
Spanningen in de randen van dunne platen

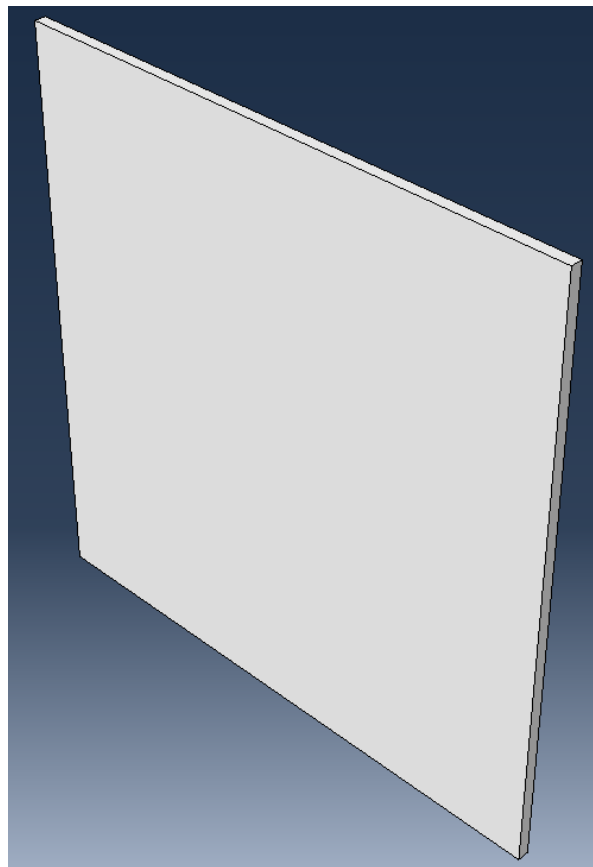
Eindrapport van het Bachelor Eindproject

Astrid Kleijnen

5085365

Juni 2022

Begeleid door P.C.J. Hoogenboom en C. Kasbergen



Voorwoord

Voor u ligt het rapport van het eindproject in de richting Structural Engineering van de Bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. In dit rapport is onderzoek gedaan naar de wringspanningen in plaatranden door gebruik te maken van de eindige-elementen-methode. Het rapport kan benaderd worden vanuit een academisch perspectief, want er wordt voornamelijk gekeken naar het verband tussen de theorie en simulaties. Daarnaast biedt het rapport inzichten voor constructeurs, die de veiligheid van ontwerpen van platen willen bepalen.

Ik zou graag mijn begeleiders, P.C.J. Hoogenboom en C. Kasbergen, willen bedanken voor de kennis en hulp die ze gedurende dit onderzoek aan mij hebben verleend.

Ik wens u veel leesplezier.

Delft, Juni 2022.

Astrid Kleijnen

Samenvatting

Uit de theorie blijkt dat Eric Reissner een formule heeft opgesteld voor de wringspanning in het midden van de rand van een plaat. Deze formule is als volgt:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} * \frac{m_{xy}}{t^2}$$

In deze formule is σ de spanning σ_{xz} die ontstaat bij wringing, $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ is de coëfficiënt in de formule, m_{xy} geeft het moment over de breedte van de plaat weer en t is de dikte van de plaat.

De formule komt uit 1945 en de vraag, die in dit rapport wordt beantwoord, is wat de precieze coëfficiënt in de formule van Reissner is. De coëfficiënt in cijfers uitgeschreven heeft een waarde van 4,741.

Er zijn 5 modellen gemaakt in Abaqus. Deze modellen bestaan uit een vierkanten, dunne plaat van 200 millimeter lang en 200 millimeter breed. De dikte van de plaat is 4 millimeter. De plaat is aan drie hoekpunten scharnierend opgelegd. Op de vrije hoekpunt is een kracht van 1000 Newton aangebracht. De materiaaleigenschappen van de plaat zijn de eigenschappen van glas. Er wordt aangenomen dat het materiaal van de plaat lineair elastisch is. Daarnaast wordt er gebruik gemaakt van de eindige-elementen-methode, dus het model is opgedeeld in hele kleine volume-elementen. Er zit tussen elk model een verschil in hoe groot de volume-elementen zijn die in het model zijn verwerkt.

Na de simulaties in Abaqus zijn de resultaten verwerkt in Excel.

De eerste twee modellen werden met elkaar vergeleken, omdat de manier waarop de elementen in de modellen verwerkt zaten, vergelijkbaar was. Door middel van een lineair verband is er een trendlijn getrokken, die de grootte van de coëfficiënt aangaf op het moment dat de elementen oneindig klein zouden zijn. Het resultaat dat uit deze twee modellen kwam was een nieuwe coëfficiënt van 4,376.

Het derde, vierde en vijfde model zijn ook met elkaar vergeleken. Doordat er drie simulaties zijn gedaan, is het mogelijk geweest een kwadratisch verband te leggen door de drie punten heen. De trendlijn van de resultaten geeft bij het gebruik van oneindig kleine elementen een coëfficiënt van 4,396.

De betrouwbaarheid van de tweede vergelijking wordt hoger geschat, omdat de elementgrootte van de modellen die zijn gebruikt kleiner is en er meer modellen zijn gebruikt.

De conclusie van dit rapport is dat de coëfficiënt uit de formule van Reissner verschilt van wat de daadwerkelijke coëfficiënt zou moeten zijn. De nieuwe coëfficiënt zou 4,396 moeten zijn. De nieuwe formule van Reissner zou als volgt moeten zijn.

$$\sigma = 4,396 * \frac{m_{xy}}{t^2}$$

Daarnaast is er in dit rapport ter controle gekeken of de E-modulus en Poisson's ratio invloed hebben op de grootte van de coëfficiënt. Er is gebleken dat die eigenschappen geen invloed hebben op de grootte van de coëfficiënt in de formule van Reissner.

Contents

Voorwoord	2
Samenvatting	3
1. Inleiding.....	6
1.1 Probleemomschrijving	6
1.2 Doel	7
1.3 Oplosmethode	7
1.4 Leeswijzer.....	7
2. Theorie	8
2.1 Momentformule	9
2.2 Rekenkracht moderne computers	10
3. Modelling.....	11
3.1 Afmetingen plaat	11
3.2 Randvoorwaarden en materiaaleigenschappen	11
3.3 Model in Abaqus	11
4. Meshing.....	13
4.1 Eerste model	14
4.2 Tweede model	15
4.3 Derde model	16
4.4 Vierde model.....	17
4.5 Vijfde model.....	18
5. Resultaten	19
5.1 Samenvatting resultaten	19
6. Verwerking.....	21
6.1 Bepaling coëfficiënt.....	21
6.2 Vergelijking model 1 en model 2	22
6.3 Vergelijking model 3, model 4 en model 5	23
6.3 Nieuwe coëfficiënt in de formule van Reissner	24
6.4 Resultaten rekentijden.....	24
6.5 Controle invloed E-modulus en Poisson's ratio	25
6.5.1 Controle E-modulus	25
6.5.2 Controle Poisson's ratio	25
7. Conclusie	26

7.1 Aanbevelingen	27
7.2 Discussie.....	27
Bijlagen.....	28
Bijlage 1: Maple-script verwerken twee oplossingen	28
Bijlage 2: Grafiek over Wet van Moore.....	29
Literatuurlijst.....	30

1. Inleiding

1.1 Probleemomschrijving

Spanningen in randen van platen

De spanningen in de randen van platen verschillen van spanningen in het midden van platen. Om de spanningen aan de randen te kunnen berekenen, wordt de formule van Reissner gebruikt. De formule voor de wringspanning in een plaatrand kan worden gebruikt bij het rekenen aan dunne platen. Reissner heeft de formule voor wringspanning in plaatranden afgeleid door gebruik te maken van de dikke-plaattheorie.

Men kan de formule van Reissner gebruiken bij het doorrekenen van dunne platen, maar de precisie van de coëfficiënt in deze formule is niet helemaal duidelijk. Dat zal in dit rapport verder onderzocht worden.

De formule van Reissner ziet er als volgt uit (Hoogenboom, z.d.).

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} * \frac{m_{xy}}{t^2}$$

Hierin is sigma de spanning in de rand van de plaat. In de formule zijn de dikte van de plaat en m_{xy} de variabelen. Daarnaast staat er nog een coëfficiënt in de formule in de vorm van $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. Dit geeft ongeveer een absolute waarde van 4,74.

In dit rapport zal er vooral gekeken worden naar de grootte van de coëfficiënt van Reissner wanneer de formule wordt gebruikt bij dunne platen.

De hoofdvraag die in dit rapport zal worden beantwoord is: Is de coëfficiënt in de formule van Reissner nog steeds juist wanneer deze berekend wordt met de huidige simulatieprogramma's? En wat is de precieze grootte van deze coëfficiënt?

De subvragen die naast de hoofdvraag in dit rapport zullen worden beantwoord:

- I. Heeft de dikte van de plaat invloed op de grootte van de coëfficiënt in de formule van Reissner?
- II. Heeft de E-modulus van de plaat invloed op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?
- III. Zijn de lengte en breedte van de plaat voldoende groot om geen invloed te hebben op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?
- IV. Heeft Poisson's ratio een invloed op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?
- V. Geldt de wet van Moore op een elementberekening van een plaat?

De verwachting is dat de coëfficiënt lager zal liggen dan 4,74. Dit blijkt uit het rapport van Rutger Zwennis uit 2010, waarin staat dat de coëfficiënt een waarde van 4,48 moet hebben (Zwennis, 2013). Ook in het rapport van Dong is de waarde van de coëfficiënt berekend. In dit rapport bleek de waarde van de coëfficiënt 4,6 te zijn (Li, 2012). Doordat de daadwerkelijke coëfficiënt lager zal liggen dan de coëfficiënt die gebruikt wordt in de formule van Reissner, is de veiligheid van de constructie niet in het geding bij gebruik van de formule van Reissner.

Rekenkracht moderne computers

Naast de grootte van de coëfficiënt in de formule van Reissner zal er in dit rapport ook worden gekeken naar de wet van Moore. Deze wet stelt dat het aantal transistors in een dicht geïntegreerde schakeling elke twee jaar verdubbeld. Dit komt ongeveer neer op een verdubbeling van de rekenkracht elke twee jaar.

In het rapport van Rutger Zwennis uit 2010 (Zwennis, 2013) is ongeveer dezelfde berekening gedaan als de berekening in dit rapport. In het rapport van Rutger Zwennis is gebleken dat de rekenkracht gelijk was aan 30 minuten voor het doorrekenen van 1.000.000 knopen.

De vraag die in dit rapport beantwoord zal worden is: Voldoet de wet van Moore nog steeds als men kijkt naar specifieke elementenberekening in Abaqus?

1.2 Doel

Het doel van dit rapport is om de coëfficiënt in de formule van Reissner zo nauwkeurig mogelijk numeriek te berekenen voor de grootste wringspanning in de plaatrand. De nauwkeurigheid zal afhankelijk zijn van de rekentijd, capaciteit en geheugen van de computer.

1.3 Oplosmethode

De vragen in dit rapport zullen worden beantwoord door een model te maken in Abaqus. Hierin zal gebruik worden gemaakt van de eindige elementenmethode. Daarnaast wordt er aangenomen dat het materiaal waar de plaat van is gemaakt lineair elastisch is. Dit betekent dat het verloop van de spanning en rek recht evenredig verloopt.

In het model wordt er gerekend met een plaat, die de eigenschappen van glas heeft. Deze eigenschappen zijn:

- Dichtheid: 2500 kg/m^3
- Poisson's ratio: 0,22
- E-modulus: 48 GPa

In het model zal de plaat aan drie punten scharnierend worden opgelegd en zal op de vrije hoekpunt een kracht F worden uitgeoefend. Uit dit model kan men de spanningen aan de rand van het midden van de plaat aflezen. Ook kunnen de dikte en m_{xy} worden berekend.

Met behulp van de verkregen data zal de coëfficiënt kunnen worden vastgesteld. Deze kan vergeleken worden met de coëfficiënt uit de formule van Reissner.

De toetsing van de wet van Moore zal gaan door een berekening van het model te doen, die evenveel tijd kost als dezelfde berekening van Rutger Zwennis 10 jaar geleden. Er zal gekeken worden naar het aantal knopen in de berekening en aan de hand van die gegevens zal er een conclusie worden getrokken.

1.4 Leeswijzer

Dit rapport zal bestaan uit een aantal onderdelen. Allereerst wordt de theorie over spanningen in de randen van platen besproken. Vervolgens zullen de verschillende modellen worden besproken, waarna de resultaten van de simulaties zullen worden getoond. Aan het einde van het rapport zal een conclusie worden getrokken aan de hand van de verkregen resultaten.

2. Theorie

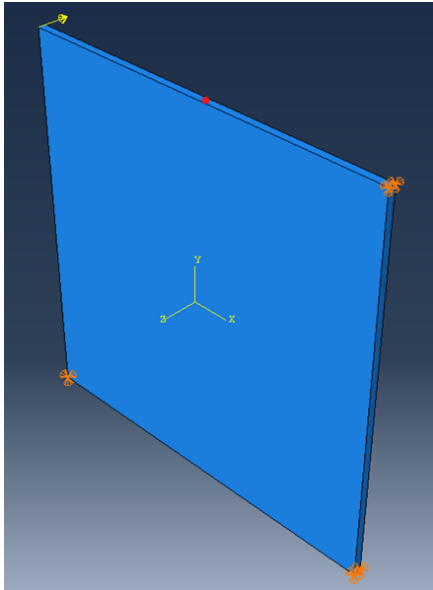
In dit hoofdstuk zal de theorie over de formule van Reissner besproken worden. Er zal in dit rapport uitgegaan worden van een simpel model van een vierkanten plaat waarvan de materiaaleigenschappen bekend zijn.

De formule van Reissner ziet er als volgt uit.

$$\sigma = \frac{3}{2} \sqrt{10} * \frac{m_{xy}}{t^2}$$

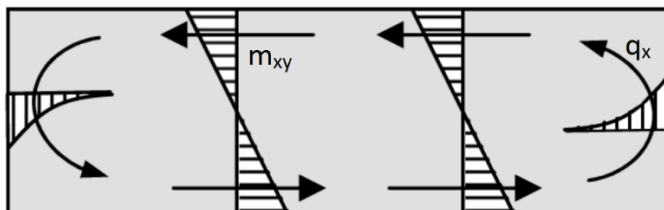
In het model zal de plaat in drie hoekpunten scharnierend worden verbonden. Op het vierde, vrije hoekpunt zal een kracht worden uitgeoefend. Het gevolg van deze vervorming is dat er torsie ontstaat in de plaat.

In Figuur 1 is een schets van de opstelling te zien. De rode stip in het figuur geeft de locatie aan waar de spanning van wordt afgelezen. De spanning wordt afgelezen op de knoop die in het midden van de plaat op het midden van de rand ligt.



Figuur 1: Schets opstelling

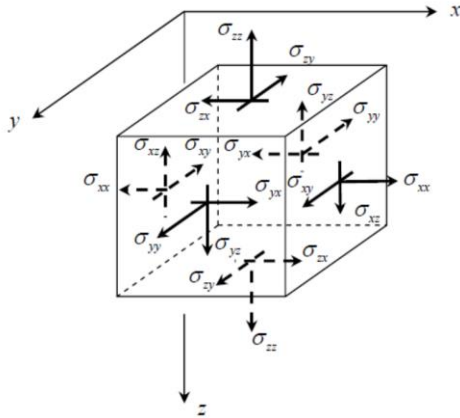
In Figuur 2 is te zien welke spanningen er ontstaan in de plaat wanneer torsie optreedt.



Figuur 2: Spanningen in rand van een plaat (Blaauwendraad, 2010)

Er zal in dit rapport worden uitgegaan van een kleine verplaatsing. In het geval van een grote verplaatsing zal de plaat omklappen. In dit geval wordt de plaat als bezwijken beschouwd, dus deze situatie wordt in dit rapport niet meegenomen.

In het model waarmee gerekend zal worden, wordt uitgegaan van de eindige elementenmethode. Dit houdt in dat de plaat wordt verdeeld in een groot aantal kleine volume-elementen. In Figuur 3 staat weergegeven in welke richting de positieve spanningen op een volume-element werken.



Figuur 3: Positieve spanningen volume-element (Shalom, 2013)

2.1 Momentformule

De variabele m_{xy} zal worden bepaald door te kijken naar het totale torsiemoment op de doorsnede. Het totale torsiemoment heeft drie bijdragen te zien in Figuur 2.

De formule voor het totale torsiemoment in de doorsnede ziet er als volgt uit.

$$M_w = m_{xy}b + q_x b = 2m_{xy}b$$

De eerste term in de formule geeft het moment over de breedte van de plaat weer maal dezelfde breedte. De tweede term uit de formule geeft de integraal weer over het oppervlak maal de breedte.

In de formule is te zien dat $q_x = m_{xy}$. Dit kan men halen uit een afleiding van de formule. Het koppel dat zorgt voor een kracht q_x is namelijk even groot als het koppel dat zorgt voor de kracht m_{xy} (zie Figuur 2). M_w is namelijk het totale torsiemoment. Dit totale torsiemoment kan worden berekend door de kracht maal de lengte van de plaat te nemen.

Dit vormt de volgende formule.

$$F * b = m_{xy}b + q_x b$$

Wanneer men de breedte van de plaat wegstreept en $q_x = m_{xy}$ aanneemt, zal de volgende formule ontstaan.

$$F = 2m_{xy} \rightarrow m_{xy} = \frac{1}{2}F$$

Het invullen van deze variabele in de formule van Reissner geeft het volgende resultaat.

$$\sigma = \frac{3}{2} \sqrt{10} * \frac{F}{2t^2}$$

Bij een plaat met gelijke zijden is deze omgeschreven formule hetzelfde als de formule van Reissner. In het model dat gebruikt wordt in dit rapport zal men werken met de bovenstaande formule.

2.2 Rekenkracht moderne computers

De wet van Moore is al sinds 1965 van kracht. De wet gaat over de technologische vooruitgang van chips. De wet stelt dat dat het aantal transistors in een dicht geïntegreerde schakeling elke twee jaar verdubbeld (Tardi, 2022). Dit kan grofweg worden vertaald naar een verdubbeling in snelheid van computers.

In 2011 was de wet nog van kracht. In Bijlage 2 staat een grafiek, die de ontwikkelingen over de jaren weergeeft. Echter, door fysieke en fysische barrières is het onzeker of de wet in 2022 nog van kracht is.

In het rapport van Rutger Zwennis uit 2010 is gebleken dat bij ongeveer eenzelfde plaatberekening zoals in dit rapport is gedaan, de rekenkracht van een plaat met 1.000.000 knopen ongeveer 30 minuten is. De berekening uit dit rapport is in 2022 gedaan. Volgens de wet van Moore zou de ruimte in het geheugen en de harde-schijf met een factor 2^6 zijn toegenomen.

De berekening van de wringspanning in plaatranden wordt met een matrixberekening gedaan. De toename in geheugen leidt tot een toename in de grootte van de matrix die berekend kan worden. De matrix kan 8 keer zo groot zijn. Het aantal bewerkingen om deze matrix op te lossen is 8^3 keer zo groot.

De uiteindelijke rekentijd van 64.000.000 knopen zal 8 keer groter zijn. Dat volgt uit $\frac{512}{64} = 8$. Dit geeft een uiteindelijke rekentijd van 4 uur.

3. Modellerings

Er zijn een aantal verschillende berekeningen gemaakt in dit rapport om op deze manier te kijken welke eigenschappen van de plaat invloed hebben op de grootte van de coëfficiënt in de formule van Reissner.

3.1 Afmetingen plaat

Bij elke berekening is er gewerkt met een vierkanten plaat waarbij de lengte gelijk is gesteld aan 200. De gekozen dikte voor de berekeningen is 4. Er is gekozen om de verhouding tussen lengte en breedte groot te houden, zodat er met zekerheid kan worden gesteld dat er gewerkt wordt met een dunne plaat. De verhouding tussen de lengte en breedte is 1:50, dus er is sprake van een dunne plaat. Hierdoor zal de meeste ruis in van de spanningen in de randen uitgedempt zijn in het midden van de plaat.

3.2 Randvoorwaarden en materiaaleigenschappen

In de berekeningen is de vierkanten plaat in drie hoekpunten scharnierend opgelegd. In het vierde, vrije hoekpunt is een kracht aangebracht van 1000 Newton. Door het lineair elastische gedrag van de plaat kan de grootte van de kracht in elke berekening verschillen. Echter, moet wel worden uitgekeken dat de plaat niet om zal klappen. Dit is bij een kracht van 1000 Newton nog niet het geval.

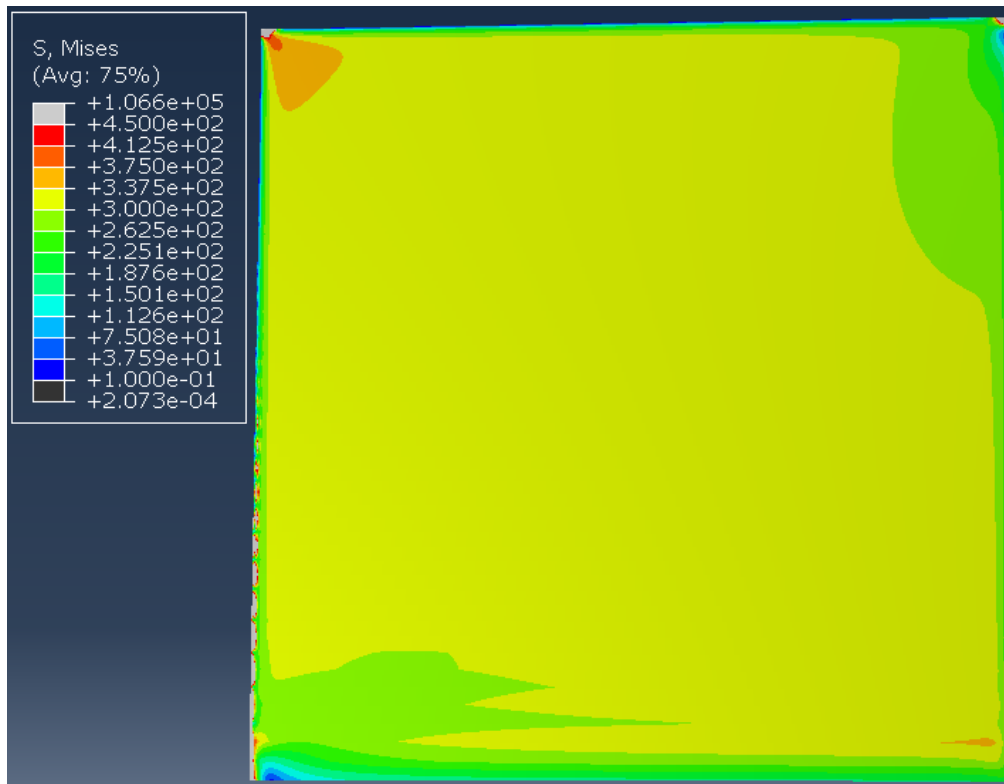
Er is in de berekeningen gewerkt met de materiaaleigenschappen van glas. Hiervoor is een dichtheid genomen van 2500. Daarnaast is de E-modulus op 48 GPa gesteld en de Poisson's ratio op 0,22 gesteld. De berekeningen, die zijn gemaakt om de invloed van de E-modulus en de Poisson's ratio vast te stellen, zijn met verschillende waarden voor de E-modulus en de Poisson's ratio gemaakt.

Ook is ervoor gekozen om de materiaaleigenschappen als lineair elastisch te beschouwen. Dit houdt in dat de spanning en rek recht evenredig zijn met elkaar. Hieruit is af te leiden dat de verplaatsing en spanning lineair zijn in de belasting.

3.3 Model in Abaqus

Het uiteindelijke model zal worden gesimuleerd in het softwareprogramma Abaqus. Dit programma is in staat de plaat te verdelen in kleine elementen, zodanig dat de spanning op een precieze plek kan worden afgelezen. In dit rapport is de waarde σ_{xz} in het midden van de plaatrand van belang. Het is ter controle van de plaat goed om te kijken of er geen onverwachte piekspanningen in de plaat zitten. In Figuur 5 is de Von-Mises spanning af te lezen. Deze spanning geeft aan waar de plaat plastisch zal gaan vervormen (Harish, 2021). Hieruit blijkt dat er – naast de piekspanningen in de hoeken van de plaat – geen onverwachte piekspanningen in de plaat voorkomen.

Wel valt op dat het spanningsbeeld niet symmetrisch is over de diagonalen. Dit heeft als oorzaak dat het model waarmee gewerkt is inklemmingen bevat en geen scharnieren. Het gevolg hiervan is dat er in de inklemmingen een moment ontstaat. Deze momenten geven dwarskrachten, die zorgen voor schuifspanning. Er zit dus niet enkel wringspanning, maar ook schuifspanning in de plaat. Dit geeft een asymmetrisch beeld.



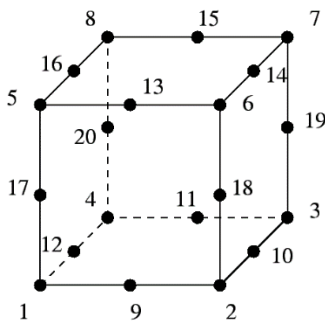
Figuur 4: Von-Mises spanning in plaat

4. Meshing

Gedurende het onderzoek zijn er een aantal modellen gemaakt die verschillen in de grootte van meshing. In dit hoofdstuk zal elk model worden toegelicht en zal worden gekeken naar de precisie van de coëfficiënt die wordt bereikt bij verschillende groottes van de elementen.

Alle elementen hebben 20 knopen, zoals in Figuur 6 te zien is. Op deze manier kan nog preciezer worden bepaald wat de waarde van de wringspanning in het midden van de plaatrand is ten opzichte van een gebruikelijk element met 8 knopen.

Doordat het element 20 knopen heeft, is het mogelijk om bij elke rand een knoop in het midden te zetten. Op deze manier is het mogelijk eventuele kwadratische verbanden op te nemen. De rand kan dan 'krommen'. Bij een element met 8 knopen is dat niet mogelijk. Het nadeel van elementen met 20 knopen is dat er fors meer capaciteit wordt gebruikt.



Figuur 5: Knopen in een element (Dhondt, 2014)

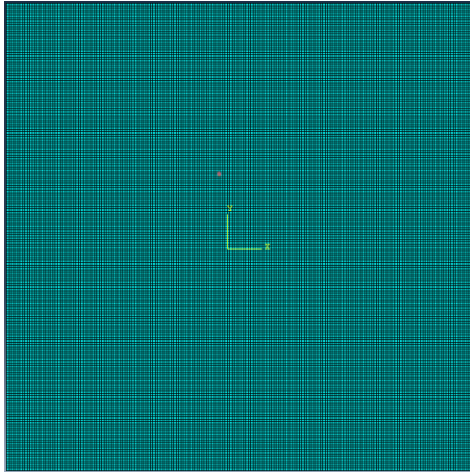
Daarnaast is het mogelijk om een aantal controles uit te voeren op modellen met grotere elementen, zodat de interpretatie kan worden gecontroleerd.

Er is gekozen om enkel te werken met vierkanten elementen, omdat de vierkanten elementen een grotere precisie hebben. Bij het gebruik van tetraëders gaat een deel van die precisie verloren. Het nadeel van het gebruik van enkel vierkanten elementen is dat de berekeningen complexer zijn door het grote aantal knopen.

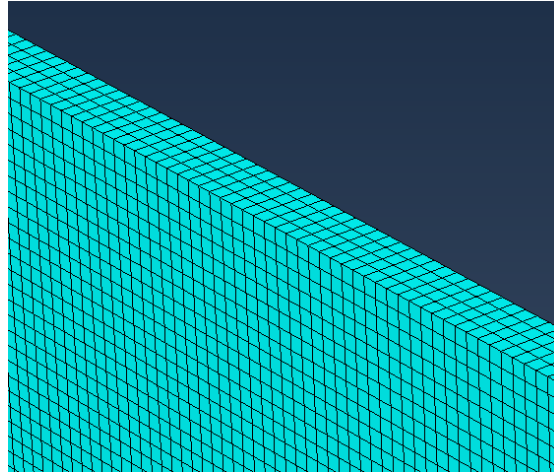
4.1 Eerste model

De elementen in het eerste model hebben allemaal een afmeting van 1 mm^3 . In de lengte en breedte van het model zitten 200 elementen. In de dikte zitten 4 elementen. Het totale aantal elementen is 160.000 en de elementen bestaan uit elementen met 20 knopen (C3D20R). Deze berekening gaat over een totaal van ongeveer 750.000 knopen.

In Figuur 7 en Figuur 8 is te zien hoe de verdeling van de elementen eruit ziet.



Figuur 7: Samenstelling mesh in lengte en breedte



Figuur 6: Samenstelling mesh in dikte

Dit model is relatief grof, maar heeft wel een homogene grid. Met dit model zal gekeken worden of de E-modulus en Poisson's ratio invloed hebben op de grootte van de coëfficiënt in de formule van Reissner. Daarnaast kan dit model vergeleken worden met model 2.

In Tabel 1 is een samenvatting van de mesh te zien

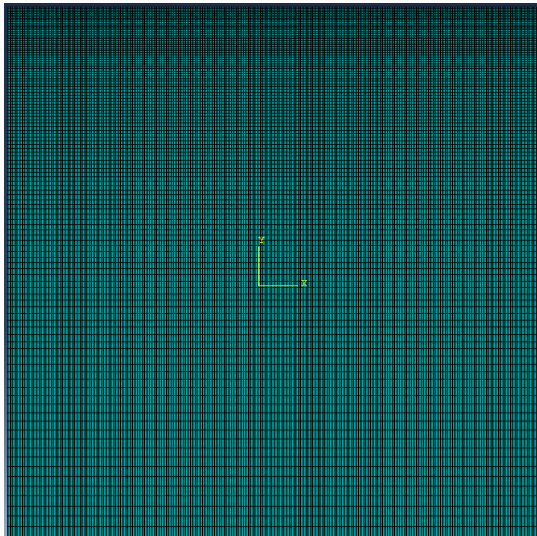
Elementgrootte	1 x 1 x 1
Verloop	Overall gelijke grootte
Aantal knopen	750.000

Tabel 1: Samenvatting mesh model 1

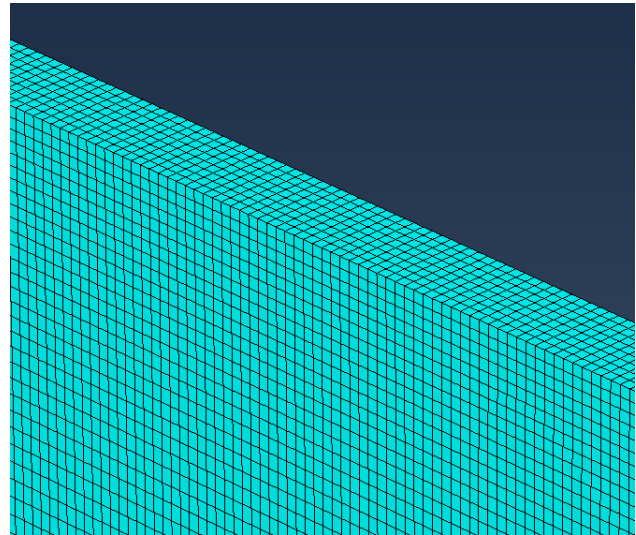
4.2 Tweede model

De grid die gebruikt is in het tweede model heeft elementen die verschillen van grootte in de lengte. De spanning die in dit rapport van belang is, bevindt zich in de bovenkant van de plaat. De elementen zijn bovenin kleiner gemaakt dan de elementen onderin. Op deze manier is de berekening economischer.

In Figuur 8 en Figuur 9 is te zien hoe de mesh eruit ziet. De elementen hebben een dikte en een breedte van 0,5 mm. In de lengte verschillen de breedtes; bovenin is de breedte 10 mm en onderin is de lengte 10 mm.



Figuur 9: Samenstelling mesh in de lengte en breedte



Figuur 8: Samenstelling mesh in dikte

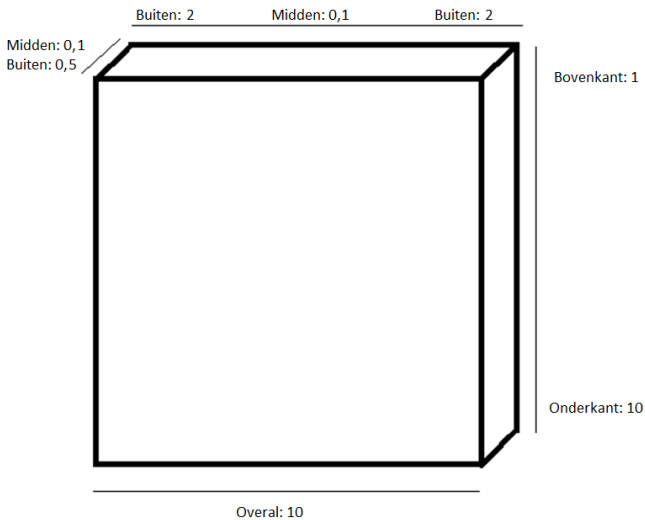
In Tabel 2 is een samenvatting van de mesh te zien.

Elementgrootte	0,5 x 0,5 x 0,5
Verloop	In de dikte en breedte gelijke afmetingen. In de lengte (Y-richting) is een verloop van 0,5 naar 10 mm.
Aantal knopen	1.700.000

Tabel 2: Samenvatting mesh model 2

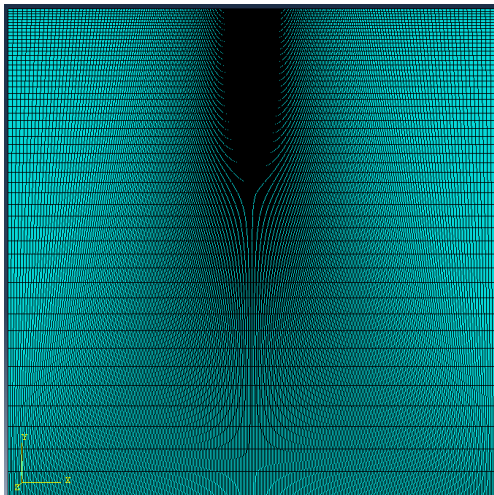
4.3 Derde model

Het derde model heeft een andere soort grid dan model 1 en model 2. Er is ook bij dit model sprake van een verfijning, echter verschillen de elementgrootten in lengte, breedte en dikte. In Figuur 11 staat afgebeeld hoe de elementgrootten verschillen en welke maten de elementen hebben. De daadwerkelijke grid staat in Figuur 12 afgebeeld.

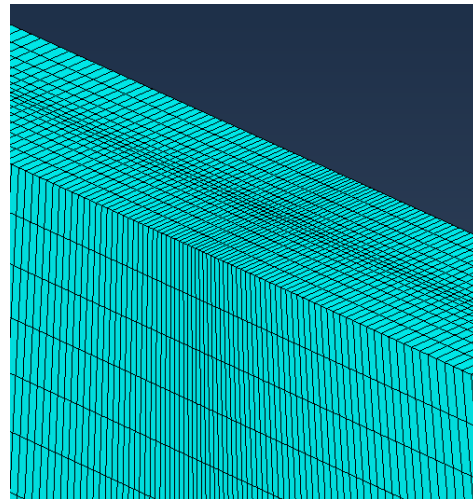


Figuur 10: Samenstelling en afmetingen model 3

In Figuur 13 is te zien hoe de dikte verschilt in de grid. In het midden van de dikte van de plaat is de elementgrootte erg klein gemaakt.



Figuur 11: Samenstelling mesh in lengte en breedte



Figuur 12: Samenstelling mesh in dikte

In Tabel 3 staat een samenvatting van de mesh van model 3.

Elementgrootte	0,1 x 0,1 x 1
Verloop	Verloop rondom punt bovenin plaatrand
Aantal knopen	1.000.000

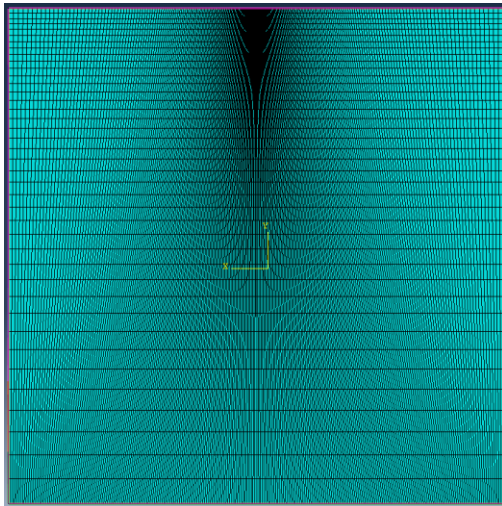
Tabel 3: Samenvatting mesh model 3

4.4 Vierde model

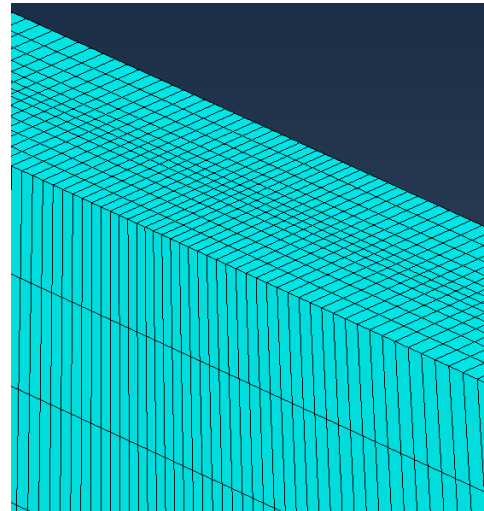
Model 4 heeft hetzelfde type grid als model 3. Er is gekozen voor een grovere grid, zodat het mogelijk is om meerdere resultaten te krijgen over dezelfde soort grid. De verwachting is dat model 4 het meest grove model is dat gebruikt kan worden bij het verkrijgen van de juiste coëfficiënt.

De afmetingen van de elementen in model 4 zijn verdubbeld ten opzichte van de grootte van de elementen van model 3. In Figuur 14 en Figuur 15 is te zien hoe de grid eruit ziet in de lengte, breedte en dikte.

De mesh van dit model is de meest grove mesh. De verwachting is dat de resultaten bij een nog grovere mesh te onnauwkeurig zijn om te kunnen gebruiken bij dit onderzoek.



Figuur 13: Samenstelling mesh in lengte en breedte



Figuur 14: Samenstelling mesh in dikte

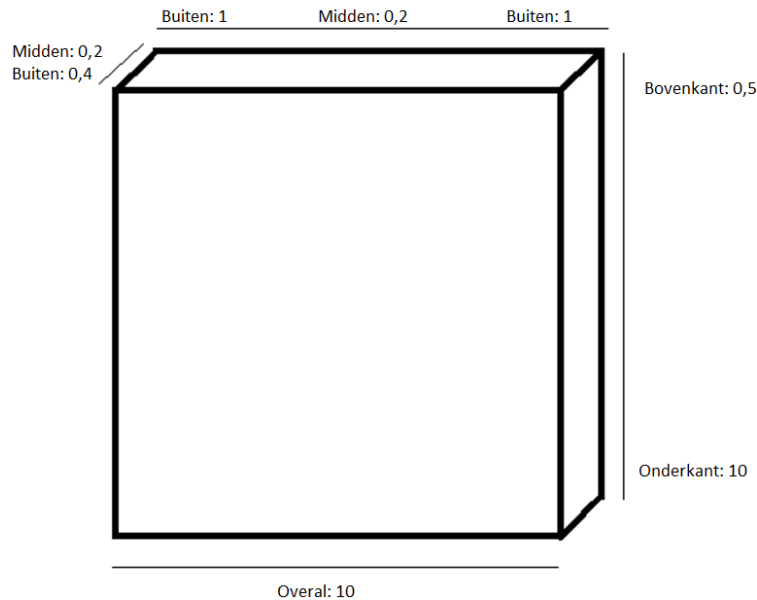
In Tabel 4 is een samenvatting te zien over de afmetingen van de elementen in model 4.

Elementgrootte	0,2 x 0,2 x 2
Verloop	Verloop rondom punt bovenin plaatrand
Aantal knopen	530.000

Tabel 4: Samenvatting mesh model 4

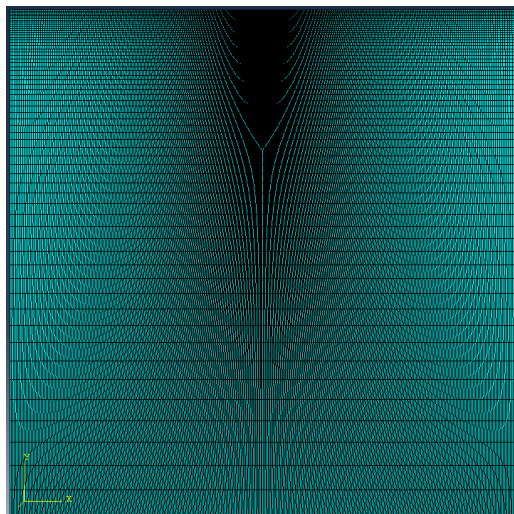
4.5 Vijfde model

Dit model heeft eenzelfde soort grid als model 3 en model 4. Het verschil zit in de elementgrootte. Dit model heeft namelijk de fijnste elementgrootte van de drie modellen. In Figuur 16 staat beschreven hoe de mesh is gemaakt.

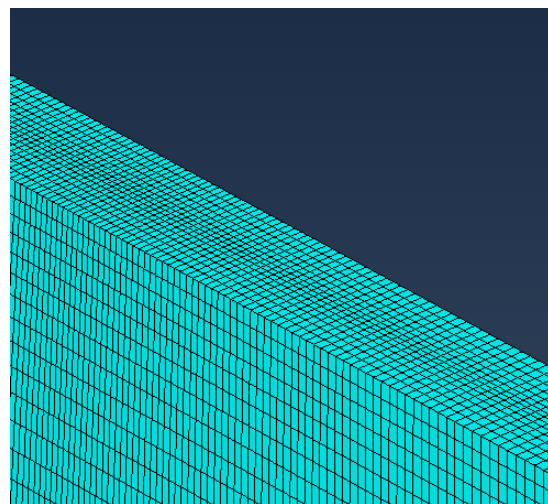


Figuur 15: Samenstelling en afmetingen mesh model 5

In Figuur 17 en Figuur 18 is de samenstelling van de mesh te zien.



Figuur 16: Samenstelling mesh in lengte en breedte



Figuur 17: Samenstelling mesh in dikte

In Tabel 5 is de samenvatting van de mesh van model 5 te vinden.

Elementgrootte	0,2 x 0,2 x 0,5
Verloop	Verloop rondom punt bovenin plaatrand
Aantal knopen	1.500.000

Tabel 5: Samenvatting mesh model 5

5. Resultaten

In dit hoofdstuk zullen de resultaten die verkregen zijn uit de drie modellen worden weergegeven.

Eerste model

De spanning wordt afgelezen in het midden van de rand van de plaat. De rand loopt in de X-richting en de spanning loodrecht daarop (in Z-richting) is de benodigde wringspanning voor de formule van Reissner. De spanning die afgelezen wordt is σ_{xz} .

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 136.253723 N/mm². Deze waarde is gevonden op de knoop met het label 101103.

De rekentijd van het eerste model is 10 minuten.

Tweede model

Het tweede model is een verfijning ten opzichte van het eerste model. Er zitten in de dikte meer elementen, echter is aan de onderkant van het model gewerkt met minder elementen. Dit zorgt voor een grid met elementen die verschillen in grootte, waardoor iets van de nauwkeurigheid verloren gaat.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 136.611343 N/mm². Deze waarde is gevonden op de knoop met het label 214795.

De rekentijd van dit model is 50 minuten.

Derde model

Het derde model is meer verfijnd rond de plek van interesse dan de andere twee modellen. De plekken buiten de plek van interesse zijn gemodelleerd met grotere elementen.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 131.896576 N/mm². Deze waarde is gevonden op de knoop met het label 214795.

Vierde model

In het vierde model zijn alle elementgroottes verdubbeld ten opzichte van het derde model.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 123.322891 N/mm²

Vijfde model

In het vijfde model zijn de elementen het fijnst ten opzichte van alle modellen.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 135,884338 N/mm². Deze waarde is gevonden op de knoop met het label 190449.

5.1 Samenvatting resultaten

Bij het vergelijken van de resultaten moet gekeken worden naar de verschillende type meshes. Hieruit blijkt dat model 1 en model 2 met elkaar vergeleken kunnen worden, omdat bij deze twee modellen de elementgrootte weinig verschilt in het model. Daarnaast blijkt dat model 3, model 4 en model 5 met elkaar vergeleken worden, omdat bij deze drie modellen de elementgrootte wel veel verschilt binnen elk model.

In Tabel 6 is een samenvatting van de resultaten per model te vinden.

Model	Aantal knopen	Kleinste element	Spanning (N/mm²)
Model 1	760.000	1 x 1 x 1	136.253723
Model 2	1.700.000	0,5 x 0,5 x 0,5	136.611343
Model 3	1.000.000	0,1 x 0,1 x 1	131.896576
Model 4	530.000	0,2 x 0,2 x 2	123.322891
Model 5	1.500.000	0,2 x 0,2 x 0,5	135,884338

Tabel 6: Samenvatting resultaten uit berekeningen modellen

6. Verwerking

6.1 Bepaling coëfficiënt

Eerste model

Uit het eerste model blijkt een wringspanning van 136,253723 N/mm². Hiermee kan de formule van Reissner ingevuld worden en daarmee de coëfficiënt van de formule berekend worden zoals hieronder weergegeven. Bekend is dat m_{xy} 500 Nmm/mm is en t gelijk is aan 4 mm.

$$136.253723 = C * \frac{500}{4^2}$$

De coëfficiënt komt met dit resultaat op een waarde van $C = 4,36012$.

Tweede model

Uit het tweede model blijkt een wringspanning van 136,611343 N/mm². Hiermee kan de formule van Reissner ingevuld worden en daarmee de coëfficiënt van de formule berekend worden zoals hieronder weergegeven.

$$136.611343 = C * \frac{500}{4^2}$$

De coëfficiënt komt met dit resultaat op een waarde $C = 4,37156$.

Derde model

Uit het derde model blijkt een wringspanning van 131,896576 N/mm². Hiermee kan de formule van Reissner ingevuld worden en daarmee de coëfficiënt van de formule berekend worden zoals hieronder weergegeven.

$$131.896576 = C * \frac{500}{4^2}$$

De coëfficiënt komt met dit resultaat op een waarde $C = 4,22069$.

Vierde model

Uit het vierde model blijkt een wringspanning van 123,322891 N/mm². Hiermee kan de formule van Reissner ingevuld worden en daarmee de coëfficiënt van de formule berekend worden zoals hieronder weergegeven.

$$123.322891 = C * \frac{500}{4^2}$$

De coëfficiënt komt met dit resultaat op een waarde $C = 3,94633$.

Vijfde model

Uit het vijfde model blijkt een wringspanning van 135,884338 N/mm². Hiermee kan de formule van Reissner ingevuld worden en daarmee de coëfficiënt van de formule berekend worden zoals hieronder weergegeven.

$$135.884338 = C * \frac{500}{4^2}$$

De coëfficiënt komt met dit resultaat op een waarde $C = 4,34830$.

In Tabel 7 is een overzicht te vinden van de verschillende waarden voor de coëfficiënt in de formule van Reissner.

	Coëfficiënt C
Model 1	4,36012
Model 2	4,37156
Model 3	4,22069
Model 4	3,94633
Model 5	4,34830

Tabel 7: Overzicht coëfficiënten

Bij het bepalen van de exacte coëfficiënt van de formule van Reissner zal gebruik worden gemaakt van een aantal aannames. Deze aannames zullen hieronder opgesomd worden.

- De elementgrootte wordt in het vervolg h genoemd
- De fout van het model heeft een orde grootte van h^2 , omdat er gewerkt is met elementen die 20 knopen bevatten. De randen van het element kunnen hierdoor kwadratische verbanden aannemen.

Wanneer twee oplossingen zijn bekend, waarvan de eerste is verkregen met elementgrootte h en de tweede met elementgrootte $0,5h$, kan de exacte oplossing worden bepaald aan de hand van de volgende formule (Hoogenboom, z.d.). Voor deze berekening worden de resultaten van model 1 en model 2 gebruikt.

$$u1 = \text{oplossing met } h = 4,360$$

$$u2 = \text{oplossing met } \frac{h}{2} = 4,372$$

$$u = u2 + \frac{u2 - u1}{3}$$

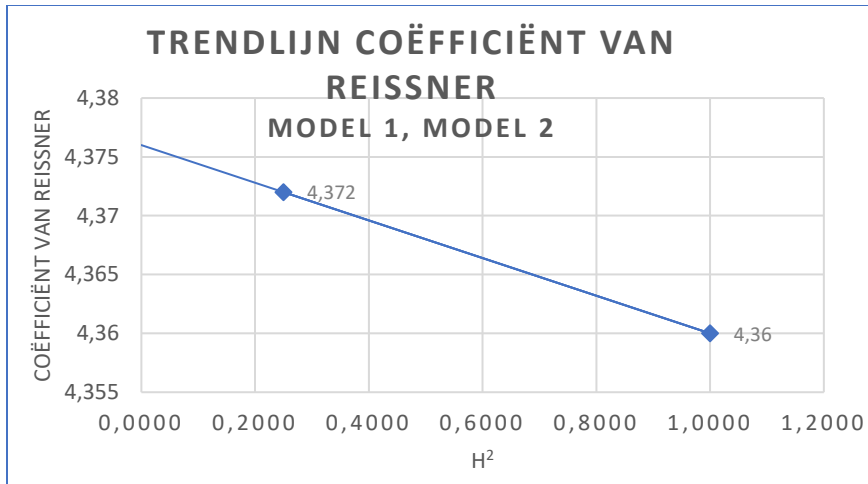
6.2 Vergelijking model 1 en model 2

De simulatie van model 2 is gedaan met een halvering van de elementgrootte van model 1. Met de resultaten uit deze twee modellen kan de berekening hierboven gedaan worden.

Hieruit blijkt dat de coëfficiënt van Reissner 4,376 is.

In bijlage 1 staat het Maple-script waarmee deze formule is opgelost.

De resultaten uit model 1 en model 2 kunnen ook verwerkt worden in een grafiek. Door de trend te berekenen, kan bepaald worden wat de coëfficiënt zal zijn bij oneindig kleine elementen. In Figuur 20 is de grafiek te zien.



Figuur 18: Verwerking resultaten model 1 en model 2

Uit de grafiek blijkt dat bij een lineair verband, de coëfficiënt van Reissner ook 4,376 is.

Voor deze gegevens zijn model 1 en model 2 gebruikt. Bij model 2 is er in de lengte van de plaat een verloop in de grootte van de elementen. In de breedte en dikte blijven de elementen even groot. Er wordt aangenomen dat het verloop in elementgrootte in de lengte een verwaarloosbaar verschil geeft met de waarde die zou blijken wanneer alle elementen dezelfde grootte zouden hebben. De modellen kunnen dus met elkaar vergeleken worden.

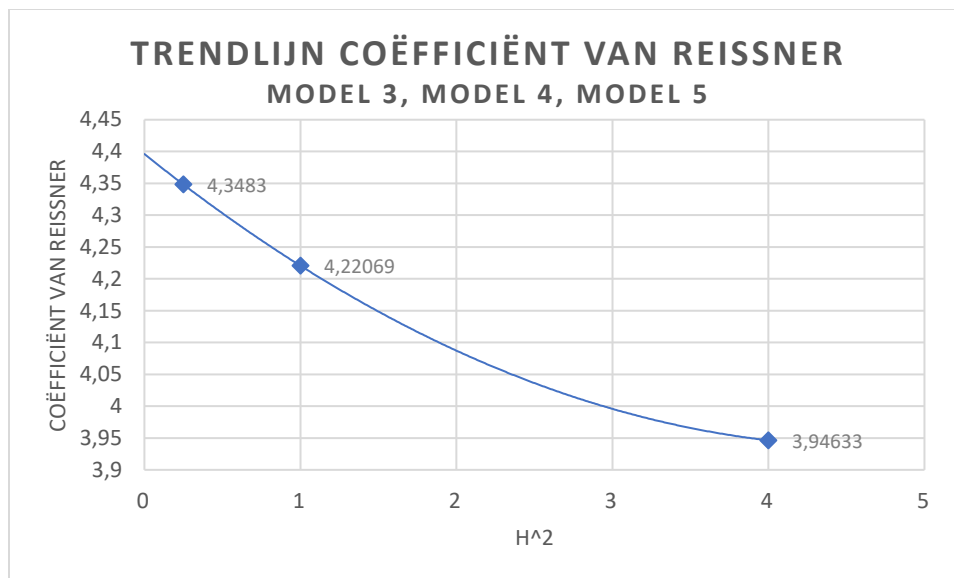
6.3 Vergelijking model 3, model 4 en model 5

Model 3, model 4 en model 5 kunnen ook met elkaar vergeleken worden. Deze modellen hebben hetzelfde type mesh, waarbij er rond het belangrijkste punt bovenin de plaat erg kleine elementen gebruikt worden en daaromheen grovere elementen.

De resultaten van deze drie modellen liggen ver van elkaar af, maar met behulp van een grafiek en trendlijn kan ook aan de hand van deze drie modellen de coëfficiënt van Reissner bepaald worden. In Figuur 21 zijn de resultaten te zien.

Het lijkt erop dat de lengte van het element (Y-richting) maatgevend is voor dicht de uitkomst bij de daadwerkelijke waarde van de coëfficiënt ligt.

De trendlijn die door de meetpunten is getrokken is een kwadratisch verband. In Excel is deze trendlijn geëxtrapoleerd tot het snijpunt met de Y-as. Deze waarde is genomen voor de precieze waarde van de coëfficiënt van Reissner.



Figuur 19: Verwerking resultaten model 3, model 4 en model 5

Uit de grafiek blijkt dat bij een kwadratisch verband de coëfficiënt van Reissner 4,3961 is. Deze waarde wijkt iets af van de berekende waarde uit model 1 en model 2.

6.3 Nieuwe coëfficiënt in de formule van Reissner

De waarde die is berekend aan de hand van model 3, model 4 en model 5 wordt betrouwbaarder geschat dan de waarde die is berekend aan de hand van model 1 en model 2. De nieuwe coëfficiënt die zal worden aangenomen in de formule van Reissner is dus 4,396. Deze waarde wordt overgenomen, omdat deze waarde blijkt uit drie modellen en de andere waarde – 4,376 – blijkt uit twee modellen. Ook is gebruik gemaakt van kleinere elementgrootten bij model 3 en model 5. Door het gebruik van de kleinere elementen is de berekening betrouwbaarder.

6.4 Resultaten rekentijden

De rekentijd van het eerste model is 10 minuten. Als de wet van Moore voldoet, zou de rekentijd van 64.000.000 knopen 4 uur zijn. De rekentijd van 750.000 knopen zou ongeveer 3 minuten moeten zijn. Dit komt niet overeen met de huidige rekentijd.

De rekentijd van het tweede model is 50 minuten. Het model heeft ongeveer 1,7 miljoen knopen. De rekentijd van 1,7 miljoen knopen zou 7 minuten moeten zijn volgens de wet van Moore. Dit komt niet overeen met de huidige rekentijd.

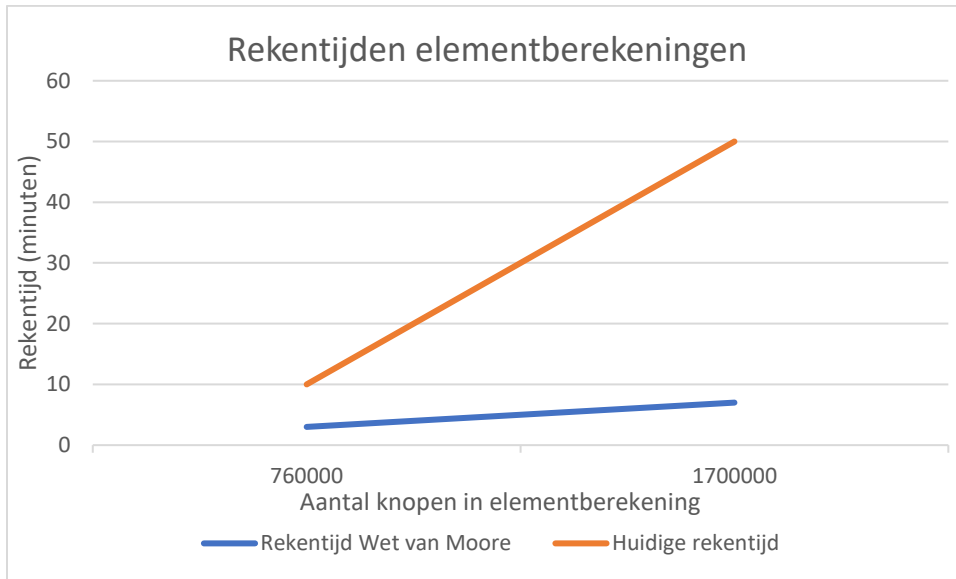
In Tabel is een overzicht van de rekentijden en resultaten te zien.

	Aantal knopen	Rekentijd	Rekentijd Wet van Moore
Model 1	760.000	10 minuten	3 minuten
Model 2	1.700.000	50 minuten	7 minuten

De rekentijden van model 1 en model 2 komen niet overeen met de rekentijden zoals die zouden moeten zijn volgens de Wet van Moore. De rekentijden zijn veel langer voor elementberekeningen. Een mogelijke oorzaak hiervoor zou kunnen zijn dat de computer waarop de berekeningen zijn gemaakt niet

uit 2022 komt. Het RAM-geheugen van de computer waarop de berekeningen zijn gemaakt is 16 GB. In moderne computers is het RAM-geheugen vaak 32 GB. Dit zou een mogelijke oorzaak kunnen zijn van de hoge reketijden en het gebrek aan rekenkracht.

In Figuur 22 is te zien in hoeverre de huidige reketijden verschillen met de reketijden volgens de Wet van Moore.



Figuur 22: Reketijden

6.5 Controle invloed E-modulus en Poisson's ratio

De grootte van de coëfficiënt zou volgens de theorie niet moeten afhangen van de E-modulus en de Poisson's ratio. Dit is gecontroleerd aan de hand van het eerste, relatief grove model. Dit model heeft een homogene grid met overal dezelfde grootte van elementen.

6.5.1 Controle E-modulus

De eerste simulatie ter controle van de invloed van de E-modulus is als volgt gedaan. De dichtheid en Poisson's ratio zijn gelijk gebleven, 2500 kg/m³ en 0,22. De E-modulus is aangepast van 48 GPa naar 200 GPa. Hierbij is 200 GPa gekozen, omdat dat de E-modulus van staal is.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 136.253723 N/mm². Dit is dezelfde wringspanning als de wringspanning die is berekend met een E-modulus van 48 GPa.

6.5.2 Controle Poisson's ratio

De tweede simulatie ter controle van de invloed van de Poisson's ratio is als volgt gedaan. De dichtheid en E-modulus zijn gelijk gebleven, namelijk 2500 kg/m³ en 48 GPa. De Poisson's ratio is aangepast naar de Poisson's ratio van staal, deze is 0,35.

De spanning σ_{xz} in het midden van de bovenste plaatrand is 136.253723 N/mm². Dit is dezelfde wringspanning als de wringspanning die is berekend met een Poisson's ratio van 0,22.

7. Conclusie

De resultaten over de coëfficiënt uit de formule van Reissner komen niet overeen met de daadwerkelijke coëfficiënt. De daadwerkelijke coëfficiënt van Reissner heeft een waarde van 4,743 en de berekende coëfficiënten van Reissner zijn 4,376 en 4,396. De betrouwbaarheid van de tweede waarde wordt hoger geschat, dus deze waarde wordt aangenomen als nieuwe coëfficiënt in de formule van Reissner.

De berekening van de nieuwe coëfficiënt is gedaan aan de hand van modellen die gemaakt zijn in het softwareprogramma Abaqus. Het verschil tussen beide coëfficiënten is 0,347. Hieruit blijkt dat de waarde van de coëfficiënt in de formule van Reissner niet klopt en dat de waarde eigenlijk 4,396 moet zijn. De formule zal er dan als volgt uit zien.

$$\sigma_{xz} = 4,396 * \frac{m_{xy}}{t^2}$$

Het gebruik van de formule van Reissner geeft door de hogere coëfficiënt een hogere waarde voor de wringspanning in de plaatrand dan de daadwerkelijke waarde voor de wringspanning die blijkt uit de modellen van Abaqus. De veiligheid van constructies komt bij het gebruik van de formule van Reissner niet in het gedrang. Deze waarde zit aan de veilige kant.

De deelvragen die in dit rapport staan, zullen hieronder beantwoord worden.

- I. Heeft de E-modulus van de plaat invloed op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?

De E-modulus heeft geen invloed op de grootte van de coëfficiënt. Dit is bewezen door de berekening van model 1 twee keer te maken, waarbij enkel de E-modulus verschilt.

- II. Zijn de lengte en breedte van de plaat voldoende groot om geen invloed te hebben op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?

Bij de berekeningen is er gewerkt met een dunne plaat waarbij de lengte/dikte verhouding 1:50 is. Er is door tijdgebrek niet vast te stellen over welke lengte de wringspanning gelijk is.

- III. Heeft Poisson's ratio een invloed op de grootte van de coëfficiënt van Reissner?

De Poisson's ratio heeft geen invloed op de grootte van de coëfficiënt. Dit is bewezen door de berekening van model 1 twee keer te maken, waarbij enkel de Poisson's ratio verschilt.

- IV. Geldt de wet van Moore op een elementberekening van een plaat?

De wet van Moore is niet meer van toepassing op de elementberekeningen die gemaakt worden in dit rapport. Dit blijkt uit de rekentijden van model 1 en model 2.

De computer, die bij het maken van de elementberekeningen is gebruikt, heeft een RAM-geheugen van 16 GB. Dit bleek het maatgevende onderdeel te zijn voor het aantal knopen in de berekening. Op een computer met een geheugen met 32 GB RAM-geheugen is een berekening mogelijk die twee keer zo groot is. De matrix waarin de waarden voor de knopen worden berekend, kan dan een factor $\sqrt{2}$ groter zijn, dus het aantal knopen dat kan worden berekend vergroot ook met dezelfde factor.

7.1 Aanbevelingen

Naar aanleiding van dit onderzoek kunnen er een aantal aanbevelingen worden gedaan voor eventuele vervolgonderzoeken. Deze aanbevelingen zullen hieronder opgesomd worden.

Allereerst kan aanbevolen worden om met een computer waarbij de capaciteit groter is, bijvoorbeeld door een RAM-geheugen van 32 GB of meer, de berekeningen nogmaals te doen met een opstelling, die scharnierend is opgelegd. De mesh kan door de verhoogde capaciteit kleiner worden gemaakt, waardoor de nauwkeurigheid zal toenemen. Dit kan leiden tot een preciezere waarde van de coëfficiënt of gedaan worden ter controle van de berekeningen in dit rapport.

Een andere aanbeveling die kan worden gedaan is om te kijken over welke lengte de wringspanning ongeveer gelijk blijft en op welke plekken het effect van de belasting en scharnieren zichtbaar is. Dit kan meer inzicht geven in de sterkte van de plaat.

Daarnaast kan er aanbevolen worden een vervolgonderzoek te doen naar het bezwijken van een plaat op het moment dat er een kras in de rand zit. Er kan worden gekeken bij welke diepte van de kras en bij welke belasting de plaat bezwijkt.

Ook kan er worden gekeken of de Wet van Moore voldoet, wanneer men rekent met een computer met 32 GB aan RAM geheugen.

7.2 Discussie

Het model dat is gebruikt in dit rapport had scharnierend moeten worden opgelegd. Echter, tijdens het maken de modellen is het model aan drie hoekpunten ingeklemd. Dit heeft als gevolg dat er in de plaat niet alleen een wringspanning zit, maar dat er ook schuifspanning zit, die door de momenten uit de inklemmingen voortkomt.

Doordat er geen sprake is van zuivere wringspanning, zijn de waarden niet correct.

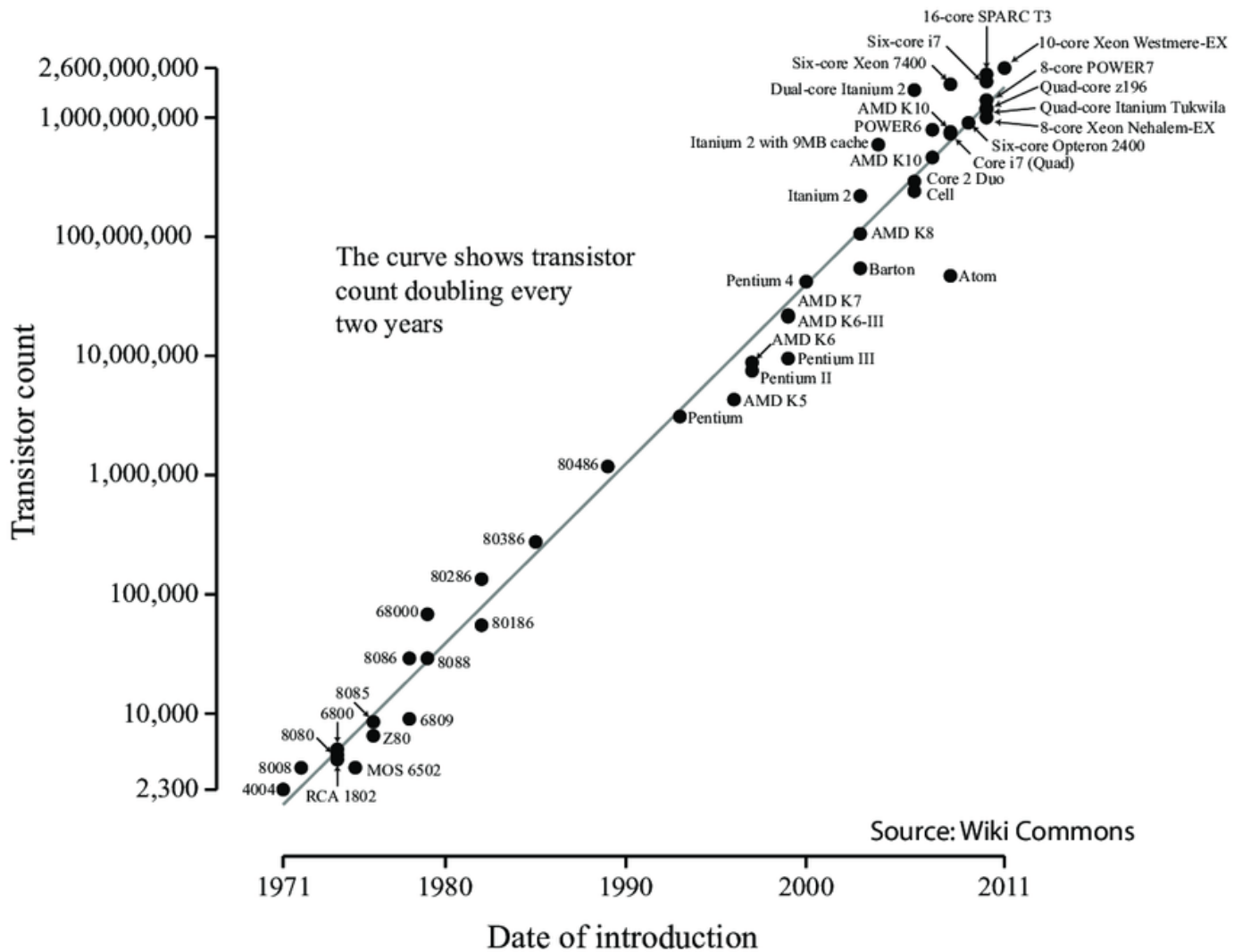
Bijlagen

Bijlage 1: Maple-script verwerken twee oplossingen

- `Eq1 := u = u1 + C*h^2:`
- `Eq2 := u = u2 + C * (h/2)^2:`
- `Solve({Eq1, Eq2}, {u, C});`
-

$$\{C = -\frac{4(u1 - u2)}{3h^2}, u = -\frac{u1}{3} + \frac{4u2}{3}\}$$

Bijlage 2: Grafiek over Wet van Moore



Figuur 25: Wet van Moore transistors (Agarwal, 2015)

Literatuurlijst

Agarwal, S. (2015). *Electronic Cooling*. Stanford University.

<http://large.stanford.edu/courses/2012/ph240/agarwal2/>

Blaauwendraad, J. (2010). *Plates and FEM*. Uitgever: Springer. 413 bladzijdes.

<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-90-481-3596-7.pdf>

Dhondt, G. (2014). *Twenty-node brick element (C3D20 and F3D20)*.

[Twenty-node brick element \(C3D20 and F3D20\) \(mit.edu\)](#)

Harish, A. (2021). *What is the Meaning of the Von Mises Stress and the Yield Criterion?*.

<https://www.simscale.com/blog/2017/04/von-mises-stress/>

Hoogenboom, P.J.C. (2019). *Aantekeningen over wringing* (5^{de} editie). TU Delft. [Wringing \(tudelft.nl\)](#)

Hoogenboom, P.J.C. (z.d.). B17 Handout 3. TU Delft

https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_handout_3.pdf

Hoogenboom, P.J.C. (z.d.). *Note on stresses in shells*.

http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_handout_7_lockdown.pdf

Li, D. (2012). TU Delft. *Stresses in the edges of cold bent glass panes*.

Shalom, I. (2013). *Computations of stresses with volume-elements in rectangular and HE sections*.

Bachelor Eindproject TU Delft. http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/bsc_projects/eindrapport_shalom.pdf

Tardi, C. (2022). *Moore's Law*. <https://www.investopedia.com/terms/m/mooreslaw.asp>

Zwennis, R. (2013). *Spanningen in de rand van koud vervormde glasplaten*. Bachelor Eindproject TU

Delft. http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/bsc_projects/eindrapport_zwennis.pdf