

F.R.C. Kaal

Knik van panelen met wringvorm

Onderzoek naar een ontwerpformule voor de knik van panelen met een wringvorm.



(Yamauchi, 2019)

Knik van panelen met wringvorm

Onderzoek naar een ontwerpformule voor de knik van panelen met een wringvorm.

Door:

F.R.C. Kaal

5173272

Bachelor Eindproject

Civiele Techniek

Technische Universiteit Delft

Begeleiders:

Dr.Ir. P.C.J Hoogenboom

Dr.Ir. F.P. van der Meer

6 juni 2022

Voorwoord

Voor u ligt het eindrapport van het onderzoek naar de knik van panelen met een wringvorm. Dit onderzoek is gedaan in het laatste kwartaal van het studiejaar 2021-2022 voor het vak Bachelor Eindwerk (CTB-3000-16) van de opleiding Civiele Techniek aan de TU Delft. Het rapport is zo opgesteld dat het voor een andere Civiele Techniek student te begrijpen is. Hierdoor is er van uitgegaan dat de lezer beschikt over enige voorkennis.

Het onderzoek is gedaan onder begeleiding van dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en dr.ir. F.P. van der Meer. Ik wil hen hartelijk bedanken voor de tips en adviezen die zij mij gedurende het onderzoek gegeven hebben.

Delft, 6 juni 2022

Falco Kaal

Samenvatting

Panelen zijn relatief dunne constructieonderdelen die in tegenstelling tot andere constructieonderdelen vaak eerder falen door knik dan door onvoldoende materiaalsterkte. Het is daarom belangrijk de maximale kniklast van panelen goed te onderzoeken. Voor vlakke panelen die scharnierend zijn opgelegd bestaat er een formule voor de normaalkracht waarbij het paneel knikt. Een probleem is dat er voor deze formule geen bruikbaarheidsgrenzen zijn opgesteld, waardoor het voor constructeurs niet duidelijk is wanneer ze de formule kunnen gebruiken. Een ander probleem is dat in de formule geen wringvorm is meegenomen. Met een eindig-elementen-programma is het wel mogelijk om van panelen met wringvorm de maximale kniklast te bepalen, maar dit is in een voorontwerpfase relatief veel werk en dus is er behoefte aan een snellere manier om de maximale kniklast van een paneel met wringvorm te bepalen. Een formule die de maximale kniklast van panelen met wringvorm benadert, is hiervoor de ideale oplossing. Het doel van dit onderzoek is daarom om voor de knikformule voor vlakke panelen bruikbaarheidsgrenzen op te stellen en deze formule uit te breiden voor de invloed van wringvorm.

Ten behoeve van dit onderzoek is een model gemaakt in het eindig-elementen-programma ANSYS waaruit de maximale kniklasten van vlakke panelen en panelen met een wringvorm kunnen worden bepaald. Door de maximale kniklasten uit het model en de formule voor verschillende afmetingen en materiaaleigenschappen te vergelijken zijn er bruikbaarheidsgrenzen gevonden en is de invloed van wringvorm onderzocht.

De bestaande formule voor vlakke panelen bleek voor bepaalde afmetingen niet goed overeen te komen met het model. Hieruit zijn de onderstaande bruikbaarheidsgrenzen voor de formule gevonden waarbij de formule maximaal 7,5% afwijkt van het model in ANSYS. Hierin is l de lengte van de kleinste zijde van het paneel en t de dikte van het paneel.

- $\frac{4}{5} \leq \frac{l_y}{l_x} \leq \frac{5}{4}$
- $\frac{l}{t} \geq 20$

De invloed van de wringvorm op de maximale kniklasten bleek voor bepaalde panelen erg beperkt. Er is gevonden dat de bestaande formule voor vlakke panelen maximaal 9% afwijkt van het model bij onderstaande eisen. De wringvorm wordt hier aangegeven met k_{xy} .

- $l_x = l_y$
- $\frac{l}{t} \geq 20$
- $\frac{k_{xy} * l^2}{t} \leq 10$

De maximale kniklast van panelen met een wringvorm kan binnen deze grenzen dus worden bepaald met de bestaande formule voor vlakke panelen met hierbij een maximale afwijking van 9%.

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
Samenvatting.....	3
Symbolenlijst.....	5
1. Inleiding	6
1.1 Probleemstelling.....	6
1.2 Doelstelling	6
1.3 Plan van aanpak.....	6
2. Achtergrond.....	7
2.1 Krachten in panelen.....	7
2.2 Knik van een paneel zonder wringvorm.....	7
2.3 Eigenfrequentie vierkant gekromd paneel met wringvorm	10
3. Onderzoekshypothese.....	11
4. Maken van het model	13
4.1 Randvoorwaarden.....	13
4.2 Script	14
4.3 Keuze elementgrootte.....	14
5. Vlakke panelen	16
5.1 Vierkante panelen.....	16
5.2 Rechthoekige panelen.....	19
5.3 Bruikbaarheidsgrenzen	20
6. Panelen met wringvorm.....	22
6.1 Onderzoekshypothese testen.....	22
6.2 Invloed wringvorm testen	24
7. Conclusies, Discussie en Aanbevelingen	27
7.1 Conclusies	27
7.2 Discussie.....	28
7.3 Aanbevelingen.....	28
Literatuurlijst.....	29
Bijlagen	30
Bijlage A: Script in ANSYS.....	30

Symbolenlijst

a	Kromtestraal	$[m]$
E	Elasticiteitsmodulus	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
k_{xx}	Kromming in x-richting	$\left[\frac{1}{m}\right]$
k_{yy}	Kromming in y-richting	$\left[\frac{1}{m}\right]$
k_{xy}	Wringvorm	$\left[\frac{1}{m}\right]$
l_x, l_y	Lengtespaneel	$[m]$
n_{xx}, n_{yy}	Normaalkrachten	$\left[\frac{N}{m}\right]$
n_{xy}, n_{yx}	Schuifkrachten in het vlak	$\left[\frac{N}{m}\right]$
t	Dikte paneel	$[m]$
λ	Knikfactor	$[-]$
λ_{cr}	Kritische knikfactor	$[-]$
ρ	Dichtheid materiaal	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
ν	Poisson's ratio	$[-]$

1. Inleiding

1.1 Probleemstelling

Panelen worden vanwege hun vrije vorm en gunstige sterkte-gewichtsverhouding veel toegepast in constructies. Deze relatief dunne constructieonderdelen falen in tegenstelling tot andere constructieonderdelen vaak eerder door knik dan door onvoldoende materiaalsterkte. Uit onderzoek en praktijkervaring blijkt dat dit knikken plotseling kan gebeuren [1]. Er is geen waarschuwing in de vorm van vervorming en het falen van de constructie is dan ook onverwacht. Dit maakt knik van de panelen extra gevaarlijk en dus is het extra belangrijk dit goed te onderzoeken.

Een paneel kan helemaal vlak zijn maar kan ook een wringvorm hebben (zie figuur 1.1). Voor vlakke panelen die scharnierend zijn opgelegd is er analytisch een formule afgeleid voor de normaalkracht waarbij het paneel knikt. Voor deze formule zijn er echter geen bruikbaarheidsgrenzen opgesteld, waardoor het niet duidelijk is voor welke afmetingen en materiaaleigenschappen deze formule de juiste maximale kniklast geeft. Constructeurs weten zo niet wanneer ze de formule kunnen gebruiken en dus is er behoefte aan bruikbaarheidsgrenzen.

Een ander probleem is dat het in de analytische afleiding van de formule niet is gelukt om wringvorm mee te nemen. Numeriek kan deze wringvorm wel meegenomen worden. Met een eindig-elementen-programma zoals ANSYS kan zo van elk paneel de maximale kniklast worden bepaald. In een voorontwerpfase is het echter relatief veel werk om een paneel te modeleren en dus is er behoefte aan een snellere manier om de maximale kniklast van een paneel met wringvorm te bepalen. Een formule die de maximale kniklast van panelen met wringvorm benadert, is hiervoor de ideale oplossing. Een berekening kan zo in de voorontwerpfase veel sneller worden uitgevoerd.

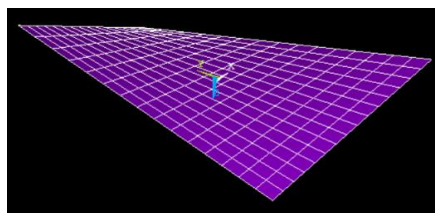
1.2 Doelstelling

Een formule voor de maximale kniklast van vlakke panelen bestaat al. Het doel van dit onderzoek is om voor deze knikformule bruikbaarheidsgrenzen op te stellen en de formule uit te breiden voor de invloed van wringvorm. De bestaande en uitgebreide formule mogen een maximale afwijking hebben van 7,5% van de numerieke oplossing in ANSYS. Dit geeft voldoende nauwkeurigheid voor een constructeur in de ontwerpfase.

1.3 Plan van aanpak

De invloed van wringvorm op de laagste eigenfrequentie van panelen is al bekend. Hieruit kan een hypothese worden opgesteld voor de invloed van wringvorm op de maximale kniklast van panelen. Om de hypothese te kunnen testen moeten panelen met een wringvorm worden gemodelleerd in ANSYS. Er kan zo worden gekeken of het model en de hypothese overeenkomen en dus worden bevestigd of de hypothese wel of niet juist was.

Om zeker te weten of het model voor panelen met wringvorm juist is, wordt eerst een model zonder wringvorm gemaakt. Voor verschillende waarden van de variabelen kan dit model worden getest aan de al bekende formule voor de maximale kniklast van een paneel zonder wringvorm. Als het model nu overeenkomt met de formule kan er een wringvorm aan het model worden toegevoegd. Als voor bepaalde afmetingen of materiaaleigenschappen het model voor vlakke panelen niet overeen blijkt te komen met de bekende formule, kunnen hier de bruikbaarheidsgrenzen van de formule uit worden afgeleid.



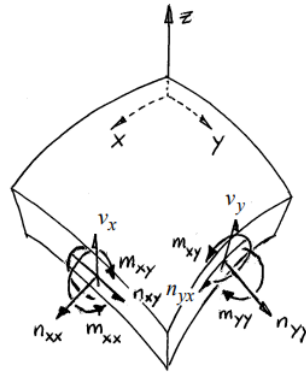
Figuur 1.1: Paneel met wringvorm.

2. Achtergrond

Voor er kan worden begonnen met het maken van een hypothese en een model is het van belang enige kennis te hebben over de achterliggende theorie. In dit hoofdstuk wordt daarom de belangrijkste theorie uiteengezet. Er wordt beschreven hoe de krachten in panelen werken en de formule voor de maximale kniklast van panelen zonder wringvorm wordt geïntroduceerd. Tot slot wordt de formule voor de laagste eigenfrequentie van vierkante panelen met een wringvorm toegelicht.

2.1 Krachten in panelen

In onderstaande figuur is aangegeven wat de positieve snedekrachten zijn op een klein stukje van een paneel. Dit kleine stukje kan worden gezien als onderdeel van een groter paneel. De krachten die zijn aangegeven zijn in werkelijkheid spanningen die op de snede werken. Deze spanningen worden vervangen door krachten per eenheid van lengte [N/m] en ook de momenten worden per eenheid van lengte genomen [Nm/m]. De symbolen n_{xx} en n_{yy} geven de normaalkrachten in x- en y-richting aan en n_{xy} en n_{yx} geven de schuifkrachten in het vlak van het stukje schaal aan. De schuifkrachten uit het vlak worden aangegeven door v_x en v_y en de momenten door m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} en m_{yx} . [4], deze worden in dit onderzoek echter als 0 aangenomen.



Figuur 2.1: Krachten in panelen. [4]

2.2 Knik van een paneel zonder wringvorm

Hieronder staat de differentiaalvergelijking voor de knik van schalen weergegeven. Deze vergelijking kan worden afgeleid uit de Sanders-Koiter vergelijking. Voor de afleiding wordt verwezen naar hand-out 5 van het vak CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application [5].

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 u_z + Et \Gamma \nabla^2 u_z = \nabla^2 \nabla^2 \left(p_z + n_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (n_{xy} + n_{yx}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + n_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

Waarin:

$$p_z = -\Gamma \varphi + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 u_z \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$\Gamma = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

In bovenstaande vergelijking wordt de dikte van het paneel $[m]$ aangegeven door t . De elasticiteitsmodulus $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ en de Poisson's ratio $[-]$ van het materiaal worden aangegeven door E en ν en de krommingen van het paneel $\left[\frac{1}{m}\right]$ in x- en y-richting worden aangegeven met k_{xx} en k_{yy} . De wringvorm $\left[\frac{1}{m}\right]$ wordt aangeduid door k_{xy} . Aan vergelijking (2.1) wordt een factor voor knik ($\lambda [-]$) toegevoegd waardoor onderstaande vergelijking ontstaat.

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 u_z + Et \Gamma \Gamma u_z = \nabla^2 \nabla^2 \left(\lambda p_z + \lambda n_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \lambda (n_{xy} + n_{yx}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \lambda n_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

Er wordt ervan uitgegaan dat de schaal knikt in een schaakbordpatroon. Dit betekent dat formule (2.6) gebruikt mag worden. Hierin geeft u_z dus het patroon aan waarop er knik plaatsvindt en duiden l_x en l_y op de lengtes in x- en y-richting $[m]$ van het paneel. Symbool C is een constante.

$$u_z = C \cos \frac{\pi x}{l_x} \cos \frac{\pi y}{l_y} \quad (2.6)$$

Om een analytische oplossing te vinden voor de kritische knikfactor moet de wiskunde iets versimpeld worden. Onderstaande aannames worden gemaakt.

- $n_{xy} + n_{yx} = 0$
- $k_{xy} = 0$

De eerste aanname stelt dat de schuifkrachten in het vlak gelijk zijn aan 0. Medestudent Rens Noordam zal in zijn onderzoek een benaderende formule proberen op te stellen voor de maximale kniklast van een paneel waarop wel schuifkrachten in het vlak werken. In dit onderzoek worden schuifkrachten in het vlak echter als 0 aangenomen.

De tweede aanname stelt dat het paneel geen wringvorm mag hebben. In dit onderzoek wordt er gezocht naar een uitbreiding van de formule voor de maximale kniklast van panelen voor wringvorm. Als een juiste uitbreiding gevonden wordt hoeft $k_{xy} = 0$ dus niet meer te gelden.

Met deze 2 aannames en gebruik van formule (2.6) wordt vanuit formule (2.5) uiteindelijk een formule voor de kritische knikfactor (λ_{cr}) gevonden van scharnierend opgelegde vlakke en gekromde panelen (Formule (2.7)). [8]

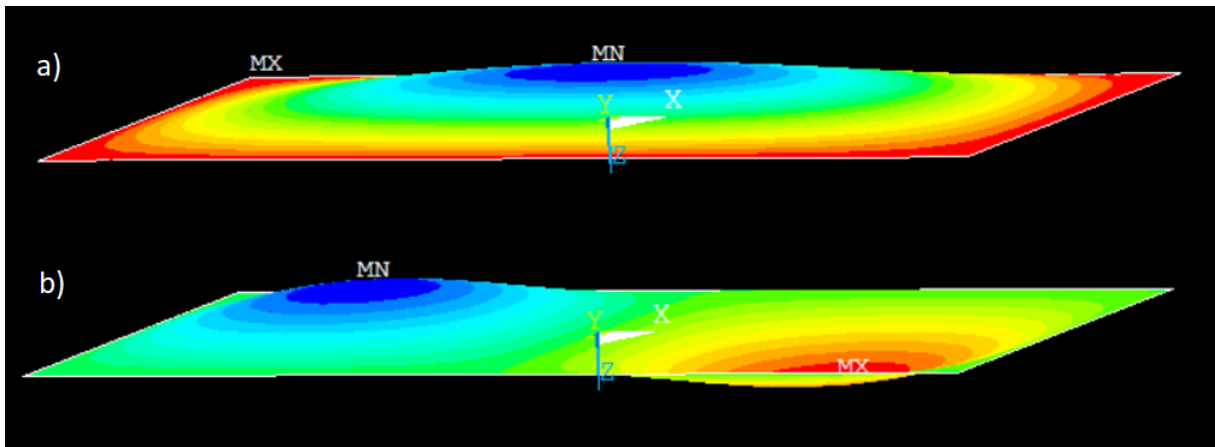
$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (2.7)$$

In dit onderzoek worden de krommingen in x- en y-richting gelijk gesteld aan nul. De formule kan daarom worden versimpeld naar formule (2.8).

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et^3\pi^2\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\left(\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}\right)(12 - 12\nu^2)} \quad (2.8)$$

De kritische knikfactor is de knikfactor het dichtste bij 0. De factor geeft de verhouding weer tussen de kritische normaalkrachten en de toegepaste normaalkrachten. De kritische normaalkrachten zijn hierbij de maximale normaalkrachten die het paneel aankan voor er knik optreedt. [3]

In de analytische afleiding van formule (2.8) is er vanuit gegaan dat het paneel knikt met een knikvorm met maar 1 buik (figuur 2.2 (a)). Als de kritische knikfactor van een paneel met bepaalde afmetingen of materiaaleigenschappen een knikvorm met meerdere buiken heeft (figuur 2.2 (b)) is het daarom nog maar de vraag of formule (2.8) de juiste kritische knikfactor geeft. Voor het opstellen van de bruikbaarheidsgrenzen is dit iets om in acht te nemen.



Figuur 2.2: a) Globale knikvorm analytische oplossing (1 buik). b) Knikvorm met 2 buiken.

Formule (2.8) kan worden omgeschreven tot formule (2.9). In de formules geven $n_{xx,cr}$ en $n_{yy,cr}$ de kritische normaalkrachten in x- en y-richting weer.

$$\frac{n_{xx,cr}}{l_x^2} + \frac{n_{yy,cr}}{l_y^2} = \frac{-E\pi^2 t^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 \quad (2.9)$$

Waarin:

$$n_{xx,cr} = \lambda_{cr} n_{xx} \quad (2.10)$$

$$n_{yy,cr} = \lambda_{cr} n_{yy} \quad (2.11)$$

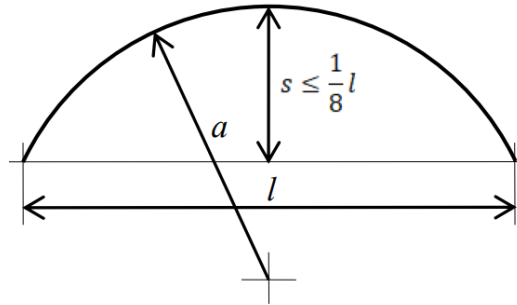
De maximale kniklasten van vlakke panelen kunnen dus worden berekend met formules (2.10) en (2.11). Om de maximale kniklasten van panelen met wringvorm te berekenen moet λ_{cr} in deze formules aangepast worden, n_{xx} en n_{yy} zullen voor de toevoeging van wringvorm namelijk niet veranderen. In dit onderzoek zal daarom de formule voor λ_{cr} (2.8) worden uitgebreid waarmee dan met formules (2.10) en (2.11) de maximale kniklast in x- en y-richting kan worden bepaald. Het stellen van de bruikbaarheidsgrenzen zal ook gebeuren aan de hand van formule (2.8).

2.3 Eigenfrequentie vierkant gekromd paneel met wringvorm

Voor de laagste eigenfrequentie van vierkante panelen is het wel gelukt een formule af te leiden waarin wringvorm is meegenomen (formule (2.12)). Dit is gedaan door $u_z = \cos \frac{\pi x}{l_x} \cos \frac{\pi y}{l_y} \cos 2\pi f t$ in formule (2.1) te substitueren. [9]

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-v^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + \left(\left(\frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \right)^2 + k_{xy}^2 \right) \frac{E}{4\pi^2 \rho} + \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{(1-v^2)n_{xy}^2}{71,7\rho Et^4}} \quad (2.12)$$

Hierin is f_n de laagste eigenfrequentie [Hz] en ρ de dichtheid $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$. In eerder onderzoek is deze formule gecontroleerd met een eindige-elementen analyse [10]. De laagste eigenfrequentie uit de formule bleek goed overeen te komen met de laagste eigenfrequentie uit de eindige elementen analyse. De formule is dus juist, maar er zijn wel een aantal voorwaarden. Zo geldt de formule alleen bij een uniforme belasting op de randen en een uniforme oppervlaktebelasting loodrecht op het vlak. Ook mag de kromming van het paneel niet te groot zijn. De bolling mag maximaal 1/8 zijn van de breedte van het paneel (figuur 2.3).



Figuur 2.3: Maximale bolling voor gebruik formule (2.12). [4]

In formule (2.12) kunnen de bijdragen van de buigstijfheid (t_1 , formule (2.13)), kromming (t_2 , formule (2.14)) en de membraamkrachten (t_3 , formule (2.15)) worden waargenomen. In de term voor kromming is de wringvorm meegenomen. Op welke manier wringvorm is meegenomen in de formule voor de laagste eigenfrequentie zegt wellicht ook iets over hoe wringvorm moet worden meegenomen in een formule voor de kritische knikfactor. Vanuit dit idee wordt in hoofdstuk 3 een hypothese gemaakt voor de invloed van wringvorm op de kritische knikfactor.

$$t_1 = \frac{\pi^2}{12(1-v^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} \quad (2.13)$$

$$t_2 = \left(\left(\frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \right)^2 + k_{xy}^2 \right) \frac{E}{4\pi^2 \rho} \quad (2.14)$$

$$t_3 = \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{(1-v^2)n_{xy}^2}{71,7\rho Et^4} \quad (2.15)$$

3. Onderzoekshypothese

In formule (2.7) geeft de term $\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2}\right)^2$ de bijdrage van de kromming op de kritische knikfactor aan.

Hierin is geen wringvorm meegenomen. Om een goede voorspelling te doen van de bijdrage van wringvorm op de kritische knikfactor, wordt gekeken naar de invloed van wringvorm op de laagste eigenfrequentie. In formule (2.12) is de formule voor de laagste eigenfrequentie weergegeven waarbij in de term voor de kromming (formule (2.14)) de invloed van wringvorm is meegenomen. Door formule (2.14) om te schrijven naar een formule met hierin ook de term $\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2}\right)^2$, kan de invloed van kromming en wringvorm op de laagste eigenfrequentie vergeleken worden met de invloed van kromming op de kritische knikfactor van een paneel. Hieronder wordt formule (2.14) omgeschreven:

$$\begin{aligned} t_2 &= \left(\left(\frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \right)^2 + k_{xy}^2 \right) \frac{E}{4\pi^2 \rho} \\ &= \frac{1}{4} ((k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2) \frac{E}{4\pi^2 \rho} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{k_{xx}}{l^2} + \frac{k_{yy}}{l^2} \right)^2 + 4 \frac{k_{xy}^2}{l^4} \right) \frac{El^4}{4\pi^2 \rho} \end{aligned}$$

Hieruit volgt uiteindelijk:

$$t_2 = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2 \right) \frac{El_x^2 l_y^2}{4\pi^2 \rho} \quad (3.1)$$

Deze laatste stap kan worden gedaan omdat l_x gelijk is aan l_y , het gaat hier namelijk om vierkante panelen. Formule (2.14) kan dus worden omgeschreven naar formule (3.1). Net als in formule (2.7) wordt de bijdrage van kromming nu aangegeven met de term $\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2}\right)^2$. De bijdrage van de wringvorm wordt nu aangegeven met de term $4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y}\right)^2$. Als hypothese wordt gesteld dat de bijdrage van wringvorm voor de laagste eigenfrequentie van vierkante panelen gelijk is aan de bijdrage van wringvorm voor de kritische knikfactor van panelen. Er wordt daarom verwacht dat de kritische knikfactor van scharnierend opgelegde vlakke en gekromde panelen mét een wringvorm kan worden berekend met formule (3.2).

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-v^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (3.2)$$

In dit onderzoek worden de krommingen in x- en y-richting gelijk gesteld aan nul. De formule kan daarom worden versimpeld naar formule (3.3). De rode term geeft hier de extra term aan ten opzichte van formule (2.8).

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-v^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (3.3)$$

Aan de extra term valt op dat $\frac{k_{xy}}{l_x l_y}$ in het kwadraat voorkomt. Hierin zijn l_x en l_y altijd groter dan 0, maar kan k_{xy} ook een negatieve waarde aannemen. Doordat het kwadraat van de term genomen wordt maakt het voor de kritische knikfactor niet uit of het paneel positief of negatief getwist wordt. Dit is logisch aangezien het positief of negatief twisten van een paneel hetzelfde paneel oplevert, alleen nu gespiegeld. De constructieve eigenschappen van het paneel zouden daarom gelijk moeten zijn en het nemen van het kwadraat van deze term lijkt daarom een goede hypothese.

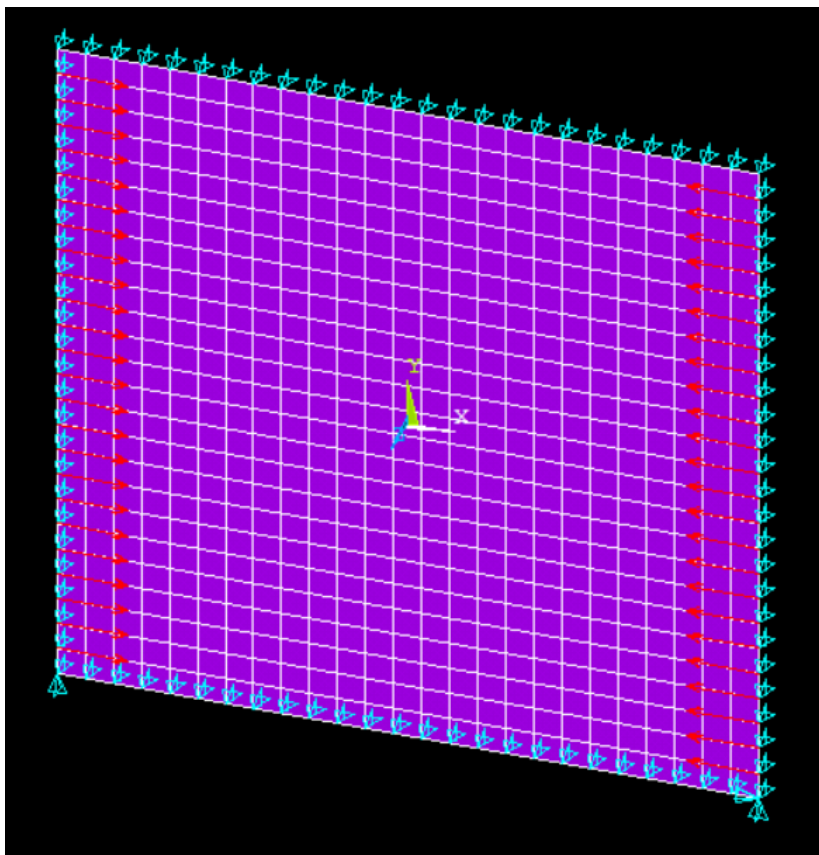
4. Maken van het model

In het programma ANSYS kan een groot aantal geometrieën gemodelleerd worden. Om de eigenschappen van de geometrieën te berekenen maakt het programma gebruik van de eindige elementen methode. Dit is een rekenmethode waarbij een gecompliceerd domein wordt onderverdeeld in kleinere, eenvoudigere elementen waarvan de differentiaalvergelijkingen kunnen worden opgelost. Door de differentiaalvergelijkingen samen te voegen kan over het hele domein het gedrag worden bepaald. In dit hoofdstuk wordt toegelicht hoe de panelen gemodelleerd worden met behulp van ANSYS. De randvoorwaarden worden gespecificeerd en er wordt uitleg gegeven bij het script in ANSYS. Ook wordt de keuze voor het aantal elementen toegelicht.

4.1 Randvoorwaarden

Zoals eerder benoemd, werkt formule (2.8) voor scharnierend opgelegde panelen. Om een gelijke knikfactor uit het model en de formule te krijgen moeten de randen in het model daarom ook scharnierend zijn opgelegd. Het scharnierend opleggen van de randen houdt in dat er hier vrijheid moet zijn tot rotatie en er geen verplaatsing is loodrecht op het vlak. Om te voorkomen dat het paneel wegschuift door de opgelegde krachten moet het paneel in 1 hoekpunt worden vastgezet. De verplaatsing in x-, y- en z-richting moet dan gelijk zijn aan 0. Om ook het draaien van het paneel te voorkomen moet in een ander hoekpunt de verplaatsing in de richting van een rand gelijk zijn aan 0. In figuur 4.1 zijn de randvoorwaarden gemodelleerd in ANSYS te zien.

De randvoorwaarden stellen niks over de verplaatsing loodrecht op de randen. Deze verplaatsing is dus wel mogelijk. Een paneel is vaak onderdeel van een schaalconstructie waarbij meerdere panelen aan elkaar verbonden zijn, denk bijvoorbeeld aan een vliegtuigvleugel. Om deze panelen de mogelijkheid te geven te ‘ademen’ moet er wel vrijheid zijn in de richting loodrecht op de rand.



Figuur 4.1: Randvoorwaarden en gebruikte standaard variabelen weergegeven in ANSYS.

4.2 Script

Het script van het gebruikte model is te vinden in Bijlage A. Het script is ontwikkeld uit het script dat door R. Van Dijk is gebruikt voor onderzoek naar de eigenfrequentie van belaste panelen [11]. In het ontwikkelde script zijn de volgende stappen genomen:

1. Preprocess: Hier wordt het model eigenlijk opgebouwd. Allereerst worden de eigenschappen van het materiaal gedefinieerd. Er wordt aangenomen dat het materiaal van de panelen homogeen, lineair elastisch en isotroop is. Na het definiëren van de materiaaleigenschappen worden de knopen op de juiste plekken geplaatst waar de elementen dan weer tussen komen te liggen. Per knoop wordt het assenstelsel geroteerd om er voor te zorgen dat de normaalkrachten in de richting van het paneel werken. Als dit is gebeurd kunnen bovenstaande randvoorwaarden worden opgesteld en kunnen de krachten op de knopen worden geplaatst.
2. Solution: Soort analyse wordt gekozen. Eerst wordt een ‘static’ analyse gedaan waarna een ‘eigenvalue buckling’ analyse wordt gedaan.
3. Postprocess: Hier worden de resultaten weergegeven. In dit geval verschillende knikfactoren.

In het ‘postprocess’ worden verschillende knikfactoren weergegeven die oplopen van laag naar hoog. De kritische knikfactor is hierbij de knikfactor het dichtste bij 0. Een paneel kan meerdere knikvormen aannemen, maar formule (2.8) berekend de knikfactor alleen met een knikvorm met maar 1 buik. Voor de kritische knikfactor in ANSYS moet daarom naar het aantal buiken gekeken worden. Dit kan in ANSYS in de ‘Result Viewer’. Als de knikvorm van de kritische knikfactor meer dan 1 buik heeft is het logisch dat de kritische knikfactor in ANSYS niet overeenkomt met de knikfactor uit formule (2.8). De formule (2.8) geeft dan niet de kritische knikfactor en kan dus voor een paneel met deze eigenschappen niet gebruikt worden.

4.3 Keuze elementgrootte

In eerste instantie worden de variabelen zoals in tabel 4.1 gebruikt. Dit zijn de standaard variabelen die ook in hoofdstuk 5 gebruikt zullen worden. Het symbool n geeft hier het aantal elementen in x- en y-richting aan. Hoe dit paneel er uit ziet, is te zien in figuur 4.1.

Variabele	Waarde	Eenheid
l_x	1,0	[m]
l_y	1,0	[m]
t	0,01	[m]
E	2,10E+11	[N/m ²]
ρ	7800	[kg/m ³]
ν	0,3	[-]
n_{xx}	-1000	[N/m]
n_{yy}	0	[N/m]
κ_{xx}	0	[1/m]
κ_{yy}	0	[1/m]
κ_{xy}	0	[1/m]
n	25	[-]

Tabel 4.1: Standaard variabelen.

De formule (2.8) geeft voor deze variabelen een knikfactor van 759,20. Om het benodigd aantal elementen in de berekening in ANSYS te bepalen worden meerdere berekeningen gedaan met een verschillend aantal elementen. De resultaten hiervan staan in tabel 4.2.

<i>n</i>	Knikfactor in ANSYS	Vershil met formule (2.8) (=759,20)	Tijd voor het berekenen van de knikfactor in ANSYS
10	818,91	7,86%	< 1 min
25	777,21	2,37%	± 1 min
50	764,92	0,75%	± 4 min
80	760,10	0,12%	± 10 min

Tabel 4.2: Toetsen aantal elementen in x- en y-richting.

De keuze voor het aantal elementen is een afweging tussen de tijd die nodig is om het model te genereren en de nauwkeurigheid waarmee de knikfactor wordt bepaald. Hoe meer elementen hoe nauwkeuriger de oplossing, maar het modeleren van een model met meer elementen kost dan ook een stuk meer tijd. Dit is ook in tabel 4.2 terug te zien. Het modeleren van 80 elementen in x- en y-richting geeft een oplossing die erg goed overeenkomt met formule (2.8), maar het berekenen van deze oplossing in ANSYS kost wel 10 keer zo veel tijd als het berekenen van de knikfactor in ANSYS met 25 elementen in x- en y-richting. De tijd voor het berekenen van de knikfactor in ANSYS is natuurlijk afhankelijk van de gebruikte computer, maar de factoren tussen de hoeveelheid tijd zullen ongeveer gelijk blijven.

De knikfactor zal erg vaak berekend moeten worden in ANSYS om te controleren of het model voor verschillende afmetingen en materiaaleigenschappen overeenkomt met formule (2.8). Er wordt daarom gekozen om de panelen met 25 elementen in x- en y-richting te modeleren. De nauwkeurigheid hierbij is voldoende om te controleren of het model en de formule goed overeenkomen en het berekenen van de knikfactor in ANSYS kost niet te veel tijd.

5. Vlakke panelen

In dit hoofdstuk worden de resultaten van het model in ANSYS voor vlakke panelen weergegeven. Deze zullen worden vergeleken met de uitkomsten van formule (2.8). Dit zal voor zowel vierkante en rechthoekige panelen worden gedaan. Vanuit de resultaten kunnen dan voor de formule (2.8) bruikbaarheidsgrenzen worden opgesteld.

De knikfactor berekend met de formule en ANSYS kunnen op 2 manieren van elkaar afwijken.

1. De kritische knikfactor is niet gelijk aan de knikfactor met een knikvorm met maar 1 buik. Formule (2.8) geeft de analytische oplossing voor de knikfactor met een knikvorm met 1 buik. In tabel 5.1 wordt daarom naar het verschil gekeken tussen de formule en de berekende knikfactor in ANSYS met een knikvorm met 1 buik. Als de knikfactor met 1 buik in ANSYS niet de meeste kritische knikfactor is, wordt dat in de tabel aangegeven door een licht oranje kleur. Formule (2.8) zou de kritische knikfactor moeten geven en is dan voor een paneel met deze variabelen dus eigenlijk niet juist. Kolom 'n' in de tabellen is het aantal buiken bij de kritische knikfactor. De modus van de knikfactor met 1 buik wordt aangegeven door kolom 'm'. Als de modus 1 is, is de knikfactor met 1 buik de knikfactor die zich het dichtst bij 0 bevindt en is deze dus kritisch. Is de modus echter 3, dan is de knikfactor met maar 1 buik de 3^e knikfactor en zijn er dus 2 knikfactoren met een andere knikvorm die dicht bij 0 liggen en dus kritischer zijn.
2. Het verschil tussen de knikfactor berekend met formule (2.8) en ANSYS is simpelweg te groot. De kritische knikfactor is nu wel gelijk aan de knikfactor met een knikvorm met maar 1 buik, maar het verschil tussen de 2 berekende knikfactoren is erg groot. Bij een nauwkeurigheid van minder dan 5% wordt aangenomen dat het model in ANSYS goed overeenkomt met de analytische oplossing uit formule (2.8). De verschillen zijn dan in licht groen gemarkeerd. Is het verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) groter dan 5% dan komen de knikfactoren niet voldoende overeen en is het verschil oranje gemarkeerd.

De variabelen in tabel 4.1 worden nu voor zowel vierkante en rechthoekige panelen individueel aangepast waarbij elke keer wordt gekeken of de knikfactor uit ANSYS en formule (2.8) overeenkomen. In het model in ANSYS worden 25 elementen in x- en y-richting gebruikt, tenzij anders is aangegeven.

5.1 Vierkante panelen

Vierkante vlakke panelen worden nu bekeken. De tabel is opgesplitst in meerdere delen door zwarte horizontale lijnen. Elk deel van de tabel wordt apart besproken. Het nummer in de tekst staat voor het deel van de tabel.

1. Allereerst wordt de dikte van het paneel gevarieerd. De formule (2.8) en ANSYS geven voor panelen met een kleine dikte een vergelijkbare knikfactor. Het verschil tussen de formule en ANSYS wordt echter steeds groter als het paneel dikker wordt dan 0,05 meter. ANSYS geeft in vergelijking tot de formule dan een steeds kleinere knikfactor. Dit is te verklaren door schuifvervormingen die een steeds belangrijkere rol gaan spelen naarmate het paneel dikker wordt. Bij het paneel van 0,25 meter dik is te zien dat de kritische knikfactor niet de knikfactor met een knikvorm met 1 buik is. De kritische knikfactor geeft een knikvorm met afschuiving. De knikvorm heeft dan geen echte buik en daarom wordt dit in de tabel aangegeven door $n=0$.
2. Om te onderzoeken of het grote verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) bij dikke panelen alleen afhankelijk is van de dikte van het paneel worden nu de afmetingen van het paneel gevarieerd. Uit de tabel blijkt dat als het paneel kleiner wordt dan $0,25 \times 0,25$ meter, het verschil tussen de knikfactor uit de formule en ANSYS steeds groter wordt. De verhouding l/t lijkt aan te kunnen geven wanneer de formule en ANSYS vergelijkbare knikfactoren geven.
3. Als $l/t \geq 20$ geldt lijkt formule (2.8) voor de materiaaleigenschappen en normaalkrachten in tabel 4.1 goed overeen te komen met het model in ANSYS. Door de lengtes en diktes tegelijk

te variëren wordt dit gecontroleerd. Dit blijkt inderdaad te kloppen. Het verschil tussen de berekende knikfactoren blijft voor een gelijke l/t -verhouding hetzelfde.

4. Om te controleren of de eis $l/t \geq 20$ ook geldt als er andere normaalkrachten op het paneel staan worden deze nu gevarieerd. Er blijkt dat voor zowel grote, kleine, positieve en negatieve normaalkrachten het verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) gelijk blijft. Ook voor verschillende normaalkrachten in x- en y-richting blijft het verschil gelijk.
5. De materiaaleigenschappen worden nu gecontroleerd om te controleren of $l/t \geq 20$ voor alle vierkante panelen geldt. Eerst is de E-modulus gevarieerd. Hieruit blijkt dat het verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) gelijk blijft voor verschillende waarden van E. Ook is de dichtheid een keer aangepast. Er blijkt dat de dichtheid net als in formule (2.8) ook in ANSYS geen invloed heeft op de knikfactor. Als laatst is de Poisson-ratio gevarieerd. Deze bevindt zich altijd tussen 0,0 en 0,5. Voor $\nu = 0,0$ is het verschil tussen de berekende knikfactoren groter geworden, voor $\nu = 0,5$ wordt het verschil kleiner. Als voor $\nu = 0,0$ de l/t -verhouding groter wordt, wordt de knikfactor in ANSYS weer relatief groter. Het verschil wordt weer positief en lijkt net als in het eerste deel van het model niet groter te worden dan 2,70%. Eerder is gevonden dat de grootte van de normaalkrachten, E-modulus en de dichtheid geen invloed hebben op het verschil in knikfactor en dus kan worden gesteld dat een paneel met een l/t -verhouding van 20 en een Poisson-ratio van 0,0 het meest kritische verschil in knikfactor geeft. Dit blijkt -3.35% te zijn bij 25 elementen in x- en y-richting.
6. Om een nauwkeuriger beeld te krijgen van dit kritische verschil wordt het aantal elementen in x- en y-richting verhoogd. Het verschil wordt nu groter maar stagneert rond -6,5%.

Het nog verder verhogen van het aantal elementen zou het absolute verschil nog iets kunnen verhogen, maar dit effect zal beperkt zijn. Formule (2.8) kan daarom gebruikt worden voor vierkante panelen waarbij $l/t \geq 20$ geldt met een maximale afwijking van 7,5%.

Voor panelen met een grotere l/t -verhouding wordt verwacht dat de maximale afwijking van de formule kleiner zal zijn omdat er minder schuifvormingen zullen optreden. De eis $l/t \geq 20$ zal dan echter moeten worden aangescherpt, waardoor de formule voor minder panelen gebruikt kan worden. Dit wordt daarom niet verder onderzocht.

Aangepaste variabele(n)	Nieuwe waarde(n)	Kritische knikfactor ANSYS	n	Knikfactor met 1 buik ANSYS	m	Uitkomst formule (2.8)	Vershil kolom 5 & 7	l/t
-	-	777,21	1	777,21	1	759,2	2,37%	100
t	0,0010	0,78	1	0,78	1	0,76	2,63%	1000
t	0,0025	12,18	1	12,18	1	11,86	2,70%	400
t	0,0050	97,36	1	97,36	1	94,90	2,59%	200
t	0,0200	6169,26	1	6169,26	1	6073,60	1,58%	50
t	0,0500	92797,60	1	92797,60	1	94900,04	-2,22%	20
t	0,0750	301284,26	1	301284,26	1	320287,64	-5,93%	13
t	0,1000	684330,15	1	684330,15	1	759200,33	-9,86%	10
t	0,2500	2740389,20	0	7870235,82	2	11859028,09	-33,64%	4
l_x & l_y	0,05 & 0,05	106858,03	0	224598,85	2	303680,13	-26,04%	5
l_x & l_y	0,15 & 0,15	32168,38	1	32168,38	1	33742,24	-4,66%	15
l_x & l_y	0,20 & 0,20	18558,65	1	18558,65	1	18980,01	-2,22%	20
l_x & l_y	0,25 & 0,25	12046,78	1	12046,78	1	12147,21	-0,83%	25
l_x & l_y	4,00 & 4,00	48,71	1	48,71	1	47,45	2,66%	400
l_x & l_y	8,00 & 8,00	12,18	1	12,18	1	11,86	2,70%	800
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,05; 0,0025	4639,88	1	4639,88	1	4745,00	-2,22%	20
l_x & l_y ; t	0,25 & 0,25; 0,0125	23199,40	1	23199,40	1	23725,01	-2,22%	20
l_x & l_y ; t	8,00 & 8,00; 0,4000	742380,86	1	742380,86	1	759200,33	-2,22%	20
l_x & l_y ; t ; n_{xx} & n_{yy}	0,05 & 0,05; 0,0025; -10 & -10	232010,30	1	232010,30	1	237250,10	-2,22%	20
l_x & l_y ; t ; n_{xx} & n_{yy}	0,25 & 0,25; 0,0125; 20000 & 20000	-580,02	1	-580,02	1	-593,12	-2,22%	20
l_x & l_y ; t ; n_{xx} & n_{yy}	8,00 & 8,00; 0,4000; -30000 & 10000	37109,58	1	37109,58	1	37960,02	-2,22%	20
E ; t	0,04 ^E 11; 0,0500	1767,57	1	1767,57	1	1807,62	-2,22%	20
E ; t	0,70 ^E 11; 0,0500	30931,089	1	30931,089	1	31633,35	-2,22%	20
ρ	2700	777,21	1	777,21	1	759,2	2,37%	100
v ; t	0,5; 0,0500	112977,54	1	112977,54	1	115145,39	-1,88%	20
v ; t	0,0; 0,0500	83466,93	1	83466,93	1	86359,04	-3,35%	20
v ; t	0,0; 0,0200	5597,71	1	5597,71	1	5526,98	1,29%	50
v ; t	0,0; 0,0050	88,59	1	88,59	1	86,36	2,58%	200
v ; t	0,0; 0,0010	0,71	1	0,71	1	0,69	2,68%	1000
v ; t ; n	0,0; 0,0500; 50	81610,83	1	81610,83	1	86359,04	-5,50%	20
v ; t ; n	0,0; 0,0500; 80	81029,04	1	81029,04	1	86359,04	-6,17%	20
v ; t ; n	0,0; 0,0500; 100	80856,21	1	80856,21	1	86359,04	-6,37%	20

Tabel 5.1: Variëren van variabelen voor vierkante panelen zonder wringvorm.

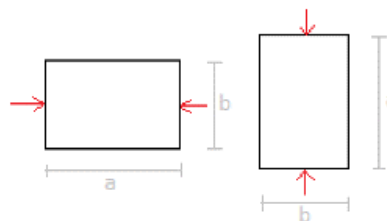
5.2 Rechthoekige panelen

Rechthoekige vlakke panelen worden nu bekeken. De tabel is weer opgesplitst in meerdere delen door zwarte horizontale lijnen waarbij elk deel van tabel 5.2 hieronder apart wordt besproken. Een zwarte horizontale lijn in enkel de eerste en laatste kolom van de tabel is er alleen voor de structuur.

1. Als eerste worden l_x en l_y gevarieerd van $l_y/l_x = 2$ tot $l_y/l_x = 0,5$. Het verschil tussen de knikfactor berekend met formule (2.8) en ANSYS lijkt voor een verhouding tussen de 2 en 0,8 acceptabel te zijn. Bij een l_y/l_x -verhouding kleiner dan 0,8 is de knikfactor met 1 buik niet meer kritisch, de kritische knikfactor heeft dan 2 buiken. Om de bruikbaarheidsgrenzen te versimpelen wordt onderzocht of de verschillen acceptabel zijn voor een l_y/l_x -verhouding tussen de 0,80 en 1,25. De lengte-breedteverhouding is dan maximaal 4 op 5. Aan de resultaten valt ook op dat bij gelijke l_y/l_x -verhouding het verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) goed overeenkomt.
2. Om te onderzoeken of een l_y/l_x -verhouding tussen de 0,80 en 1,25 voor alle panelen een acceptabel verschil geeft, worden nu ook de diktes gevarieerd voor deze uiterste lengte-breedteverhoudingen. Voor $l/t \geq 20$ lijkt net als bij vierkante panelen het verschil tussen ANSYS en formule (2.8) acceptabel. Hier is l nu de gelijk aan de lengte van de kleinste zijde. Bij gelijke l/t - en l_y/l_x -verhouding blijkt het verschil tussen de berekende knikfactor met formule (2.8) en ANSYS gelijk. Als l_y/l_x bij een l/t -verhouding van 20 stapsgewijs oploopt van 0,80 naar 1,25 loopt het verschil in knikfactor tussen de twee berekeningen ook stapsgewijs op.

Net als bij vierkante panelen zal er bij rechthoekige panelen steeds meer schuifvervorming optreden bij een lagere l/t -verhouding. De knikfactor berekend met formule (2.8) zal dus eerder afwijken van de knikfactor in ANSYS zodra deze verhouding kleiner wordt. Er kan daarom worden aangenomen dat als het verschil in knikfactor voor de kritische l/t -verhouding van 20 acceptabel is, het verschil ook voor panelen met een grotere l/t -verhouding acceptabel is. In het vorige deel van de tabel is te zien dat het verschil tussen de knikfactor in formule (2.8) en ANSYS groter wordt naarmate l_y/l_x naar 1,25 gaat. Deze verhouding is daarom net als $l/t = 20$ kritisch. De normaalkrachten en materiaaleigenschappen zullen daarom alleen worden gevarieerd voor deze kritische verhoudingen.

3. Uit dit deel van de tabel blijkt dat het veranderen van de normaalkrachten in alleen x-richting, net als bij vierkante panelen, zorgt voor een gelijk verschil tussen de berekende knikfactoren. Als de verhouding tussen de normaalkrachten in x- en y-richting aangepast wordt, is te zien dat de het verschil stapsgewijs van -2,46% naar -0,24% gaat. Deze -0,24% komt overeen met de panelen uit het tweede deel van de tabel voor panelen met een l_y/l_x -verhouding van 0,80. Dit is logisch omdat het paneel nu eigenlijk een kwartslag is gedraaid zoals in figuur 5.1. De uitersten van de verschillen tussen de berekende knikfactoren vinden dus plaats bij enkel normaalkracht in de richting van de kortste zijde. Het meest kritische verschil is nog steeds -2,46% en voor deze variabelen zullen daarom de materiaaleigenschappen worden gevarieerd.



Figuur 5.1: Het paneel is een kwartslag gedraaid.

4. Net als bij vierkante panelen geeft een andere E-modulus een gelijk verschil tussen de knikfactor berekend in ANSYS en formule (2.8). Ook nu is voor $\nu = 0,0$ het verschil tussen de berekende

knikfactoren groter geworden, voor $\nu = 0,5$ wordt het verschil weer kleiner. Het verschil voor $\nu = 0,0$ wordt weer positief en gaat naar een constante waarde rond de 1,50% als de l/t -verhouding groter wordt gemaakt. Er kan dus worden gesteld dat een l/t -verhouding van 20, normaalkracht enkel in richting van de kortste zijde en een Poisson-ratio van 0,0 het meest kritische verschil in knikfactor geeft voor rechthoekige panelen met een maximale lengte-breedteverhouding van 4 op 5. Dit blijkt -3,37% te zijn bij 25 elementen in x- en y-richting.

5. Om een nauwkeuriger beeld te krijgen van dit kritische verschil wordt het aantal elementen in x- en y-richting weer verhoogd. Het verschil wordt nu groter maar stagneert rond -5,70%.

Het nog verder verhogen van het aantal elementen zou het absolute verschil nog iets kunnen verhogen, maar dit effect zal beperkt zijn. Formule (2.8) kan daarom gebruikt worden voor rechthoekige panelen tot en met een lengte-breedteverhouding van 4 op 5. Ook moet $l/t \geq 20$ gelden waarbij l nu de gelijk aan de lengte van de kleinste zijde. De maximale afwijking zal opnieuw maar 7,5% zijn.

5.3 Bruikbaarheidsgrenzen

Het doel van dit hoofdstuk was om bruikbaarheidsgrenzen voor de formule (2.8) op te kunnen stellen. De formule voor de kritische knikfactor blijkt voor panelen met maximale lengte-breedte verhouding van 4 op 5 en een l/t -verhouding groter of gelijk aan 20 hooguit 7,5% hoger uit te vallen dan de kritische knikfactor in ANSYS. Aan formule (2.8) kan een veiligheidsfactor worden toegevoegd waardoor formule (5.1) ontstaat. Als $\gamma = 0,925$ zal de formule voor panelen met maximale lengte-breedte verhouding van 4 op 5 en een l/t -verhouding groter of gelijk aan 20 nooit een hogere kritische knikfactor geven dan ANSYS. Zo weet de constructeur zeker dat de kritische knikfactor die de formule geeft niet in werkelijkheid lager is. De vraag is echter of dit noodzakelijk is aangezien een constructeur sowieso al werkt met bepaalde veiligheidsfactoren.

$$\lambda_{cr} = \gamma \frac{-Et^3\pi^2\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\left(\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}\right)(12 - 12\nu^2)} \quad (5.1)$$

Aangepaste variabele(n))	Nieuwe waarde(n)	Kritische knikfactor ANSYS	n	Knikfactor met 1 buik ANSYS	m	Uitkomst formule (2.8)	Vershil kolom 5 & 7	l_y/l_x	l/t
l_x	0,50	1183,90	1	1183,90	1	1186,25	-0,19%	2	50
l_x	0,80	807,03	1	807,03	1	797,63	1,18%	1,25	80
l_x	1,10	788,57	1	788,57	1	766,12	2,93%	0,91	100
l_x	1,25	826,78	1	826,78	1	797,63	3,65%	0,8	100
l_x	1,50	844,93	2	931,16	2	891,01	4,51%	0,75	100
l_x	2,00	784,67	2	1251,26	4	1186,25	5,48%	0,5	100
l_y	0,50	3120,97	2	4987,33	4	4745,00	5,11%	0,5	50
l_y	0,80	1290,22	1	1290,22	1	1246,30	3,52%	0,8	80
l_y	0,90	975,47	1	975,47	1	947,73	2,93%	0,90	90
l_y	1,25	517,14	1	517,14	1	510,49	1,30%	1,25	100
l_y	2,00	297,03	1	297,03	1	296,56	0,16%	2	100
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,04; 0,0001	0,52	1	0,52	1	0,50	3,71%	0,80	400
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,04; 0,0010	511,29	1	511,29	1	498,52	2,56%	0,80	40
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,04; 0,0020	3978,79	1	3978,79	1	3988,17	-0,24%	0,80	20
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,04	138188,89	0	352907,32	3	498521,78	-29,21%	0,80	4
l_x & l_y ; t	0,25 & 0,20; 0,0100	19893,01	1	19893,01	1	19940,87	-0,24%	0,80	20
l_x & l_y ; t	8,00 & 6,40; 0,3200	636576,34	1	636576,34	1	638107,88	-0,24%	0,80	20
l_x & l_y ; t	8,00 & 7,20; 0,3600	682062,44	1	682062,44	1	690893,39	-1,28%	0,90	20
l_x & l_y ; t	8,00 & 8,80; 0,4000	618266,63	1	618266,63	1	633155,24	-2,34%	1,10	20
l_x & l_y ; t	8,00 & 10,00; 0,4000	497928,34	1	497928,34	1	510486,30	-2,46%	1,25	20
l_x & l_y ; t	0,05 & 0,0625; 0,0025	3112,12	1	3112,12	1	3190,54	-2,46%	1,25	20
l_x & l_y ; t ; n_{xx}	0,05 & 0,0625; 0,0025 -10	311212,53	1	311212,53	1	319053,94	-2,46%	1,25	20
l_x & l_y ; t ; n_{xx}	8,00 & 10,00; 0,4000; -20000	24896,41	1	24896,41	1	25524,31	-2,46%	1,25	20
l_x ; t ; n_{yy}	0,80; 0,0400; -500	37931,28	1	37931,28	1	38673,21	-1,92%	1,25	20
l_x ; t ; n_{yy}	0,80; 0,0400; -1000	30632,74	1	30632,74	1	31127,21	-1,49%	1,25	20
l_x ; t ; n_{yy}	0,80; 0,0400; -2000	22119,68	1	22119,68	1	22389,75	-1,20%	1,25	20
l_x ; t ; n_{xx} & n_{yy}	0,80; 0,04; 0 & -1000	79575,89	1	79575,89	1	79763,485	-0,24%	1,25	20
l_x ; E ; t	0,80; 0,70 ^E 11; 0,0400	16598,00	1	16598,00	1	17016,21	-2,46%	1,25	20
l_x ; v ; t	0,80; 0,5; 0,0400	60568,07	1	60568,07	1	61939,00	-2,21%	1,25	20
l_x ; v ; t	0,80; 0,0; 0,0400	44886,60	1	44886,60	1	46454,25	-3,37%	1,25	20
l_x ; v ; t	0,80; 0,0; 0,0200	5801,56	1	5801,56	1	5806,78	-0,09%	1,25	50
l_x ; v ; t	0,80; 0,0; 0,0050	92,03	1	92,03	1	90,73	1,43%	1,25	200
l_x ; v ; t	0,80; 0,0; 0,0010	0,74	1	0,74	1	0,73	1,51%	1,25	1000
l_x ; v ; t ; n	0,80; 0,0; 0,0400; 50	44147,20	1	44147,20	1	46454,25	-4,96%	1,25	20
l_x ; v ; t ; n	0,80; 0,0; 0,0400; 80	43918,77	1	43918,77	1	46454,25	-5,45%	1,25	20
l_x ; v ; t ; n	0,80; 0,0; 0,0400; 100	43853,25	1	43853,25	1	46454,25	-5,60%	1,25	20

Tabel 5.2: Variëren van variabelen voor rechthoekige panelen zonder wringvorm.

6. Panelen met wringvorm

In dit hoofdstuk zal de invloed van de wringvorm op de kritische knikfactor van panelen worden onderzocht. Allereerst zal de hypothese voor de knikfactor voor panelen met wringvorm uit hoofdstuk 4 worden gecontroleerd met de resultaten uit ANSYS.

6.1 Onderzoekshypothese testen

In hoofdstuk 4 is een hypothese gemaakt voor een formule voor de knikfactor van panelen met een wringvorm. In tabel 6.1 wordt de knikfactor berekend met de voorspelde formule vergeleken met de knikfactor berekend in ANSYS. De knikfactor die volgt uit deze voorspelde formule blijkt veel te hoog uit te vallen en dus niet te kloppen.

Aangepaste variabele(n)	Nieuwe waarde(n)	Knikfactor met 1 buik ANSYS	Uitkomst hypothese (formule (3.3))	Vershil
-	-	777,21	759,22	2,37%
k_{xy}	0,01	777,45	780,48	-0,39%
k_{xy}	0,05	783,21	1291,14	-39,33%
k_{xy}	0,20	863,37	9270,18	-90,68%
k_{xy} & n_{yy}	0,01 & -1000	388,74	390,24	-0,38%
k_{xy} & n_{yy}	0,05 & -1000	391,78	645,57	-39,31%
k_{xy} & n_{yy}	0,20 & -1000	434,70	4635,09	-90,62%

Tabel 6.1: Testen van de onderzoekshypothese.

De onderzoekshypothese met term $4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2$ blijkt dus te grote waarden te geven voor de knikfactor in vergelijking met ANSYS. Er wordt nu getest of het verkleinen van het getal 4 betere resultaten geeft. Voor verschillende variabelen wordt in ANSYS de knikfactor berekend met en zonder wringvorm. Het verschil tussen deze berekende knikfactoren is de bijdrage van de wringvorm in ANSYS. Dit wordt vergeleken met de bijdrage van de wringvorm in formule (3.3) met het getal 1/24 in de term in plaats van 4. Elk onderstaand nummer geeft uitleg bij het bijbehorende deel in tabel 6.2.

1. Allereerst wordt de hoeveelheid wringvorm gevarieerd. Voor de standaard variabelen wordt weer tabel 4.1 gebruikt. Aan de bijdrage van de wringvorm in ANSYS valt op dat deze relatief en absoluut steeds groter wordt naarmate k_{xy} toeneemt. De invloed van wringvorm tot een waarde van $k_{xy} = 0,1$ lijkt erg beperkt. Ook valt op dat als 4 door 1/24 wordt vervangen, de bijdrage van wringvorm voor panelen met weinig kromming te laag wordt geschat terwijl voor panelen met veel kromming de bijdrage van wringvorm juist wordt overschat. Als de factor 1/24 wordt verhoogd of verlaagd zal de bijdrage van de wringvorm daarom nooit overeenkomen met de bijdrage in ANSYS voor panelen met zowel veel als weinig kromming. Er is ook getest of een negatieve waarde voor de wringvorm een andere invloed heeft op de kritisch knikfactor dan een positieve waarde. Dit blijkt zoals in de hypothese voorspeld niet het geval.
2. Een gelijke normaalkracht in y-richting wordt nu toegevoegd. Dit geeft dezelfde resultaten als in het eerste deel van de tabel.
3. Nu wordt de dikte van het paneel veranderd. Bij dunne panelen blijkt de invloed van de wringvorm op de knikfactor erg groot. Er treedt dus een stuk minder snel knik op bij een dun paneel met wringvorm dan bij een dun paneel zonder wringvorm. Bij dikke panelen gebeurt juist het tegenover gestelde. Schuifvervormingen gaan daar een rol spelen en daardoor treedt er volgens ANSYS bij erg dikke panelen zelfs eerder knik op bij getwiste panelen dan bij vlakke panelen. De formule met factor 1/24 geeft nu voor dunnere panelen hele andere waarden voor de bijdrage van de wringvorm dan ANSYS.
4. Ook het veranderen van de afmetingen van het paneel lijkt weer hele andere waarden te geven voor de formule ten opzichte van ANSYS. Hoe veel de formule afwijkt lijkt voor een deel af te

hangen van de l/t -verhouding. Het veranderen van de factor $1/24$ zal er hier ook niet voor zorgen dat de invloed van de wringvorm in ANSYS en de formule overeenkomen. Wat wel opvalt is dat de invloed van de wringvorm in ANSYS voor kleinere panelen beperkt is met $k_{xy} = 0,2$ [1/m].

Er kan worden geconcludeerd dat de fout in de term $4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2$ niet alleen zit in de factor 4. Het veranderen van de factor 4 zorgt namelijk niet voor een goede overeenkomst van de invloed van de wringvorm tussen de formule en ANSYS. Wel valt op dat de invloed van de wringvorm voor panelen met een kleine wringvorm, grote dikte en kleine afmetingen beperkt lijkt. Dit wordt verder onderzocht in hoofdstuk 6.2.

Aangepaste variabele(n)	Nieuwe waarde(n)	Knikfactor met 1 buik ANSYS	Knikfactor met 1 buik ANSYS $k_{xy} = 0$	Bijdrage wringvorm ANSYS	Bijdrage t.o.v. $k_{xy} = 0$	Bijdrage wringvorm formule (4 $\rightarrow 1/24$)	Verskil t.o.v. ANSYS	l/t
-	-	777,21	777,21	0,00	-	0,00	-	100
k_{xy}	0,01	777,45	777,21	0,24	0,03%	0,22	9,09%	100
k_{xy}	0,05	783,21	777,21	6,00	0,77%	5,541	8,28%	100
k_{xy}	0,10	800,68	777,21	23,47	3,02%	22,16	5,91%	100
k_{xy}	0,20	863,37	777,21	86,16	11,09%	88,65	-2,80%	100
k_{xy}	0,40	1038,33	777,21	261,12	33,61%	354,62	-26,36%	100
k_{xy}	-0,40	1038,33	777,21	261,12	33,61%	354,62	-26,36%	100
$k_{xy} ; n_{yy}$	0,01 ; -1000	388,74	388,62	0,12	0,03%	0,11	9,09%	100
$k_{xy} ; n_{yy}$	0,05 ; -1000	391,78	388,62	3,16	0,81%	2,77	14,07%	100
$k_{xy} ; n_{yy}$	0,10 ; -1000	401,03	388,62	12,41	3,19%	11,08	12,00%	100
$k_{xy} ; n_{yy}$	0,20 ; -1000	434,70	388,62	46,08	11,86%	44,32	3,97%	100
$k_{xy} ; n_{yy}$	0,40 ; -1000	534,20	388,62	145,58	37,46%	177,31	-17,89%	100
$k_{xy} ; t$	0,20; 0,001	2,30	0,78	1,52	194,87%	8,87	-82,86%	1000
$k_{xy} ; t$	0,20; 0,005	132,04	97,36	34,68	35,62%	44,33	-21,76%	200
$k_{xy} ; t$	0,20; 0,020	6329,82	6169,26	160,56	2,6%	177,31	-9,44%	50
$k_{xy} ; t$	0,20; 0,050	92562,12	92797,60	-235,48	-0,25%	709,24	-	20
$k_{xy} ; l_x \& l_y$	0,20; 0,2 & 0,2	18557,68	18559,52	-1,84	0,00%	3,55	-	20
$k_{xy} ; l_x \& l_y$	0,20; 0,5 & 0,5	3105,33	3084,63	20,7	0,67%	22,16	-6,58%	50
$k_{xy} ; l_x \& l_y$	0,20; 2,0 & 2,0	354,88	194,72	160,16	82,25%	354,62	-54,83%	200

Tabel 6.2: Aanpassing van de onderzoekshypothese testen.

6.2 Invloed wringvorm testen

De invloed van de wringvorm op de kritische knikfactor lijkt voor bepaalde panelen in tabel 6.2 beperkt. Als de invloed van wringvorm voor bepaalde panelen erg klein is, zal formule (2.8) voor deze panelen een redelijke benadering geven van de kritische knikfactor. Er wordt daarom nu onderzocht voor welke panelen de wringvorm verwaarloosbaar klein is. Aangenomen wordt dat de bijdrage van wringvorm verwaarloosbaar klein is als het verschil tussen een paneel met en zonder wringvorm kleiner is dan 5%. De resultaten van het onderzoek zijn te zien in tabel 6.3. In de tabel zal enkel getest worden voor panelen waarbij de l/t -verhouding groter of gelijk is aan 20. Als deze verhouding kleiner is geeft formule (2.8) namelijk geen goede benadering van de kritische knikfactor (zie hoofdstuk 5). In de tabel heeft de kritische knikfactor in ANSYS altijd een knikvorm met 1 buik. De delen in de tabel worden hieronder toegelicht.

1. Dit is een herhaling van het eerste deel van tabel 6.2. Het verschil tussen de knikfactoren met en zonder wringvorm wordt groter naarmate de wringvorm toeneemt. Als $k_{xy} * l^2/t \leq 10$ lijkt de invloed van wringvorm beperkt.
2. Om te testen of dit voor alle panelen geldt worden de afmetingen gevarieerd. Voor verschillende afmetingen blijkt bij $k_{xy} * l^2/t \leq 10$ de invloed van de wringvorm beperkt. Een voorbeeld van een paneel waarbij de invloed beperkt is afgebeeld in figuur 6.1. De wringvorm is bij dit paneel goed zichtbaar. In tabel 6.3 is dit paneel dikgedrukt gemarkeerd. Er valt op dat bij een gelijke $k_{xy} * l^2/t$ - en l/t -verhouding de bijdrage van de wringvorm procentueel gelijk blijft. Ook valt op dat bij een l/t -verhouding van 20 wringvorm een negatieve bijdrage heeft op de grootte van de knikfactor.

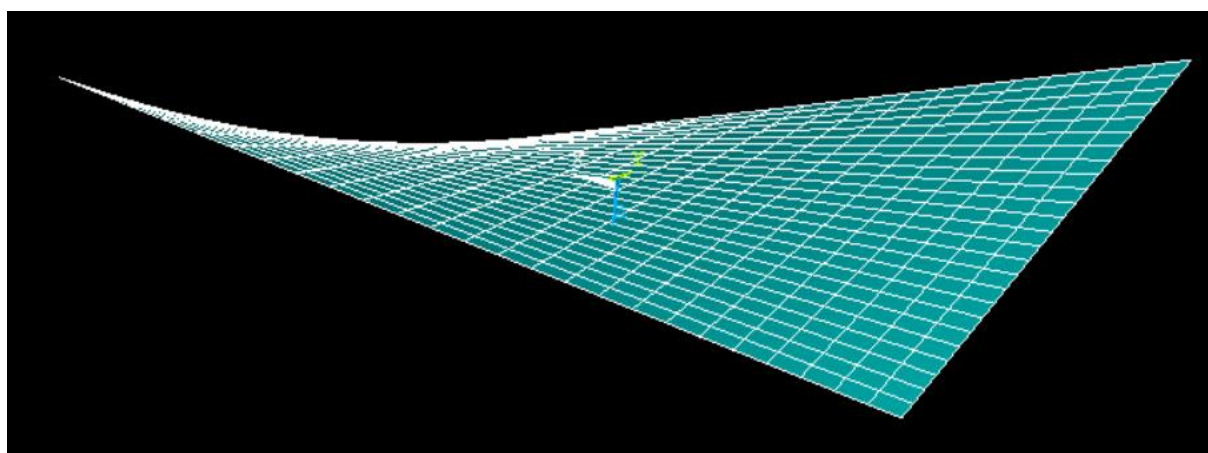
Aangezien formule (2.8) een grotere kritische knikfactor geeft dan ANSYS voor panelen waarbij de l/t -verhouding gelijk is aan 20, zijn bij deze verhouding negatieve bijdragen van wringvorm erg relevant. De wringvorm zorgt dan voor een lagere kritische knikfactor in ANSYS wat leidt tot een nog groter verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8). Dit zal minder optreden naarmate de l/t -verhouding groter wordt dan 20 en daarom is $l/t = 20$ kritisch.

3. Er wordt voor de verhouding $l/t = 20$ en $k_{xy} * \frac{l^2}{t} \leq 10$ nu gevarieerd in de afmetingen van het paneel. Voor panelen met een hoge $k_{xy} * l^2/t$ -waarde blijkt het verschil tussen de kritische knikfactor van een paneel met en zonder wringvorm het grootst. Daarom is $k_{xy} * l^2/t = 10$ kritisch.
4. De krachten op een kritische paneel met $l/t = 20$ en is $k_{xy} * l^2/t = 10$ worden nu gevarieerd. De invloed van de wringvorm blijkt gelijk te blijven als n_{xx}/n_{yy} gelijk blijft. Als de kracht in 1 richting op het paneel werkt blijkt de kritische knikfactor met wringvorm relatief het kleinst te zijn. Deze situatie is daarom kritisch.
5. Het variëren van de E-modulus blijkt relatief een gelijke invloed van de wringvorm op te leveren. Voor $\nu = 0,0$ blijkt de invloed van de wringvorm relatief kleiner te worden terwijl voor $\nu = 0,5$ de invloed relatief groter wordt. Als voor $\nu = 0,5$ de l/t -verhouding groter wordt, wordt de absolute invloed van de wringvorm weer kleiner. Dit geldt ook voor een afname van $k_{xy} * l^2/t$.

Bij het vierkante paneel met de grootste negatieve bijdrage voor wringvorm werken de normaalkrachten in 1 richting. Het kritische paneel heeft een Poisson-ratio van 0,5 en er geldt $l/t = 20$ en $k_{xy} * l^2/t = 10$. De eisen die gelden zijn $l/t \geq 20$, $k_{xy} * l^2/t \leq 10$.

Aangepaste variabele(n)	Nieuwe waarde(n)	Kritische kikfactor (met 1 buik) ANSYS	Kritische kikfactor (met 1 buik) ANSYS $k_{xy} = 0$	Bijdrage wringvorm ANSYS	Bijdrage t.o.v. $k_{xy} = 0$	l/t	$\frac{k_{xy} * l^2}{t}$
-	-	777,21	777,21	0,00	0,00%	100	-
k_{xy}	0,0100	777,45	777,21	0,24	0,03%	100	1
k_{xy}	0,0500	783,21	777,21	6,00	0,77%	100	5
k_{xy}	0,1000	800,68	777,21	23,47	3,02%	100	10
k_{xy}	0,2000	863,37	777,21	86,16	11,09%	100	20
k_{xy}	0,4000	1038,33	777,21	261,12	33,60%	100	40
$k_{xy}; l_x \& l_y$	0,0250; 4,00 & 4,00	66,28	48,71	17,57	36,07%	400	40
$k_{xy}; l_x \& l_y$	0,0125; 4,00 & 4,00	54,36	48,71	5,65	11,60%	400	20
$k_{xy}; l_x \& l_y$	0,0063; 4,00 & 4,00	50,24	48,71	1,53	3,14%	400	10
$k_{xy}; t$	0,0100; 0,0010	0,80	0,78	0,02	2,56%	1000	10
$k_{xy}; t$	0,0500; 0,0050	100,40	97,36	3,04	3,12%	200	10
$k_{xy}; t$	0,2000; 0,0200	6329,82	6169,26	160,56	2,60%	50	10
$k_{xy}; t$	0,5000; 0,0500	91118,11	92797,60	-1679,49	-1,81%	20	10
$k_{xy}; t; l_x \& l_y$	5,0000; 0,0050; 0,10 & 0,10	9111,81	9279,76	-167,95	-1,81%	20	10
$k_{xy}; t; l_x \& l_y$	0,0500; 0,5000; 10,0 & 10,0	911181,11	927976,01	-16794,91	-1,81%	20	10
$k_{xy}; t; l_x \& l_y$	0,5000; 0,0250; 0,50 & 0,50	46211,98	46398,80	-186,82	-0,40%	20	5
$k_{xy}; t; l_x \& l_y$	0,5000; 0,0100; 0,20 & 0,20	18547,99	18559,52	-11,53	-0,06%	20	2
$k_{xy}; t; l_x \& l_y$	0,5000; 0,0025; 0,05 & 0,05	4639,70	4639,88	0,18	0,00%	20	0,5
$k_{xy}; t; n_{xx}$	0,5000; 0,0500; -10000	9111,81	9279,76	-167,95	-1,81%	20	10
$k_{xy}; t; n_{xx} \& n_{yy}$	0,5000; 0,0500; -10000 & -5000	6272,40	6186,91	85,49	1,38%	20	10
$k_{xy}; t; n_{xx} \& n_{yy}$	0,5000; 0,0500; -10000 & -10000	4776,74	4640,21	136,53	2,94%	20	10
$k_{xy}; t; n_{xx} \& n_{yy}$	0,5000; 0,05000; -10 & -10	4776744,49	4640206,03	136538,46	2,94%	20	10
$k_{xy}; t; E$	0,5000; 0,0500; $0,7^{E11}$	30372,70	30932,53	-559,83	-1,81%	20	10
$k_{xy}; t; \nu$	0,5000; 0,0500; 0,0	83442,25	83466,93	-24,68	-0,03%	20	10
$k_{xy}; t; \nu$	0,5000; 0,0500; 0,5	108902,71	112977,50	-4074,29	-3,61%	20	10

Tabel 6.3: Invloed wringvorm testen.



Figuur 6.1: Paneel van 1,0 [m] x 1,0 [m] x 0,05 [m] met een wringvorm van 0,5 [1/m]. De invloed van wringvorm is beperkt.

Voor vlakke panelen heeft het meest kritische paneel ook een l/t -verhouding van 20, maar is de Poisson-ratio gelijk aan 0,0. Omdat de invloed van de wringvorm het grootst is bij een Poisson-ratio van 0,5 zal het paneel met de grootste afwijking van formule (2.8) een Poisson-ratio tussen de 0,0 en 0,5 hebben. Er wordt daarom voor verschillende Poisson-ratio's naar het verschil tussen de knikfactor in ANSYS en formule (2.8) gekeken. De resultaten hiervan zijn weergegeven in tabel 6.4. Er worden 80 elementen in x- en y-richting gebruikt voor een extra nauwkeurig verschil.

Aangepaste variabele(n)	Nieuwe waarde(n)	Kritische knikfactor (met 1 buik) ANSYS	Uitkomst formule (2.8)	Vershil
$k_{xy}; t; v; n$	0,5; 0,05; 0,5; 80	106144,39	115145,38	-7,82%
$k_{xy}; t; v; n$	0,5; 0,05; 0,4; 80	95661,28	102808,38	-6,95%
$k_{xy}; t; v; n$	0,5; 0,05; 0,3; 80	88743,46	94900,04	-6,49%
$k_{xy}; t; v; n$	0,5; 0,05; 0,0; 80	81040,19	86359,03	-6,16%

Tabel 6.4: Uiterste verschil tussen formule (2.8) en ANSYS voor paneel met wringvorm voor bepaalde eisen..

Het maximale verschil tussen de knikfactor berekend met formule (2.8) en ANSYS blijkt 7,82% te zijn bij een Poisson-ratio van 0,5. Dit verschil zal voor nog meer elementen in x- en y-richting misschien nog iets toenemen maar niet boven de 9% uitstijgen. Voor vierkante panelen waarbij de eisen $l/t \geq 20$, $k_{xy} * l^2/t \leq 10$ gelden is de maximale afwijking van formule (2.8) daarom -9%. Formule (5.1) met veiligheidsfactor $\gamma = 0,91$ zal daarom nooit een hogere kritische knikfactor geven dan ANSYS.

7. Conclusies, Discussie en Aanbevelingen

7.1 Conclusies

Het doel van dit onderzoek was om bruikbaarheidsgrenzen voor de bestaande knikformule op te stellen en deze formule uit te breiden voor de invloed van wringvorm. De bestaande en uitgebreide formule mochten hierbij een maximale afwijking hebben van 7,5% van de numerieke oplossing in ANSYS.

Om de bruikbaarheidsgrenzen op te stellen voor vlakke panelen zijn in hoofdstuk 5 de knikfactoren in ANSYS vergeleken met onderstaande formule.

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et^3\pi^2\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)^2}{\left(\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}\right)(12 - 12\nu^2)}$$

Dit heeft geresulteerd in de onderstaande bruikbaarheidsgrenzen. Hierin is l de lengte van de kleinste zijde van het paneel.

- $\frac{4}{5} \leq \frac{l_y}{l_x} \leq \frac{5}{4}$
- $\frac{l}{t} \geq 20$

De formule wijkt bij deze grenzen maximaal 7,5% af van de numerieke oplossing in ANSYS. Bij een lagere l/t -verhouding zal de formule meer afwijken en bij een hogere verhouding wijkt de formule juist minder af.

Voor het uitbreiden van de formule voor de invloed van wringvorm is in hoofdstuk 4 een hypothese opgesteld. De hypothese stelt dat de formule als volgt wordt uitgebreid:

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{4 \left(\frac{k_{xy}}{l_x l_y} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right)$$

In hoofdstuk 6 wordt deze formule getest waaruit blijkt dat de formule voor een paneel met een kleine wringvorm al niet overeen komt met ANSYS. Ook het groter of kleiner maken van de term met een bepaalde factor blijkt niet de juiste knikfactoren op te leveren. Uit deze testen wordt duidelijk dat de wringvorm voor bepaalde panelen een beperkte invloed heeft. Er wordt gevonden dat de formule zonder extra term maximaal 9% afwijkt van de oplossing in ANSYS bij onderstaande eisen:

- $\frac{l}{t} \geq 20$
- $l_x = l_y$
- $\frac{k_{xy} * l^2}{t} \leq 10$

Dit is de belangrijkste conclusie van dit onderzoek. Binnen deze eisen kan de wringvorm van een paneel duidelijk zichtbaar zijn. Bij een hogere l/t -verhouding en/of een lagere $\frac{k_{xy} * l^2}{t}$ -verhouding zal de formule minder afwijken van de oplossing in ANSYS.

7.2 Discussie

In de resultaten is vaak het verschil tussen een formule en het model in ANSYS bekeken. Er worden hieruit bepaalde aannames gemaakt. Bijvoorbeeld dat het verschil tussen de knikfactoren in ANSYS en de formule voor elke E-modulus gelijk blijft. Dit lijkt vanuit de berekende knikfactoren een goede aanname maar er is in werkelijkheid natuurlijk niet voor elke waarde van de E-modulus getest. Dit zou namelijk enorm veel tijd vergen. Het kan daarom zijn dat bij dit soort aannames een bepaald paneel niet voldoet aan de aannames die gemaakt zijn. Er is zoveel mogelijk geprobeerd dit te voorkomen door de variabelen van het paneel zo breed mogelijk te variëren, maar toch zou dit het geval kunnen zijn.

Een voorbeeld hiervan is ook het variëren van de afmetingen. De afmetingen van het paneel worden alleen gevarieerd tussen 0,05 en 8,00 meter. Er wordt er van uit gegaan dat voor grotere en kleinere panelen dezelfde conclusies gelden maar dit is niet getest. Nu is de kans dat een paneel groter of kleiner dan de gegeven afmetingen moet worden ontworpen natuurlijk wel erg klein.

7.3 Aanbevelingen

Het is in het onderzoek dus gelukt bruikbaarheidsgrenzen op te stellen voor de knikformule van vlakke panelen. Het uitbreiden van de formule voor de invloed van wringvorm is echter niet gelukt. Als bij een vervolgonderzoek er verder onderzoek wordt gedaan naar de invloed van wringvorm op de kritische knikfactor wordt het volgende geadviseerd: Varieer elke variabele individueel met verschillende hoeveelheden wringvorm en bereken de kritische knikfactor. Leidt zo voor elke variabele een verband af met de hoeveelheid wringvorm en de kritische knikfactor. Door dit verband van elke variabele in beeld te brengen kan uiteindelijk een benaderende formule worden opgesteld.

Bij een nieuw onderzoek kan er ook worden gekeken naar de invloed van kromming in x- en y-richting. De formule voor de kritische knikfactor van gekromde panelen bestaat al maar ook hiervoor zijn er geen bruikbaarheidsgrenzen en is de invloed van de wringvorm niet meegenomen. Met ANSYS kunnen de bruikbaarheidsgrenzen worden onderzocht en kan wellicht een benaderende formule voor de invloed van wringvorm worden verkregen.

Een ander interessant onderzoek kan zijn om naar de invloed van de randvoorwaarden te kijken. Wat gebeurt er bijvoorbeeld bij het inklemmen van één of meerdere randen met de kritische knikfactor en kan hiervoor een formule worden afgeleid?

Literatuurlijst

- [1] David Bushnell. *Buckling of Shells Pitfall for Designers*. AIAA Journal, 19(9):1183–1226, 1981.
- [2] Maddux, G. E. (1986, oktober). *Stress analysis manual*. U.S. Department of Commerce.
<https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0759199.pdf>
- [3] Rice University. (2009). *FEA Buckling Analysis* (Draft 10.2)
https://www.clear.rice.edu/mech403/HelpFiles/FEA_Buckling_analysis.pdf
- [4] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 1
- [5] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 5
- [6] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 6
- [7] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 7
- [8] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 12
- [9] TU Delft, & Hoogenboom, P. C. J. CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 14
- [10] TU Delft, & Paasman, Y. (2016, oktober). *Eigenfrequentie van gekromde panelen*, Bachelor eindproject.
- [11] TU Delft, & Van Dijk, R. (2014, november). *Eigenfrequentie van belaste panelen*, Bachelor eindproject.
- [12] Yamauchi, N. (2019, 16 januari). *Four Leaves Villa's Roofs Resemble Gently Twisted Leaves* [Foto]. Inspirationist. <http://inspirationist.net/four-leaves-villas-roofs-resemble-gently-twisted-leaves/>

Bijlagen

Bijlage A: Script in ANSYS

!!!!!! definiëren van de variabelen !!!!!

lx = 1	! m	lengte in de x-richting
ly = 1	! m	breedte in de y-richting
t = 0.01	! m	dikte
kxx = 0	! 1/m	kromming in x-richting
kyy = 0	! 1/m	kromming in y-richting
kxy = 0	! 1/m	wringvorm
E = 2.1e11	! N/m ²	elastiteitsmodulus
v = 0.3	! -	Poisson's ratio
rho = 7800	! kg/m ³	massadichtheid
n = 25	! -	aantal elementen in x- en y-richting
nxx = -1000	! N/m	normaalkracht in x-richting
nyy = 0	! N/m	normaalkracht in y-richting
nxy = 0.0	! N/m	Schuifkracht in het vlak
nyx = 0.0	! N/m	Schuifkracht in het vlak
ex = lx/n	! m	Lengte van een element in x-richting
ey = ly/n	! m	Lengte van een element in y-richting

$p = -(kxx \cdot nxx + kxy \cdot (nxy + nyx) + kyy \cdot nyy)$! N/m² Belasting loodrecht op het paneel

!!!!!!!!!!!!!! PREPROCESS !!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!! definiëren van de materiaaleigenschappen !!!!!

/PREP7

MPTEMP,,,,,,,,	! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,E	! kiezen elasticiteitsmodulus
MPDATA,PRXY,1,v	! kiezen Poisson's ratio
MPDATA,DENS,1,rho	! kiezen dichtheid
ET,1,SHELL181	! element type: 4 node shell (ontwerpen in 2D)
R,1,t,t,t,t, , ,	! element dikte

!!!!!! plaatsen van de knopen !!!!!

```
*DO,i,0,n
*DO,j,0,n
  x=lx/n*i-lx/2          ! bepalen x-, y- en z-coördinaten
  y=ly/n*j-ly/2          ! oorsprong bevindt zich midden in het paneel
  z=(0.5*x*x*kxx)+(x*y*kxy)+(0.5*y*y*kyy)
  N,,x,y,z,,
*ENDDO
*ENDDO
```

!!!!!! plaatsen van de elementen !!!!!

```
*DO,i,1,n
*DO,j,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)        ! Tussen alle knopen worden elementen geplaatst
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO
```


!!!!!! Van alle knopen wordt assenstelsel geroteerd !!!!!

```
*DO,i,1,(n+1)*(n+1)
xx=1
xy=0
xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
lx=SQRT((xx*xx)+(xy*xy)+(xz*xz))
zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
zz=1
lz=SQRT((zx*zx)+(zy*zy)+(zz*zz))
NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
```

!!!!!! Van knopen op lijn $y=ly/2$ wordt assenstelsel geroteerd !!!!!

```
*DO,i,2,n
j=i*(n+1)
yx=0
yy=1
yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
ly=SQRT((yx*yx)+(yy*yy)+(yz*yz))
zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
zz=1
lz=SQRT((zx*zx)+(zy*zy)+(zz*zz))
NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
```

!!!!!! Van knopen op lijn $y=-ly/2$ wordt assenstelsel geroteerd !!!!!

```
*DO,i,2,n
j=i*(n+1)-n
yx=0
yy=1
yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
ly=SQRT((yx*yx)+(yy*yy)+(yz*yz))
zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
zz=1
lz=SQRT((zx*zx)+(zy*zy)+(zz*zz))
NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO
```

!!!!!! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het vlak !!!!!

```
*DO,i,1,n
D,i,UZ,0 ! op de 4 randen wordt de verplaatsing in z-richting
D,i*(n+1),UZ,0 ! als 0 aangenomen, dit is inclusief hoekpunten
D,i*(n+1)+1,UZ,0
D,i+n*(n+1)+1,UZ,0
*ENDDO
```

!!!!!! randvoorwaarde: voorkomen van wegschuiven en roteren !!!!!

```
D,1,UY,0
D,(n+1)*(n+1)-n,UY,0
D,(n+1)*(n+1)-n,UX,0
```

!!!!!! normaalkrachten op de randen zetten !!!!!!

*DO,i,2,n ! op de 2 randen in y-richting worden de normaalkrachten
F,i,FX,-nxx*ey ! in x-richting geplaatst, dit is exclusief hoekpunten

*ENDDO

*DO,i,(n+1)*n+2,(n+1)*(n+1)-1

F,i,FX,nxx*ey

*ENDDO

*DO,i,1,n-1 ! op de 2 randen in x-richting worden de normaalkrachten
j=i*(n+1)+1 ! in y-richting geplaatst, dit is exclusief hoekpunten

F,j,Fy,-nyy*ex

*ENDDO

*DO,i,1,n-1

j=i*(n+1)+1+n

F,j,Fy,nyy*ex

*ENDDO

FINISH

/SOLU

!!!!!! Kracht loodrecht op paneel plaatsen !!!!!!

DO,i,1,(n+1)(n+1)

F,i,FZ,p*ex*ey ! Zet op elke knoop een kracht loodrecht op het paneel

*ENDDO

!!!!!!!!!!!!!! SOLUTION !!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!! static analyse !!!!!!

!PSTRES,1 ! Press-stresses worden meegenomen

STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

/SOLU

!!!!!! eigen buckling analyse !!!!!!

ANTYPE, 1

BUCOPT,LANB,30,0,0,CENTER

OUTPR,BASIC,ALL

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

!!!!!!!!!!!!!! POSTPROCESS !!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!! weergeven lijst met resultaten !!!!!!

/POST1

SET,LIST

FINISH

/SOL