Technische Universiteit Delft

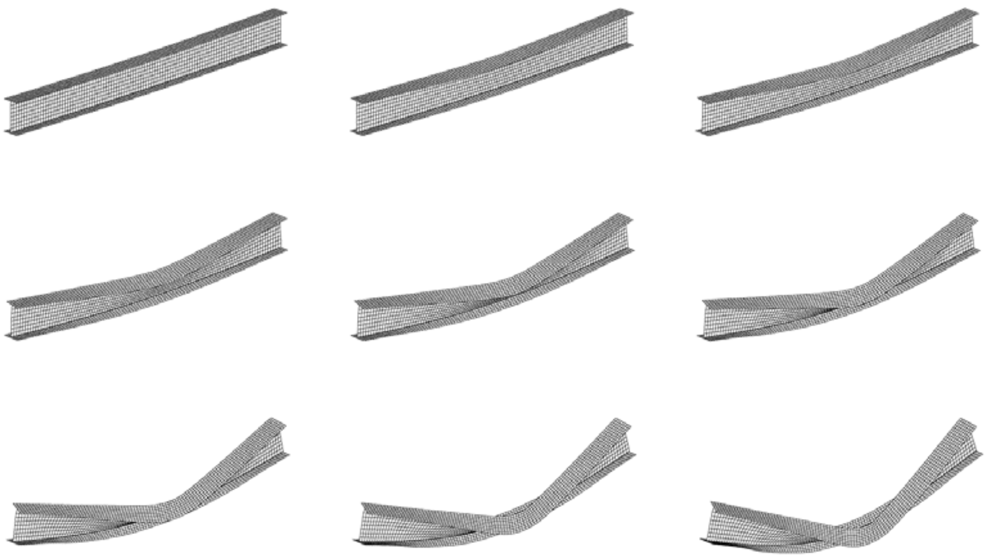
Bachelor eindwerk

Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen

Tim Hooijkaas, 1046934

Delft, oktober 2004

Begeleiders:
dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
ir. J.W. Welleman



Voorwoord

Voor u ligt het eindrapport van mijn bachelor-eindwerk, dat gemaakt is in het kader van de afsluiting van de bachelorfase van mijn studie Civiele Techniek aan de TU Delft.

De bachelor-eindwerken worden aangeboden door de zes mastervarianten van de opleiding Civiele Techniek. Ik heb gekozen voor een eindwerk van de mastervariant Structural Engineering, omdat die richting mij tot nu toe het meest interesseert. Mijn keuze voor juist deze opdracht werd bepaald door het fundamentele karakter van de opdracht.

Dit eindrapport is het resultaat van zeven weken studie. Gedurende deze weken heb ik veelvuldig gebruik kunnen maken van het advies en de begeleiding van mijn beide begeleiders: dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. J.W. Welleman. Ik wil hen bij deze daarvoor dan ook hartelijk bedanken.

T.C. Hooijkaas

Delft, oktober 2004

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Kipcontrole van liggers is een vaak terugkerende taak in de constructiepraktijk. Vandaar dat veel raamwerkprogramma's kipcontroles automatisch uitvoeren. Hierbij worden benaderingsformules gebruikt uit de geldende normen. Deze aanpak is weliswaar veilig, maar niet erg nauwkeurig.
Het nauwkeurige kipgedrag wordt beschreven door twee gekoppelde differentiaal-vergelijkingen. In principe kan hiermee de stijfheidsmatrix van een tweedimensionaal raamwerkelement worden afgeleid. Met deze stijfheidsmatrix kunnen raamwerkprogramma's nauwkeurig de invloed van kip op het constructiegedrag laten zien.

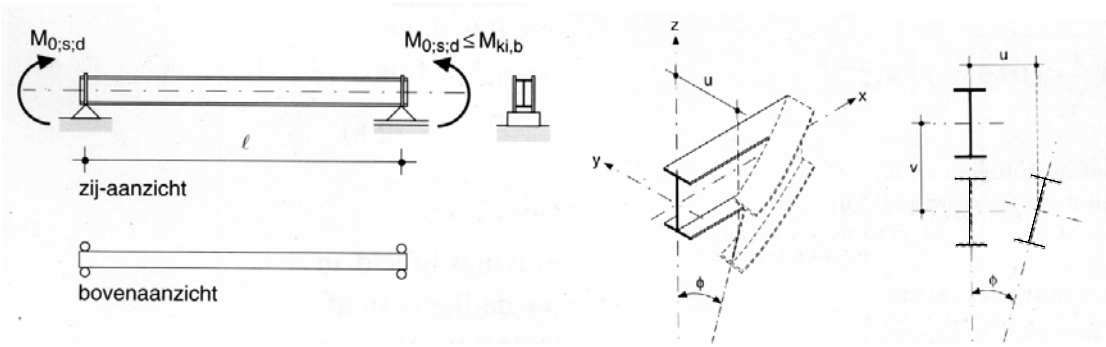
Doel van dit bachelor-eindwerk is het afleiden van de elementstijfheidsmatrix voor buiging in het ***xy***-vlak, met het effect van kip ten gevolge van twee randmomenten M_y, meegenomen.

Allereerst wordt in hoofdstuk 2 een algemene beschrijving gegeven van het kipmechanisme en de factoren die van invloed zijn op het wel en niet optreden van kip. Vervolgens wordt het kipmechanisme wiskundig beschreven in hoofdstuk 3. Het resultaat van deze wiskundige beschrijving is een stelsel van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen.
Met behulp van deze differentiaalvergelijkingen kan nu in hoofdstuk 4 de stijfheidsmatrix worden afgeleid. In de laatste paragraaf van hoofdstuk 4 wordt de gevonden matrix aan een aantal controleberekeningen onderworpen. In hoofdstuk 5 wordt een toepassing van de matrix uitgewerkt. De 1^e orde uitwijking van een ingeklemde staaf wordt hier vergeleken met de 2^e orde uitwijking ten gevolge van kip.
Tenslotte wordt het rapport afgesloten met conclusies en aanbevelingen (H6).

2 Beschrijving kipmechanisme

2.1 Algemeen

Wanneer een ligger wordt belast op buiging in het vlak met de grootste buigstijfheid, dus om de sterke as, heeft de gedrukte bovenflens de neiging zich in zijdelingse richting te verplaatsen (uit te knikken). De getrokken onderflens zal echter recht willen blijven. Naast een zijwaartse verplaatsing treedt er dus ook een rotatie van het profiel op.
Deze vorm van instabiliteit, waarbij het profiel een zijwaartse verplaatsing en een rotatie ondergaat, wordt kipinstabiliteit genoemd.



Figuur 1: Een op buiging belaste ligger ondergaat een zijwaartse verplaatsing en een rotatie

2.2 Invloedsfactoren

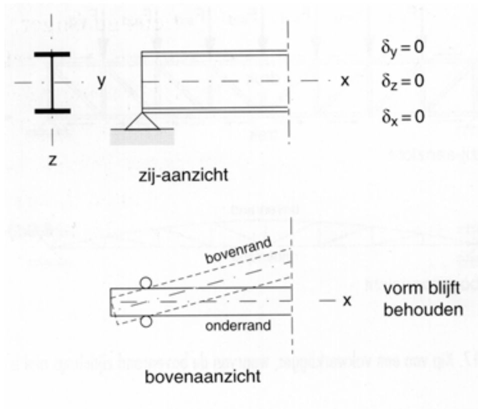
Het moment waarbij kip optreedt, het zogenaamde theoretisch elastisch kipmoment, is afhankelijk van een groot aantal factoren:

doorsnedegrootheden:	zijdelingse buigstijfheid EI_{yy}
	torsiestijfheid GI_t
	welvingsstijfheid EI_w
randvoorwaarden:	oplegcondities
	statisch systeem
	aanwezigheid van kipsteunen
belastingcondities:	plaats en soort van de belasting
	aangrijpingspunt van de belasting

De invloed van de doorsnedegrootheden worden in hoofdstuk 3 besproken.

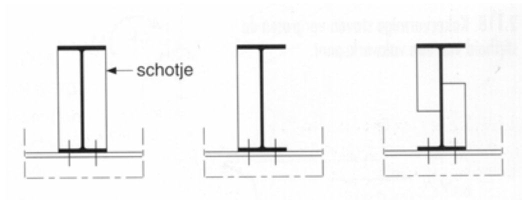
2.2.1 Oplegcondities

Bij de “klassieke” kipberekeningen gaat men uit van zogeheten gaffelopleggingen. Kenmerkend voor deze soort oplegging is dat translatie van het profiel in de *x*- en *y*-richting wordt verhinderd, evenals rotatie om de *x*-as. Daarbij blijft de vorm van de doorsnede behouden. De rotatie om de verticale *z*-as wordt echter niet verhinderd, zodat het einde van ligger kan welven (Figuur 2).



Figuur 2: I-profiel opgelegd op gaffeloplegging

In de praktijk ontstaat een gaffeloplegging door het inlassen van schotjes (Figuur 3). Omdat het aanbrengen van schotjes relatief duur is, wordt vaak gekozen voor een oplegging, waarbij slechts de onderflens gefixeerd is (Figuur 4).



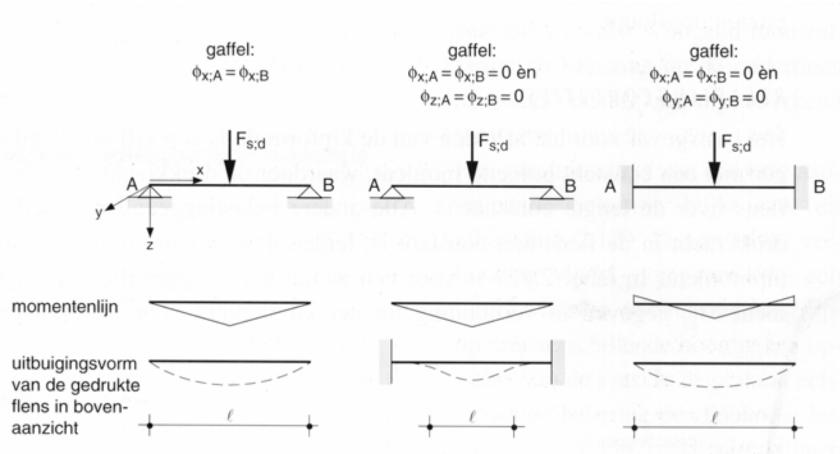
Figuur 3: Detaillering van een gaffeloplegging

Figuur 4: Onderflensinklemming

Omdat schotjes hier ontbreken, kan de profieldoorsnede vrij vervormen. Bij liggers met een korte overspanning neemt de toelaatbare kipbelasting daarom sterk af. Wanneer de overspanning toeneemt, hebben de randvoorwaarden een steeds geringere invloed op de toelaatbare kipbelasting. Bij grotere overspanningen is het daarom altijd economisch de minder arbeidsintensieve oplegging door onderflensinklemming te gebruiken.

2.2.2 Statisch systeem

Een gehele of gedeeltelijke inklemming, waarbij de rotatie om de *y*-as of de *z*-as wordt verhinderd, heeft een gunstige invloed op de kipstabiliteit. Door het verhinderen van de rotatie om de verticale z-as wordt de uitbuigingsvorm van de bovenflens gunstiger. De kniklengte van de gedrukte bovenflens neemt hierdoor namelijk aanzienlijk af (Figuur 5).



Figuur 5: Invloed van de opleggingen op de uitbuigingsvorm

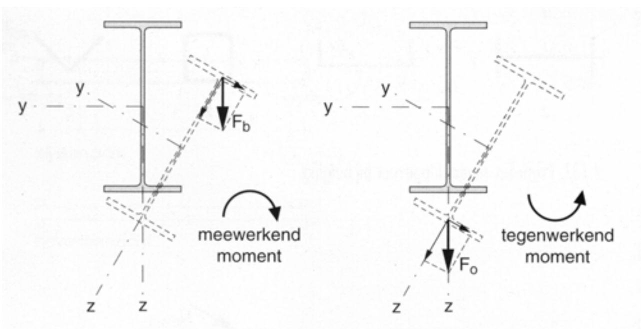
Door verhindering van rotatie om de *y*-as ontstaan steunpuntsmomenten, waardoor het veldmoment afneemt. In principe is dit gunstig. Wel ontstaat het gevaar van instabiliteit in de dan gedrukte onderflens, wanneer rotatie om de zwakke as niet wordt verhinderd.

2.2.3 Aanwezigheid van kipsteunen

Het aanbrengen van zijdelingse steunen aan de gedrukte bovenrand is meestal gunstig, omdat de kniklengte daardoor verkort. Zijdelingse steunen uitgevoerd als gordingen, vervullen vaak zowel de functie van kipsteun als die van kniklengteverkorter. Een soortgelijke situatie is te vinden bij een (vloer)constructie met moer- en kinderbalken, vooropgesteld dat de kinderbalken de axiale steunkrachten kunnen afdragen.
In elke gevallen, namelijk bij opwaartse belasting of liggers over meerdere steunpunten, moet rekening gehouden worden met gevaar voor kippen van de onderflens.

2.2.4 Belastingcondities

In dit eindwerk worden alleen liggers (elementen) beschouwd met een constant buigend moment. Hierdoor is de drukkracht in de bovenflens over de lengte constant. Andere belastinggevallen, waarbij de drukkracht in de flens niet constant is, leiden tot een groter toelaatbaar kipmoment.
Wanneer de belasting een zijdelingse vervorming door kip vrij kan meemaken, speelt ook de hoogte waar de belasting op het profiel aangrijpt een belangrijke rol (Figuur 6).



Figuur 6: Een belasting op de bovenflens is ongunstiger dan een belasting op de onderflens

Grijpt de belasting op de bovenflens aan, dan veroorzaakt de belasting in de uitgebogen toestand een meewerkend wringend moment. Grijpt de belasting daarentegen aan in de onderflens, dan ontstaat een tegenwerkend (stabiliserend) wringend moment.
In dit eindwerk wordt aangenomen dat alle belastingen in het zwaartepunt van het profiel aangrijpen.

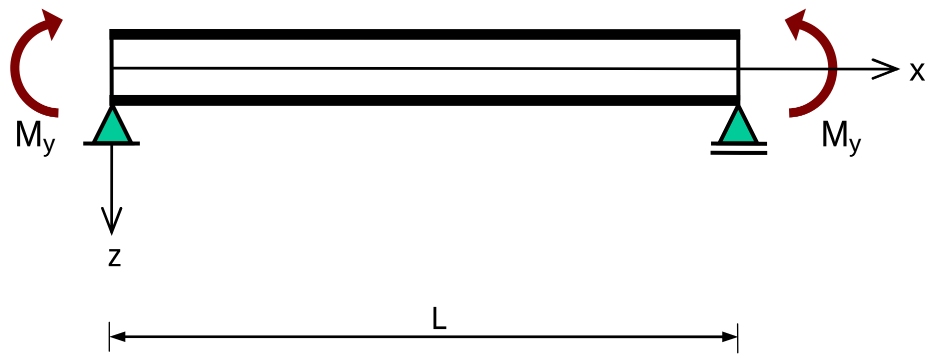
Bij dit hoofdstuk is gebruikt gemaakt van literatuur [9].

3 Analytische beschrijving kipgedrag

In deze paragraaf wordt een analytische beschouwing van het in de vorige paragraaf beschreven kipmechanisme gemaakt. In deze analytische beschouwing wordt het theoretische kipgedrag beschreven van een I-profiel belast door twee randmomenten M_y.
Via de methode van potentiële energie zullen uiteindelijk twee gekoppelde differentiaal-vergelijkingen worden afgeleid, welke het kipgedrag beschrijven.

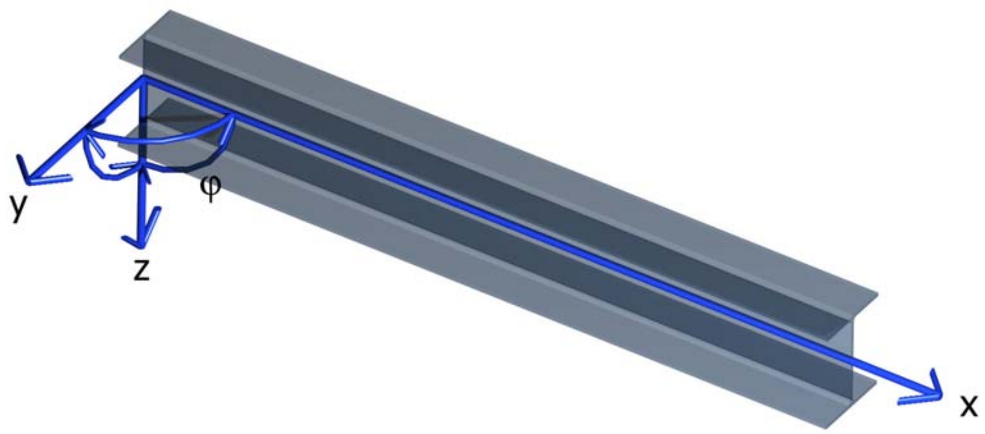
3.1 Definities

Het basisgeval voor kip wordt beschouwd (Figuur 7):



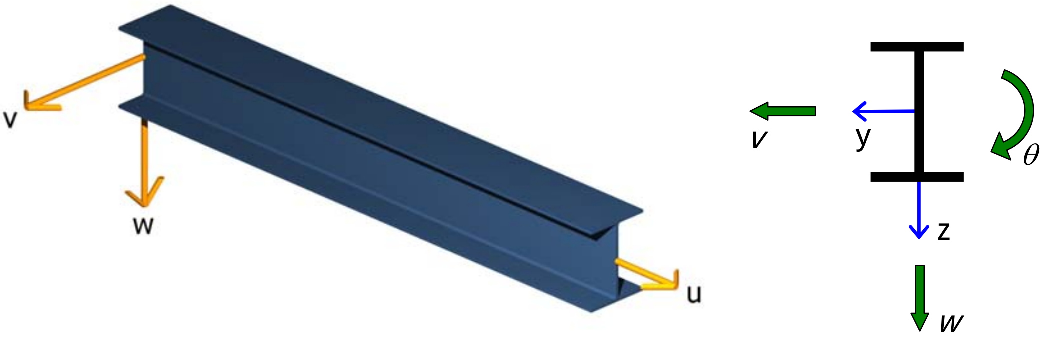
Figuur 7: I-profiel ligger belast met twee randmomenten M_y

Er wordt een assenstelsel gebruikt waarbij de x-as samenvalt met de staafas (Figuur 8):



Figuur 8: Assenstelsel

waarbij de volgende verplaatsingen gedefinieerd worden:



Figuur 9: Verplaatsingen

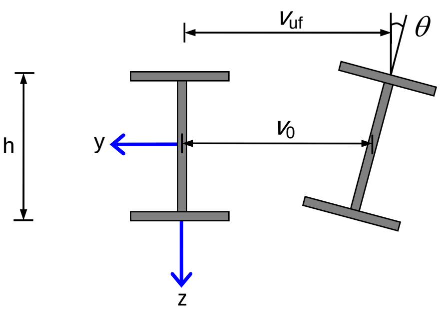
3.2 Bepalen differentiaalvergelijkingen

In deze paragraaf wordt het principe van minimale potentiële energie gebruikt. De essentie van dit principe is, dat wanneer een constructie, waarvan de potentiële energie minimaal is, geen potentiële energie om kan zetten in kinetische energie. Wanneer de constructie dus in evenwicht is, wordt evenwicht ook behouden. Ook kleine verstoringen leiden slechts tot een (gedempte) beweging rond dit evenwicht.
Voor het bepalen van deze staat van rust wordt eerst een uitdrukking voor de totale potentiële energie van de constructie bepaald. Gelijkstellen aan nul van de eerste variatie van deze uitdrukking, levert een uitdrukking voor het evenwicht van de constructie.

Voor de in de vorige paragraaf beschreven ligger geldt dat voor de vervormingsbijdrage aan de potentiële energie geldt:

$$P_{def} = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EI_{yy} \left(v_0' \right)^2 + \frac{1}{2} S_t \left(\theta' \right)^2 + \frac{1}{2} E\Gamma \left(\theta'' \right)^2 \right\} dx \qquad (1)$$

waarbij v_0 de laterale verplaatsing voorstelt:

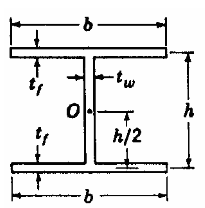


Figuur 10: Verplaatsing van de bovenflens

De torsiestijfheid S_t wordt gegeven door:

$$S_t = G \frac{\left(2bt_f^2 + ht_w^2 \right)}{3}$$

met:



waarbij G de glijdingsmodulus voorstelt. Zie ook bijlage D .

De parameter Γ in vergelijking (1) stelt de welvingsstijfheid voor. Verderop in deze beschouwing zal blijken dat de welvingsbijdrage aan de potentiële energie wordt verwaarloosd. Ook de afleiding van de welvingsfunctie $\Psi(y,z)$, welke de welvingsstijfheid Γ bepaald, wordt hier daarom achterwege gelaten.

In vergelijking (1) zijn de zakkingstermen met w_0 weggelaten, omdat deze **niet van invloed** zijn op de laterale verplaatsing v_0.

Voor de <u>belastingsbijdrage</u> aan de potentiële energie geldt:

$$P_{load} = -\int\int\int \tfrac{1}{2}\sigma \left\{ (v')^2 + (w')^2 \right\} dxdydz \tag{2}$$

Via $\sigma = \dfrac{M_y z}{I_{zz}}$ en $v(z) = v_0 - z\theta$ kan deze belastingsbijdrage worden omgeschreven naar:

$$P_{load} = -\frac{1}{2}\int \frac{M_y}{I_{zz}} \int\int z \left\{ \left(v_0' - z\theta'\right)^2 + (w')^2 \right\} dydzdx \qquad => \tag{3}$$

$$P_{load} = -\frac{1}{2}\int \frac{M_y}{I_{zz}} \int\int \left\{ z\left(v_0'\right)^2 - 2v_0'\theta' z^2 + \theta' z^3 + z\left(w_0'\right)^2 \right\} dydzdx$$

Voor symmetrische doorsneden geldt dat de termen in de integraal met z en z^3 nul worden. Zo blijven alleen de termen met z^2 over:

$$P_{load} = -\frac{1}{2}\int \frac{M_y}{I_{zz}} v_0'\theta' \int\int \left(2z^2 dydz\right) dx = -\int M_y v_0'\theta' dx \qquad \text{omdat: } \int\int z^2 dydz = I_{zz}$$

Hiermee wordt de <u>totale uitdrukking</u> voor de potentiële energie:

$$P_{tot} = P_{def} + P_{load} = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EI_{yy} \left(v_0'\right)^2 + \frac{1}{2} S_t \left(\theta'\right)^2 + \frac{1}{2} E\Gamma \left(\theta''\right)^2 \right\} dx - \int_0^l M_y v_0'\theta' dx \tag{4}$$

Ter vereenvoudiging wordt vervolgens de welvingsterm $\frac{1}{2} E\Gamma \left(\theta''\right)^2$ verwaarloosd:

$$P = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EI_{yy} \left(v_0''\right)^2 + \frac{1}{2} S_t \left(\theta'\right)^2 \right\} dx - \int_0^l M_y v_0'\theta' dx$$

In de volgende paragraaf zal aandacht besteed worden aan de gevolgen van deze vereenvoudiging.

Voor de eerste variatie van de potentiële energie kan nu geschreven worden:

$$\delta P = \int_0^l \left(EI_{yy} v_0'' \delta v_0'' + S_t \theta' \delta\theta' - M_y \theta' \delta v_0' - M_y v_0' \delta\theta' \right) dx$$

Uitwerken van het rechterlid door middel van partiële integratie levert:

$$\delta P = \int_0^l \left(EI_{yy} v_0'''' \delta v_0 - S_t \theta'' \delta\theta + M_y \theta'' \delta v_0 + M_y v_0'' \delta\theta \right) dx$$

Omdat θ en v_0 twee onafhankelijke variabelen zijn, is nu het volgende stelsel gekoppelde differentiaalvergelijkingen geldig:

$$EI_{yy} v_0'''' + M_y \theta'' = 0 \tag{5}$$

$$-S_t \theta'' + M_y v_0'' = 0 \tag{6}$$

3.3 Aannamen en vereenvoudigingen

In de afleiding van de in de vorige paragraaf gevonden differentiaalvergelijkingen (5) en (6) zijn een aantal aannamen gedaan. Ook zijn er een aantal vereenvoudigingen gemaakt. De differentiaalvergelijkingen zijn daarom niet blindelings toepasbaar.
In deze paragraaf worden de aannamen en vereenvoudigingen en de gevolgen hiervan toegelicht.

3.3.1 Invloed van w_0 op v_0

In de eerste vergelijking (1) van de afleiding worden de termen met w_0 direct al weggelaten. Daarmee wordt de aanname gedaan dat de zakking w_0 geen invloed heeft op de laterale verplaatsing v_0. Uit verschillende literatuurstukken over kip blijkt dat deze aanname juist is.
Deze aanname heeft tot gevolg dat de originele opdracht, het bepalen van de 2e orde stijfheidsmatrix voor kip, moet worden aangepast. De opdracht wordt nu: het bepalen van de 2e orde elementstijfheidsmatrix voor buiging in het ***xy***-vlak, met het effect van kip, ten gevolge van twee randmomenten M_y, meegenomen.

3.3.2 Symmetrische doorsnede

De gevonden differentiaalvergelijkingen gelden alleen voor profielen met een symmetrische doorsnede. In de afleiding is namelijk gebruik gemaakt van het feit dat dergelijke doorsneden de uitdrukking voor de belastingsterm van de potentiële energie behoorlijk versimpelen.
Wanneer niet-symmetrische profielen zouden worden gebruikt, zou deze vereenvoudiging niet gemaakt kunnen worden. Het probleem wordt dan ook complexer omdat de richtingen van de krommingen niet meer met de richtingen van de hoofdassen van het profiel zouden samenvallen.

3.3.3 Constant moment M_y

Hoewel dit in de afleiding niet direct wordt genoemd is één van de belangrijkste vereenvoudigingen dat het moment M_y in de ligger constant moet zijn. Samen met de aanname dat de ligger een homogene prismatische staaf is, kan dan gezegd worden dat de normaalkracht in elke vezel over de gehele lengte van de ligger constant is.
In de afleiding is terug te zien dat M_y constant verondersteld is. Wanneer M_y niet constant is, kunnen termen hiervan namelijk niet zomaar buiten de integraal van de potentiële energie gehaald worden (zie vergelijking 3).
Hoewel de afleiding ervan in dit verslag te ver zou voeren, zouden de differentiaal-vergelijkingen in dat geval overgaan in:

$$EI_{yy}v_0'''' + \left(M_y\theta\right)'' = 0$$

$$-S_t\theta'' + M_y v_0'' = 0$$

De eerste differentiaalvergelijking verandert dan dus in een differentiaalvergelijking met niet-lineaire, niet-constante termen. In bijlage B is een korte beschrijving te vinden van een poging om de differentiaalvergelijking op te lossen voor een ligger met een lineair verlopend moment $M_y(x)$.

3.3.4 Verwaarlozing welvingsstijfheid

In de afleiding wordt het al genoemd: ter vereenvoudiging wordt de welvingsterm verwaarloosd. De exactheid van de differentiaalvergelijkingen hangt daarom af van een aantal factoren, die de grootte van deze welvingsterm bepalen.
De welvingsstijfheid zelf bijvoorbeeld is een doorsnedegrootheid en wordt dus bepaald door de vorm van de doorsnede. Voor een I-profiel geldt dat de welvingsstijfheid ongeveer gelijk is aan:

$$\Gamma \approx \frac{1}{4} h^2 I_{zz}$$

De welvingsstijfheid en daarmee de verwaarloosde welvingsterm neemt dus kwadratisch toe met de profielhoogte. Wanneer de welvingsterm niet verwaarloosd zou worden, zouden de volgende differentiaalvergelijkingen gevonden zijn:

$$EI_{yy} v_0'''' + M_y \theta'' = 0$$

$$\Gamma \theta'''' - S_t \theta'' + M_y v_0'' = 0$$

Om te zien welke invloed deze welvingsterm heeft, worden de volgende oplossingen voor v_0 en θ gesubstitueerd:

$$v_0 = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \qquad (7)$$

$$\theta = B \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \qquad (8)$$

Substitueren van de oplossingen in vergelijkingen (7) en (8) levert:

$$EI_{yy} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 A - M_y \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 B = 0$$

$$-M_y \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 A + \left(S_t \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \Gamma \right) B = 0$$

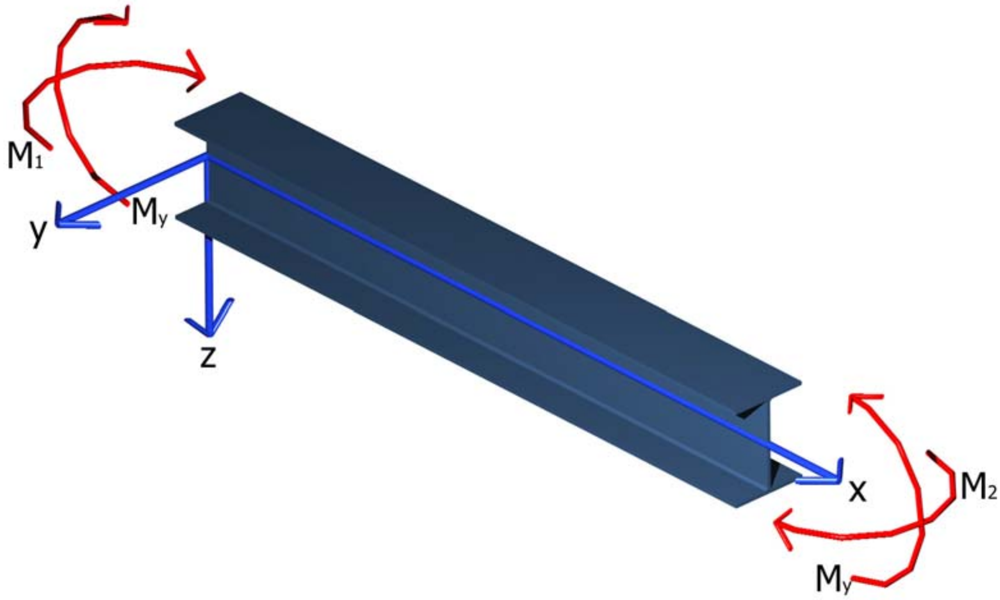
De oplossing van dit eigenwaardeprobleem luidt:

$$M_{kr} = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{EI_{yy}} \sqrt{S_t + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \Gamma}$$

Met deze uitdrukking voor het kritische kipmoment kan de invloed van de welvingsterm bepaald worden: wanneer de lengte van de ligger toeneemt, neemt de invloed van de welvingsterm in vergelijking met de invloed van torsiestijfheidsterm, kwadratisch af. Wanneer de lengte van de ligger dus groot genoeg is zal de invloed van de spanningen, gegenereerd bij een verhindering van de welving, beperkt blijven tot een bepaald invloedsgebied. Er wordt aangenomen dat de lengte van dit invloedsgebied ongeveer gelijk is de hoogte van het profiel.

4 Bepaling stijfheidsmatrix

In dit hoofdstuk zal de 2e orde stijfheidsmatrix voor een raamwerkelement belast op buiging in het ***xy***-vlak bepaald worden. Daarbij wordt de invloed van kip ten gevolge van twee randmomenten M_y meegenomen.



Figuur 11: Ligger belast door twee gelijke, tegengestelde randmomenten M_y en twee verschillende randmomenten M_1 en M_2

4.1 Oplossen differentiaalvergelijkingen

In hoofdstuk 3 zijn twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen afgeleid:

$$EI_{yy}v_0'''' + M_y\theta'' = 0 \tag{9}$$

$$-S_t\theta'' + M_y v_0'' = 0 \tag{10}$$

Omdat het een stelsel van twee gekoppelde, 2e orde differentiaalvergelijkingen betreft, worden de volgende oplossingen voor v_0 en θ voorgesteld:

$$v_0(x) = e^{\lambda x} \qquad \text{en} \qquad \theta(x) = e^{\mu x}$$

met:

$$v_0'(x) = \lambda e^{\lambda x} \qquad \theta'(x) = \mu e^{\mu x}$$

$$v_0''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \qquad \theta''(x) = \mu^2 e^{\mu x}$$

$$v_0'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x} \qquad \theta'''(x) = \mu^3 e^{\mu x}$$

$$v_0''''(x) = \lambda^4 e^{\lambda x} \qquad \theta''''(x) = \mu^4 e^{\mu x}$$

Omschrijven van vergelijkingen (9) en (10) levert (het nut hiervan blijkt in vergelijking 13):

$$v_0'''' = \frac{-M_y}{EI_{yy}}\theta'' \text{ en } v_0'' = \frac{S_t}{M_y}\theta''$$

Substitutie van de voorgestelde oplossingen in voorgaande uitdrukkingen levert:

$$\lambda^4 e^{\lambda x} = -\frac{M_y}{EI_{yy}}\mu^2 e^{\mu x} \quad => \quad \lambda^2 e^{\lambda x} = -\frac{M_y}{EI_{yy}}\frac{\mu^2}{\lambda^2}e^{\mu x} \tag{11}$$

en

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = \frac{S_t}{M_y}\mu^2 e^{\mu x} \tag{12}$$

Gelijkstellen van (11) en (12) levert:

$$-\frac{M_y}{EI_{yy}}\frac{\mu^2}{\lambda^2}e^{\mu x} = \frac{S_t}{M_y}\mu^2 e^{\mu x} \tag{13}$$

Na eliminatie van $\mu^2 e^{\mu x}$ volgt:

$$-\frac{M_y}{EI_{yy}}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{S_t}{M_y} \qquad => \qquad \lambda^2 = -\frac{M_y{}^2}{S_t EI_{yy}}$$

Alle termen in deze vergelijking zijn groter dan nul, zodat λ een complexe oplossing heeft:

$$\lambda = i\gamma \quad \text{met} \quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{M_y^{\,2}}{S_t EI_{yy}}}$$

Er geldt dus:

$$v_0''(x) = -\gamma^2 e^{\gamma i x}$$

De complexe e-macht wordt met behulp van de formule van Euler omgeschreven naar:

$$v_0''(x) = -\gamma^2 (C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x))$$

Tweemaal integreren levert uiteindelijk:

$$v_0(x) = C_1 \sin\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + C_3 x + C_4 \qquad (14)$$

De gevonden vergelijking voor $v_0(x)$ kan nu gebruikt worden om een oplossing voor $\theta(x)$ te vinden:

$$v_0'' = \frac{S_t}{M_y}\theta'' \qquad => \qquad \theta'' = \frac{M_y}{S_t} v_0''$$

Tweemaal differentiëren van (14) levert:

$$v_0''(x) = -C_1 \left(\frac{M_y}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)^2 \sin\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) - C_2 \left(\frac{M_y}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)^2 \cos\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)$$

Invullen van deze vergelijking in de uitdrukking voor θ'' en vervolgens twee keer integreren levert uiteindelijk:

$$\theta(x) = \frac{M_y}{S_t}\left(C_1 \sin\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{M_y x}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + C_3 x + C_4\right) + C_5 x + C_6 \qquad (15)$$

Op de constanten na zijn de algemene oplossingen voor $v_0(x)$ en $\theta(x)$ nu bekend.

4.2 Randvoorwaarden

Omdat de profielverdraaiing θ niet interessant is voor het bepalen van de stijfheidsmatrix, hoeven alleen constanten C_1 t/m C_4 van uitdrukking (14) voor $v(x)$ bepaald te worden. Het volstaat dus om vier randvoorwaarden te formuleren:

$$x = 0 \qquad v(0) = v_1$$
$$v'(0) = \varphi_1$$

$$x = l \qquad v(l) = v_2$$
$$v'(l) = \varphi_2$$

Hierbij wordt opgemerkt dat de randvoorwaarden voor $v'(0)$ en $v'(l)$ bewust een positieve hoek opleveren. In het xy-vlak geldt immers voor een positieve hoek φ, dat:

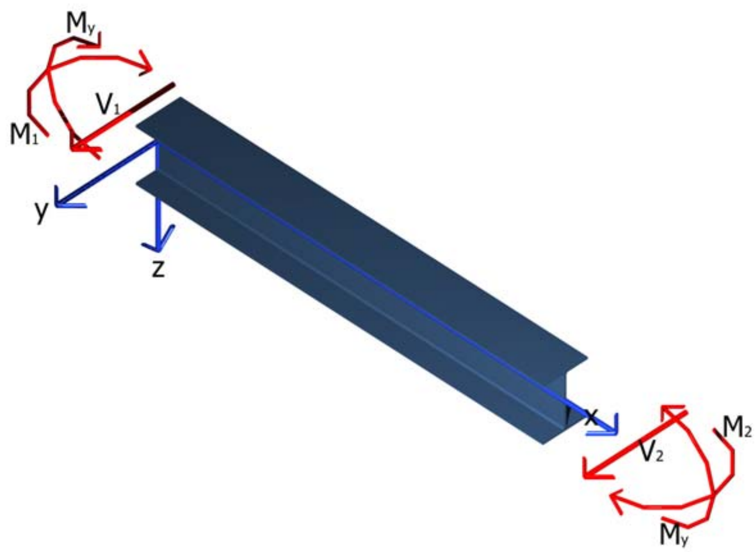
$$\frac{dv}{dx} = +\varphi \qquad \text{in plaats van} \qquad \frac{dw}{dx} = -\varphi \qquad \text{in het xz-vlak.}$$

Met behulp van deze vier randvoorwaarden worden constanten C_1 t/m C_4 bepaald, uitgedrukt in v_1, φ_1, v_2 en φ_2. Omdat de uitdrukkingen voor C_1 t/m C_4 nogal omvangrijk zijn, zijn deze in bijlage E opgenomen.

4.3 Opstellen elementstijfheidsmatrix [K]^e

Met behulp van de constitutieve betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= EI_{yy}\frac{d^3v_0}{dx^3}(0) \\ M_1 &= -EI_{yy}\frac{d^2v_0}{dx^2}(0) \\ V_2 &= -EI_{yy}\frac{d^3v_0}{dx^3}(l) \\ M_2 &= EI_{yy}\frac{d^2v_0}{dx^2}(l) \end{aligned}\right\} \text{uit:}$$



worden nu vergelijkingen opgesteld voor V_1, M_1, V_2, en M_2, elk uitgedrukt als functie van v_1, φ_1, v_2 en φ_2. Omdat deze vergelijkingen wederom nogal omvangrijk zijn, zijn deze in bijlage E opgenomen.

Om nu de elementstijfheidsmatrix $[K]^e$ te bepalen hoeven deze vergelijkingen alleen nog maar in de volgende notatie geschreven te worden:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^e \qquad \text{oftewel} \qquad \{f\}^e = [K]^e \{v\}^e$$

Met behulp van de substituties:

$$\alpha = \frac{M_y}{\sqrt{EI_{yy} S_t}}$$

$$\varepsilon = \alpha l$$

$$\beta = \varepsilon - \sin\varepsilon \qquad n = \varepsilon \sin\varepsilon + 2(\cos\varepsilon - 1)$$

$$\gamma = \sin\varepsilon - \varepsilon\cos\varepsilon \qquad m = 2\sin\varepsilon - \varepsilon(\cos\varepsilon + 1)$$

reduceert de elementstijfheidsmatrix naar:

$$[K]^e = \alpha EI_{yy} \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\gamma)}{m} & \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\gamma}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\beta}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix} \tag{16}$$

De totale uitdrukking wordt dus:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^e = \alpha EI_{yy} \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\gamma)}{m} & \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\gamma}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\beta}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^e \tag{17}$$

4.4 Controles stijfheidsmatrix

In deze paragraaf wordt een aantal controles uitgevoerd op de gevonden stijfheidsmatrix (16). Deze controles moeten de validiteit van de stijfheidsmatrix aantonen.

4.4.1 Asymmetrie stijfheidsmatrix

Het is opmerkelijk dat de gevonden stijfheidsmatrix $[K]^e$ niet symmetrisch is. Het wederkerigheidsprincipe van Maxwell zegt namelijk dat een eenheidsverplaatsing u_i een kracht F_j levert die gelijk is aan de kracht F_i die gevonden wordt bij een eenheidsverplaatsing u_j. Dit levert altijd een symmetrische matrix op. Echter, omdat het hier niet-lineaire mechanica betreft, hoeft het wederkerigheidsprincipe niet te gelden en de matrix hoeft daarmee niet per definitie symmetrisch te zijn.

Om meer inzicht te krijgen in de asymmetrie van de matrix kan deze worden uitgesplitst in:

matrix met 1^e orde termen
matrix met 2^e orde termen -symmetrisch deel
-asymmetrisch deel

Van het uitsplitsen van de 1^e orde termen wordt het overgebleven deel met de 2^e orde termen alleen maar onoverzichtelijker. De matrix wordt daarom alleen opgesplitst in een symmetrisch en een asymmetrisch deel:

$$[K]^e = [K_{sym}]^e + [K_{asym}]^e$$

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\gamma)}{m} & \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\gamma}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\beta}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix} =$$

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{2m} & \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \\ \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{2m} & \frac{-\gamma}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{2m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\beta}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{2m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix} + \alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Na vereenvoudiging volgen dus een t.o.v. de diagonaal symmetrische matrix en een puntsymmetrische matrix. Het is niet bekend wat de fysische betekenis/invloed van de puntsymmetrische matrix is. Hoewel een zwak argument, impliceert een hoge regelmaat en eenvoud in de resultaten vaak wel een correcte berekening.

Na de vorm van de matrix wordt nu ook de “inhoud” gecontroleerd:

4.4.2 Kritisch kipmoment M_y

Alleen de buigingstermen in matrix $[K]^e$ worden beschouwd:

$$\{M\}^e = [K_m]^e \{\varphi\}^e \qquad => \qquad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{n} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{-\beta}{n} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}^e$$

met γ, β en n zoals gedefinieerd in paragraaf 4.3.

Om het kritische kipmoment M_y te bepalen, worden de eigenwaarden van matrix $[K_m]^e$ bepaald. Daartoe wordt de determinant nul gesteld:

$$\gamma^2 - \beta^2 = 0$$

Met behulp van Maple wordt deze vergelijking opgelost voor M_y:

$$M_y = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_{yy}S_t}$$

Dit komt overeen met het resultaat dat wordt gevonden in literatuur [1].

4.4.3 Eerste orde matrix

De matrix $[K]^e$ beschrijft het 2^e orde gedrag in het xy-vlak van een raamwerkelement, ten gevolge van een belasting in de vorm van twee randmomenten M_y. Deze randmomenten, hoewel niet meteen te zien vanwege substituties, zijn dan ook terug te vinden in elke term van de matrix. Des kleiner deze randmomenten, des te kleiner het effect dat ze op de stijfheid van de ligger uitoefenen. Wanneer M_y dus naar nul nadert, moet de 1^e orde stijfheidsmatrix voor het *xy*-vlak volgen.

Met behulp van Maple wordt $\lim_{M_y \to 0}[K]^e$ berekend:

$$\lim_{M_y \to 0}[K]^e = \frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

hetgeen exact overeenkomt met de 1^e orde matrix in het xy-vlak.

4.4.4 Singulariteit stijfheidsmatrix

Zolang er voor het raamwerkelement nog geen verplaatsingen zijn voorgeschreven, moet de matrix singulier zijn. Per definitie zijn er dan en slechts dan ook niet-triviale oplossingen voor de verplaatsingen. De matrix is dan en slechts dan singulier wanneer de determinant van de matrix gelijk aan nul is.
Met behulp van Maple wordt de determinant van $[K]^e$ bepaald. Deze blijkt inderdaad nul te zijn. De matrix is dus inderdaad singulier.

5 Toepassing stijfheidsmatrix

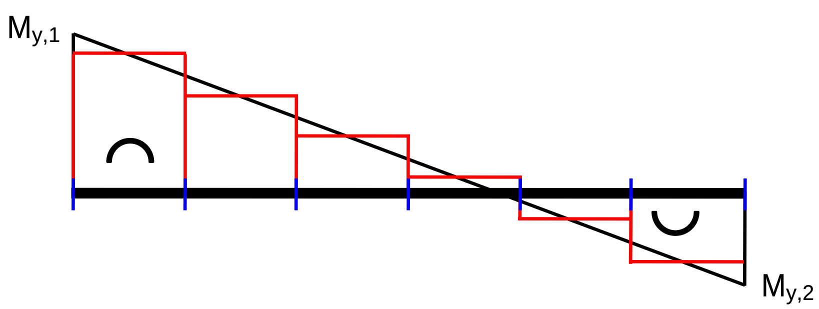
5.1 Restricties en mogelijke oplossingen

In paragraaf 3.3 zijn de in de afleiding gebruikte aannamen en vereenvoudigingen toegelicht. In deze paragraaf worden de consequenties hiervan op de toepassingsmogelijkheden van de stijfheidsmatrix besproken.

Er wordt gekeken naar de toepassing van de stijfheidsmatrix in een standaard raamwerk programma (zoals MatrixFrame). De stijfheidsmatrix moet de 2^e orde effecten ten gevolge van kip beschrijven.

In paragraaf 3.3.1 is aangenomen dat kipinstabiliteit geen invloed heeft op de stijfheid van de ligger in het *xz*-vlak. De invloed beperkt zich tot de stijfheid van een ligger in het xy-vlak. Daarom is toepassing van de stijfheidsmatrix alleen nuttig in een 3D-raamwerkprogramma. Alleen dan kan namelijk de invloed van de 2^e orde effecten op de laterale verplaatsingen worden getoond.
Voor het bepalen van kritische kipmomenten in 2D-raamwerkprogramma's kan de matrix ook wel gebruikt worden, maar daarvoor zijn ook preciezere formules met minder beperkingen bekend.

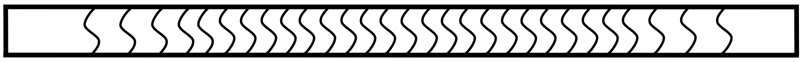
Wanneer de stijfheidsmatrix dus in een 3D-raamwerkprogramma wordt toegepast, gelden een aantal restricties. Allereerst kunnen alleen symmetrische profielen beschouwd worden. Belangrijker echter is dat het moment M_y een constante functie moet zijn. Dit zal in de praktijk echter bijna nooit het geval zijn.
Er is wel een manier om deze restrictie te omzeilen. Wanneer bijvoorbeeld een ligger met een lineaire momentenverdeling wordt beschouwd, kan deze momentenverdeling worden benaderd door de ligger op te delen in *n* aantal kleine "liggertjes" met een constant moment:



Figuur 12: De ligger wordt opgedeeld in een aantal kleine liggertjes

Doorgaans geldt dat de benadering exacter wordt wanneer *n* groter wordt, maar daarmee wordt de lengte van de liggertjes ook kleiner. Normaliter zou dat geen probleem zijn. In de afleiding van de differentiaalvergelijkingen zijn op een gegeven moment echter de welvingstermen weggelaten en de invloed van juist deze welvingstermen wordt groter naarmate de lengte van de ligger kleiner wordt. Daarvoor moet de welving overigens wel verhinderd zijn.

Het aantal liggertjes kan dus niet vrij gekozen worden. Bij verhinderde welving kan de ligger echter wel als volgt opgedeeld worden:

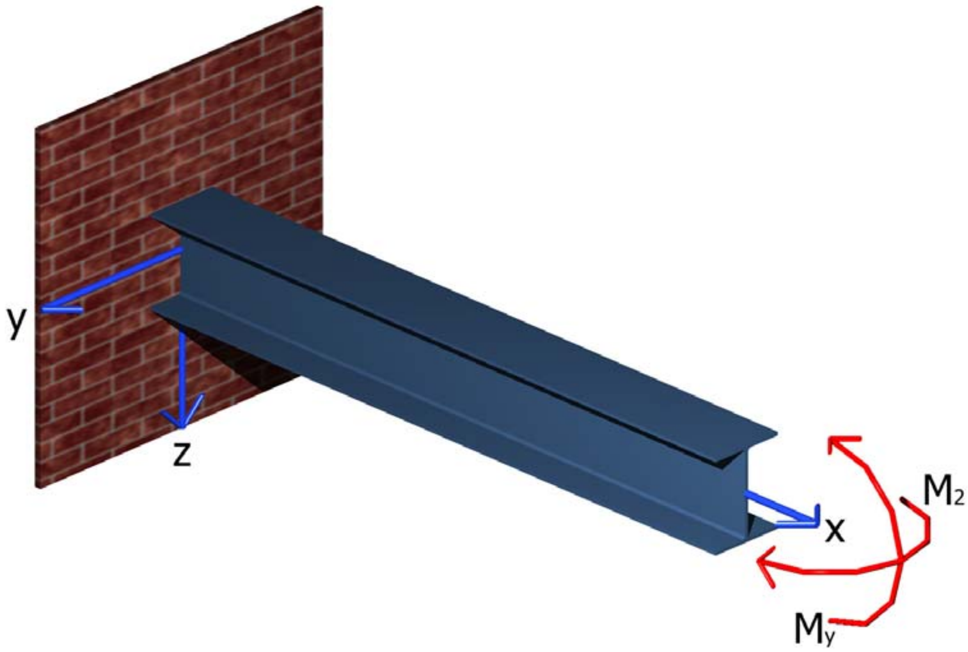


Figuur 13: Opdeling ligger in kleinere elementen

Terwijl de liggertjes aan de uiteinden van de ligger, waar de welving verhinderd wordt, groot genoeg blijven kunnen de liggertjes richting het midden van de ligger kleiner worden gemaakt.
In dit eindwerk is verder niet onderzocht welke grootte fout precies optreedt bij welke verhouding van lengte/profielhoogte.

5.2 Voorbeeld: Ingeklemde staaf

In deze paragraaf wordt de stijfheidsmatrix toegepast op een simpele constructie: een éénzijdig ingeklemde ligger (Figuur 14), belast door twee koppels: M_y en M_2.



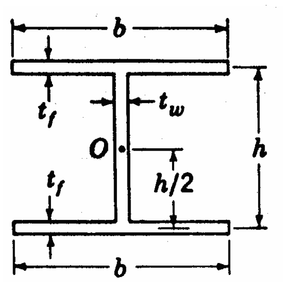
Figuur 14: Ingeklemde ligger belast door twee randmomenten: M_y en M_2

De ligger is uitgevoerd als een IPE-600 van 10 meter lengte, met de volgende eigenschappen:

t_f = 0.019 m
t_w = 0.012 m
b = 0.220 m
h = 0.600 m

G = 8.1 10^{10} N/m^2
S_t = 1.09 10^5 Nm^2

E = 210 10^9 N/m^2
EI_{yy} = 4.54 10^6 Nm^2
EI_{zz} = 2.03 10^8 Nm^2



De ligger wordt in het eindpunt dus belast door twee koppels: M_y en M_2. Het moment in de ligger is dus zowel in het xy- als in het xz-vlak constant.
Omdat de ligger op x=0 is ingeklemd, geldt dat de verplaatsingen v_1 en φ_1 nul zijn. De te bepalen vrijheidsgraden zijn dus v_2 en φ_2: de verplaatsing en de hoekverdraaiing van het uiteinde van de ligger in het xy-vlak.

5.2.1 Eerste orde berekening

Allereerst wordt een 1e orde berekening van de verplaatsingen gemaakt om de 2e orde verplaatsingen mee te vergelijken.

<u>Verplaatsingen in *xy*-vlak</u>

De 1e orde stijfheidsmatrix voor verplaatsingen in het xy-vlak:

$$\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Met behulp van de voorgeschreven verplaatsingen $v_1 = \varphi_1 = 0$ wordt de matrix gereduceerd:

$$\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1^0 \\ \varphi_1^0 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} - v_1^0\,\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ -6l \end{Bmatrix} - \varphi_1^0\,\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6l \\ 2l^2 \end{Bmatrix} \qquad =>$$

$$\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

De belasting bestaat enkel uit een koppel M_2. De belastingsvector wordt daarmee:

$$\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Om nu v_2 en φ_2 te bepalen wordt de matrix geïnverteerd:

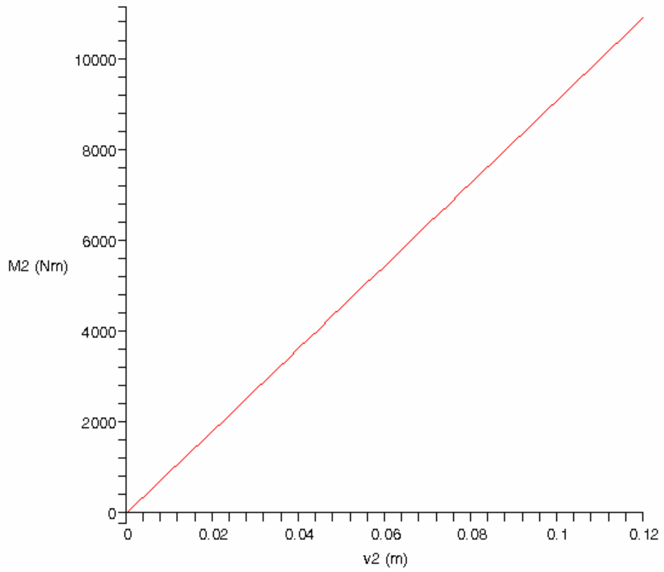
$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}l^3 & \frac{1}{2}l^2 \\ \frac{1}{2}l^2 & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

De oplossing is dus:

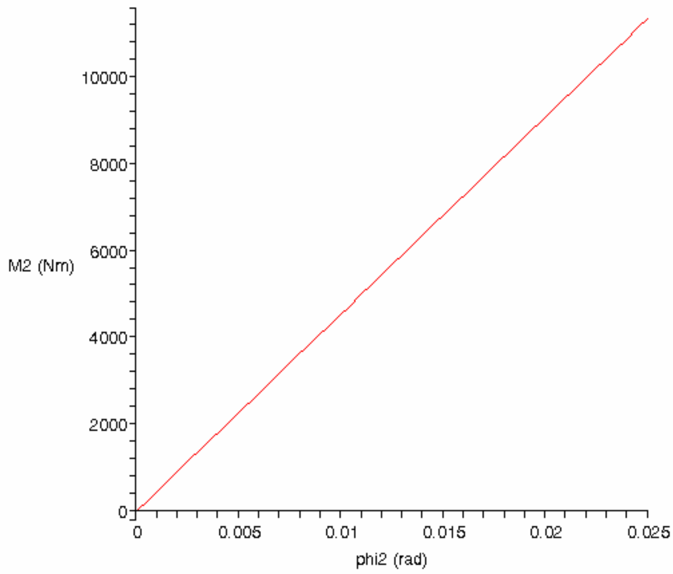
$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_2\,\dfrac{l^2}{2EI_{yy}} \\ M_2\,\dfrac{l}{EI_{yy}} \end{Bmatrix}$$

Het invullen van de lengte l=10 en de buigstijfheid EI_{yy} levert de vergelijkingen (uiteraard lineair):

$v_2 \quad = 0.110030\ 10^{-4}\ M_2$
$\varphi_2 \quad = 0.022006\ 10^{-4}\ M_2$



Figuur 15: Verband tussen de verplaatsing v_2 en het koppel M_2, eerste orde



Figuur 16: Verband tussen de hoekverdraaiing φ_2 en het koppel M_2, eerste orde

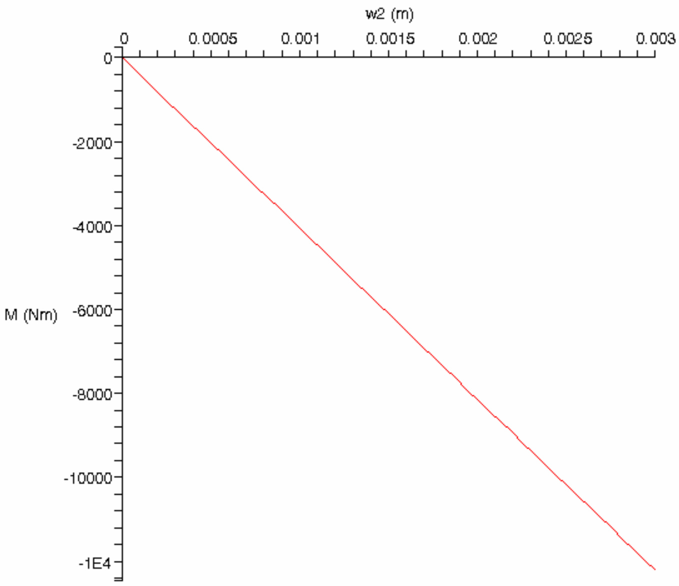
Ter vergelijking later met het 2^e orde effect, worden de verplaatsingen nog exact bepaald bij een koppel M_2 van 5 kNm:

v_2 = 0.0550154 m
φ_2 = 0.0110030 rad

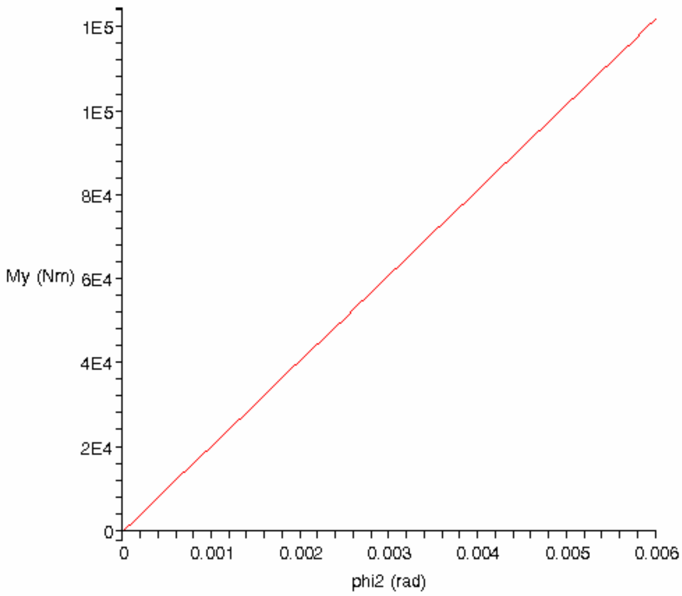
Verplaatsingen in xz-vlak

Op dezelfde manier als voor het xy-vlak worden de vergelijkingen voor verplaatsingen in het xz-vlak bepaald:

w_2 = -0.2458007 10^{-6} M_2
φ_2 = 0.4916014 10^{-7} M_2



Figuur 17: Verband tussen de verplaatsing w_2 en het koppel M_y, eerste orde



Figuur 18: Verband tussen de hoekverdraaiing φ_2 en het koppel M_y, eerste orde

Omdat het tweede orde effect slechts in het xy-vlak optreedt, worden hier verder niet de verplaatsingen bij een bepaalde waarde van M_y bepaald.

5.2.2 Tweede orde berekening

Van dezelfde constructie worden nu de 2e orde verplaatsingen bepaald.

Verplaatsingen in het *xz*-vlak

Kipinstabiliteit heeft alleen invloed op de stijfheid in de zwakke richting, dus op de stijfheid in het *xy*-vlak. In het *xz*-vlak blijven de stijfheid en daarmee de verplaatsingen dus gelijk. Voor die verplaatsingen wordt daarom verwezen naar de eerste orde verplaatsingen

Verplaatsingen in het *xy*-vlak

De stijfheid en daarmee de verplaatsingen in de zwakke richting, dus in het *xy*-vlak, zijn daarentegen onderhevig aan de invloed van kip: de berekende 2e orde matrix wordt nu gebruikt. De aanpak is verder identiek aan de aanpak voor de 1e orde verplaatsingen:

De 2e orde stijfheidsmatrix voor verplaatsingen in het *xy*-vlak:

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\gamma)}{m} & \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\gamma}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} & \frac{-\beta}{n} & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Met behulp van de voorgeschreven verplaatsingen $v_1 = \varphi_1 = 0$ wordt de matrix gereduceerd:

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1^0 \\ \varphi_1^0 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} - v_1^0\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha^2(\varepsilon-\beta)}{n} \\ \frac{\alpha(\varepsilon-\beta)}{m} \end{Bmatrix} - \varphi_1^0\frac{EI_{yy}}{l^3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} \\ \frac{-\beta}{n} \end{Bmatrix}$$

$$=> \alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{dus:} \quad [K_{red}]\{u\} = \{f\}$$

De belasting bestaat enkel uit een koppel M_2. De belastingsvector wordt daarmee:

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2(\beta-\varepsilon)}{n} & \frac{\alpha(\gamma-\varepsilon)}{m} \\ \frac{\alpha(\beta-\varepsilon)}{m} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

De parameters α, ε, β, γ, n en m (zie paragraaf 4.3) worden weer teruggesubstitueerd en de matrix wordt geïnverteerd.

Omdat de resultaten van de tussenberekeningen vanaf hier nogal omvangrijk worden, wordt daarvoor verwezen naar bijlage E .

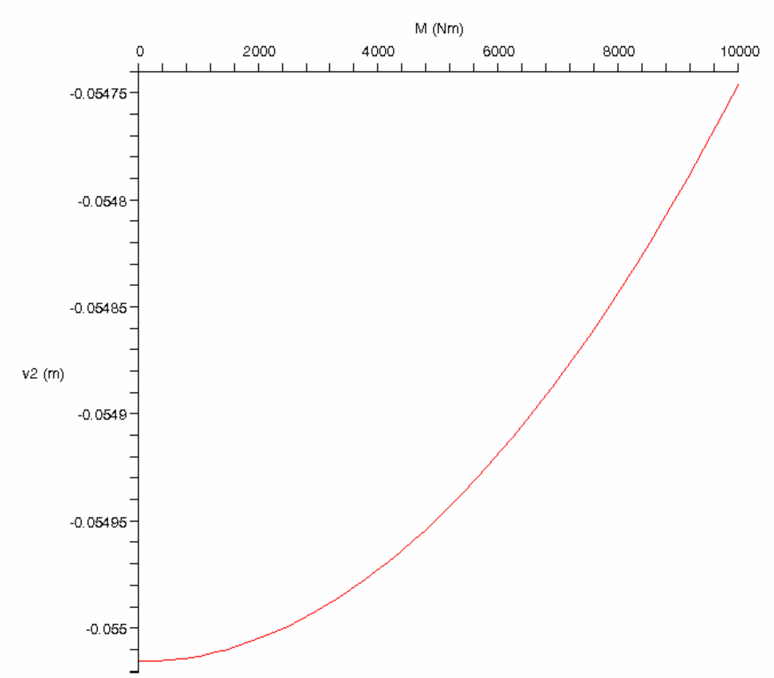
De vergelijking is nu van de vorm:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \left[K_{red}\right]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

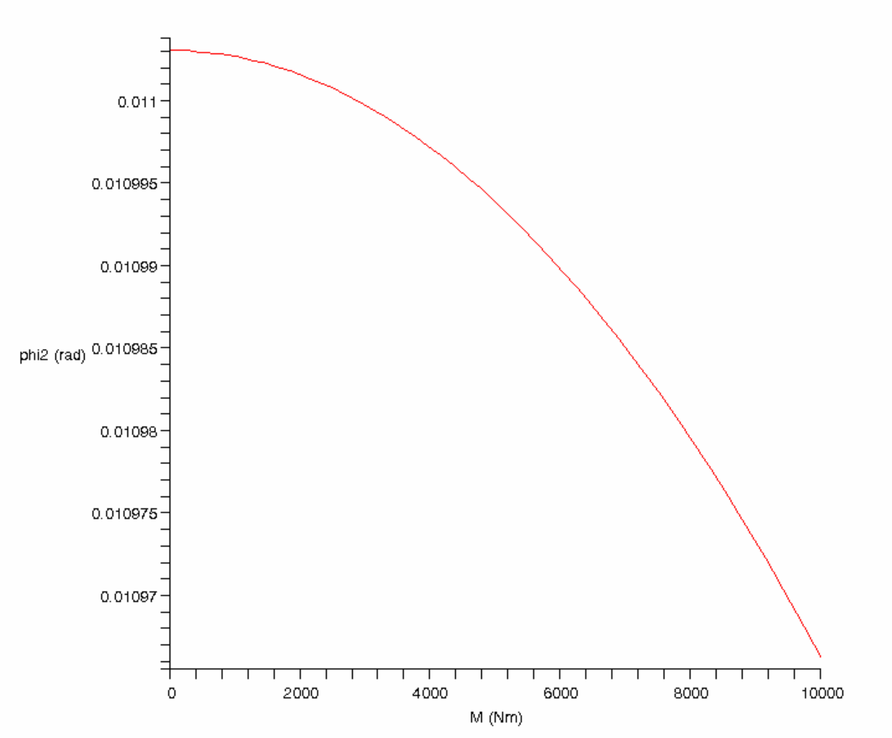
Omdat V_2 =0 kan de eerste kolom van $[K_{red}]^{-1}$ weggelaten worden. De lengte l, de buigstijfheid EI_{yy} en de torsiestijfheid S_t worden ingevuld.

Voor v_2 en φ_2 blijven nu functies in M_y en M_2 over (waarbij opgemerkt wordt dat v_2 en φ_2 natuurlijk lineair afhankelijk zijn van M_2).

Wanneer M_2 = 5 kNm wordt gekozen volgen de volgende grafieken voor de verplaatsing en de hoekverdraaiing, beide afhankelijk van M_y (dus niet van M_2, zoals in Figuur 15 en Figuur 16):



Figuur 19: Verband tussen de verplaatsing v_2 en het koppel M_y, tweede orde

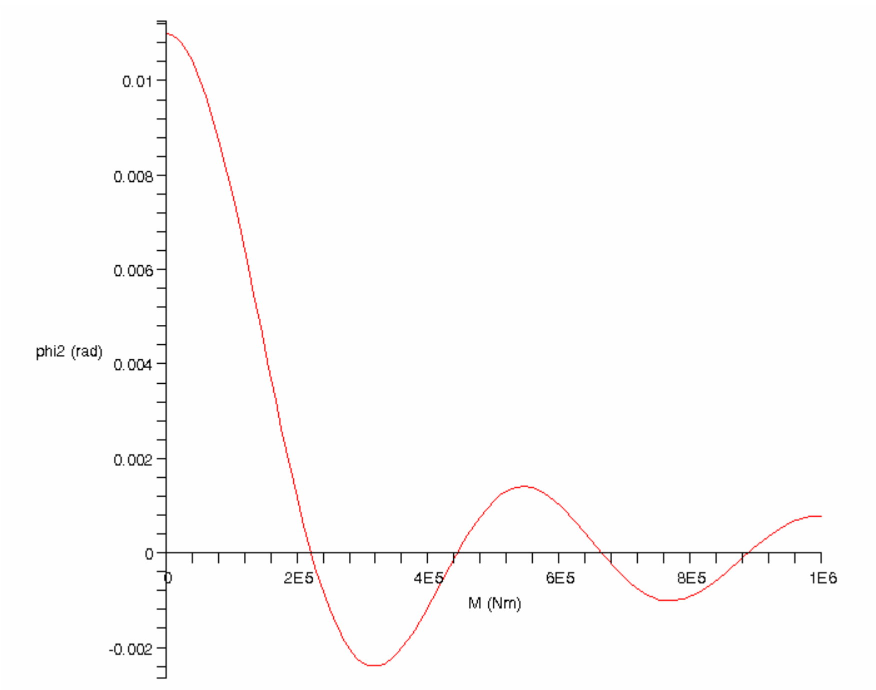


Figuur 20: Verband tussen de verplaatsing φ_2 en het koppel M_y, tweede orde

Dit is niet bepaald het verwachte resultaat. Er wordt een (exponentieel-vormige) toename van de absolute verplaatsingen bij een toename van M_y verwacht.

Omdat het gedrag van v_2 analoog is aan dat van φ_2, wordt voor de overzichtelijkheid alleen hoekverdraaiing φ_2 beschouwd.

Wanneer het domein van de grafiek wordt vergroot, is het functieverloop te zien:



Figuur 21: Verband tussen de verplaatsing φ_2 en het koppel M_y, grotere schaal

Het functieverloop lijkt dus meer op een gedempte trilling dan op een exponentiële functie.

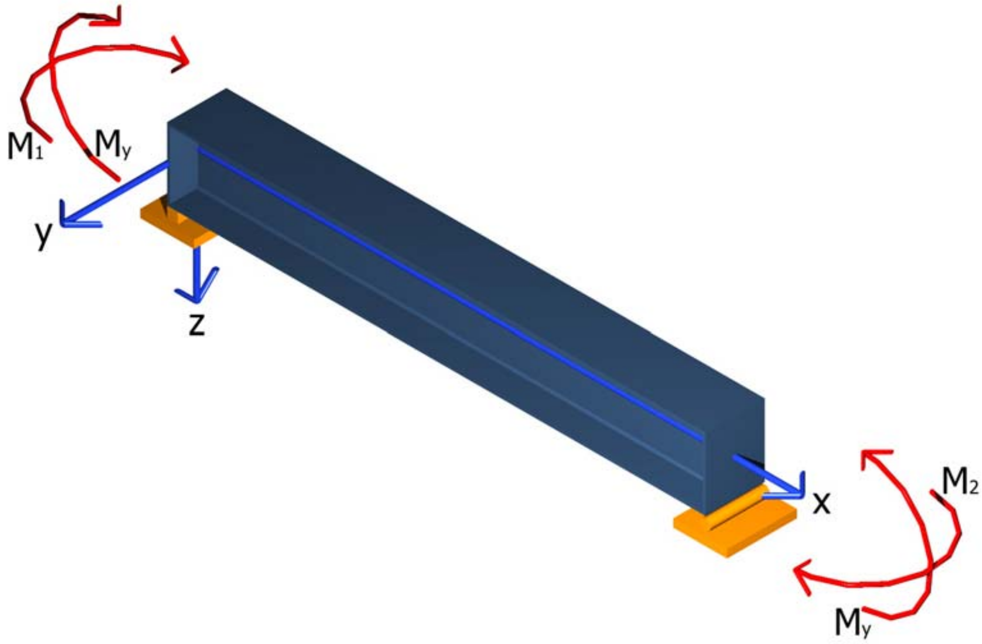
Wel wordt de eerste orde verplaatsing netjes teruggevonden: bij M_y = 0 wordt een hoekverdraaiing φ_2 = 0.011 rad gevonden, wat overeenkomt met de 1^e orde hoekverdraaiing.

Alle onderdelen van de berekening van de matrix, van de afleiding van de differentiaalvergelijkingen tot het inverteren van de gereduceerde matrix, zijn uitvoerig gecontroleerd op rekenfouten en geldigheid. Er zijn daarbij geen fouten gevonden.

In de afleiding van de differentiaalvergelijkingen is gebruik gemaakt van een voorbeeld met enkel buiging, zonder verplaatsbare knopen: de op gaffels opgelegde buigligger. Er bestaat daarom het vermoeden dat de differentiaalvergelijkingen alleen geldig zijn voor buiging zonder knoopverplaatsingen. Daarom wordt in de volgende paragraaf een constructie met niet-verplaatsbare knopen beschouwd.

5.3 Voorbeeld: Buigligger

Ter controle van het aan het einde van de vorige paragraaf geformuleerde vermoeden, wordt nu het basisgeval beschouwd, onder toevoeging van twee randmomenten M_1 en M_2:

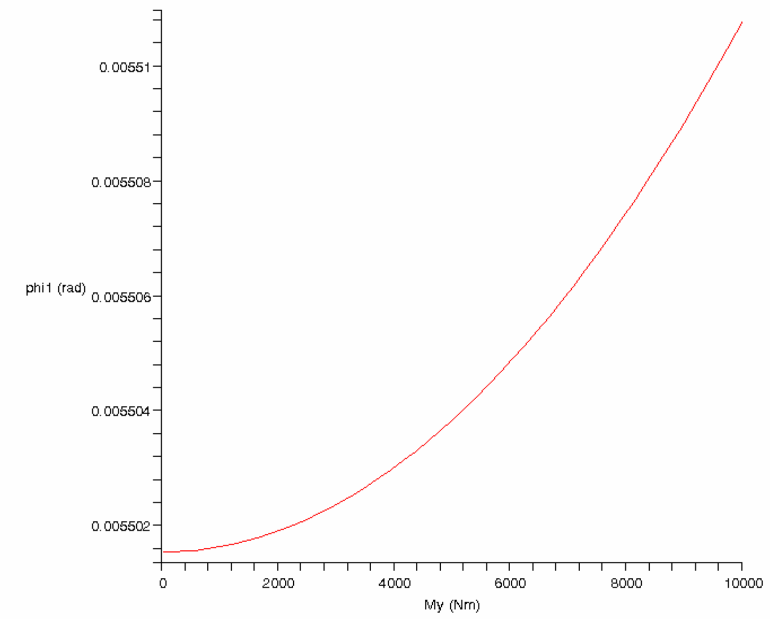


Figuur 22: Ligger opgelegd op gaffels

Omdat v_1 = v_2 = 0 reduceert de oorspronkelijke stijfheidsmatrix tot alleen de buigingstermen:

$$\alpha EI_{yy}\begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{n} & \frac{-\beta}{n} \\ \frac{-\beta}{n} & \frac{-\gamma}{n} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Wanneer bijvoorbeeld M_1 = 50 kN en M_2 = -50 kN worden gekozen, wordt het volgende verband tussen φ_1 en M_y gevonden:



Figuur 23: Verband tussen koppel M_y en verplaatsing φ_1

De eerste orde verplaatsing φ_1 volgt uit de vergeet-me-nietjes:

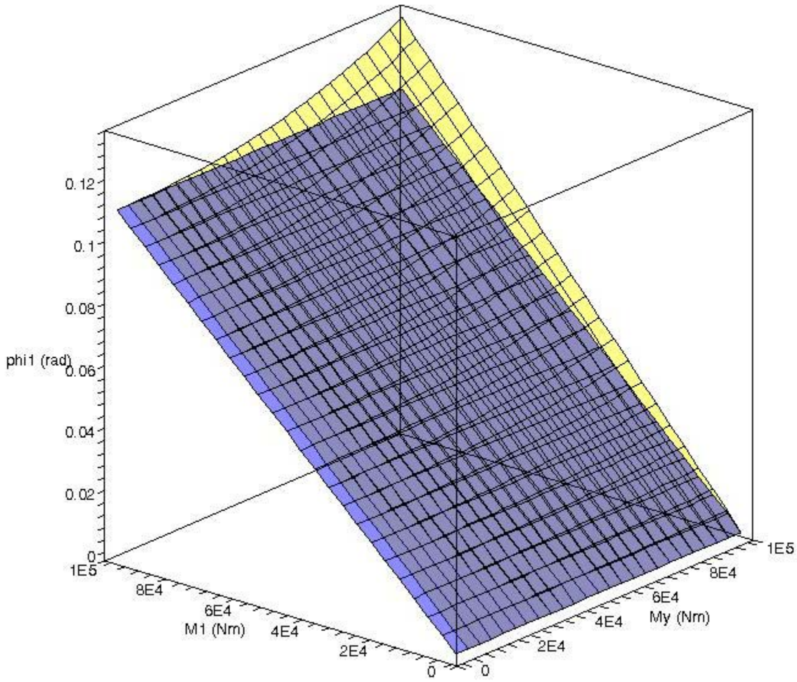
$$\varphi_1 = \frac{1}{3}\frac{M_1 l}{EI_{yy}} - \frac{1}{6}\frac{M_2 l}{EI_{yy}}$$

Na invullen volgt: φ_1 = 0.00550154 rad

Dit komt exact overeen met de waarde voor φ_1 bij M_y = 0. De hoekverdraaiing φ_2 is, op het teken na, gelijk aan φ_1 en wordt daarom niet getoond.

Ook het functieverloop van Figuur 23 is in overeenstemming met wat werd verwacht. Er kan dus geconcludeerd worden dat, wat betreft dit voorbeeld, de stijfheidsmatrix correcte resultaten geeft.

Om deze resultaten grafisch weer te kunnen geven wordt Maple gebruikt. Zolang M_1 en M_2 beide nog vrije variabelen zijn, zijn er vier variabelen: M_1, M_2, M_y en φ_1. M_2 wordt daarom uitgedrukt in M_1: $M_2 = -M_1$.
Er kan nu een 3D-grafiek van de drie overgebleven variabelen worden gemaakt. Het is daarbij niet erg dat de verhouding M_1/M_2 wel vastligt. De grafiek is daarom slechts afleesbaar voor constante momenten in het *xz*-vlak. Het gebruik van de stijfheidsmatrix is echter niet beperkt tot gelijke momenten M_1 en M_2.



Figuur 24: Vergelijking van eerste- (blauw) en de tweede-orde (geel) verplaatsing φ_1

Hoewel het enige inspanning vergt, is nu duidelijk het verschil tussen de eerste- en de tweede-orde verplaatsing te zien.
Wanneer bijvoorbeeld gekeken wordt naar een constant moment M_1 = 100 kNm, dan zal, door toedoen van een constant moment M_y = 100 kNm, de hoekverdraaiing φ_1 toenemen van ongeveer 0.11 naar 0.13 rad (een toename van 18%).

6 Conclusies en aanbevelingen

6.1 Conclusies

Tijdens dit eindwerk is de meeste tijd gaan zitten in het afleiden van de stijfheidsmatrix zelf, wat dan ook met grote nauwkeurigheid is gedaan. Uitvoerig onderzoek naar het gedrag van de uiteindelijk bepaalde stijfheidsmatrix is er daarom helaas niet van gekomen. Wel is er gekeken naar het gedrag van de stijfheidsmatrix in simpele voorbeelden zoals een ingeklemde staaf en een buigligger opgelegd op gaffels. Naar aanleiding hiervan kunnen een aantal conclusies getrokken worden:

De matrix gedraagt zich naar verwachting wanneer alleen buiging wordt beschouwd: de hoekverdraaiing φ neemt (exponentieel-vormig) toe bij een toename van het moment M_y. Verder is de 2^e orde hoekverdraaiing bij $M_y = 0$ gelijk aan de 1^e orde hoekverdraaiing (Figuur 23).

Wanneer echter ook knoop*verplaatsingen* worden beschouwd, zoals in het geval van de ingeklemde staaf, gedraagt de matrix zich niet naar verwachting: in plaats van een toename wordt een afname van de verplaatsingen/hoekverdraaiingen gevonden. Verder komt de 2^e orde verplaatsing bij M = 0 niet overeen met de 1^e orde verplaatsing.
Mogelijke oorzaken hiervoor zijn:

- De differentiaalvergelijkingen zijn niet geldig voor 2^e orde gedrag. In het 2^e orde gedrag spelen effecten een rol die niet in rekening worden gebracht.
- Ondanks uitvoerige controle bevat de afleiding van de stijfheidsmatrix toch nog fouten.
- Het onverwachte gedrag van de stijfheidsmatrix is toch correct (een eenvoudig experiment, uitgevoerd tijdens de laatste dagen van het eindwerk, was niet geheel overtuigend)

6.2 Aanbevelingen

Het verdient aanbeveling te bepalen welk van de hierboven genoemde mogelijke oorzaken daadwerkelijk de reden is van het onverwachte gedrag bij elementen met verplaatsbare knopen.
Hiertoe zouden de differentiaalvergelijkingen voor kip opnieuw kunnen worden afgeleid, waarbij gelet zou moeten worden op de invloed van de verplaatsingen van de element-uiteinden. Ook zouden de 1^e orde-verplaatsingen in rekening moeten worden gebracht.
Ook zou experimentele validatie van de gevonden resultaten uitsluitsel moeten geven over de correctheid van de verwáchte resultaten.

Zodra het gedrag van de stijfheidsmatrix volledig verklaard kan worden, kan ook gekeken worden naar inpassing ervan in raamwerkprogramma's.

7 Literatuurlijst

1. A.C.W.M. Vrouwenvelder, dictaat "*Structural Stabiliy*", Delft, februari 2003

2. J. Blaauwendraad, dictaat "*Elastic Stability of Frame Structures*", Delft, augustus 1992

3. J.W. Welleman, C. Hartsuiker, dictaat "*Inleiding Elementen Methode*", Delft, januari 2004

4. Z. P. Bazant, L. Cedolin, "*Stability of Structures*", Oxford University Press, Oxford, 1991

5. S.P. Timoshenko, J.M. Gere, "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, New York, 2e druk, 1961

6. J. Blaauwendraad, "*Eindige-Elementen Methode voor Staafconstructies*", Academic Service, Schoonhoven, 2e druk, 2000

7. Diverse auteurs, "*Staalconstructies II* ", Delft, 2e druk, december 1985

8. J.W. Welleman, C. Hartsuiker, dictaat "*Niet-symmetrische en inhomogene doorsneden*", Delft, september 2003

9. Diverse auteurs, "*Overspannend Staal, deel Construeren B*", Koninklijke Drukkerij De Swart, Den Haag, 1996

10. C. Hartsuiker, "*Toegepaste Mechanica, deel 1: Evenwicht* ", Academic Service, Schoonhoven, 1999

11. C. Hartsuiker, "*Toegepaste Mechanica, deel 2: Spanningen, vervormingen, verplaatsing*", Academic Service, Schoonhoven, 2001

12. W. E. Boyce, R. C. Diprima, "*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*", John Wiley & Sons Inc., New York, 7e editie, 2001

13. D.C. Lay, "*Linear Algebra and Its Applications* ", Addison Wesley Longman, Inc., Maryland, 2e editie, april 2000

14. J. Stewart, "*Calculus*", Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 4e editie, 1999

15. H. Gavin, "*Mathematical Properties of Stiffness Matrices*", Duke University Press, Durham, North Carolina, herfst 2002

16. E.O. Ekanem, "*Application of Finite Element Method for Calculation of Lateral Torsional Buckling Loads for Untapered and Tapered Beam-Columns*", Chalmers University Press, Göteborg, 1972

8 Figurenlijst

Inhoudsopgave bijlage

A Originele opdracht

BSc – eindwerk

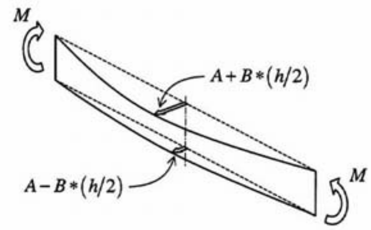
Structural Engineering

Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen

Toelichting

Kipcontrole van liggers is een vaak terugkerende taak in de constructiepraktijk. Vandaar dat veel raamwerkprogramma's kipcontroles automatisch uitvoeren. Hierbij worden benaderingsformules gebruikt uit de geldende normen. Deze aanplak is weliswaar veilig maar niet erg nauwkeurig.

Het nauwkeurige kipgedrag wordt beschreven door twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen. In principe kan hiermee de stijfheidsmatrix van een tweedimensionaal raamwerk-element worden afgeleid. Het is geenszins duidelijk of dit mogelijk zal blijken, maar als het lukt dan kunnen raamwerk programma's hiermee nauwkeurig de invloed van kip en torsieknik op constructiegedrag laten zien.



In dit project zal intensief gebruik worden gemaakt van het programma Maple voor het oplossen van differentiaal vergelijkingen. De te bestuderen differentiaalvergelijkingen worden afgeleid in het college dictaat CT5144 Stabiliteit en Plasticiteit. De relevante delen hieruit zullen in dit project woerden gebruikt.

Opdracht

Leidt de stijfheidsmatrix af voor een tweedimensionaal raamwerkelement belast op buiging en normaalkracht rekening houdend met kip-instabiliteit.

Secties

Constructiemechanica en Betonconstructies

Nadere info

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom — kamer 5.24 — tel. 015 278 8081
p.hoogenboom@citg.tudelft.nl

ir. W.J.M. Peperkamp — kamer 5.03 — tel. 015 278 4576
w.peperkamp@citg.tudelft.nl

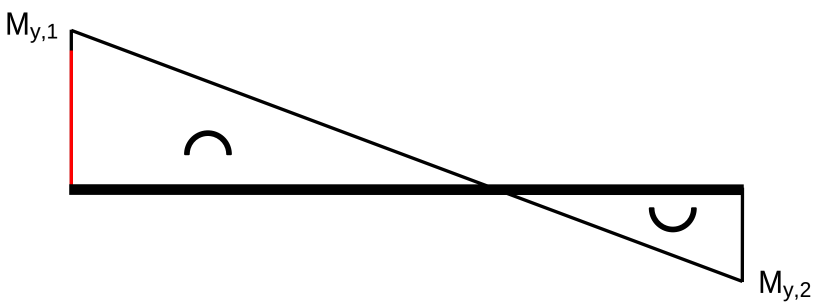
TU Delft — Bachelor Opleiding Civiele Techniek

11 juli 2003

B Ligger met lineaire momentenlijn

In paragraaf 3.3.3 en 5.1 is ter sprake gekomen dat de afleiding van de differentiaalvergelijkingen berust op de aanname van een constant moment M_y.

In deze bijlage wordt geprobeerd de differentiaalvergelijkingen op te lossen voor een ligger met een lineaire momentenlijn. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer de randmomenten M_y verschillend zijn (Figuur 25).



Figuur 25: Lineaire momentenlijn

Het betreft hier dus een lineaire momentenlijn:

$$M(x) = M_3\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_4\left(\frac{x}{l}\right)$$

Hieronder volgen de Maple-berekeningen met hier en daar enige tekstuele toelichting.

```
> restart;
> PDEtools[declare]( (w0,theta,M)(x), prime=x );
```

derivatives with respect to: x of functions of one variable will now be displayed with '

w0(x) will now be displayed as w0

theta(x) will now be displayed as theta

M(x) will now be displayed as M

De differentiaalvergelijkingen worden gedefinieerd:

```
>diffeq1:=EIzz*(diff(diff(diff(diff(w0(x),x),x),x),x)) +
(diff(diff(M(x)*theta(x),x),x)) = 0;
```

$$diffeq1 := EIzz\ w0'''' + M''\ \theta + 2\ M'\ \theta' + M\ \theta'' = 0$$

```
> diffeq2:=(-St)*(diff(diff(theta(x),x),x))+
M(x)*(diff(diff(w0(x),x),x)) = 0;
```

$$diffeq2 := -St\ \theta'' + M\ w0'' = 0$$

De momentenlijn wordt gedefinieerd en in de differentiaalvergelijkingen gesubstitueerd:

```
> M:= x-> M3*(1-x/l)+M4*(x/l);
```

$$M := x \to M3\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{M4\ x}{l}$$

```
> sys1 := [diffeq1,diffeq2];
```

$$sys1 := \left[EIzz\ w0'''' + 2\left(-\frac{M3}{l} + \frac{M4}{l}\right)\theta' + \left(M3\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{M4\ x}{l}\right)\theta'' = 0, \right.$$
$$\left. -St\ \theta'' + \left(M3\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{M4\ x}{l}\right)w0'' = 0 \right]$$

Wanneer nu wordt geprobeerd de differentiaalvergelijkingen op te lossen met het dsolve-commando, vindt Maple wel een oplossing, maar is deze niet bruikbaar (impliciet, bevat o.a. Bessel-functies e.d.).

In literatuur [4] wordt een methode besproken om niet-constante en zelfs niet-lineaire momentenlijnen te beschouwen. Er wordt dan gebruik gemaakt van de Rayleigh-quotient of de Rayleigh-Ritz methode.
Beide methoden geven een boven- en ondergrens-benadering van het kritische kipmoment.

Hoewel wel een begin is gemaakt, is in dit eindwerk niet verder gewerkt met een van deze methoden, omdat een veel gemakkelijke oplossing (zie paragraaf 5.1) voor handen is.

C Staafbelastingen

In een eindige-elementenberekening zal de belasting op een constructie meestal niet alleen bestaan uit krachten en koppels op de knooppunten, maar ook uit belastingen op de staven. In deze bijlage wordt getoond hoe deze zogenaamde elementbelastingen (primaire belastingen) kunnen worden meegenomen in de berekening van de stijfheidsmatrix.

In dit eindwerk is, in verband met de beschikbare tijd, dit echter alleen gedaan voor de momenten-stijfheidsmatrix. De gebruikte methode is daarom ook niet direct toepasbaar voor de totale matrix $[K]^e$.
Ook de afleiding van de matrix wordt anders aangepakt en wordt daarom hier toegelicht.

Bepalen stijfheidsmatrix

Allereerst worden de constanten C_1 t/m C_6 van de in hoofdstuk 4.1 gevonden uitdrukkingen voor v_0 (14) en θ (15) bepaald. Voor de beschouwde ligger, aan beide zijden opgelegd op gaffels, gelden de volgende randvoorwaarden:

$x = 0$

$$v_0(0) = 0$$
$$\theta(0) = 0$$
$$v_0''(0) = -\frac{M_1}{EI_{yy}}$$

$x = l$

$$v_0(l) = 0$$
$$\theta(l) = 0$$
$$v_0''(l) = \frac{M_2}{EI_{yy}}$$

Het combineren van deze zes randvoorwaarden met de uitdrukkingen voor w_0 en ϑ, levert een stelsel van zes vergelijkingen. Oplossen van deze zes vergelijkingen levert de constanten C_1 t/m C_6.

De totale oplossingen worden hiermee:

$$v_0(x) = \frac{M_1 S_t}{M^2} - \frac{S_t\left(M_1 + M_2\right)x}{M^2 l} + \frac{S_t\left(M_1\cos\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + M_2\right)\sin\left(\frac{Mx}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)}{M^2\sin\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)} - \frac{M_1 S_t\cos\left(\frac{Mx}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)}{M^2}$$

$$\theta(x) = \frac{M_1}{M} - \frac{\left(M_1 + M_2\right)x}{Ml} + \frac{\left(M_1\cos\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right) + M_2\right)\left(\sin\left(\frac{Mx}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)\right)}{M\sin\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)} - \frac{M_1\cos\left(\frac{Mx}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)}{M}$$

Om tot een uitdrukking te komen van de vorm:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0'(0) \\ v_0'(l) \end{Bmatrix} \qquad \text{oftewel:} \qquad \{M\} = [S]\{v_0'\}$$

wordt de uitdrukking voor w_0 gedifferentieerd:

$$v_0'(x) = \left(-\frac{S_t}{M^2 l} + \frac{\sqrt{S_t}\cos\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)}{M\sqrt{EI_{yy}}\sin\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)} \right) M_1 + \left(-\frac{S_t}{M^2 l} + \frac{\sqrt{S_t}}{M\sqrt{EI_{yy}}\sin\left(\frac{Ml}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}\right)} \right) M_2$$

Door $x = 0$ en $x = l$ in te vullen wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$\{v_0'\} = [F]\{M\} \tag{C 1}$$

Hieruit volgt:

$$[F]^{-1}\{v_0'\} = [F][F]^{-1}\{M\} \qquad => \qquad \{M\} = [K]\{w_0'\}$$

De inverse van matrix F levert dus de stijfheidsmatrix [K] op:

$$K = \frac{EI_{yy}\alpha}{n} \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \mu \end{bmatrix} \tag{C 2}$$

met:

$$\alpha = \frac{M}{\sqrt{EI_{yy}}\sqrt{S_t}}$$

$$\varepsilon = \alpha l$$

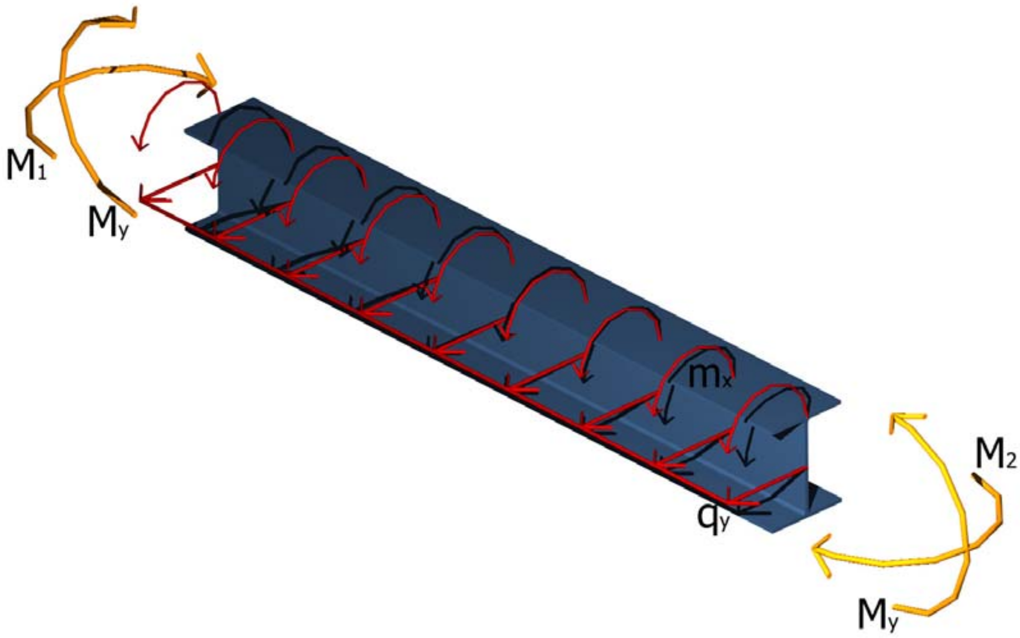
$$\mu = (\sin\varepsilon - \varepsilon\cos\varepsilon)$$

$$\nu = (\varepsilon - \sin\varepsilon)$$

$$n = \varepsilon\sin\varepsilon + 2(\cos\varepsilon - 1)$$

Toevoeging elementbelastingen

Nu worden een verdeelde laterale belasting q_z en een verdeeld wringmoment m_x toegevoegd.



Figuur 26: Staafbelastingen q_y en m_x

Deze belastingen worden als volgt in de differentiaalvergelijkingen geïntroduceerd:

$$EI_{yy}v_0'''' + M\theta'' = q_z \tag{C 3}$$

$$-S_t\vartheta'' + Mw_0'' = m_x \tag{C 4}$$

Op eenzelfde manier als in de vorige paragraaf wordt nu tot de volgende uitdrukking gekomen:

$$\{v_0'\} = [F]\{M\} + [R]\{q\} \tag{C 5}$$

met R en q gedefinieerd als:

$$[R]\{q\} = \begin{bmatrix} R_{12} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_z \\ m_x \end{Bmatrix}$$

Vergelijking (C 5) kan worden omgeschreven tot:

$$\{v_0'\} - [R]\{q\} = [F]\{M\} \quad => \quad [F]^{-1}\{v_0'\} - [F]^{-1}[R]\{q\} = [F]^{-1}[F]\{M\} =>$$

$$[M] = [K]\{v_0'\} - [K][R]\{q\} \quad => \quad [M] = [K]\{v_0'\} + [Q]\{q\} \tag{C 6}$$

waarbij S dus ongewijzigd blijft ten opzichte van de eerder gevonden uitdrukking (C 2). Alle termen van de verdeelde belastingen worden opgenomen in matrix *-KR*, welke vervangen wordt door de matrix Q :

$$Q = -KR = \frac{EI_{yy}}{2M}\frac{n}{\rho}\begin{bmatrix} \frac{S_t}{M} & 1 \\ -\frac{S_t}{M} & -1 \end{bmatrix}$$

De totaaluitdrukking voor de in Figuur 26 afgebeelde ligger wordt dus:

$\{M\} = [K]\{w_0'\} + [Q]\{q\}$ oftewel:

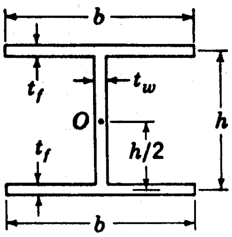
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI_{yy}\frac{\alpha}{n}\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \mu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_0'(0) \\ v_0'(l) \end{Bmatrix} + \frac{EI_{yy}}{2M}\frac{n}{\rho}\begin{bmatrix} \frac{S_t}{M} & 1 \\ -\frac{S_t}{M} & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_z \\ m_x \end{Bmatrix} \tag{C 7}$$

D Torsiestijfheden van doorsneden

In de onderstaande tabel is *J* gelijk aan de torsiestijfheid I_t.

O = shear center $\quad$ J = torsion constant $\quad$ C_w = warping constant

---

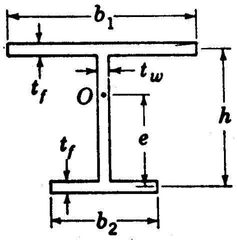


$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

$$C_w = \frac{t_f h^2 b^3}{24}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3}(2b + h)$$



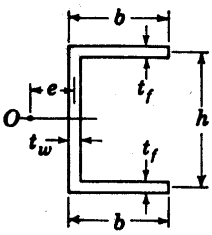
$$e = h\frac{b_1^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

$$J = \frac{(b_1 + b_2)t_f^3 + ht_w^3}{3}$$

$$C_w = \frac{t_f h^2}{12}\frac{b_1^3 b_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3}(b_1 + b_2 + h)$$



$$e = \frac{3b^2 t_f}{6bt_f + ht_w}$$

$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

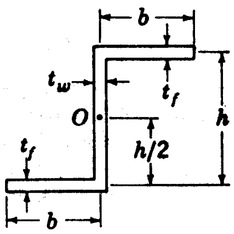
$$C_w = \frac{t_f b^3 h^2}{12}\frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w}$$

If $t_f = t_w = t$:

$$e = \frac{3b^2}{6b + h}$$

$$J = \frac{t^3}{3}(2b + h)$$

$$C_w = \frac{tb^3h^2}{12}\frac{3b + 2h}{6b + h}$$



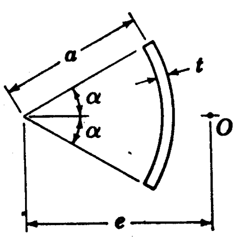
$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3}$$

$$C_w = \frac{b^3h^2}{12(2b + h)^2} \times [2t_f(b^2 + bh + h^2) + 3t_w bh]$$

If $t_f = t_w = t$:

$$J = \frac{t^3}{3}(2b + h)$$

$$C_w = \frac{tb^3h^2}{12}\frac{b + 2h}{2b + h}$$



$$e = 2a\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$J = \frac{2a\alpha t^3}{3}$$

$$C_w = \frac{2ta^5}{3} \times \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}\right]$$

If $2\alpha = \pi$:

$$e = \frac{4a}{\pi} \qquad J = \frac{\pi a t^3}{3}$$

$$C_w = \frac{2ta^5}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{12}{\pi}\right) = 0.0374ta^5$$

E CD-ROM

De onderstaande CD-ROM bevat de belangrijkste Maple-sheets die tijdens dit eindwerk zijn gebruikt.