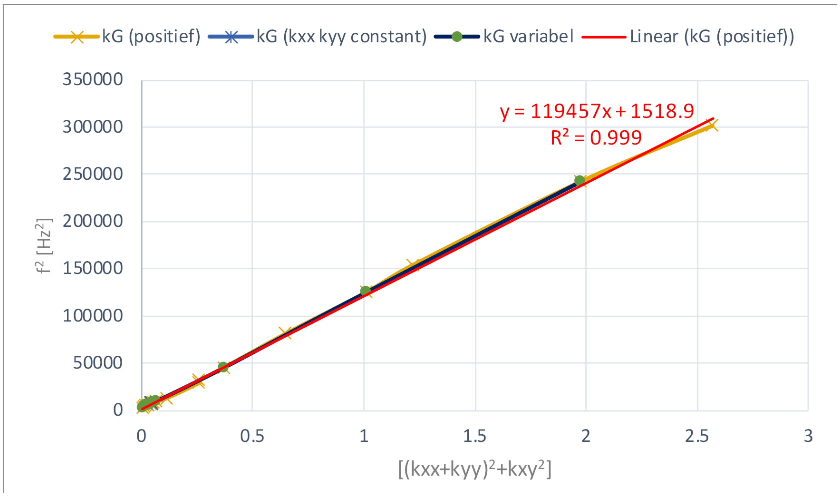
Opnieuw is er een duidelijk lineair verband te zien tussen de huidige term en de laagste eigenfrequenties (in het kwadraat) van schaaldelen. Echter, laat de grafiek twee verschillende lijnen zien. Hierbij kan er gesuggereerd worden dat er onder bepaalde condities, de factor voor deze term anders is. De verschillende hellingen komen voort uit het apart plotten van de positieve Gauss-kromming (steile helling) en de negatieve Gauss-kromming (flauwe helling). Echter is er bij de flauwe helling een nog onduidelijk verband te zien tussen de huidige term en de eigenfrequenties (zie 4.19).



Figuur 4.17: Interpolatie van f(ansys)^2 [Hz^2] met $(k_{xx}+k_{yy})^2+k_{xy}^2$

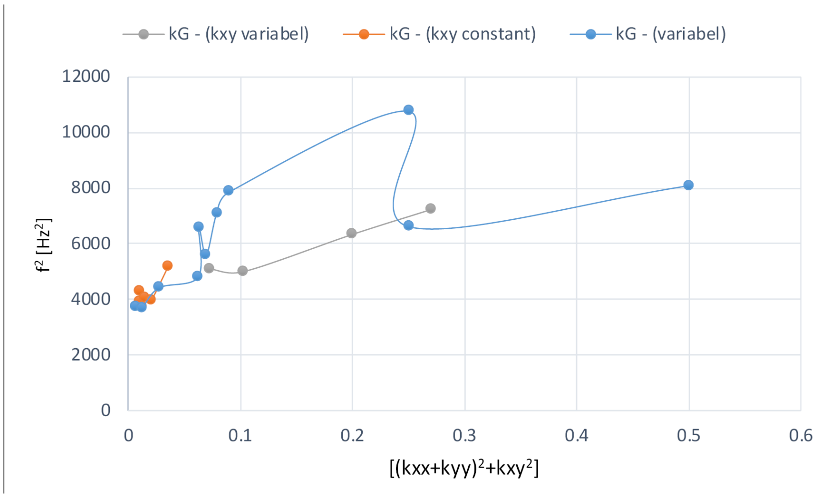
Door lineaire interpolatie toe te passen kan de factor voor de huidige term bepaald worden. Deze blijkt $119457[(k_{xx}+k_{yy})^2+k_{xy}^2]$ te zijn (zie 4.18. In de huidige formule is de factor voor de term $\frac{E}{16\pi^2\rho}=169406$ (voor staal). Bij schaaldelen met een positieve Gauss-kromming, verschilt de factor uit de frequenties die volgen uit Ansys en de frequenties die volgen uit de huidige formule.

De factor voor de huidige term blijkt ongeveer 4 keer zo klein te zijn als voor de Gauss-kromming.



Figuur 4.18: Interpolatie van f(ansys)^2 [Hz^2] (bij een positieve k_G) met $(k_{xx}+k_{yy})^2+k_{xy}^2$

Conclusie Voor de schaaldelen waarvoor een relatie is gevonden tussen de Gauss-kromming en de laagste eigenfrequentie, schijnt nu ook een lineair verband te zijn tussen $(k_{xx}+k_{yy})^2+k_{xy}^2 \sim f^2$. De factor voor de term blijkt 4 keer zo klein te zijn als bij de Gauss-kromming. Hieruit kan er geconcludeerd worden dat de Gauss-kromming bij relatief kromme schaaldelen een grotere invloed heeft dan de huidige term in de formule.



Figuur 4.19: Dubbele kromming met twist: f(ansys)^2 [Hz^2] (bij een negatieve k_G) uitgezet tegenover $(k_{xx} + k_{yy})^2 + k_{xy}^2$

4.2.3. Conclusie relatie Gauss-kromming (hoofdvraag)

Dit onderdeel 'Relaties Gauss-kromming en varianten' kan afgesloten worden met het beantwoorden van de hoofdvraag van dit onderzoek: *Is er een relatie, dan wel, wat is de relatie tussen de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen en de Gauss-kromming?*

Ja, er is een lineair verband te zien, $f^2 \sim k_G$. Deze geldt bij $k_{xy} \geq 0.1 \wedge \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1$. In de meeste gevallen kan het schaaldeel ook beschreven worden met $k_G \geq 0.01$. De formule dit opgesteld kan worden is $f^2 = 485231k_G + 7056.2$. Dit lijkt op de vorm van de huidige formule, die bestaat uit een constante term (vlakke plaat) en een krommingsterm (gekromd schaaldeel). De constante term is $\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} = 604$ (voor staal). Deze komt niet in de buurt van de geïnterpoleerde formule.

De Gauss-kromming blijkt wel een goede indicator te zijn voor bruikbaarheidsgebieden. Zo blijkt dat schaaldelen met een positieve Gauss-kromming de huidige relatie (omschreven in de huidige formule) te valideren.

In het volgend onderdeel wordt nader onderzocht hoe deze relatie ingepast kan worden in de formule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen.

4.3. Uitbreiden en corrigeren huidige formule

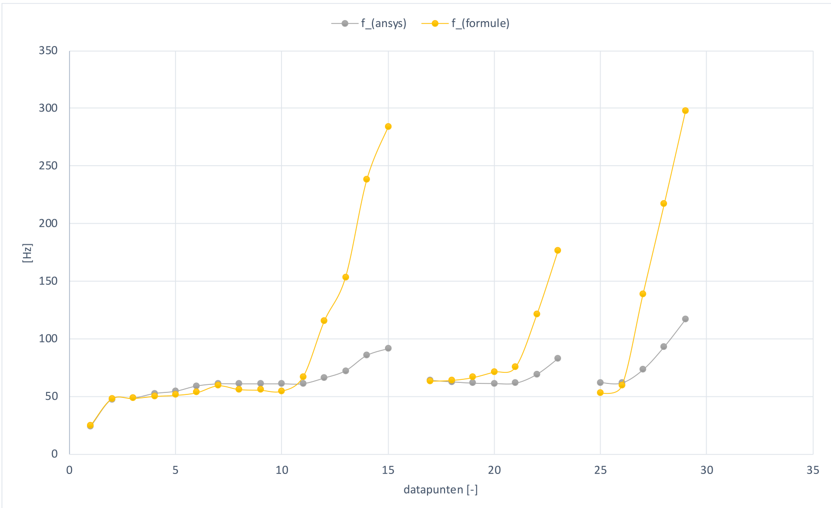
In het vorige hoofdstuk zijn de relaties met allerlei termen en verschillende schaaldelen uitgebreid onderzocht. Er is een relatie gevonden tussen de Gauss-kromming en de ontwerpformule voor eigenfrequenties van gekromde schaaldelen. Hiermee is er antwoord gevonden op de hoofdvraag van het onderzoek. De bijbehorende deelvraag luidt: *Hoe kan de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen worden uitgebreid met deze relatie, met een maximale foutmarge van 5 procent?*

De twee datasets gemodelleerde eigenfrequenties (enkele kromming met twist en dubbele kromming met twist) worden in deze zoektocht naar een passende formule weer gebruikt.

4.3.1. Restterm

Enkele kromming met twist

De meetresultaten van de schaaldelen met een enkele kromming en een twist worden uitgezet. Hierbij wordt de huidige formule 4.3 ook geplot. Bij de eerste set frequenties is de kromming in x-richting constant, bij de tweede set frequenties is de twist constant en bij de derde set frequenties zijn beiden variabel.



Figuur 4.20: Frequenties van schaaldelen met k_{xx} en k_{xy}

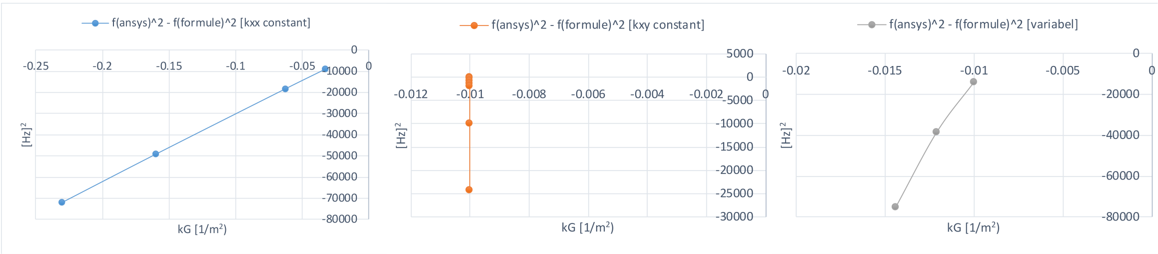
De fout escaleerd snel naarmate de krommingsterm en twistterm toenemen. Eerder is er waargenomen dat de formule niet meer van toepassing is vanaf $k_{xy} \geq 0.07$. In combinatie met een enkele kromming blijkt dit niet meer te kloppen. Vanaf $(k_{xx}^2 + k_{xy}^2) > 0.01$ wordt de fout groter dan 5 procent, en vanaf $(k_{xx}^2 + k_{xy}^2) > 0.04$ is de fout enorm.

Er wordt nu gekeken naar het verschil tussen deze twee grafieken. Alleen de schaaldelen met de enorme fout worden geplot. Bij deze schaaldelen is er duidelijk een ander verband aanwezig die de formule nu omschrijft. Het verschil, de restterm, wordt uitgezet tegenover de Gauss-kromming in 4.21. De restterm is de formule in het kwadraat afgetrokken van de meetresultaten van Ansys in het kwadraat:

$$restterm = f_{Ansys}^2 - (\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}) \quad [Hz^2] \tag{4.4}$$

Bij een toenemende twist is er een lineair verband tussen de restterm en Gauss-kromming. Dit duidt erop dat er in de formule nog een additionele term Gauss-kromming aanwezig is. De helling van de restterm is $318620k_G + 1527.6$.

Bij een toenemde kromming lijkt er een onjuist verband weergegeven te zijn. De restterm neemt toe, maar de Gauss-kromming neemt niet toe aangezien de kromming in y-richting nul is en de krommingsterm nul blijft. De restterm is vermoedelijk afhankelijk van nog een andere term dan de Gauss-kromming.



Figuur 4.21: Enkele kromming met twist: Restterm [Hz^2] uitgezet tegenover k_G

Bij een toenemende twist en kromming (variabel) lijkt het verband ook lineair te zijn. De helling van de restterm is $1 \cdot 10^7 k_G + 126638$, welke erg afwijkt van de eerder geconstateerde relatie.

Conclusie Zoals in 4.2 al geconstateerd was, bestaat de additionele term in de formule niet alleen uit de Gauss-kromming.

Dubbele kromming met twist

Hetzelfde wordt herhaald met de data van schaaldelen met een dubbele kromming en een twist (4.22).

De eerste set frequenties heeft een negatieve Gauss-kromming en een constante twist, de tweede set heeft een positieve Gauss-kromming en een constante twist, de derde set heeft een negatieve Gauss-kromming en constante krommingen, de vierde set heeft een positieve Gauss-kromming en constante krommingen, de vijfde set heeft een negatieve Gauss-kromming met variabele krommingen en twisten en de zesde set heeft een positieve Gauss-kromming met variabele krommingen en twisten.

Wat op valt is dat de huidige formule de frequentie goed benaderd zolang de twist kleiner is dan 0.1, $k_{xy} < 0.1$. De fout nadert nul bij kleinere twisten, bij twisten rond de 0.1 blijft de fout rond de 15 procent.

Waar de fout escaleert is bij relatief kleine krommingen ten opzichte van de twist. Eerder was het te zien dat de eigenfrequentie van een schaaldeel met twist erg gevoelig is voor de trillingsvorm en daarmee een andere relatie heeft met de eigenfrequentie. Als de kromming relatief klein is blijkt dit ook zo te zijn (bijvoorbeeld bij een twist van 0.25 en krommingen van 0.04). Nu is het zo dat de Gauss-kromming ook een indicator voor het verschil tussen de sterkte van de krommingen en de sterkte van de twist. Dit is terug te zien. Als de twist sterker is dan de krommingen, zal de Gauss-kromming negatief worden. Als de twist veel sterker is dan de kromming, zal de Gauss-kromming kleiner zijn dan -0.01. De resultaten kloppen met deze regel: vanaf $k_G < -0.01$, klopt de huidige formule niet meer.

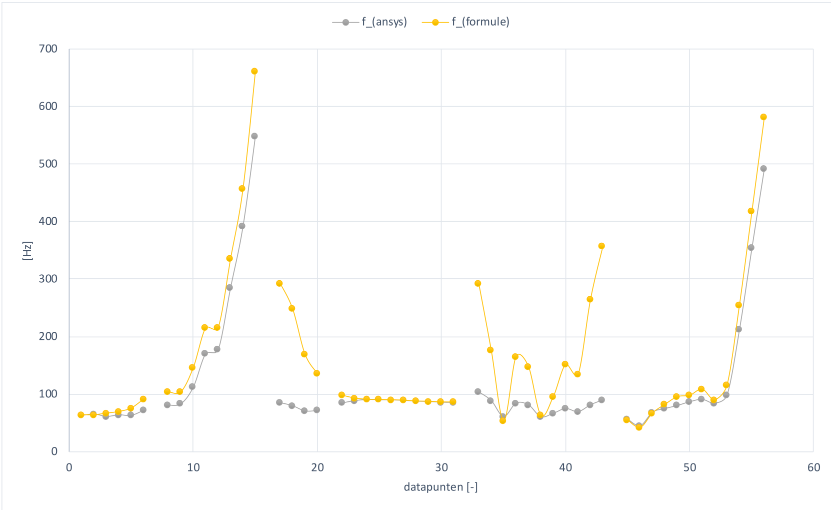
In 4.23 wordt de restterm uitgezet tegenover de Gauss-kromming. Weer is er een lineair verband zichtbaar tussen de Gauss-kromming en de restterm. Echter heeft bij positieve Gauss-krommingen de restterm een negatieve helling ten opzichte van de Gauss-kromming, en bij negatieve Gauss-krommingen heeft de restterm een positieve helling ten opzichte van de Gauss-kromming. Deze knik in de relatie was eerder zichtbaar in 4.12.

Naarmate de Gauss-kromming verder af zit van nul, krijgt deze een grotere bijdrage in de restterm. Deze bijdrage neemt lineair toe, wat ertoe kan leiden dat de additionele term in een kwadratische vorm voor komt in de formule. Deze additionele term is waarschijnlijk negatief, aangezien de ontwerpformule grotere frequenties geeft dan de situatie in Ansys.

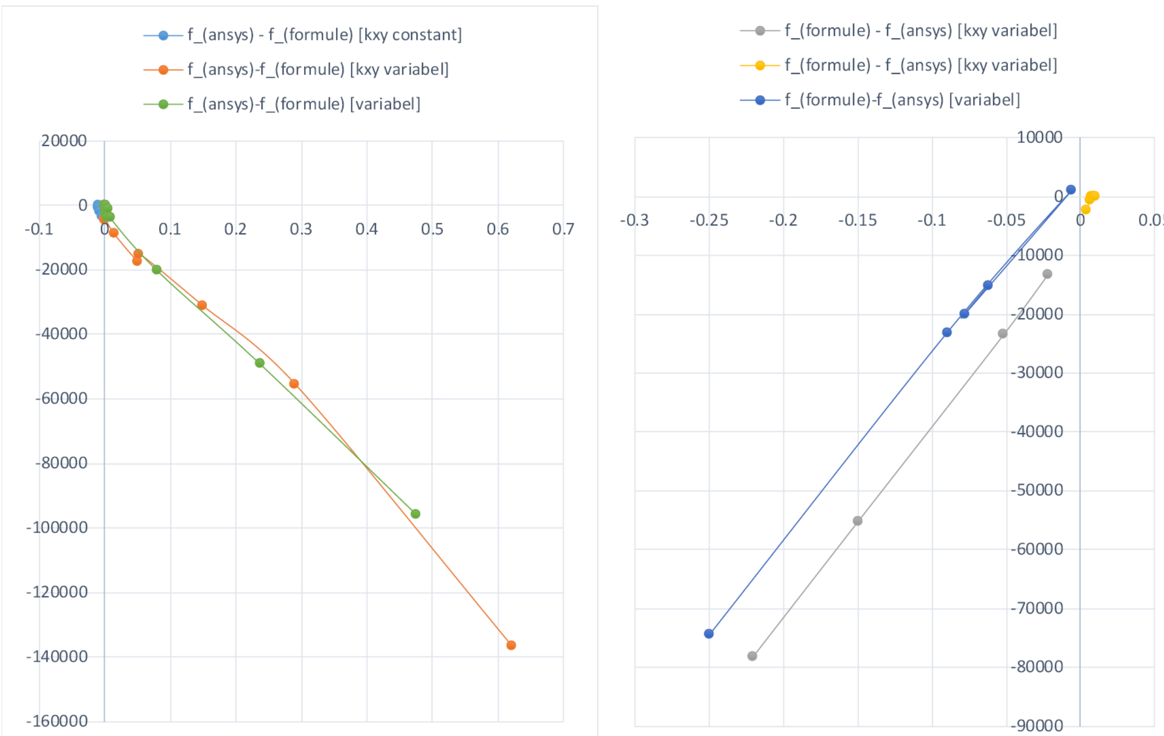
De helling bij positieve Gauss-krommingen is $-200175k_G - 1139$. De helling bij negatieve Gauss-krommingen is $327176k_G - 6143.7$ of $311996k_G - 3928.7$.

Met dit onderscheid kunnen de frequenties opnieuw geplot worden tegenover de Gauss-kromming, er is duidelijk te zien dat k_G voor komt onder de wortel van de formule voor de laagste eigenfrequenties (zie 4.24).

Conclusie Bij het benaderen van de restterm die tot de additionele term in de formule moet leiden, is er duidelijk onderscheid te zien tussen positieve Gauss-krommingen en negatieve Gauss-kromming. Bij schaaldelen met $-0.1 < k_G < 0$ komen de frequenties van de huidige formule en die van Ansys redelijk overeen. De additionele term is negatief en komt in kwadratisch verband voor in de ontwerpformule.



Figuur 4.22: Frequenties van schaaldelen met k_{xx}, k_{yy} en k_{xy}



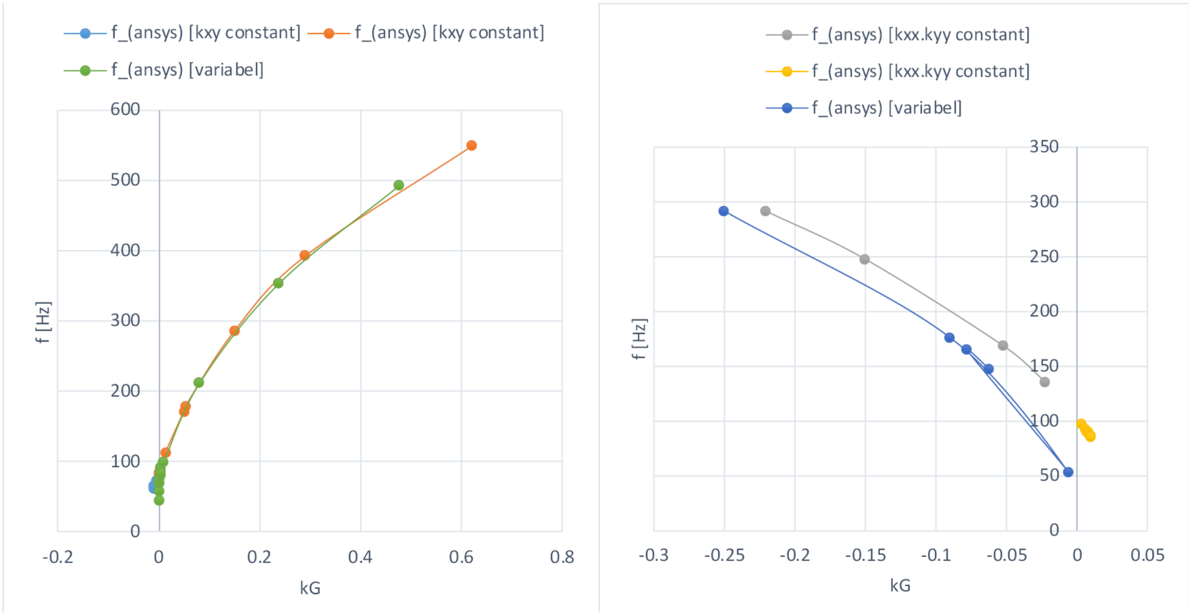
Figuur 4.23: Dubbele kromming met twist: Restterm [Hz^2] uitgezet tegenover positieve k_G (links) en tegenover negatieve k_G (rechts)

4.3.2. Huidige ontwerpformule

In 4.1 en 4.2 zijn er verschillende conclusies getrokken met betrekking tot de Gauss-kromming en de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen. De huidige formule is ook onderzocht en de frequenties van de ontwerpformule komen bij schaaldelen met bepaalde krommingen overeen met de frequenties die volgen uit Ansys.

Om tot mogelijke ontwerpformules te komen worden er conclusies uit 4.1 en 4.2 samengevat:

- De Gauss-kromming blijkt een goede indicator te zijn voor bij welke schaaldelen de huidige for-



Figuur 4.24: Dubbele kromming met twist: f(ansys) [Hz] uitgezet tegenover positieve k_G (links) en tegenover negatieve k_G (rechts)

mule klopt. Ook blijkt dat bij

$$k_{xy} \geq 0.1 \wedge \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \tag{4.5}$$

de relatie tussen de laagste eigenfrequentie en de Gauss-kromming vier keer zo sterk te zijn als bij de huidige formule.

- Uit de resultaten van de schaaldelen met een enkele kromming (in x-richting) en een twist volgt dat de formule niet alleen omschreven kan worden met de Gauss-kromming, de afzonderlijke krommingsterm (k_{xx}) valt dan weg en de kromming zou dan geen invloed meer hebben op de eigenfrequentie.
- In de huidige formule komt elke term voor die in de meetresultaten ook een lineair verband tonen tussen de eigenfrequentie en die term. Dit zijn $k_{xx}^2, k_{yy}^2, k_{xx}k_{yy}, k_{xy}^2$. De term $k_{xy}(k_{xx} + k_{yy})$, product van de twist en de krommingen komt niet in lineair verband voor en zit zodoende niet verwerkt in de formule.
- Bij het analyseren van uitkomsten van de frequenties die volgen uit Ansys en uit de huidige formule, is er gezocht naar een additionele term. Deze term blijkt negatief te zijn, omdat de uitkomsten van de formule groter zijn dan die van Ansys, en deze blijkt in kwadratisch verband voor te komen in de formule.

Dit bij elkaar, leidt tot de gedachte dat de verwerkte termen in de formule correct zijn, alleen de factor voor deze termen varieert naar de mate van de krommingen en twist van de schaaldelen.

Relatie k_G 4 keer sterker?

Allereerst wordt er onderzocht of deze relatie omgeschreven kan worden naar de ontwerpformule. De term die in de huidige formule omschreven wordt is:

$$[(k_{xx} + k_{yy})^2 + k_{xy}^2] = k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy} + k_{xy}^2 \tag{4.6}$$

De Gauss-kromming is:

$$k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2 \tag{4.7}$$

Als de Gauss-kromming 4 keer wordt opgeteld bij de huidige term,

$$k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 6k_{xx}k_{yy} - 3k_{xy}^2 \tag{4.8}$$

kan in het geval van twist de term een negatief getal worden en biedt de formule geen numerieke uitkomst. Ook klopt deze uitkomst niet met de eerder geconstateerde relaties vastgesteld in 4.1 en 4.2. Namelijk, volgens regel 4.7 is er een negatief verband tussen de twist en de eigenfrequentie, terwijl de meetresultaten een positief verband laten zien (zie 4.1.2). In het geval van dubbele kromming zonder twist klopt de factor voor het product van de kromming niet meer, deze moet 2 zijn.

4.3.3. Ontwerpformule per categorie schaaldeel

In dit deelhoofdstuk wordt er gekeken naar de invloed van elke krommingsterm op zich en hoe deze ingepast kan worden in de formule. Hiervoor wordt er gebruik gemaakt van de kennis dat de Gauss-kromming een goede indicator is voor het onderscheiden van categorieën schaaldelen.

Positieve Gauss-kromming

- **A** Schaaldelen met een dubbele kromming:
  $k_{xx} > 0 \wedge k_{yy} > 0 \wedge k_{xy} = 0$
- **B** Schaaldelen met relatief grote krommingen en kleine twist:
  $\frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq \wedge 0.10 < k_{xy} < 0.08$
- **C** Schaaldelen met relatief kleine krommingen en kleine twist:
  $0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.08$
- **D** Schaaldelen met relatief grote krommingen en grote twist:
  $\frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \wedge k_{xy} \geq 0.08$

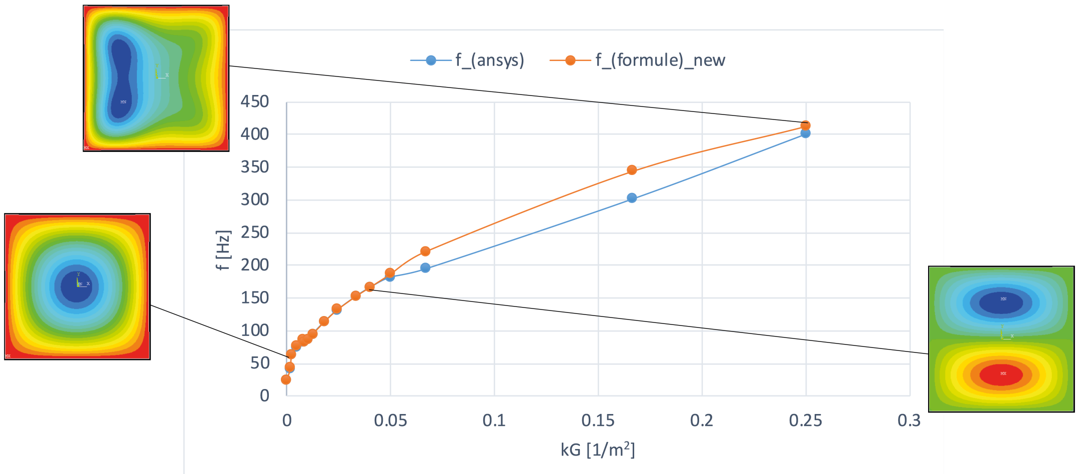
Negatieve Gauss-kromming

- **E** Schaaldelen met een relatief kleine twist:
  $k_{xx} = k_{yy} = 0 \wedge 0 < k_{xy} < 0.07$
- **F** Schaaldelen met een relatief grote twist:
  $k_{xx} = k_{yy} = 0 \wedge k_{xy} \geq 0.07$
- **G** Schaaldelen met relatief grote krommingen en grote twist:
  $\frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \wedge k_{xy} \geq 0.1$
- **H** Schaaldelen met relatief kleine krommingen en grote twist:
  $0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.1$
- **I** Schaaldelen met relatief kleine krommingen en grote twist:
  $0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \wedge k_{xy} > 0.1$
- **J** Schaaldelen met relatief grote enkele kromming en grote twist:
  $k_{xx} = 0.1 \wedge k_{yy} = 0 \wedge k_{xy} \geq 0.1$
- **K** Schaaldelen met relatief grote enkele kromming en kleine twist:
  $k_{xx} = 0.1 \wedge k_{yy} = 0 \wedge 0 < k_{xy} < 0.1$
- **L** Schaaldelen met relatief kleine enkele kromming en grote twist:
  $0 < k_{xx} < 0.1 \wedge k_{yy} = 0 \wedge k_{xy} \approx 0.1$

In de volgende paragrafen worden de gevonden ontwerpformules voor de verschillende categorieën getoond. Niet bij elke categorie is er een passende ontwerpformule gevonden. Ook is gebleken dat de trillingsvorm bij bepaalde categorieën invloed heeft op de numerieke uitkomst van de eigenfrequentie van het schaaldeel.

Aan de hand van de bekende grenzen van krommingen en twisten (A t/m L) wordt er gezocht naar een passende formule. In hoofdstuk 5 wordt er per gedefinieerde formule per categorie gekeken wat de krommings- en twistgrenzen in combinatie met variërende schaalafmetingen en -dikte.

A $k_G > 0 \quad \wedge \quad k_{xx} > 0 \quad \wedge \quad k_{yy} > 0 \quad \wedge \quad k_{xy} = 0$



Figuur 4.25: Frequenties Ansys en nieuwe formule A

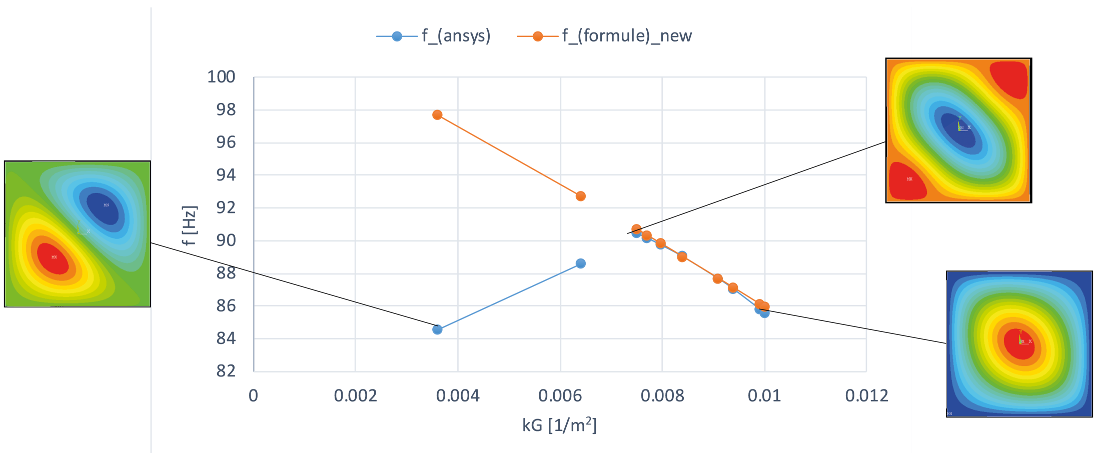
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy}]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.9}$$

De gemiddelde fout bij deze formule is 3.3 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft geen invloed op de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties.

B $k_G > 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.08$



Figuur 4.26: Frequenties Ansys en nieuwe formule B

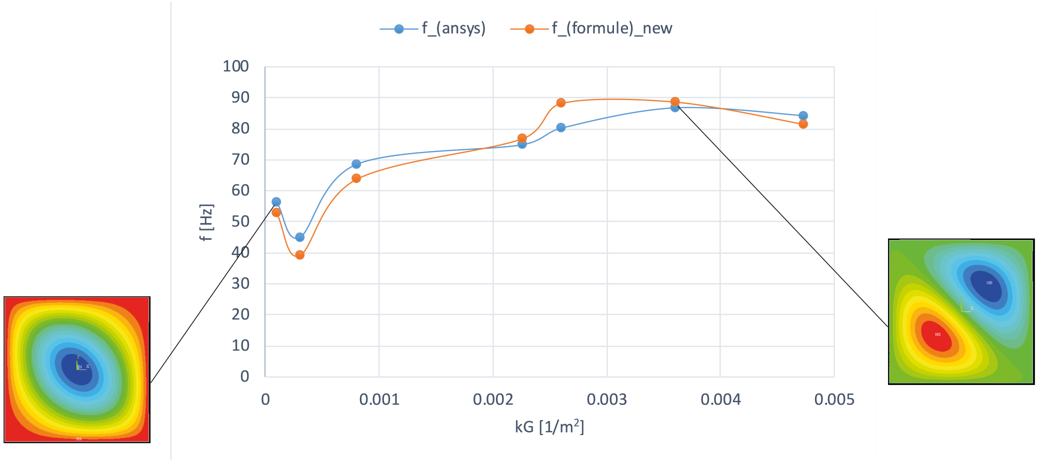
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.10}$$

Voor alle twistwaarden tussen 0 en 0.8 klopt de formule met een gemiddelde fout van 0.7 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft zichtbaar invloed op de numerieke uitkomst. Bij een dubbele trillingsvorm wijkt de trend van de eigenfrequenties af. De twist neemt verder toe (k_G wordt hierbij kleiner) en de eigenfrequentie wordt kleiner. Het lijkt op een omslagpunt, waarna een andere formule volgt.

C $k_G > 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.08$



Figuur 4.27: Frequenties Ansys en nieuwe formule C

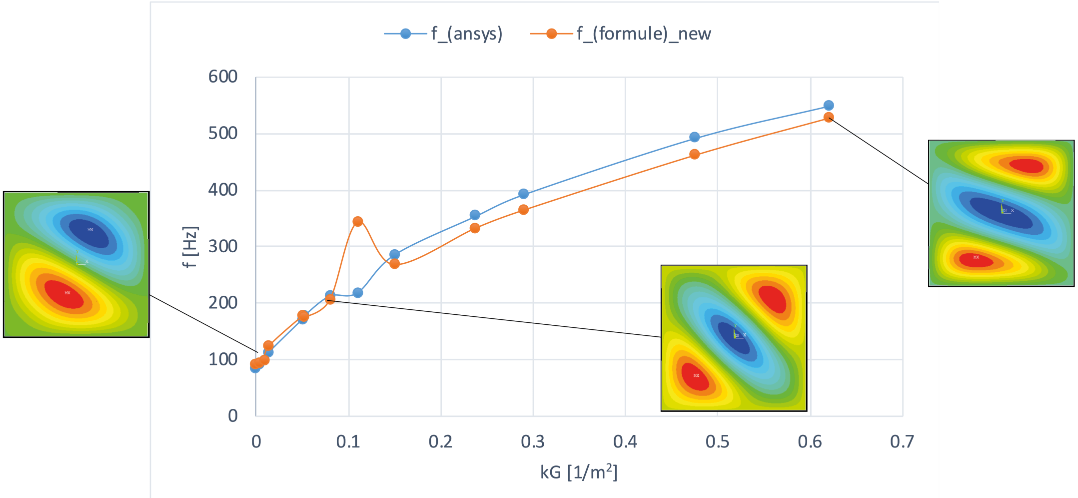
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.11}$$

Voor alle twistwaarden tussen 0 en 0.8 klopt de formule met een gemiddelde fout van 5.3 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft geen invloed op de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties.

D $\quad k_G > 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \quad \wedge \quad k_{xy} \geq 0.08$



Figuur 4.28: Frequenties Ansys en nieuwe formule D

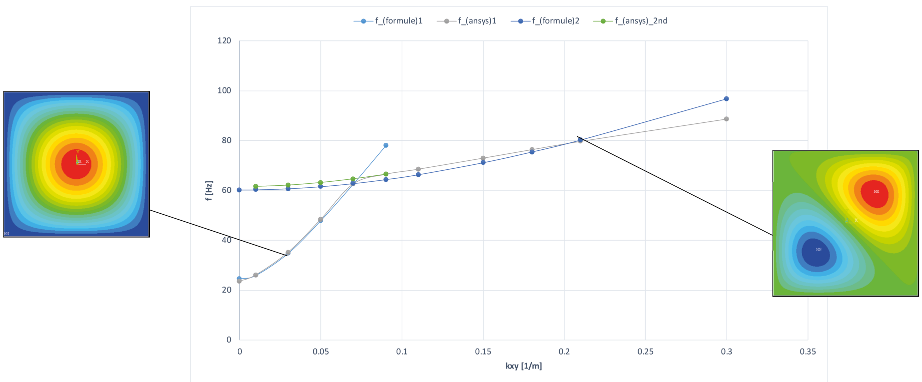
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 0.5k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.12}$$

Voor alle twistwaarden groter dan 0.08 en de gemiddelde krommingen groter dan 0.1, klopt de formule met een gemiddelde fout van 8.4 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft geen invloed op de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties (ook niet bij de uitwijking in de grafiek).

E $\quad k_G < 0 \quad \wedge \quad k_{xx} = k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.07$



Figuur 4.29: Frequenties Ansys en nieuwe formule E

Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.13}$$

Tot een twist van 0.07 klopt deze formule met een gemiddelde fout van 0.44 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft invloed op de relatie tussen de eigenfrequenties en de twist; dus ook op de numerieke uitkomst van de ontwerpformule. Deze formule betreft alleen de eerste modus.

F $k_G < 0 \quad \wedge \quad k_{xx} = k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad k_{xy} \geq 0.07$
[Zie figuur 4.29]

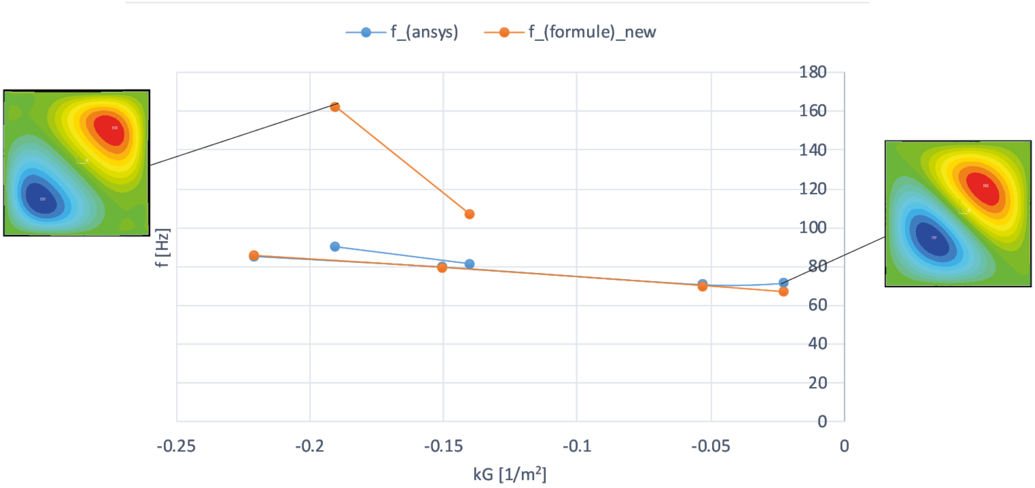
Formule

$$f_n = \sqrt{6\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [0.25k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.14}$$

Vanaf een van 0.07 (tot 0.3) klopt deze formule met een gemiddelde fout van 3.7 procent.

Trillingsvorm Vanaf dat het schaaldeel in de tweede modus gaat trillen, ontstaat er een andere relatie en dus ook een andere formule.

G $k_G < 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.1$



Figuur 4.30: Frequenties Ansys en nieuwe formule G

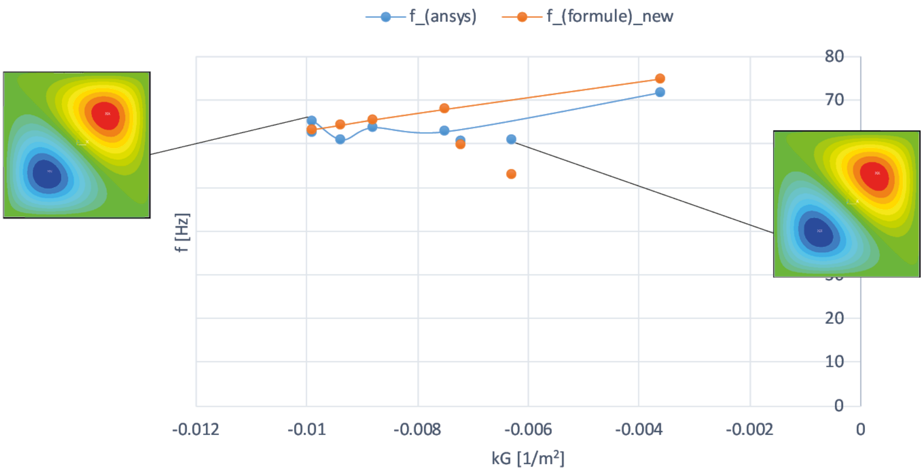
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 0.085k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.15}$$

De formule klopt met een gemiddelde fout van 19.9 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm veranderd niet in de ontwikkeling van de grafiek, het is dus onbekend of deze invloed heeft op de numerieke uitkomsten.

H $k_G < 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \quad \wedge \quad k_{xy} \approx 0.1$



Figuur 4.31: Frequenties Ansys en nieuwe formule H

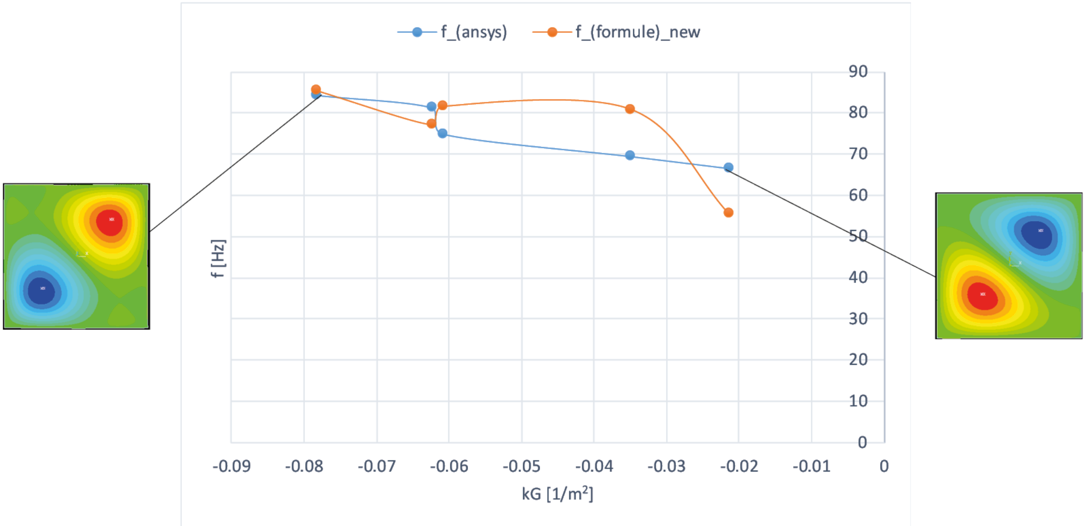
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 0.5k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.16}$$

De formule klopt met een gemiddelde fout van 5.0 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm veranderd niet in de ontwikkeling van de grafiek, het is dus onbekend of deze invloed heeft op de numerieke uitkomsten.

I $k_G < 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \quad \wedge \quad k_{xy} > 0.1$



Figuur 4.32: Frequenties Ansys en nieuwe formule I

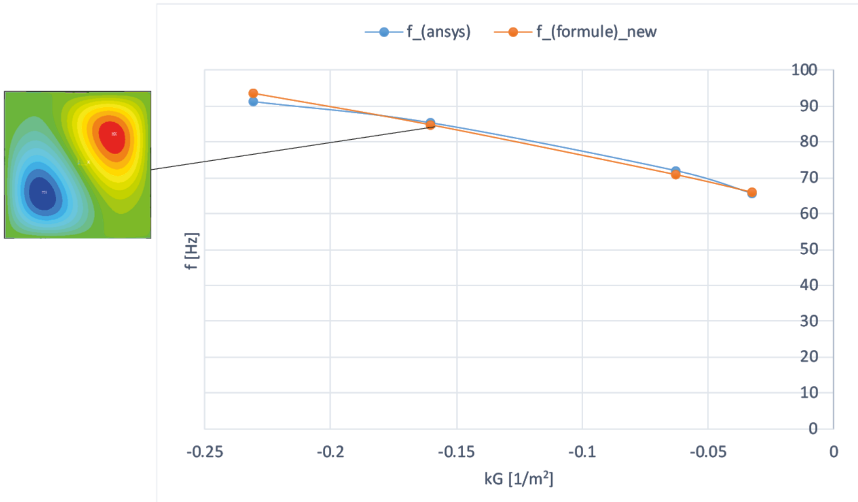
Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 0.5k_{xx}k_{yy} + 0.5k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.17}$$

De formule klopt met een gemiddelde fout van 9.7 procent. Echter is het niet duidelijk of de formule de juiste trend omschrijft die de resultaten in Ansys laten zien.

Trillingsvorm De trillingsvorm veranderd niet in de ontwikkeling van de grafiek, het is dus onbekend of deze invloed heeft op de numerieke uitkomsten.

J $k_G < 0 \quad \wedge \quad k_{xx} = 0.1 \quad \wedge \quad k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad k_{xy} \geq 0.1$



Figuur 4.33: Frequenties Ansys en nieuwe formule J

Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [2k_{xx}^2 + 0.085k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.18}$$

De formule klopt met een gemiddelde fout van 1.3 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm veranderd niet in de ontwikkeling van de grafiek, het is dus onbekend of deze invloed heeft op de numerieke uitkomsten.

K $k_G < 0 \quad \wedge \quad k_{xx} = 0.1 \quad \wedge \quad k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad k_{xy} \geq 0.1$

Formule

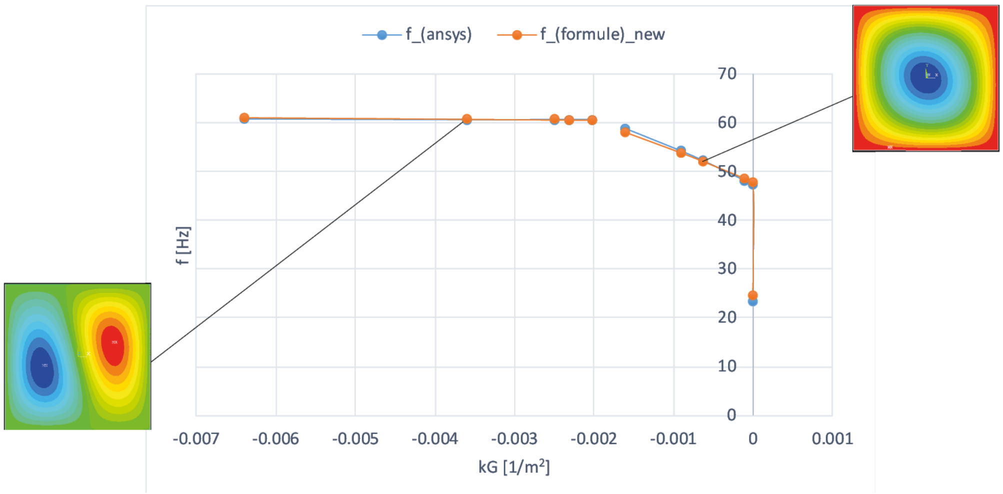
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + 4k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.19}$$

Deze formule omschrijft de eigenfrequenties van schaaldelen met een twist tot en met 0.04, $k_{xy} \leq 0.04$.

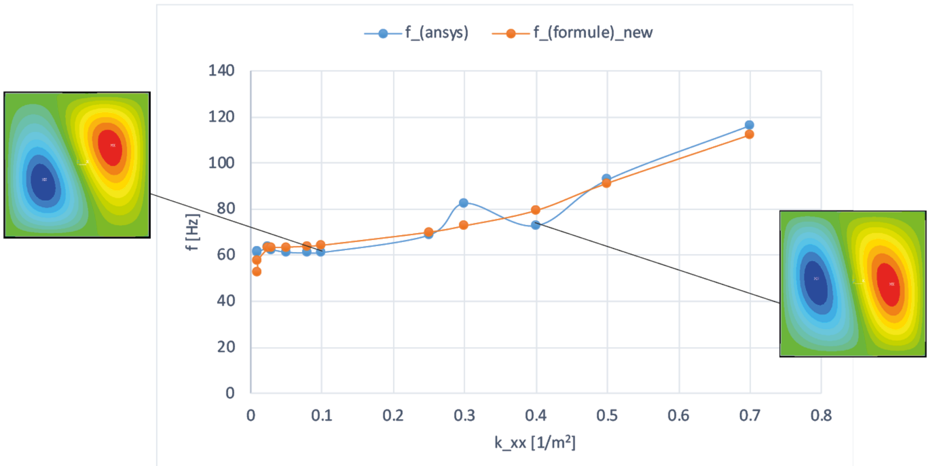
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [1.8k_{xx}^2 + 0.085k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.20}$$

Deze formule omschrijft de eigenfrequenties van de schaadelen met een twist vanaf 0.045, $k_{xy} \geq 0.045$ Deze formules omschrijven de eigenfrequenties met een gemiddelde fout van 0.91 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm heeft zichtbaar invloed op de relatie en de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties. Na het omslagpunt geldt een andere formule.



Figuur 4.34: Frequenties Ansys en nieuwe formule K



Figuur 4.35: Frequenties Ansys en nieuwe formule L

L $k_G < 0 \quad \wedge \quad 0 < k_{xx} < 0.1 \quad \wedge \quad k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad k_{xy} \approx 0.1$

Formule

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [0.085k_{xx}^2 + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.21}$$

De formule klopt met een gemiddelde fout van 5.4 procent.

Trillingsvorm De trillingsvorm veranderd niet in de ontwikkeling van de grafiek, het is dus onbekend of deze invloed heeft op de numerieke uitkomsten.

4.3.4. Conclusie uitbreiden ontwerpformule (deelvraag)

De Gauss-kromming is in relatie gebracht met de eigenfrequenties van schaaldelen. Door middel van de Gauss-kromming kunnen er verschillende categorieën schaaldelen worden gedefinieerd. In elk van zo een categorie is de relatie tussen de eigenfrequenties en de krommingen en twisten anders. Dit resulteert in een set van ontwerpformules waarbij de factoren voor de krommings- en twisttermen veranderen. Deze formules zijn in 4.3.3 uitgebreid weergegeven. De eerste deelvraag: *Hoe kan de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen worden uitgebreid met deze relatie, met een maximale foutmarge van 5 procent?* is hiermee beantwoord.

Echter, is het de vraag of deze uitkomst, een set van ontwerpformules afhankelijk van de categorie, van nut is voor de doelstelling van het onderzoek. Een algemene ontwerpformule is wenselijk zijn, maar gezien de grote invloeden van de verschillende krommingen en twisten, lijkt deze ontwerpformule veel meer variabelen te hebben. De huidige aanpak is de schaaldelen categoriseren en de factor voor elke term bepalen, maar het lijkt erop dat deze factoren A, B en C (die variëren van 0, 0.085, 0.5, 1 en 2) weer afhankelijk zijn van de combinatie van krommingen en twisten. In dit onderzoek is hier nog geen verband gevonden.

Niet bij elke categorie is de formule even nauwkeurig. Het aantal datapunten bij elke categorie loopt ook erg uiteen en daarom niet bij elke categorie even betrouwbaar. De ontwerpformules voor de categorieën met een positieve Gauss-kromming geven een zuiverder, tevens logischer verband weer. De factor voor het product van de kromming in x-richting en de kromming in y-richting, $k_{xx}k_{yy}$, varieert bij dubbel gekromde schaaldelen met een twist van 0.5 tot 2. De factor 2 komt van de huidige formule uit voorgaand onderzoek, immers $(k_{xx} + k_{yy})^2 = k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + k_{xx}k_{yy}$. Naarmate de krommingen en twist kleiner worden, wordt de factor 1, en als de krommingen en twist groter worden, maar de twist alsnog aanzienlijk kleiner, wordt de factor 0.5.

Bij bepaalde categorieën had de trillingsvorm invloed op het verloop van de ontwikkeling van de eigenfrequenties. Belangrijk voor de ontwerpformule is om te weten waar het omslagpunt plaatsvindt. Het zou onlogisch zijn om eerst na te moeten gaan welke trillingsvorm het schaaldeel aanneemt en vervolgens een toepasselijke ontwerpformule gebruiken. Idealiter is het per type schaaldeel bekend of er een omslagpunt is en welke geometrische eigenschappen van het schaaldeel dit omslagpunt bepalen. Bij schaaldelen met een twist is dit in figuur 4.4 afgebeeld, echter is het nog niet gelukt tot een verband te komen tussen het omslagpunt en de geometrische eigenschappen van het schaaldeel (dikte en afmetingen). Dit wordt in hoofdstuk 5 nader onderzocht.

De ontwerpformules van de categorieën met een negatieve Gauss-kromming lijken nog lang niet allemaal te kloppen (er zijn veel onderscheden categorieën en de fout was erg onregelmatig). Naar deze groep schaaldelen zal er meer onderzoek gedaan moeten worden. De reden waarom deze toch opgesteld zijn is om de variatie van invloed van de verschillende factoren weer te geven. De datapunten die nu gebruikt zijn voor de negatieve Gauss-kromming komen alleen van schaaldelen met twee positieve kromming en een grotere twist. Hierbij is een grote groep schaaldelen buiten beschouwing gelaten, namelijk de schaaldelen met een zadelpunt (positieve en negatieve krommingen, eventueel met een twist).

Het is niet gelukt de ontwerpformules te perfectioneren tot een maximale foutmarge van 5 procent. Dit komt mede door afwijkende resultaten van Ansys, bij dezelfde input komen er twee verschillende eigenfrequenties uit (een verschil van ongeveer 3 procent). De vastgestelde relatie is van groter belang dan de fout van de ontwerpformule. Over het eerste deel kan er gezegd worden dat vele mogelijke relaties in verband zijn gebracht, welke terug te zien zijn in de ontwerpformules.

Voor het beantwoorden voor de volgende deelvraag wordt er gefocust op de categorieën met een positieve Gauss-kromming en de categorie met schaaldelen met enkel een twist. De ontwerpformules van deze vijf categorieën (A tot en met E) bieden meer kans op relevant resultaat voor de bruikbaarheidsgrenzen.

De uitgebreide formules kunnen in algemene vorm als volgt worden genoteerd:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [A \cdot (k_{xx}^2 + k_{yy}^2) + B \cdot k_{xx}k_{yy} + C \cdot k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{4.22}$$

waarbij A, B en C een andere waarde krijgen afhankelijk van de categorie schaaldeel.

5 Bruikbaarheidssgrenzen

Vorig hoofdstuk is er uitgebreid onderzoek gedaan naar de invloed van krommingen (zowel dubbel als enkel) gecombineerd met twisten op de laagste eigenfrequenties van schaaldelen. Hierbij is de relatie met de Gauss-kromming onderzocht, welke er blijkt te zijn. Echter de Gauss-kromming komt niet voor in de ontwerpformule. De Gauss-kromming categoriseerd echter wel de schaaldelen en biedt inzicht in de verschillende soorten ontwerpformules. In dit hoofdstuk wordt er onderzoek gedaan naar de bruikbaarheidsgrenzen van deze ontwerpformules. Aangezien er 13 verschillende formules zijn vastgesteld en niet elke formule de eigenfrequenties even goed benaderd, wordt er een selectie gemaakt van formules waarvan de bruikbaarheidsgrenzen onderzocht worden. Vervolgens worden er hoofdzakelijk twee typen grenzen onderzocht: de materiaalgrenzen en de geometrische grenzen.

5.1. Aanpak en selectie ontwerpformules

Eind van vorig hoofdstuk is er geconcludeerd dat onderzoek naar de categorie schaaldelen met een positieve Gauss-kromming eerder relevant resultaat oplevert dan de categorie negatieve Gauss-kromming. Dit komt omdat de ontwerpformules van de positieve categorieen de eigenfrequenties beter benaderen en ook het meest in de buurt komen van de oude formule. De opgestelde formule voor getwiste schaaldelen (negatieve Gauss-kromming) laat echter wel een zuiver verband zien dat overeenkomt met de resultaten uit Ansys.

In eerdere onderzoeken zijn de bruikbaarheidsgrenzen als volgt vastgesteld:

$$\begin{aligned} 30 \leq \frac{l}{t} &\leq 1000 \\ l(k_{xx} + k_{yy}) &\leq 1.2 \\ lk_{xy} &\leq 0.04 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Over de laatste regel, de grens voor de twist, is in het vorig hoofdstuk al geconstateerd dat de toegestane twist niet alleen afhankelijk is van de schaal afmetingen, maar ook van de dikte (t).

De grenzen worden bepaald aan de hand van de fout: $\frac{f(formule)-f(ansys)}{f(ansys)} \times 100\%$. Een maximale fout van 10 procent wordt gehandhaafd. Bij aanvang van het onderzoek werd er gestreven naar een maximale fout van 5 procent, echter was dit niet altijd haalbaar te zijn. Voor de eenduidigheid van het onderzoek worden de grenzen vastgesteld op een fout van 10 procent.

Allereerst wordt er aan de hand van deze bruikbaarheidsgrenzen nieuwe grenzen vastgesteld. Aangezien de bruikbaarheidsgrenzen variabel zijn gaat het vanaf nu over een bruikbaarheidsgebied. Dit wordt gedaan voor categorie A, B, C, D en E.

Ook is er eerder geconstateerd dat voor alle werkelijke materiaaleigenschappen, die in de praktijk worden, de huidige formule op gaat. De verwachting is dat dit met de nieuwe formules blijft. De nieuwe formules worden vervolgens steekproefsgewijs getest op de compatibiliteit van verschillende (constructie)materialen.

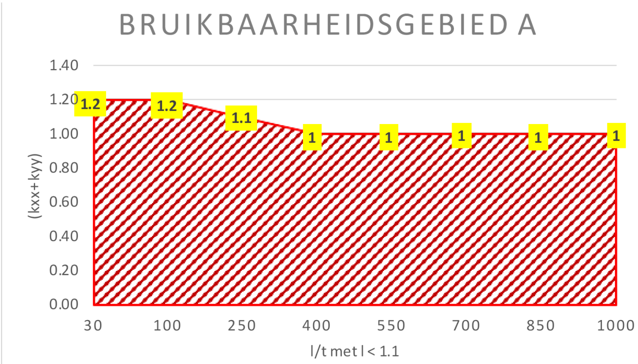
5.2. Bruikbaarheidsgebieden

Er is eerder vastgesteld dat $30 \leq \frac{l}{t} \leq 1000$. Dit gebied wordt opgedeeld tot subgebieden; per l/t verhouding wordt er gekeken naar een maximale kromming en/of twist. In de bijlage (XXX) zijn de resultaten te vinden. Per categorie wordt het bruikbaarheidsgebied getoond. Het rood gearceerde gedeelte is het bruikbaarheidsgebied, de precieze waarden zijn weergegeven.

De formules zijn bedoeld voor vierkante schaaldelen met een lengte en breedte van een meter of kleiner ($l \leq 1$). Enkele variatie is mogelijk, $l < 1.1$.

5.2.1. Categorie A

Aan de formule voor schaaldelen met dubbel gekromde is niets veranderd. De opgestelde bruikbaarheids grenzen waren afhankelijk van de afmetingen van het schaaldeel. De grenzen worden nu ook in verband gebracht met de dikte. Dit wordt gedaan door voor 8 verhoudingen voor l/t tussen 30 en 1000 de maximale waarde van de som van de krommingen te zoeken. Dit leidt tot de onderstaande afbeelding.

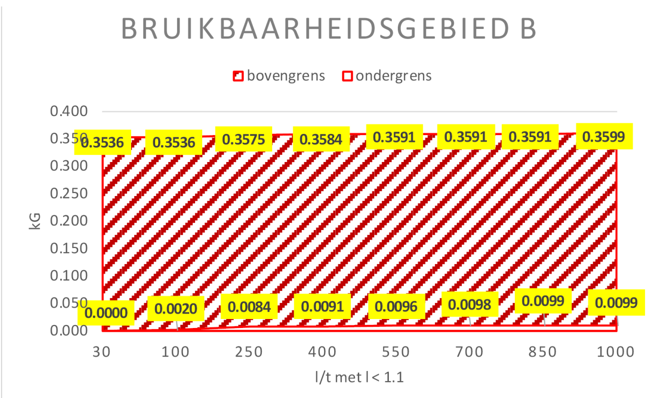


Figuur 5.1: Bruikbaarheidsgebied categorie A

De constante waarde van 1.2 blijkt niet voor elke verhouding l/t van toepassing te zijn. Echter, het grensgebied toont een nagenoeg constante waarde aan. De dunheid van het schaaldeel heeft niet heel veel invloed op de toepasselijkheid van de formule A.

5.2.2. Categorie B

Voor categorie B gelden schaaldelen met relatief grote krommingen en kleine twisten: $\frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.08$. Er was een duidelijke correlatie tussen de trillingsvorm en de kloppendheid van de formule B. Als het schaaldeel in de tweede modus gaat trillen, klopt de formule niet meer. Zodoende is er gezocht naar de uiterste samenstelling van krommingen en twisten (binnen de opgestelde grenzen) per l/t verhouding.

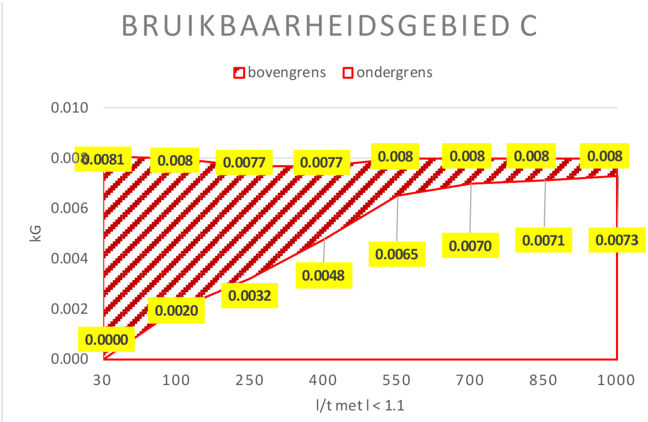


Figuur 5.2: Bruikbaarheidsgebied categorie B

Het grensgebied lijkt weer constant te zijn over de verschillende l/t verhoudingen. Echter is het grensgebied aangegeven met de Gauss-kromming welke snel kleine variaties aanneemt bij verschillende krommingen en twisten. Er is niet alleen een bovengrens aangegeven, maar ook een ondergrens.

5.2.3. Categorie C

Voor categorie C gelden schaaldelen met relatief kleine krommingen en kleine twisten: $0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \wedge 0 < k_{xy} < 0.08$. De trillingsvorm had geen invloed op de kloppendheid van de formule.



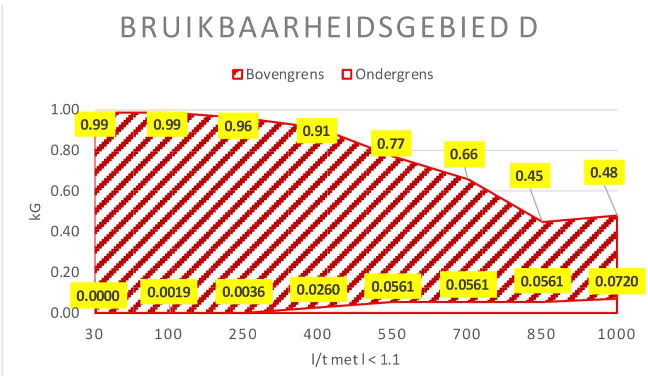
Figuur 5.3: Bruikbaarheidsgebied categorie C

Ook bij dit bruikbaarheidsgebied geldt er een onder- als een bovengrens. Wat nu erg opvalt, is dat het bruikbaarheidsgebied aanzienlijk kleiner wordt, naarmate het schaaldeel (relatief) dunner wordt. De Gauss-kromming moet steeds groter worden om de formule te laten kloppen. Dit houdt in dat er bij dunnere schalen de twist relatief kleiner moet worden.

5.2.4. Categorie D

Voor categorie D gelden schaaldelen met relatief grote kromming en grote twisten: $\frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \wedge k_{xy} \geq 0.08$. Bij de voorgaande categorieen is er uitgegaan van een maximale kromming van 0.6 1/m in beide richtingen. Echter bleek dat in deze categorie met bepaalde situaties krommingen van 1 1/m toepasselijk waren. In deze categorie is veel variatie in twisten en krommingen mogelijk. Niet in alle gevallen bleek de Gauss-kromming een toepasselijke term te zijn voor het uitzetten van het bruikbaarheidsgebied.

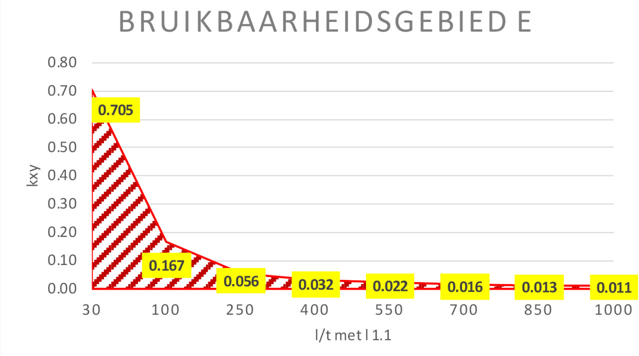
Over het algemeen kan er gesteld worden dat de formule klopt als de krommingen en twisten in dezelfde orde grote gelijk op gaan.



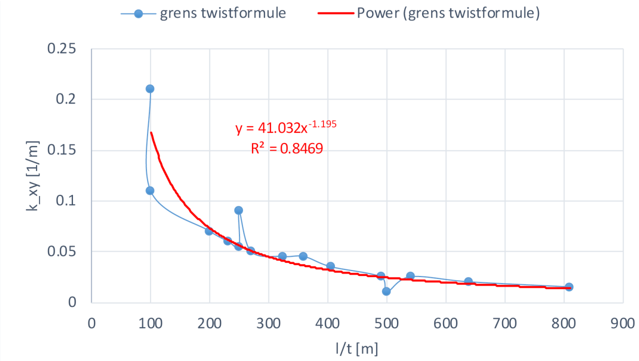
Figuur 5.4: Bruikbaarheidsgebied categorie D

5.2.5. Categorie E

Voor categorie E gelden schaaldelen met een twist, onder een bepaalde waarde, zolang er een enkele trillingsvorm is (eerste modus). Dit bruikbaarheidsgebied is op een andere manier opgesteld dan bij de andere categorieen. Bij het onderzoeken van de formule voor schaaldelen met een twist bleek dat de omslagpunten van de verschillende schaaldelen op een lijn lagen. Meerdere van deze omslagpunten zijn opgezocht en bij het uitzetten tegenover de l/t verhouding bleek hier een machtsfunctie uit te komen: $k_{xy} \leq 41.032[\frac{l}{t}]^{-1.195}$ (figuur 5.6). Dit is gevalideerd met de uiterste waarden voor l/t.



Figuur 5.5: Bruikbaarheidsgebied categorie E



Figuur 5.6: Omslagpunten per l/t voor categorie E

5.3. Materialen steekproef

In eerdere onderzoeken is er aangetoond dat de formule, oorspronkelijk van Blevins, toepasbaar is op alle werkelijke (constructie)materialen. Ervan uitgaand dat deze nieuwe formules, die aanpassingen zijn op de oorspronkelijk formule, ook toepasbaar is op alle bestaande materialen, worden de materiaalgrenzen steekproefsgewijs getoetst. Hierbij worden er dus geen grenzen opgezocht, maar wordt er onderzocht of er bij een categorie schaaldeel de formule op verschillende materialen toepasbaar is.

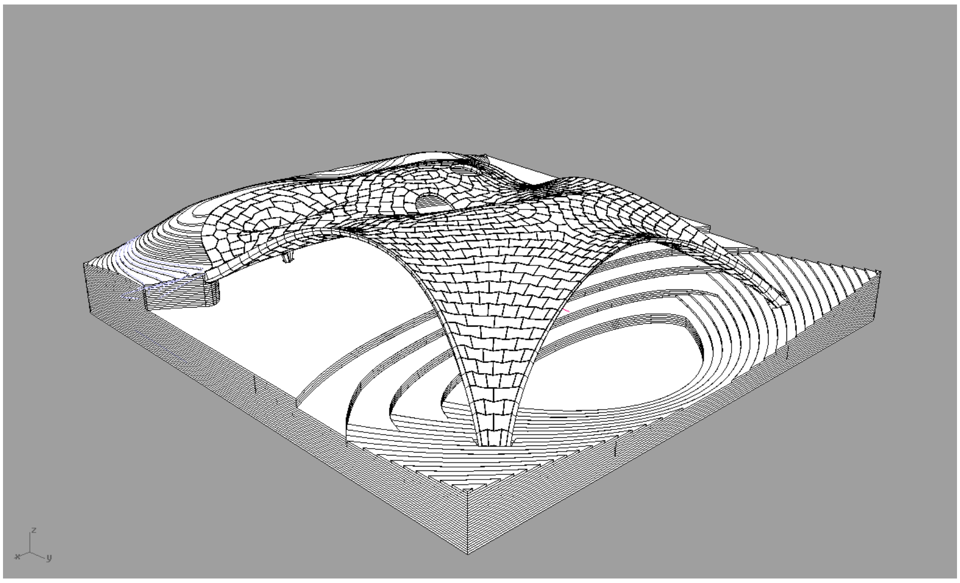
De referentieschaal is van het materiaal staal, welke uitvoerig is getoetst. De andere materialen die onderzocht worden zijn: beton, hout, glas en glasvezel.

De schaaldelen die onderzocht worden vallen onder de categorie B (grote krommingen, kleine twist).

Voor de inbeelding wordt er een model getoond voor een park overdekking in Zwitserland (figuur 5.7).[**?**] De schaalconstructie is dubbel gekromd en ligt getwist en opgedeeld in kleine stukjes schaaldelen. Van elk zo een schaaldeel kan de kromming en twist worden bepaald en kan de eigenfrequentie worden bepaald.

Van een standaardkromming- en twist wordt de invloed van materialen op de eigenfrequentie onderzocht. De resultaten zijn getoond in de tabel 5.1.

De eigenfrequentie van het schaaldeel van glasvezel valt veel hoger uit ten opzichte van de andere schaaldelen. Echter betekent dit niet dat de schaalconstructie gemaakt van glasvezel geschikter is



Figuur 5.7: MLK Jr. Park stone vault, Austin

Tabel 5.1: Invloeden van verschillende materialen

	k_{xx}	k_{yy}	k_{xy}	t	l	$E[N/m^2]$	$\rho[kg/m^3]$	$\nu[-]$	**f_(formule)**	**f_(ansys)**	**fout[%]**
staal	0.3	0.2	0.03	0.005	1	2E+11	7850	0.3	207.99279	187.771	10.77%
beton	0.3	0.2	0.03	0.005	1	3E+10	1000	0.2	220.17905	198.278	11.05%
hout	0.3	0.2	0.03	0.005	1	9E+09	500	0.3	170.61205	154.024	10.77%
glas	0.3	0.2	0.03	0.005	1	5E+10	2800	0.3	169.93367	153.412	10.77%
glasvezel	0.3	0.2	0.03	0.005	1	2E+11	1800	0.2	366.96509	381.586	-3.83%

betreft dynamische belasting. De verbinding tussen de schaaldelen speelt ook een grote rol en in dit hypothetische geval worden de schaaldelen ook niet belast.

De fout van de uitkomsten van de formule ligt rond de 10 procent. Er kan geconcludeerd worden dat de opgestelde formule, ook voor verschillende materialen, een geschikte benadering is voor de gemodelleerde eigenfrequenties van schaaldelen.

6

Conclusies en aanbevelingen

In dit onderzoek is de formule, welke de laagste eigenfrequenties van gekromde schaaldelen omschrijft, onderzocht. Er is expliciet onderzocht of er een relatie is met de Gauss-kromming en of de ontwerpformule uitgebreid kan worden met deze term. In de loop van het rapport zijn er tussentijdse conclusies getrokken. Deze worden in dit laatste hoofdstuk opgesomd. Gedurende het onderzoek zijn er een aantal zaken opgevallen, die van toepassing kunnen zijn bij vervolgonderzoek. Deze worden genoemd in de aanbevelingen

6.1. Conclusies

In het rapport worden enkele hoofdstukken afgesloten met tussentijdse conclusies. Deze worden nu beknopt herhaald. De conclusies van dit onderzoek worden gepresenteerd door het beantwoorden van de drie onderzoeksvragen:

HOOFDVRAAG *Is er een relatie, dan wel, wat is de relatie tussen de laagste eigenfrequentie van gekromde schalen en de Gauss-kromming?*
Ja, er is een lineair verband tussen de laagste eigenfrequentie in het kwadraat en de Gauss-kromming, $f_n^2 \sim k_G$. De relatie wordt zuiverder naarmate de twist en krommingen in gelijke mate toenemen: $k_{xy} \geq 0.1 \wedge \frac{1}{2}(k_{xx}k_{yy}) \geq 0.1$.
Met lineaire interpolatie kan de relatie in formulevorm worden omschreven (4.2.3). Echter komen de numerieke termen niet overeen met de bestaande termen van de huidige formule.
Het is mogelijk om deze relatie te verwerking in de ontwerpformule. Echter is de Gauss-kromming een combinatie van krommingstermen die al in de huidige formule 4.3 zijn verwerkt.
De Gauss-kromming dient wel als indicator voor het onderscheiden van verschillende categorieën van schaaldelen. Het belangrijkste onderscheid dat is gemaakt, is het onderscheiden van schaaldelen met een positieve Gauss-kromming en een negatieve Gauss-kromming.

DEELVRAAG *Hoe kan de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schalen worden uitgebreid met deze relatie, met een maximale foutmarge van 5 procent?*
Door de categorisering van schaaldelen aan de hand de Gauss-kromming is er een reeks aan formules opgesteld met een maximale foutmarge van 10 procent. De krommingstermen die in de huidige formule aanwezig zijn, zijn correct, echter varieert de factor voor elk van deze krommingsterm. De ontwerpformule van algemene vorm is:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [A \cdot (k_{xx}^2 + k_{yy}^2) + B \cdot k_{xx}k_{yy} + C \cdot k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.1}$$

waarbij A, B en C een andere waarde krijgen afhankelijk van de categorie schaaldeel.
De opgestelde formules voor schaaldelen met een positieve Gauss-kromming lijken erg op de oorspronkelijke formule. Voor de schaaldelen met een negatieve Gauss-kromming komt de opgestelde formule niet altijd even goed overeen met de resultaten van Ansys.

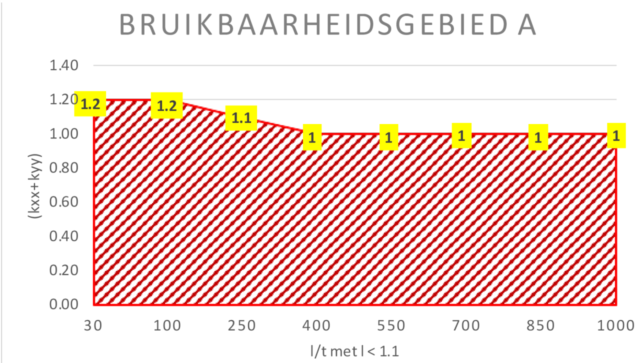
DEELVRAAG *Wat zijn de bruikbaarheidsgrenzen van de gevonden ontwerpformule?*
Voor een selectie van de opgestelde formules zijn de bruikbaarheidsgrenzen opgezocht. Deze bleken bij bepaalde categorieën variabel te zijn. Er zijn voor deze categorieën bruikbaarheidsgebieden opgesteld.

De (nieuw) opgestelde ontwerpformules en de bruikbaarheidsgebied voor de laagste eigenfrequentie van gekromde schaaldelen worden hieronder getoond.

De formules geven een goede benadering voor de eigenfrequentie met een foutmarge van maximaal rond de 10 procent. De formules zijn toepasbaar op schaaldelen niet groter dan rond de 1 m^2. De formule zijn toepasbaar voor schaaldelen van verschillende constructiematerialen.

A $k_G > 0 \quad \wedge \quad k_{xx} > 0 \quad \wedge \quad k_{yy} > 0 \quad \wedge \quad k_{xy} = 0$

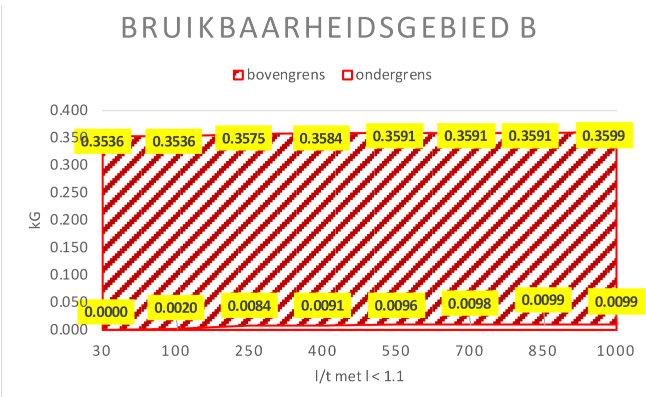
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy}]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.2}$$



Figuur 6.1: Bruikbaarheidsgebied categorie A

B $k_G > 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \geq 0.1 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.08$

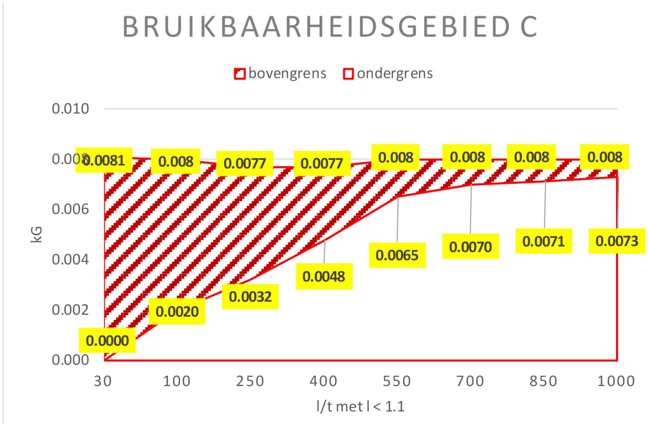
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + 2k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.3}$$



Figuur 6.2: Bruikbaarheidsgebied categorie B

C $k_G > 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) < 0.1 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.08$

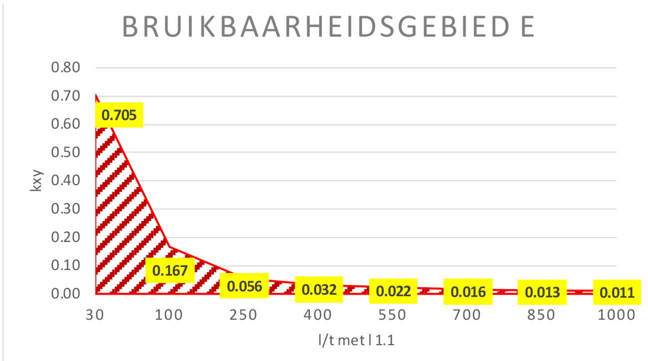
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [k_{xx}^2 + k_{yy}^2 + k_{xx}k_{yy} + 2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.4}$$



Figuur 6.3: Bruikbaarheidsgebied categorie C

E $k_G < 0 \quad \wedge \quad k_{xx} = k_{yy} = 0 \quad \wedge \quad 0 < k_{xy} < 0.07$

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [2k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.5}$$



Figuur 6.4: Bruikbaarheidsgebied categorie E

Discussie De vraag is of het opdelen van de ontwerpformule tot deze set van formules wenselijk is voor het onderzoek en voor de toepassing, het ontwerpen. Het resultaat van het onderzoek is een nog inclomplete algemene ontwerpformule (6.1). De factoren voor de krommingstermen, A, B en C, zijn deels bepaald. Een logisch gevolg zal zijn, dat de factoren A, B en C te bepalen zijn aan de hand van de grootte van de krommingen en de twist van een schaaldeel.

6.2. Aanbevelingen

Bij het zoeken naar verbanden van de ontwerpformule met de Gauss-kromming is er veelal gefocust op mogelijke uitbreidingen van de ontwerpformule. Na acht weken onderzoek zijn er enkele aanbevelingen die de insteek voor volgend onderzoek kunnen veranderen.

6.2.1. Vervolg vraagstukken

In dit onderzoek is het naar voren gekomen dat de factoren voor de krommingstermen in de ontwerpformule variabel zijn. Deze zijn nu afzonderlijk onderzocht per categorie schaaldeel. De Gauss-kromming is bij het onderscheiden van de categorieën van nut geweest.

Achteraf was een andere aanpak beter geweest: de invloed van elke krommingsterm afzonderlijk onderzoeken, dan de invloed van een gecombineerde term (Gauss-kromming) onderzoeken. Dit was alleen mogelijk met de kennis dat er onderscheid gemaakt moet worden tussen de positieve en negatieve Gauss-krommming.

In dit onderzoek zijn er verschillende constante waarden toegekend, maar als de kromming en twist van het schaaldeel erg af week van de categorie, veranderde de factor. Dit leidt tot de gedachte dat de factoren af hangen van de grootte van de kromming en de grootte van de twist, en misschien ook wel andere parameters.

De relatie kan mogelijk als volgt worden omschreven: *(voorbeeld)*

$$A = e^{-\frac{k_{xx}k_{yy}}{k_{xy}^2}} \tag{6.6}$$

en als volgt geïntegreerd worden in de formule: *(voorbeeld)*

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4} + [e^{-\frac{k_{xx}k_{yy}}{k_{xy}^2}} \cdot (k_{xx}^2 + k_{yy}^2) + B \cdot k_{xx}k_{yy} + C \cdot k_{xy}^2]\frac{E}{16\pi^2\rho}} \tag{6.7}$$

Voor volgend onderzoek beveel ik dus aan om de relatie tussen de factoren A, B en C en de grootte van de kromming en de twist van de schaaldelen te onderzoeken, en om in de richting van de bovenstaande formule te zoeken. Echter dient er rekening gehouden te worden met de gebruiksvriendelijkheid van de ontwerpformule. Als een dergelijke relatie te complex wordt, zijn ontwerptabellen wellicht een praktische oplossing.

6.2.2. Nader te onderzoeken

Dit onderzoek kan nog aangevuld worden door de volgende punten nader te onderzoeken:

- Bij de categorieën met een positieve Gauss-kromming en bij de categorie met alleen de twist is het gelukt een formule te definiëren. Bij schaaldelen met vrij grote krommingen en twisten (positieve Gauss-kromming) is het echter niet gelukt een logisch grensgebied af te bakenen. De nieuwe formule D klopt, naarmate de twist en kromming geleidelijk toenemen. Als het verschil te groot wordt, wijkt de formule te veel af. Dit moet nader onderzocht worden.

- Voor de categorieën met een negatieve Gauss-kromming (behalve E met twist), was het zoeken naar een passende formule lastiger. Bij de gemodelleerde schalen zijn geen schalen getest met een zadelpunt, positieve en negatieve kromming. Dit kan echter inzicht bieden in de ontwikkeling van de invloed van verschillende termen en leidt eventueel tot een formule die de eigenfrequentie beter kan benaderen.

6.2.3. Overige aanbevelingen

- Ga uit van een foutmarge van 10 procent. 5 procent is te idealistisch en dwingt het onderzoek af te bakenen waardoor er mogelijke verbanden en oplossingen misgelopen worden.

- Zorg voor een goede administratie van resultaten waarin ook de trillingsvorm wordt meegenomen. Deze is van waardevolle betekenis zijn voor dit onderzoek.

Bibliografie

Boeken

[1] Blaauwendraad, J., & Hoefakker, J.H. (2014). *Structural Shell Analysis: Understanding and application* (Vol. 200). Dordrecht: Springer.

[2] Blevins, R.D. (2016). *Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibrations* (Vol. 200). West Sussex: Wiley.

[3] Magrab, E. B. (2011). *Vibrations of elastic systems: With applications to MEMS and NEMS* (Vol. 184). Dordrecht: Springer.

Artikelen

[4] Malekzadeh, K., Mozafari, A., & Ghasemi, F. A. (2014). Free vibration response of a multilayer smart hybrid composite plate with embedded SMA wires. *Lat. Am. J. Solids Struct. Latin American Journal of Solids and Structures, 11(2)*, 279-298. doi:10.1590/s1679-78252014000200008

Rapporten

[5] Noortman, F.J. (2015). *Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen* (Bachelor eindwerk CTB3000, Technische Universiteit Delft). Opgevraagd van `http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/BSc_projects`

[6] Van Dijk, R. (2014). *Eigenfrequentie van belaste panelen* (Bachelor eindwerk CTB3000, Technische Universiteit Delft). Opgevraagd van `http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/BSc_projects`

Websites

[7] Aubert, M. (n.d.). Marcel Aubert - MLK Jr. Park Stone Vault, Austin. Opgevraagd op 13 juni 2016, van `http://www.marcelaubert.com/mlk-jr-park-stone-vault-austin`

Programma’s

Ansys Mechanical APDL, release 16.1. ANSYS, Inc.

TexMaker 4.5, TeXstudio 2.10.8 en MikTex 2.9

Microsoft Excel 365 Pro Plus. Microsoft Office.

Adobe InDesign CC 2014. Adobe Systems, Inc.

A
Interne documenten

Deze documenten hebben betrekking op de proceduriële voortgang van het project.

A.1. Startnotitie

Bij het akkoord gaan met de startnotitie wordt het onderzoek officieel gestart. Tijdens de startbijeenkomst (21 april 2016) is de opzet van het onderzoek besproking en de planning doorgenomen en zijn kleine wijzigingen aangebracht in de startnotitie.

Startnotitie Bsc. Eindwerk: Eigenfrequentie van gekromde panelen

Marie-Louise Greijmans, 4195043

Al eeuwen lang laat men zich niet beperken tot eenvoudige constructievormen. De Romeinen bouwden al veel in koepelvormen en tegenwoordig wordt er in de 'freeform architecture' ook steeds meer gekromde constructie elementen toegepast. Gekromde panelen hebben hoge stijfheid, een voordelige eigenschap niet alleen in de constructie, maar ook in de luchtvaart en werktuigbouw.

Er wordt steeds meer ontdekt over de krachtenverdeling en bezwijkmechanismen van gekromde panelen. Een mogelijk bezwijkmechanisme is het optreden van resonantie. Dit kan worden voorkomen als de frequentie van de dynamische belasting en de eigenfrequentie van het gekromde paneel bekend zijn. Dynamische belastingen kunnen aardbevingen zijn, maar ook turbulentie t.g.v. wind.

PROBLEEMSTELLING

Tot op heden worden eigenfrequenties vaak genoeg nog bepaald aan de hand van eindige elementen pakketten. Deze gedetailleerde handeling kan tijdrovend zijn en vaak niet van toepassing tijdens de ontwerpfase van de constructie. Een ontwerpformule waarmee de eigenfrequentie van gekromde panelen bepaald kan worden zou een oplossing zijn voor het idealiseren van een ontwerp met een gekromd constructie element.

Bij het bepalen van vorm van de constructie is het belangrijk dat de eigenfrequentie van het element boven de frequentie van de belasting blijft. Dit onderzoek zal zich daarom ook richten op de laagste eigenfrequentie (fundamentele frequentie).

DOELSTELLING

Het doel van het onderzoek kan als volgt worden geformuleerd:

> De ontwerpformule voor eigenfrequenties van gekromde panelen is nog incompleet, deze moet aangevuld worden met een factor welke de onderlinge relatie tussen krommingen omschrijft. De Gaussische kromming ligt hierbij voor de hand. De bijbehorende bruikbaarheidsgrenzen moeten ook onderzocht worden, welke de mogelijke toepassingen bepalen.

$$f_n = \sqrt{\underbrace{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{Et^2}{\rho l^4}}_{\text{bending stiffness}} + \underbrace{\left[(k_{xx}+k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2\right]\frac{E}{16\pi^2\rho} + \frac{k_{xx}k_{yy}}{\cdots}}_{\text{curvature}} + \underbrace{\frac{n_{xx}+n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{(1-\nu^2)n_{xy}^2}{71.7\rho E t^4}}_{\text{membrane forces}}}\,.$$

A.2. Tijdschrijfformulier

ONDERZOEKSVRAAG

HOOFDVRAAG Is er een relatie, dan wel, wat is de relatie tussen de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen en de Gaussische kromming?

DEELVRAAG Hoe kan de ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen worden uitgebreid met deze relatie, met een maximale foutmarge van 5%?

DEELVRAAG Wat zijn de bruikbaarheidsgrenzen van de gevonden ontwerpformule?

PLAN VAN AANPAK

Het onderzoek borduurt voort op de formule van Blevins, welke de eigenfrequentie van rechte panelen omschrijft, en de formule van Rayleigh, welke de laagste eigenfrequentie van 'hemispherical shell' omschrijft.

De huidige formule is uitgebreid met de volgende factoren:

- Krommingen onder invloed van membraan krachten / schuifkrachten
- Krommingen en twist in relatie tot eigenfrequenties

De laatste factor omschrijft de krommingen in beide richtingen. Deze moet uitgebreid worden het product van de krommingen en beide richtingen (Gaussische kromming).

Deze factor wordt onderzocht aan de hand van een model in een eindig elementen pakket, Ansys, waarmee de laagste eigenfrequentie van het paneel bepaald kan worden. De gecreëerde datasets worden in relatie gebracht met de aanwezige Gaussische. Aan de hand van het literatuuronderzoek wordt er gekeken naar mogelijke factoren die deze relatie beïnvloeden. Deze analyses lopen simultaan en de benadering van de relatie zal daarom ook een iteratief proces zijn.

Leren werken en modelleren in Ansys zal samengaan met het bestuderen van voorgaande modellen.

Het onderzoek beperkt zich tot de volgende uitgangspunten:

- De panelen zijn homogeen en isotroop
- Panelen waarvan de lengte gelijk is aan de breedte
- Vlakke panelen waarvan de kromming veel kleiner is dan de overspanning

Het Bachelor Eindwerk is als volgt opgebouwd:

Literatuuronderzoek: Voorgaande onderzoeken

Literatuuronderzoek: Gaussiche krommingen

Analytisch onderzoek: Omschrijving van de relaties

Testfase: Modelleren in Ansys

Testfase: Relaties analyse

Controle: Bruikbaarheidsgrenzen bepalen

Conclusies en aanbevelingen

	week	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Algemeen	Introductie project										
	Schrijven startnotitie										
	Startbijeenkomst										
	Tussenpeiling (rapport/presentatie)										
Literatuuronderzoek	Voorgaande onderzoeken										
	Gaussische krommingen										
Analyse	Relaties Gaussische krommingen										
Testfase	Ansys leren										
	Modelleren in Ansys										
Controle	Bruikbaarheidsgrenzen & Limieten										
Afronding	Conclusies en aanbevelingen										
	Rapport										
	Presentatie										

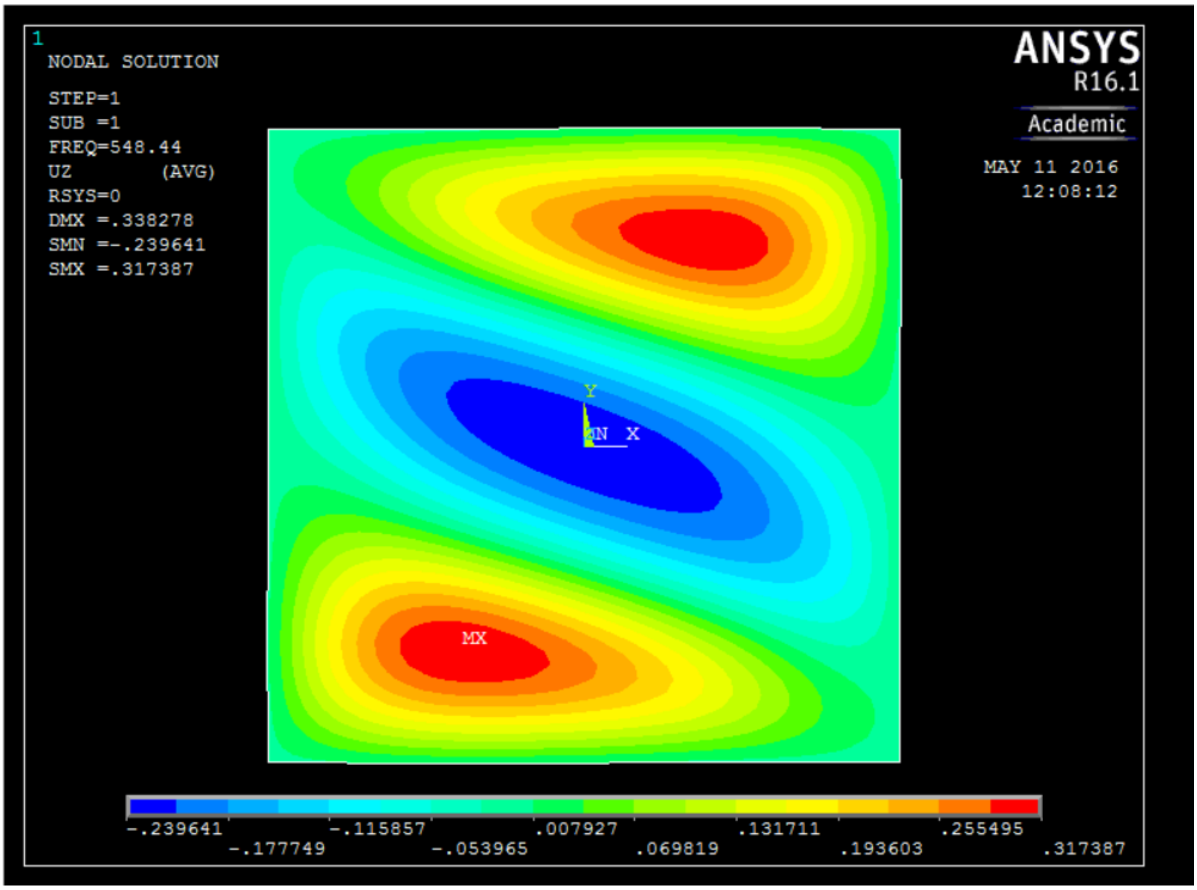
Tabel A.1: Tijdschrijfformulier

onderdelen	**wk 1**	**wk 2**	**wk 3**	**wk 4**	**wk 5**	**wk 6**	**wk 7**	**wk 8**	**wk 9**	**wk 10**	**totaa**
voorstudie fase											
startbijeenkomst	2										
informatie inwinnen	8	8									
werkplan schrijven en aanpassen	4	2									
werkplan presenteren/bespreken	1										
assistentie bij begeleider	1		1			1	1	1			
Installeren Ansys	4	4									
Latex leren			8	4	8		4	4			
Testfase											
analyse huidige formule			16	16							
analyse nieuwe verbanden					16	16	16				
analyse nieuwe formules											
schrijven tussenrapport				20							
presentatie tussenrapport					1						
Controlefase											
bruikbaarheidsgebieden								16			
schrijven eindrapport/verbeteren						8	8	24	16	12	
voorbereiden presentatie									16		
presentatie										4	
evaluatie met begeleider											
totaal	20	14	25	40	25	25	29	45	32	16	**271**

B

Model Ansys

Met de onderstaande script zijn alle schaaldelen in Ansys geladen en de eigenfrequenties en trillingsvorm bepaald. Een voorbeeld van de output is in onderstaande figuur weergegeven.



```
                                    lx =    1.00     ! m       lengte in de x-richting
                                    ly =    1.00     ! m       breedte in de y-richting
                                    h =     0.005    ! m       dikte
                                    kxx =   0        ! 1/m     kromming
                                    kyy =   0        ! 1/m
                                    kxy =   0.0      ! 1/m
!Preprocess                         E =     2.1e11   ! N/m2    elastiteitsmodulus
                                    nu =    0.3      ! -       dwarscontractiecoefficient
                                    rho =   7850     ! kg/m3   massadichtheid
                                    n =     50       ! -       aantal elementen in beide richtingen
                                    nxx =   0.0      ! N/m     membraankrachten
                                    nyy =   0.0      ! N/m
                                    nxy =   0.0      ! N/m
G=E/(2*(1+nu))
pz = -kxx*nxx-2*kxy*nxy-kyy*nyy ! N/m2 belasting loodrecht op het oppervlak
PREP7
MPTEMP,,,,,,,,           ! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,rho
ET,1,SHELL181            ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h, , ,         ! element dikte
*DO,i,0,n                ! plaats knopen
*DO,j,0,n
x=lx/n*i-lx/2
y=ly/n*j-ly/2
z1=0.5*x*x*kxx
z2=x*y*kxy
z3=0.5*y*y*kyy
z=z1+z2+z3
N,,x,y,z,,,
*ENDDO
```

```
*ENDDO
*DO,i,1,n                            ! plaats elementen
*DO,j,1,n
k=i+(j-1)*(n+1)
E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO
*DO,i,1,(n+1)*(n+1)                  ! roteer de assenstelsels van alle knopen
xx=1
xy=0
xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
lx=SQRT(1+xz*xz)
zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
*DO,i,2,n                            ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=-lx/2
yx=0
yy=1
yz=NX(i)*kxy+NY(i)*kyy
ly=SQRT(1+yz*yz)
zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,j,,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
*DO,i,2,n                            ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=lx/2
j=n*(n+1)+i
yx=0
yy=1
yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
ly=SQRT(1+yz*yz)
zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,j,,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
*DO,i,1,n                            ! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het vlak
j=i
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)
D,j,UZ,0
j=i+n*(n+1)+1
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)+1
D,j,UZ,0
*ENDDO
*DO,i,1,n+1                          ! randvoorwaarde: geen verplaatsing in de richtingen van de randen
D,i,UY,0
*ENDDO
*DO,i,n*(n+1)+1,(n+1)*(n+1)
D,i,UY,0
*ENDDO
*DO,i,1,n*(n+1)+1,n+1
D,i,UX,0
*ENDDO
*DO,i,n+1,(n+1)*(n+1),n+1
D,i,UX,0
*ENDDO
FINISH
```

!Solution

```
/SOLU
!*
ANTYPE, 0
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/SOLU
ANTYPE,MODAL
MODOPT, LANB, 20„,
MXPAND,20
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH
/POST1
```

!Post process

```
/SHOW,WIN32C
SET,FIRST
/PLOPTS,INFO,3
/CONTOUR,ALL,18
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
/REPLOT,RESIZE
PLNSOL,U,Z
SET„„„1
PLNSOL,U,Z
SET„„„1
PLNSOL,U,Z
```

C

Tabellen met resultaten

Alle data geplot in de grafieken in het rapport komen uit de volgende tabellen. In de tabellen zijn de trillingsvormen van de resultaten ook verwerkt. Dit is gedaan met een kleurencode in de linkerkolom. De legenda staat in de onderstaande tabel (C.1) weergegeven.

Tabel C.1: Legenda kleurencode trillingsvorm

kleur	trillingsvorm
	enkel
	dubbel
	driedubbel of hoger

C.1. Tabellen 4.1 Analyse huidige formules

C.1.1. Dubbele kromming

Tabel C.2: Tabel bij figuren 4.1 en 4.2

	kxx	kyy	(kxx+kyy)^2	kxx + kyy	f_(formule)	f_(ansys)	fout
	0	0	0	0	24.58574522	23.44095707	4.88%
	0.043478261	0.041666667	0.007249659	0.085144928	42.80885095	42.17124441	1.51%
	0.02	0.12	0.0196	0.14	62.64842413	62.19621917	0.73%
	0.033333333	0.142857143	0.031043084	0.176190476	76.57256117	74.13869542	3.28%
	0.066666667	0.125	0.036736111	0.191666667	82.63045797	82.26359513	0.45%
	0.05	0.15	0.04	0.2	85.91109575	82.13275004	4.60%
	0.1	0.1	0.04	0.2	85.91109575	85.54929455	0.42%
	0.111111111	0.111111111	0.049382716	0.222222222	94.71118664	94.3528924	0.38%
	0.125	0.142857143	0.071747449	0.267857143	112.9554718	112.5699121	0.34%
	0.181818182	0.133333333	0.099320478	0.315151515	132.0226766	131.231	0.60%
	0.166666667	0.2	0.134444444	0.366666667	152.9058967	152.344	0.37%
	0.2	0.2	0.16	0.4	166.4616739	165.705	0.46%
	0.25	0.2	0.2025	0.45	186.8402058	181.669	2.85%
	0.333333333	0.2	0.284444444	0.533333333	220.8872538	193.967	13.88%
	0.5	0.333333333	0.694444444	0.833333333	343.8718051	301.14	14.19%
	0.5	0.5	1	1	412.3237763	400.166	3.04%

C.1.2. Twist

Tabel C.3: Tabel bij figuren 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 en 4.7

	schaaldeel	kxy	f_(ansys)	f_(ansys)_2e modus	f_(formule)_nieuw	fout
	1	0.01	25.9781	61.5872	25.92723362	-0.20%
	l=1	0.03	35.1673	62.1336	34.84712389	-0.91%
	t=0.005	0.05	48.3292	63.1838	47.94291652	-0.80%
		0.07	62.5673	64.6621	62.64842413	0.13%
		0.09	66.4735	66.4735	78.05912789	
		0.11	68.5198		93.82819645	
		0.15	72.9719		125.9009065	
		0.18	76.3763		150.1983129	
		0.21	79.6926		174.6074296	
		0.3	88.6849		248.1748908	
	2	0.01	40.2244	98.4932	40.18926819	-0.09%
	l=0.5	0.03	46.7211	98.8403	46.44650555	-0.59%
	t=0.002	0.05	57.4758	99.5238	56.93398878	-0.94%
		0.07	70.4307	100.523	69.76948387	-0.94%
		0.09	84.2921	101.81	83.88196041	-0.49%
		0.11	98.6915	103.35	98.72530721	0.03%
		0.15	107.037	107.037	129.5916436	
		0.18	110.184		153.3052152	
		0.21	113.53		177.2870844	
		0.3	123.908		250.0674554	
	3	0.01	12.9318	24.7938	12.82481945	-0.83%
	l=1	0.03	26.0719	26.0719	26.5815085	
	t=0.002	0.05	28.151		42.31758258	
		0.07	30.507		58.45579181	
		0.09	32.8394		74.7360823	
		0.11	35.0458		91.08229795	
		0.15	39.0661		123.8680459	
		0.18	41.8008		148.4984435	
		0.21	44.341		173.1473621	
		0.3	50.9969		247.1498148	
	4	0.01	98.4949	245.679	98.68690119	0.19%
	l=0.5	0.03	101.329	245.811	101.3962774	0.07%
	t=0.005	0.05	106.799	246.073	106.6086594	-0.18%
		0.07	114.42	246.466	113.9811742	-0.38%
		0.09	123.864	246.985	123.1264004	-0.60%
		0.11	134.698	247.629	133.6810139	-0.76%
		0.15	159.263	249.276	157.8541139	-0.88%
		0.18	179.312	250.807	177.8381742	-0.82%
		0.21	200.154	252.572	198.8834772	-0.63%
		0.3	259.073	259.073	265.815085	
	5	0.01	49.7838	122.864	49.85577247	0.14%
	l=1	0.03	55.1713	123.127	55.0245277	-0.27%
	t=0.01	0.05	64.5651	123.646	64.12409726	-0.68%
		0.07	76.4206	124.41	75.75091848	-0.88%
		0.09	89.6559	125.403	88.91908711	-0.82%
		0.11	103.605	126.605	103.0393471	-0.55%
		0.15	129.536	129.536	132.9075425	
		0.18	132.096		156.1182558	
		0.21	134.868		179.7251542	
		0.3	143.699		251.801813	

C.2. Tabellen 4.2 Analyse Gauss-kromming en varianten

C.2.1. Enkele kromming met twist

Tabel C.4: Tabel bij figuren 4.8, 4.9 en 4.10

	kxx	kxy	√(kxx.kxy)	√(kG)	√(kxx^2 + kxy^2)	f_(ansys)
	0	0	0	0	0	23.44095707
	0.1	0	0	0	0.1	47.36065895
	0.1	0.01	0.031622777	-0.0001	0.100498756	48.1906
	0.1	0.025	0.05	-0.00063	0.103077641	52.26731564
	0.1	0.03	0.054772256	-0.0009	0.104403065	54.2375
	0.1	0.04	0.063245553	-0.0016	0.107703296	58.8277
	0.1	0.06	0.077459667	-0.0036	0.116619038	60.6925
	0.1	0.05	0.070710678	-0.0025	0.111803399	60.7035
	0.1	0.048	0.069282032	-0.0023	0.110923397	60.7096
	0.1	0.045	0.067082039	-0.00203	0.109658561	60.7206
	0.1	0.08	0.089442719	-0.0064	0.128062485	60.8132
	0.1	0.18	0.134164079	-0.0324	0.205912603	65.7154
	0.1	0.25	0.158113883	-0.0625	0.26925824	72.009
	0.1	0.4	0.2	-0.16	0.412310563	85.3293
	0.1	0.48	0.219089023	-0.2304	0.490306027	91.212
	0.01	0.1	0.031622777	-0.01	0.100498756	63.7071
	0.025	0.1	0.05	-0.01	0.103077641	62.442
	0.05	0.1	0.070710678	-0.01	0.111803399	61.2826
	0.08	0.1	0.089442719	-0.01	0.128062485	60.9699
	0.1	0.1	0.1	-0.01	0.141421356	61.1982
	0.25	0.1	0.158113883	-0.01	0.26925824	68.8142
	0.4	0.1	0.2	-0.01	0.412310563	82.6031
	0.01	0.08	0.028284271	-0.0064	0.080622577	61.8867
	0.03	0.09	0.051961524	-0.0081	0.09486833	61.365
	0.3	0.1	0.173205081	-0.01	0.316227766	72.8876
	0.5	0.11	0.234520788	-0.0121	0.511957029	92.8407
	0.7	0.12	0.289827535	-0.0144	0.710211236	116.459

C.2.2. Dubbele kromming met twist

Tabel C.5: Tabel bij figuren 4.11, 4.12 en 4.13

	kxx	kyy	kxy	f_(ansys)	√(kxy(kxx+kyy))	√(kxx.kyy - kxy2)	kG=(kxx.kyy - kxy2)	f_(ansys)^2
	0	0	0.5	103.687	0		-0.25	10750.99
	0.2	0.3	0.5	89.945	0.5		-0.19	8090.103
	0.1	0.2	0.4	81.3757	0.346410162		-0.14	6622.005
	0	0	0.3	88.6849	0		-0.09	7865.011
	0.01	0.01	0.28	84.2139	0.074833148		-0.0783	7091.981
	0.01	0.01	0.25	81.1908	0.070710678		-0.0624	6591.946
	0.033333333	0.05	0.25	74.8445	0.144337567		-0.0608333	5601.699
	0.05	0.1	0.2	69.4323	0.173205081		-0.035	4820.844
	0.02	0.05	0.15	66.5499	0.102469508		-0.0215	4428.889
	0.01	0.01	0.1	65.379	0.04472136		-0.0099	4274.414
	0.03	0.04	0.1	63.8571	0.083666003		-0.0088	4077.729
	0.1	0.1	0.1	83.1515	0.141421356	0	0	6914.172
	0.1	0.01	0.03	56.2512	0.057445626	0.01	0.0001	3164.198
	0.03	0.04	0.03	44.9183	0.045825757	0.017320508	0.0003	2017.654
	0.02	0.12	0.04	68.4369	0.074833148	0.028284271	0.0008	4683.609
	0.033333333	0.142857143	0.05	74.8194	0.093859064	0.047559487	0.0022619	5597.943
	0.05	0.15	0.07	80.1321	0.118321596	0.050990195	0.0026	6421.153
	0.1	0.1	0.08	86.7164	0.126491106	0.06	0.0036	7519.734
	0.111111111	0.111111111	0.09	90.7918	0.141421356	0.065158875	0.0042457	8243.151
	0.066666667	0.125	0.06	84.1851	0.107238053	0.068799225	0.0047333	7087.131
	0.15	0.1	0.08	98.3948	0.141421356	0.092736185	0.0086	9681.537
	0.12	0.2	0.1	112.237	0.178885438	0.118321596	0.014	12597.14
	0.2	0.3	0.1	170.593	0.223606798	0.223606798	0.05	29101.97
	0.4	0.5	0.3	217.959		0.331662479	0.11	47506.13
	0.5	0.6	0.1	391.902	0.331662479	0.538516481	0.29	153587.2
	0.7	0.9	0.1	548.855	0.4	0.787400787	0.62	301241.8

C.3. Tabellen 4.3 Uitbreiden en corrigeren huidige formule

C.4. Tabellen 5.2 Bruikbaarheidsgebieden

Tabel C.6: Tabel bij figuren 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 en 4.19

	kxx	kyy	kxy	√(kxx.kyy-kxy2)	kxx.kyy-kxy2	f_(ansys)	f_(ansys)^2	(kxx+kyy)^2+kxy^2
POSITIEVE kG								
kG (kxy constant)								
	0.1	0.1	0.1	0	0	80.8298	6533.4566	0.05
	0.1	0.1	0.1	0	0	83.1515	6914.172	0.05
	0.12	0.2	0.1	0.118321596	0.014	112.237	12597.144	0.1124
	0.2	0.3	0.1	0.223606798	0.05	170.593	29101.972	0.26
	0.25	0.25	0.1	0.229128785	0.0525	177.131	31375.391	0.26
	0.4	0.4	0.1	0.387298335	0.15	285.015	81233.55	0.65
	0.5	0.6	0.1	0.538516481	0.29	391.902	153587.18	1.22
	0.7	0.9	0.1	0.787400787	0.62	548.855	301241.81	2.57
kG (kxx kyy constant)								
	0.1	0.1	0.08	0.06	0.0036	84.5376	7146.6058	0.0464
	0.1	0.1	0.06	0.08	0.0064	88.5763	7845.7609	0.0436
	0.1	0.1	0.05	0.08660254	0.0075	90.4639	8183.7172	0.0425
	0.1	0.1	0.048	0.087726849	0.007696	90.1767	8131.8372	0.042304
	0.1	0.1	0.045	0.089302855	0.007975	89.7436	8053.9137	0.042025
	0.1	0.1	0.04	0.091651514	0.0084	89.0249	7925.4328	0.0416
	0.1	0.1	0.03	0.09539392	0.0091	87.6677	7685.6256	0.0409
	0.1	0.1	0.025	0.096824584	0.009375	87.0695	7581.0978	0.040625
	0.1	0.1	0.01	0.099498744	0.0099	85.8155	7364.3	0.0401
	0.1	0.1	0	0.1	0.01	85.5592	7320.3767	0.04
kG (variabel)								
	0.1	0.01	0.03	0.01	0.0001	56.2512	3164.1975	0.013
	0.03	0.04	0.03	0.017320508	0.0003	44.9183	2017.6537	0.0058
	0.02	0.12	0.04	0.028284271	0.0008	68.4369	4683.6093	0.0212
	0.033333333	0.142857143	0.05	0.047559487	0.002261905	74.8194	5597.9426	0.033543084
	0.05	0.15	0.07	0.050990195	0.0026	80.1321	6421.1535	0.0449
	0.1	0.1	0.08	0.06	0.0036	86.7164	7519.734	0.0464
	0.111111111	0.111111111	0.09	0.065158875	0.004245679	90.7918	8243.1509	0.057482716
	0.066666667	0.125	0.06	0.068799225	0.004733333	84.1851	7087.1311	0.040336111
	0.15	0.1	0.08	0.092736185	0.0086	98.3948	9681.5367	0.0689
	0.3	0.3	0.1	0.282842712	0.08	212.078	44977.078	0.37
	0.5	0.5	0.11	0.487749936	0.2379	353.542	124991.95	1.0121
	0.7	0.7	0.12	0.689637586	0.4756	491.786	241853.47	1.9744
NEGATIEVE kG								
kG (kxy constant)								
	0.01	0.01	0.1		-0.0099	62.6993	3931.2022	0.0104
	0.01	0.01	0.1		-0.0099	65.379	4274.4136	0.0104
	0.025	0.025	0.1		-0.009375	61.081	3730.8886	0.0125
	0.03	0.04	0.1		-0.0088	63.8571	4077.7292	0.0149
	0.05	0.05	0.1		-0.0075	62.9267	3959.7696	0.02
	0.08	0.08	0.1		-0.0036	71.8636	5164.377	0.0356
kG (kxy variabel)								
	0.1	0.1	0.48		-0.2204	85.1081	7243.3887	0.2704
	0.1	0.1	0.4		-0.15	79.6494	6344.0269	0.2
	0.1	0.1	0.25		-0.0525	70.6914	4997.274	0.1025
	0.1	0.1	0.18		-0.0224	71.3989	5097.8029	0.0724
kG (variabel)								
	0	0	0.5		-0.25	103.687	10750.994	0.25
	0.2	0.3	0.5		-0.19	89.945	8090.103	0.5
	0.1	0.2	0.4		-0.14	81.3757	6622.0046	0.25
	0	0	0.3		-0.09	88.6849	7865.0115	0.09
	0.01	0.01	0.28		-0.0783	84.2139	7091.981	0.0788
	0.01	0.01	0.25		-0.0624	81.1908	6591.946	0.0629
	0.033333333	0.05	0.25		-0.060833333	74.8445	5601.6992	0.069444444
	0.05	0.1	0.2		-0.035	69.4323	4820.8443	0.0625
	0.02	0.05	0.15		-0.0215	66.5499	4428.8892	0.0274
	0.01	0.01	0.1		-0.0099	65.379	4274.4136	0.0104
	0.03	0.04	0.1		-0.0088	63.8571	4077.7292	0.0149
	0.03	0.03	0.09		-0.0072	60.6402	3677.2339	0.0117
	0.01	0.01	0.08		-0.0063	61.0777	3730.4854	0.0068

Tabel C.7: Tabel bij figuren 4.20 en 4.21

kxx	kyy	kxy	kG	f_(ansys)	f_(formule)	fout	restterm
0	0	0	0	23.44095707	24.58574522	-4.88370912	-54.98040006
0.1	0	0	0	47.36065895	47.94291652	-1.229411878	-55.49122794
0.1	0	0.01	-0.0001	48.1906	48.29497419	-0.216586201	-10.07060362
0.1	0	0.025	-0.000625	52.26731564	50.10270743	4.141418376	221.5909929
0.1	0	0.03	-0.0009	54.2375	51.02406131	5.924754448	338.2515741
0.1	0	0.04	-0.0016	58.8277	53.29750318	9.400668093	620.0744425
0.1	0	0.06	-0.0036	60.6925	59.31483453	2.269910566	165.3299609
0.1	0	0.05	-0.0025	60.7035	56.08525147	7.607878506	539.3594797
0.1	0	0.048	-0.002304	60.7096	55.49007217	8.597532901	606.5074232
0.1	0	0.045	-0.002025	60.7206	54.63166954	10.02778375	702.3719476
0.1	0	0.08	-0.0064	60.8132	66.835063	-9.902230105	-768.6803517
0.1	0	0.18	-0.0324	65.7154	115.2217879	-75.33453023	-8957.546605
0.1	0	0.25	-0.0625	72.009	153.2133413	-112.7697111	-18289.03187
0.1	0	0.4	-0.16	85.3293	237.7153409	-178.5858326	-49227.49384
0.1	0	0.48	-0.2304	91.212	283.4801751	-210.7926316	-72041.38076
0.01		0.1	-0.01	63.7071	63.32083594	0.606312417	49.06632601
0.025		0.1	-0.01	62.442	64.01926776	-2.525972514	-199.4632802
0.05		0.1	-0.01	61.2826	66.45377126	-8.438237379	-660.5466519
0.08		0.1	-0.01	60.9699	71.2515882	-16.86354775	-1359.460115
0.1		0.1	-0.01	61.1982	75.40989323	-23.22240397	-1941.432314
0.25		0.1	-0.01	68.8142	120.7496997	-75.47206779	-9845.09585
0.4		0.1	-0.01	82.6031	176.3451662	-113.4849251	-24274.34551
0.01		0.08	-0.0064	61.8867	52.81857546	14.65278411	1040.161723
0.03		0.09	-0.0081	61.365	59.17185946	3.573927391	264.3542735
0.3		0.1	-0.01	72.8876	138.7053244	-90.30030398	-13926.56477
0.5		0.11	-0.0121	92.8407	216.9232677	-133.6510471	-38436.30849
0.7		0.12	-0.0144	116.459	297.4769213	-155.4348924	-74929.82002

Tabel C.8: Tabel bij figuren 4.22, 4.23 en 4.24

kxx	kyy	kxy	kG	f_(ansys)	f_(formule)	fout_(oud)	restterm
0.01	0.01	0.1	-0.0099	62.6993	63.72087724	0.01629328	-129.1479752
0.01	0.01	0.1	-0.0099	65.379	63.72087724	-0.025361703	214.0634453
0.025	0.025	0.1	-0.009375	61.081	66.45377126	0.087961416	-685.2151537
0.03	0.04	0.1	-0.0088	63.8571	69.4455122	0.087514344	-744.9499446
0.05	0.05	0.1	-0.0075	62.9267	75.40989323	0.198376734	-1726.882424
0.08	0.08	0.1	-0.0036	71.8636	91.26550511	0.269982371	-3165.015419
0.1	0.1	0.1	0	80.8298	103.7730462	0.283846381	-4235.388557
0.1	0.1	0.1	0	83.1515	103.7730462	0.24799969	-3854.673173
0.12	0.2	0.1	0.014	112.237	146.0815075	0.301545012	-8742.662664
0.2	0.3	0.1	0.05	170.593	215.2770239	0.261933514	-17242.22538
0.25	0.25	0.1	0.0525	177.131	215.2770239	0.215354872	-14968.80586
0.4	0.4	0.1	0.15	285.015	335.2800437	0.176359292	-31179.15747
0.5	0.6	0.1	0.29	391.902	457.1371535	0.166457822	-55387.19954
0.7	0.9	0.1	0.62	548.855	661.5686419	0.205361419	-136431.2569
0.1	0.1	0.48	-0.2204	85.1081	292.3066931	2.434534352	-78199.81414
0.1	0.1	0.4	-0.15	79.6494	248.1748908	2.115841309	-55246.74949
0.1	0.1	0.25	-0.0525	70.6914	168.9867482	1.390485239	-23559.24704
0.1	0.1	0.18	-0.0224	71.3989	135.4926328	0.897685157	-13260.45061
0.1	0.1	0.08	0.0036	84.5376	97.71959258	0.155930528	-2402.512961
0.1	0.1	0.06	0.0064	88.5763	92.73857193	0.046990808	-754.6818022
0.1	0.1	0.05	0.0075	90.4639	90.70693778	0.002686572	-44.03135789
0.1	0.1	0.048	0.007696	90.1767	90.34014189	0.001812463	-29.50401467
0.1	0.1	0.045	0.007975	89.7436	89.81543545	0.000800452	-12.89870441
0.1	0.1	0.04	0.0084	89.0249	89.01020713	-0.000165042	2.61584662
0.1	0.1	0.03	0.0091	87.6677	87.6678274	1.45319E-06	-0.022337434
0.1	0.1	0.025	0.009375	87.0695	87.13480602	0.000750045	-11.37658978
0.1	0.1	0.01	0.0099	85.8155	86.10805805	0.003409152	-50.29762028
0.1	0.1	0	0.01	85.5592	85.91109575	0.004112892	-60.33966837
0	0	0.5	-0.25	103.687	292.074781	1.816889108	-74556.68371
0	0	0.3	-0.09	88.6849	176.3451662	0.988446356	-23232.60615
0.01	0.01	0.08	-0.0063	61.0777	53.29750318	-0.127381955	889.8615925
0.01	0.01	0.28	-0.0783	84.2139	165.0307573	0.959661734	-20143.16991
0.01	0.01	0.25	-0.0624	81.1908	147.8107782	0.820536048	-15256.08014
0.03	0.03	0.09	-0.0072	60.6402	62.91825119	0.037566683	-281.4724771
0.02	0.05	0.15	-0.0215	66.5499	95.17268571	0.430095097	-4628.950915
0.033333333	0.05	0.25	-0.060833333	74.8445	151.5146764	1.024392927	-17354.99798
0.05	0.1	0.2	-0.035	69.4323	134.0470765	0.930615528	-13147.77444
0.1	0.2	0.4	-0.14	81.3757	264.6905708	2.252697929	-63439.09374
0.2	0.3	0.5	-0.19	89.945	357.2943983	2.972365316	-119569.1841
0.1	0.01	0.03	0.0001	56.2512	54.39860615	-0.032934299	204.9891503
0.03	0.04	0.03	0.0003	44.9183	41.70709772	-0.071489844	278.1716746
0.02	0.12	0.04	0.0008	68.4369	66.835063	-0.023406043	216.6836356
0.033333333	0.142857143	0.05	0.002261905	74.8194	81.91696596	0.094862642	-1112.446696
0.05	0.15	0.07	0.0026	80.1321	95.08364455	0.186586206	-2619.746011
0.1	0.1	0.08	0.0036	86.7164	97.71959258	0.126887101	-2029.384746
0.111111111	0.111111111	0.09	0.004245679	90.7918	108.2339742	0.192111778	-3471.442216
0.066666667	0.125	0.06	0.004733333	84.1851	89.70796472	0.065603827	-960.3878724
0.15	0.1	0.08	0.0086	98.3948	115.5887694	0.174744696	-3679.226954
0.3	0.3	0.1	0.08	212.078	254.9096019	0.201961552	-20001.82708
0.5	0.5	0.11	0.2379	353.542	417.2655417	0.180243201	-49118.58651
0.7	0.7	0.12	0.4756	491.786	580.9646994	0.181336393	-95666.51221

Tabel C.9: Tabel bij figuur 4.26

B	kxx^2+kyy^2 + 2kxxkyy + 2kxy^2						
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)**	**fout**
	0.1	0.1	0.06	0.0064	88.5763	92.73857193	4.70%
	0.1	0.1	0.05	0.0075	90.4639	90.70693778	0.27%
	0.1	0.1	0.048	0.007696	90.1767	90.34014189	0.18%
	0.1	0.1	0.045	0.007975	89.7436	89.81543545	0.08%
	0.1	0.1	0.04	0.0084	89.0249	89.01020713	-0.02%
	0.1	0.1	0.03	0.0091	87.6677	87.6678274	0.00%
	0.1	0.1	0.025	0.009375	87.0695	87.13480602	0.08%
	0.1	0.1	0.01	0.0099	85.8155	86.10805805	0.34%
	0.1	0.1	0	0.01	85.5592	85.91109575	0.41%
						gemiddeld	**0.67** %

Tabel C.10: Tabel bij figuur 4.27

C	kxx^2+kyy^2 + kxxkyy + 2kxy^2								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_C**	**fout_oud**	**fout_nieuw**
	0.1	0.01	0.03	0.0001	56.2512	54.39860615	52.81857546	-3.3%	-6.1%
	0.03	0.04	0.03	0.0003	44.9183	41.70709772	39.19431432	-7.1%	-12.7%
	0.02	0.12	0.04	0.0008	68.4369	66.835063	63.72087724	-2.3%	-6.9%
	0.033333333	0.142857143	0.05	0.002261905	74.8194	81.91696596	76.83548653	9.5%	2.7%
	0.05	0.15	0.07	0.0026	80.1321	95.08364455	88.14959546	18.7%	10.0%
	0.1	0.1	0.08	0.0036	86.7164	97.71959258	88.62874476	12.7%	2.2%
	0.066666667	0.125	0.06	0.004733333	84.1851	89.70796472	81.46041137	6.6%	-3.2%
							gemiddeld	**8.6%**	**5.3%**

Tabel C.11: Tabel bij figuur 4.28

D	kxx^2+kyy^2 + 0.5kxxkyy + 2kxy^2								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_C**	**fout_oud**	**fout_C**
	0.1	0.1	0.08	0.0036	84.5376	83.7139308	83.7139308	-1.0%	-1.0%
	0.1	0.1	0.1	0	83.1515	103.7730462	90.70693778	24.8%	9.1%
	0.111111111	0.111111111	0.09	0.004245679	90.7918	108.2339742	92.61445304	19.2%	2.0%
	0.15	0.1	0.08	0.0086	98.3948	115.5887694	97.71959258	17.5%	-0.7%
	0.12	0.2	0.1	0.014	112.237	146.0815075	123.4551541	30.2%	10.0%
	0.2	0.3	0.1	0.05	170.593	215.2770239	176.3451662	26.2%	3.4%
	0.25	0.25	0.1	0.0525	177.131	215.2770239	174.5346484	21.5%	-1.5%
	0.3	0.3	0.1	0.08	212.078	254.9096019	205.2048637	20.2%	-3.2%
	0.4	0.5	0.3	0.11	217.959	410.2643442	342.775292	88.2%	57.3%
	0.4	0.4	0.1	0.15	285.015	335.2800437	267.8715414	17.6%	-6.0%
	0.5	0.5	0.11	0.2379	353.542	417.2655417	332.5404008	18.0%	-5.9%
	0.5	0.6	0.1	0.29	391.902	457.1371535	364.3370421	16.6%	-7.0%
	0.7	0.7	0.12	0.4756	491.786	580.9646994	461.5260018	18.1%	-6.2%
	0.7	0.9	0.1	0.62	548.855	661.5686419	526.8623961	20.5%	-4.0%
							gemiddeld	**24.3%**	**8.4%**

Tabel C.12: Tabel bij figuur 4.29

	kxy	f_(ansys)	f_(formule)_E	f_(formule)_F	fout_E	fout_F
	0.01	25.9781	25.92723362		-0.20%	
	0.03	35.1673	34.84712389		-0.91%	
	0.05	48.3292	47.94291652		-0.80%	
	0.07	62.5673	62.64842413	62.75378506	0.13%	-2.95%
	0.09	66.4735		64.3531294		-3.19%
	0.11	68.5198		66.29807629		-3.24%
	0.15	72.9719		71.10639934		-2.56%
	0.18	76.3763		75.3992137		-1.28%
	0.21	79.6926		80.17675581		0.61%
	0.3	88.6849		96.66550822		9.00%
				gemiddeld	**0.51%**	**3.26%**

Tabel C.13: Tabel bij figuur 4.30

G	**kxx^2+kyy^2 + 0.085kxy^2**								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_G**	**fout_oud**	**fout_G**
	0.1	0.1	0.48	-0.2204	85.1081	292.3066931	85.49996079	243.45%	0.5%
	0.1	0.1	0.4	-0.15	79.6494	248.1748908	79.35058394	211.58%	-0.4%
	0.1	0.1	0.25	-0.0525	70.6914	168.9867482	69.9468321	139.05%	-1.1%
	0.1	0.1	0.18	-0.0224	71.3989	135.4926328	66.77673959	89.77%	-6.5%
	0.1	0.2	0.4	-0.14	81.3757	264.6905708	106.6710284	225.27%	31.1%
	0.2	0.3	0.5	-0.19	89.945	357.2943983	161.948086	297.24%	80.1%
							gemiddeld	**201.06%**	**19.9%**

Tabel C.14: Tabel bij figuur 4.31

H	**kxx^2+kyy^2 + 0.5kxxkyy + 2kxy^2**								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_H**	**fout_oud**	**fout_H**
	0.01	0.01	0.1	-0.0099	62.6993	63.72087724	63.38768482	1.63%	1.1%
	0.01	0.01	0.1	-0.0099	65.379	63.72087724	63.38768482	-2.54%	-3.0%
	0.025	0.025	0.1	-0.009375	61.081	66.45377126	64.4314066	8.80%	5.5%
	0.03	0.04	0.1	-0.0088	63.8571	69.4455122	65.62003909	8.75%	2.8%
	0.05	0.05	0.1	-0.0075	62.9267	75.40989323	68.02838938	19.84%	8.1%
	0.08	0.08	0.1	-0.0036	71.8636	91.26550511	74.95925174	27.00%	4.3%
	0.01	0.01	0.08	-0.0063	61.0777	53.29750318	52.89869786	-12.74%	-13.4%
	0.03	0.03	0.09	-0.0072	60.6402	62.91825119	59.81255594	3.76%	-1.4%
							gemiddeld	**10.63%**	**4.95%**

Tabel C.15: Tabel bij figuur 4.31

I	**kxx^2+kyy^2 + 0.5kxxkyy + 0.5kxy^2**								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_I**	**fout_oud**	**fout_I**
	0.01	0.01	0.28	-0.0783	84.2139	165.0307573	85.36710627	95.97%	1.37%
	0.01	0.01	0.25	-0.0624	81.1908	147.8107782	77.07633653	82.05%	-5.07%
	0.033333333	0.05	0.25	-0.060833333	74.8445	151.5146764	81.55567144	102.44%	8.97%
	0.05	0.1	0.2	-0.035	69.4323	134.0470765	80.83120799	93.06%	16.42%
	0.02	0.05	0.15	-0.0215	66.5499	95.17268571	55.55414637	43.01%	-16.52%
							gemiddeld	**83.31%**	**9.67%**

Tabel C.16: Tabel bij figuur 4.33

J	2kxx^2 + 0.085kxy^2								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_J**	**fout_oud**	**fout_J**
	0.1	0	0.48	-0.2304	91.212	283.4801751	93.42288994	-210.79%	-2.42%
	0.1	0	0.4	-0.16	85.3293	237.7153409	84.71970637	-178.59%	0.71%
	0.1	0	0.25	-0.0625	72.009	153.2133413	70.92391734	-112.77%	1.51%
	0.1	0	0.18	-0.0324	65.7154	115.2217879	66.08566154	-75.33%	-0.56%
							gemiddeld	**144.37%**	**1.30%**

Tabel C.17: Tabel bij figuur 4.34

	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_K**	**fout_oud**	**fout_K**
K1	**kxx^2 + 4kxy^2**								
	0	0	0	0	23.44095707	24.58574522	24.58574522	-4.88%	-4.88%
	0.1	0	0	0	47.36065895	47.94291652	47.94291652	-1.23%	-1.23%
	0.1	0	0.01	-0.0001	48.1906	48.29497419	48.64448396	-0.22%	-0.94%
	0.1	0	0.025	-0.000625	52.26731564	50.10270743	52.17316684	4.14%	0.18%
	0.1	0	0.03	-0.0009	54.2375	51.02406131	53.92945781	5.92%	0.57%
	0.1	0	0.04	-0.0016	58.8277	53.29750318	58.16119364	9.40%	1.13%
K2	**1.8kxx^2 + 0.085kxy^2**								
	0.1	0	0.045	-0.002025	60.7206	54.63166954	60.6871801	10.03%	0.06%
	0.1	0	0.048	-0.002304	60.7096	55.49007217	60.72027093	8.60%	-0.02%
	0.1	0	0.05	-0.0025	60.7035	56.08525147	60.74350676	7.61%	-0.07%
	0.1	0	0.06	-0.0036	60.6925	59.31483453	60.87374734	2.27%	-0.30%
	0.1	0	0.08	-0.0064	60.8132	66.835063	61.20401823	-9.90%	-0.64%
							gemiddeld	**5.84%**	**0.91%**

Tabel C.18: Tabel bij figuur 4.35

L	0.085kxx^2 +2kxy^2								
	kxx	**kyy**	**kxy**	**kG**	**f_(ansys)**	**f_(formule)_oud**	**f_(formule)_L**	**fout_oud**	**fout_L**
	0.01		0.08	-0.0064	61.8867	52.81857546	52.67163586	14.65%	14.89%
	0.01		0.09	-0.0081	61.365	58.01537556	57.88163018	5.46%	5.68%
	0.025		0.1	-0.01	63.7071	64.01926776	63.25810096	-0.49%	0.70%
	0.03		0.1	-0.01	62.442	64.38208924	63.28939258	-3.11%	-1.36%
	0.05		0.1	-0.01	61.2826	66.45377126	63.4711469	-8.44%	-3.57%
	0.08		0.1	-0.01	60.9699	71.2515882	63.91200766	-16.86%	-4.83%
	0.1		0.1	-0.01	61.1982	75.40989323	64.31627393	-23.22%	-5.10%
	0.25		0.1	-0.01	68.8142	120.7496997	69.9468321	-75.47%	-1.65%
	0.3		0.1	-0.01	82.6031	138.7053244	72.72239592	-67.92%	11.96%
	0.4		0.1	-0.01	72.8876	176.3451662	79.35058394	-141.94%	-8.87%
	0.5		0.11	-0.0121	92.8407	216.9232677	91.12618426	-133.65%	1.85%
	0.7		0.12	-0.0144	116.459	297.4769213	111.9783122	-155.43%	3.85%
							gemiddeld	**53.89%**	**5.36%**

Tabel C.19: Tabel bij figuur 5.1

l	t	kxx	kyy	f_(formule)	l/t	(kxx+kyy)	f_(ansys)	fout
0.6	0.02	0.6	0.6	564.4198985	30	1.2	522.464	8.03%
0.5	0.005	0.6	0.6	503.6036259	100	1.2	498.428	1.04%
1	0.001	0.6	0.6	493.9326356	1000	1.2	450.296	9.69%
1	0.03	0.5	0.5	437.2264366	33.33333333	1	423.136	3.33%
1	0.01	0.5	0.5	414.5169153	100	1	402.432	3.00%
1	0.0025	0.5	0.5	411.7736664	400	1	395.269	4.18%
1	0.0014	0.5	0.5	411.6476979	714.2857143	1	390.872	5.32%
1	0.001	0.5	0.5	411.6195039	1000	1	388.419	5.97%
0.6	0.02	0.5	0.5	493.9949284	30	1	485.292	1.79%
0.6	0.02	0.55	0.55	528.7781587	30	1.1	518.583	1.97%
1.6	0.004	0.5	0.5	411.6618355	400	1	356.76	15.39%
1.6	0.004	0.4	0.4	329.3617301	400	0.8	303.77	8.42%
4.9	0.007	0.4	0.4	329.2752271	700	0.8	129.258	154.74%
4.9	0.007	0.2	0.2	164.6422945	700	0.4	126.43	30.22%
4.9	0.007	0.1	0.1	82.33050851	700	0.2	78.4221	4.98%
1	0.004	0.5	0.5	412.0598152	250	1	398.155	3.49%
1	0.004	0.55	0.55	453.1761724	250	1.1	433.625	4.51%
1.1	0.002	0.3	0.3	247.0877862	550	0.6	243.496	1.48%
1.1	0.002	0.4	0.4	329.3723981	550	0.8	318.805	3.31%
1	0.00115	0.5	0.5	411.6289755	869.5652174	1	389.727	5.62%

Tabel C.20: Tabel bij figuur 5.2

l	t	kxx	kyy	kxy	l/t	0.5(kxx+kyy)	kG	f_(formule)	f_(ansys)
1	0.033	0.5	0.5	0.07	30.3030303	0.5	0.2451	444.2936518	429.915
1	0.033	0.55	0.55	0.075	30.3030303	0.55	0.296875	482.92633	464.351
1	0.033	0.6	0.6	0.08	30.3030303	0.6	0.3536	521.9615895	498.436
1	0.033	0.5	0.5	0.08	30.3030303	0.5	0.2436	444.8652249	430.585
1	0.033	0.4	0.4	0.08	30.3030303	0.4	0.1536	370.025338	362.556
1	0.033	0.3	0.3	0.08	30.3030303	0.3	0.0836	299.1403487	296.569
1	0.033	0.1	0.1	0.06	30.3030303	0.1	0.0064	185.2733444	186.101
1	0.033	0.1	0.1	0.07	30.3030303	0.1	0.0051	186.4582229	188.492
1	0.033	0.1	0.1	0.08	30.3030303	0.1	0.0036	187.8161021	191.211
1	0.033	0.1	0.1	0.09	30.3030303	0.1	0.0019	189.34326	194.242
1	0.01	0.1	0.1	0.09	100	0.1	0.0019	109.2633391	117.522
1	0.01	0.6	0.6	0.08	100	0.6	0.3536	498.5293452	462.538
1	0.004	0.1	0.1	0.08	250	0.1	0.0036	96.59975974	77.2867
1	0.004	0.1	0.1	0.07	250	0.1	0.0051	93.93239201	79.5828
1	0.004	0.1	0.1	0.06	250	0.1	0.0064	91.55783708	81.9487
1	0.004	0.1	0.1	0.05	250	0.1	0.0075	89.49940429	84.3545
1	0.004	0.1	0.1	0.04	250	0.1	0.0084	87.77933573	84.638
1	0.004	0.6	0.6	0.08	250	0.6	0.3536	496.4881935	437.512
1	0.004	0.6	0.6	0.07	250	0.6	0.3551	495.9761153	442.862
1	0.004	0.6	0.6	0.06	250	0.6	0.3564	495.5318862	448.058
1	0.004	0.6	0.6	0.05	250	0.6	0.3575	495.1556887	453.05
1	0.0025	0.1	0.1	0.04	400	0.1	0.0084	86.42611192	75.7272
1	0.0025	0.1	0.1	0.03	400	0.1	0.0091	85.04295273	78.5244
1	0.0025	0.5	0.5	0.08	400	0.5	0.2436	414.3983045	357.097
1	0.0025	0.4	0.4	0.06	400	0.4	0.1564	331.3471912	293.212
1	0.0025	0.3	0.3	0.05	400	0.3	0.0875	248.9667939	221.698
1	0.0025	0.3	0.3	0.04	400	0.3	0.0884	248.3536447	227.343
1	0.0025	0.5	0.5	0.06	400	0.5	0.2464	413.2520764	369.153
1	0.0025	0.5	0.5	0.05	400	0.5	0.2475	412.8009018	374.96
1	0.0025	0.5	0.5	0.04	400	0.5	0.2484	412.4313918	380.552
1	0.0025	0.6	0.6	0.05	400	0.6	0.3575	494.9175861	447.207
1	0.0025	0.6	0.6	0.04	400	0.6	0.3584	494.6094272	452.03
1	0.0018	0.1	0.1	0.04	555.5555556	0.1	0.0084	86.00404627	69.8288
1	0.0018	0.1	0.1	0.02	555.5555556	0.1	0.0096	83.60694065	77.9894
1	0.0018	0.6	0.6	0.04	555.5555556	0.6	0.3584	494.5358517	448.359
1	0.0018	0.6	0.6	0.03	555.5555556	0.6	0.3591	494.2960041	452.329
1	0.0018	0.6	0.6	0.05	555.5555556	0.6	0.3575	494.8440565	443.697
1	0.00115	0.1	0.1	0.02	869.5652174	0.1	0.0096	83.32921774	74.4167
1	0.00115	0.1	0.1	0.01	869.5652174	0.1	0.0099	82.71707603	79.4449
1	0.00115	0.6	0.6	0.05	869.5652174	0.6	0.3575	494.7972092	438.975
1	0.00115	0.6	0.6	0.04	869.5652174	0.6	0.3584	494.4889753	443.296
1	0.00115	0.6	0.6	0.03	869.5652174	0.6	0.3591	494.2491048	446.924
1	0.001	0.1	0.1	0.01	1000	0.1	0.0099	82.66992892	78.9001
1	0.001	0.6	0.6	0.02	1000	0.6	0.3596	494.0698065	448.045
1	0.001	0.6	0.6	0.01	1000	0.6	0.3599	493.9669319	449.79

Tabel C.21: Tabel bij figuur 5.3

l	t	kxx	kyy	kxy	l/t	0.5(kxx+kyy)	kG	f_(formule)	f_(ansys)	fout
1	0.033	0.09	0.09	0.08	30.3030303	0.09	0.0017	180.5968082	187.933	-3.90%
1	0.033	0.09	0.09	0.01	30.3030303	0.09	0.008	174.5871875	175.944	-0.77%
1	0.004	0.09	0.09	0.09	250	0.09	0	85.13409657	69.8425	21.89%
1	0.004	0.09	0.09	0.08	250	0.09	0.0017	81.68128618	71.7541	13.84%
1	0.004	0.09	0.09	0.07	250	0.09	0.0032	78.50868231	73.7837	6.40%
1	0.004	0.09	0.09	0.01	250	0.09	0.008	67.35956797	76.73	-12.21%
1	0.004	0.09	0.09	0.02	250	0.09	0.0077	68.10987638	77.0285	-11.58%
1	0.004	0.09	0.09	0.03	250	0.09	0.0072	69.3423514	77.4553	-10.47%
1	0.0018	0.09	0.09	0.07	555.5555556	0.09	0.0032	76.51860814	51.7396	47.89%
1	0.0018	0.09	0.09	0.05	555.5555556	0.09	0.0056	71.00666512	59.3206	19.70%
1	0.0018	0.09	0.09	0.03	555.5555556	0.09	0.0072	67.08089066	66.7132	0.55%
1	0.0018	0.09	0.09	0.04	555.5555556	0.09	0.0065	68.8259755	62.9386	9.35%
1	0.0018	0.09	0.09	0.01	555.5555556	0.09	0.008	65.0291903	77.2867	-15.86%
1	0.0018	0.09	0.09	0.02	555.5555556	0.09	0.0077	65.80607459	70.385	-6.51%
1	0.00115	0.09	0.09	0.04	869.5652174	0.09	0.0065	68.48834141	56.5888	21.03%
1	0.00115	0.09	0.09	0.03	869.5652174	0.09	0.0072	66.73442812	61.5869	8.36%
1	0.00115	0.09	0.09	0.035	869.5652174	0.09	0.006875	67.5544083	59.0686	14.37%
1	0.00115	0.09	0.09	0.033	869.5652174	0.09	0.007011	67.21249534	60.0723	11.89%
1	0.00115	0.09	0.09	0.032	869.5652174	0.09	0.007076	67.04846525	60.5761	10.68%
1	0.00115	0.09	0.09	0.031	869.5652174	0.09	0.007139	66.88909837	61.081	9.51%
1	0.001	0.09	0.09	0.03	1000	0.09	0.0072	66.67598051	60.3445	10.49%
1	0.001	0.09	0.09	0.028	1000	0.09	0.007316	66.3806002	61.87	7.29%
1	0.001	0.09	0.09	0.02	1000	0.09	0.0077	65.39327136	65.7173	-0.49%
1	0.001	0.09	0.09	0.01	1000	0.09	0.008	64.61142373	70.9062	-8.88%

Tabel C.22: Tabel bij figuur 5.4

l	t	kxx	kyy	kxy	l/t	0.5(kxx+kyy)	kG	f_(formule)	f_(ansys)	fout
1	0.033	0.1	0.1	0.1	30.3030303	0.1	0	184.264804	197.572	-6.74%
1	0.004	0.1	0.1	0.1	250	0.1	0	89.49940429	73.0106	22.58%
1	0.004	0.1	0.1	0.08	250	0.1	0.0036	82.40398666	77.2867	6.62%
1	0.0018	0.1	0.1	0.08	555.5555556	0.1	0.0036	80.51025532	54.0979	48.82%
1	0.0018	0.12	0.12	0.08	555.5555556	0.12	0.008	91.35300775	66.7423	36.87%
1	0.0018	0.2	0.2	0.08	555.5555556	0.2	0.0336	138.5185332	122.485	13.09%
1	0.0018	0.2	0.2	0.09	555.5555556	0.2	0.0319	140.582239	116.834	20.33%
1	0.0018	0.25	0.25	0.08	555.5555556	0.25	0.0561	169.4594233	160.408	5.64%
1	0.00115	0.25	0.25	0.08	869.5652174	0.25	0.0561	169.3225743	154.52	9.58%
1	0.001	0.25	0.25	0.08	1000	0.25	0.0561	169.2995471	153.09	10.59%
1	0.001	0.28	0.28	0.08	1000	0.28	0.072	188.1388916	176.762	6.44%
1	0.033	0.6	0.6	0.08	30.3030303	0.6	0.3536	425.3991356	498.436	-14.65%
1	0.033	0.6	0.6	0.09	30.3030303	0.6	0.3519	426.0755877	498.927	-14.60%
1	0.033	0.6	0.6	0.15	30.3030303	0.6	0.3375	431.7630274	503.015	-14.16%
1	0.033	0.5	0.5	0.08	30.3030303	0.5	0.2436	366.5755778	430.585	-14.87%
1	0.033	0.5	0.5	0.1	30.3030303	0.5	0.24	368.2354961	432.186	-14.80%
1	0.033	0.5	0.5	0.3	30.3030303	0.5	0.16	403.3638687	464.862	-13.23%
1	0.033	0.5	0.5	0.4	30.3030303	0.5	0.09	431.7630274	465.083	-7.16%
1	0.01	0.5	0.5	0.4	100	0.5	0.09	403.1214693	266.82	51.08%
1	0.01	0.5	0.5	0.49	100	0.5	0.0099	435.4834444	234.803	85.47%
1	0.01	0.6	0.6	0.5	100	0.6	0.11	489.4760956	282.877	73.03%
1	0.01	0.6	0.6	0.1	100	0.6	0.35	397.8338322	455.76	-12.71%
1	0.01	0.6	0.6	0.15	100	0.6	0.3375	403.1214693	435.95	-7.53%
1	0.01	1	1	0.1	100	1	0.99	655.2267228	701.999	-6.66%
1	0.004	1	1	0.1	250	1	0.99	653.6750542	652.37	0.20%
1	0.004	1	1	1	250	1	0	873.336031	172.084	407.51%
1	0.004	1	1	0.3	250	1	0.91	674.0890939	572.449	17.76%
1	0.004	1	1	0.2	250	1	0.96	661.4041599	617.397	7.13%
1	0.033	1	1	0.1	30.3030303	1	0.99	673.2268942	745.895	-9.74%
1	0.0018	1	1	0.2	555.5555556	1	0.96	661.1708909	580.574	13.88%
1	0.0018	0.9	0.9	0.2	555.5555556	0.9	0.77	597.225995	547.692	9.04%
1	0.0018	1	1	0.3	555.5555556	1	0.91	673.860216	536.675	25.56%
1	0.00115	0.9	0.9	0.3	869.5652174	0.9	0.72	611.2063243	481.074	27.05%
1	0.00115	0.9	0.9	0.5	869.5652174	0.9	0.56	654.0513977	347.658	88.13%
1	0.00115	0.7	0.7	0.2	869.5652174	0.7	0.45	470.220562	416.354	12.94%
1	0.00115	0.7	0.7	0.3	869.5652174	0.7	0.4	487.9016507	345.66	41.15%
1	0.001	0.6	0.6	0.1	1000	0.6	0.35	394.8140081	409.41	-3.57%
1	0.001	0.7	0.7	0.1	1000	0.7	0.48	459.2768154	477.211	-3.76%

Tabel C.23: Tabel bij figuur 5.5

l/t	kxy (bij het omslagpunt)
100	0.21
100	0.11
200	0.07
231.4285714	0.06
250	0.055
250	0.09
270	0.05
324	0.045
360	0.045
405	0.035
490	0.025
500	0.01
540	0.025
640	0.02
810	0.015