CT3000: BACHELOR EINDWERK FEICKO KÖLLER

IJSBELASTINGEN OP EEN DRIJVEND PLATFORM

BEGELEIDING: DR. IR. P.C.J. HOOGENBOOM EN DR. IR. S.A. MIEDEMA
JUNI 2013

VOORWOORD

Voor u ligt het tussenrapport van een eindproject bij de sectie Offshore van de Technische Universiteit Delft. In dit werk wordt onderzocht wat de effecten van ijsbelasting op een offshore constructie zijn en hoe het ontwerp van offshore constructies naar dit inzicht kan worden verbeterd.

Graag wil ik dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en dr. ir. S.A. Miedema bedanken voor hun enthousiaste inbreng en begeleiding gedurende de zeven weken durende periode van mijn afstuderen.

Feicko Köller,
Delft, mei 2013

INHOUDSOPGAVE

1. INLEIDING

1.1 PROBLEEMSTELLING

Opgedreven vraag naar energie en grondstoffen verbreedt voortdurend de economische mogelijkheid om energie en grondstoffen te winnen onder steeds extremere condities. Dit is de drijvende kracht geweest voor de offshore industrie om constructies op te zetten in Arctische gebieden. Dit doorgaande proces biedt voor de techniek grote uitdagingen.

Één van die uitdagingen is het in kaart brengen van de effecten van drijvend ijs op offshore platforms. Nu wordt vaak nog gebruik gemaakt van ijsbrekers om het 'gevaar' van drijvend ijs op een offshore platform te mijden. Behalve dat er hoge kosten zijn verbonden met het inhuren van ijsbrekers, loopt de continuïteit van productie gevaar als het ijs te dik wordt voor de ijsbrekers om te breken. In zo een geval dient de productie gestaakt te worden en het offshore platform afgevoerd totdat de condities weer toelaten om productie voort te zetten. Met kennis van de effecten van ijsbelasting op offshore constructies, is het mogelijk om deze slim te ontwerpen zodat de constructie zelf in stand is om extreme ijscondities te weerstaan en gedurende alle seizoenen operationeel te blijven.

1.2 DOELSTELLING

Het doel van dit Bachelor Eindwerk is het verkennen van de effecten van een bewegende drijvende ijsplaat op een (semi-submursable) platform. Vervolgens wordt ten doel gesteld om een advies uit te brengen voor het ontwerp van een dergelijk platform welke het mogelijk maakt het platform in staat te stellen om productie voort te zetten gedurende de meest kritische ijsbelastingen.

Om inzicht te krijgen in de werking van de ijsbelasting wordt gebruikt gemaakt van een modellering in Maple®. Deze wordt opgebouwd van simpel (één dimensie 1^e orde) tot complex (twee dimensies 2^e orde). De volgende onderzoeksvraag dient als leidraad voor het eindwerk:

1.3 ONDERZOEKSVRAAG

Wat is, en wat zijn de effecten van, de belasting van een verplaatsende drijvende ijsplaat op een (semi-submursable) platform, en hoe kan hiermee rekening worden gehouden in het ontwerp?

2. KARAKTERISTIEKEN IJS

2.1 ZEEIJS

Door de hoge concentratie opgeloste zouten in zeewater is de kristalstructuur verschillend van "zoetwater-ijs" zoals glaciaal ijs. Behalve de microstructuur die gekenmerkt wordt door de oriëntatie van ijskristallen speelt ook de macrostructuur, zoals de gelaagdheid van het ijs een grote rol in het bepalen van de mechanische eigenschappen van het ijs.

2.1.1 MECHANISCHE EIGENSCHAPPEN

De eigenschappen van micro- en macrostructuur zijn beide nogal afhankelijk van de condities waaronder het ijs ontstaat. Daarnaast zijn de eigenschappen van ijs temperatuurs- en tijdsafhankelijk. Dit maakt het voorspellen van de mechanische eigenschappen van ijs op zijn minst een onzekere bedoeling. Om deze reden wordt er in dit verslag uitgegaan van ongunstige mechanische eigenschappen:

- een elasticiteitsmodulus van 9.7 GPa
- een Poisson's ratio van 0.32
- een treksterkte van 1.43 MPa (tussen -10 en -20°C)
- een druksterkte van 20 MPa (tussen -10 en -20°C)
- een dichtheid van 9000 N/m^3

2.1.2 WIJZE VAN VOORKOMEN

Afhankelijk van klimatologische omstandigheden heeft zee-ijs verschillende verschijningsvormen. In figuur 2.1 is dit proces weergeven.

FIGUUR 2.1: VORMING VAN ZEEIJS BRON: HTTP://NSIDC.ORG/CRYOSPHERE/SEAICE/CHARACTERISTICS/FORMATION.HTML (DATUM RAADPLEGING 11-05-2013)

De formatie van ijs begint met het binden van ijskristallen. In kalm water kan uit de ijskristallen een soort 'ijspap' ontstaan. Uit deze 'pap' kan vervolgens een ijsplaat ontstaan. Plaatselijk kan deze diktes bereiken tot wel 40 meter (Wright et al., 1978) door het afbreken en opstapelen van stukken ijsplaat.

In woelig water kan onder de juiste omstandigheden vervolgens 'pancake ice' gevormd worden, velden met drijvende ijsschijven. Als dit proces zich voorzet kunnen zogenaamde 'rubble piles' ontstaan waarbij ijsbrokken aan elkaar vriezen en ophopen. Deze 'piles' kunnen flinke hoogtes bereiken (tot 20 meter). Daarnaast kunnen individuele brokken en 'pancakes' aan elkaar vriezen tot een uniforme ijsplaat. Ook in woelig water kunnen ijsplaten opstapelen en grote diktes bereiken.

Zee-ijs kan worden geclassificeerd als eenjarig ijs en meerderjarig ijs. Meerderjarig ijs heeft dikwijls een blauwe kleur en ten opzichte van eenjarig ijs sterkere mechanische eigenschappen, doordat in de zomer breuken en onvolkomenheden worden opgevuld met smeltwater. Naast ijs

wat bestaat uit bevroren zeewater komt ook glaciaal ijs voor in de vorm van kleine ijsbrokken tot hele ijsbergen.
In dit verslag wordt onderzocht wat de belasting is van ijsplaten op een offshore constructie. De typische dikte van een dergelijke plaat varieert van 1meter in de Beringzee tot 2,5 meter rond de Canadese Arctische eilanden. Op de cover is goed te zien hoe een dergelijke ijsplaat zich manifesteert.

2.2 BEZWIJKMECHANISMEN

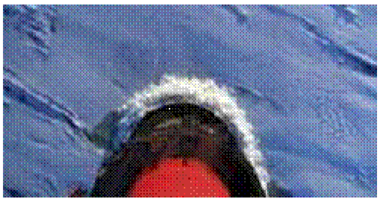
2.2.1 KNIK

Knikken kan optreden als de ijslaag relatief slank is en aan het uiteinde van het ijs veel wrijving kan opbouwen. Dit bezwijkmechanisme vindt alleen plaats bij relatief dun ijs met een maximale dikte van +/- 0,4 meter. Er is relatief veel kracht nodig om een ijsplaat te doen knikken.

FIGUUR 2.2: KNIK IN PLAATIJS *(BEN AND DEB GREENE, NSB)*

2.2.2 VERPULVERING

Verpulvering veroorzaakt de hoogste krachten op een constructie. Hoewel verpulveren wel waargenomen wordt komt dit mechanisme op grote schaal niet veelvuldig voor aangezien het ijs wordt gekenmerkt door onvolkomenheden. In plaats van verpulveren treedt vaak het "mixed mode" mechanisme op.



FIGUUR 2.3: VERPULVERING VAN PLAATIJS (PRABHAKAR, VAN NES, CORONA, 2009)

2.2.3 BUIGING

Het bezwijken van ijs onder het buigmechanisme vindt onder aanzienlijk lagere belasting plaats dan de andere mechanismen. Hierom is dit mechanisme het meest aantrekkelijk om een constructie op te ontwerpen. Er dient gezorgd te worden voor een hellend vlak waartegen een eventuele ijsplaat af kan buigen. Wanneer plaatijs zich richting een hellende constructie voortbeweegt, begint aan het raakvlak eerst het ijs te verpulveren. De kracht neemt toe waardoor het de kracht van de constructie op het ijs meer vat krijgt op de ijsplaat. De verticale component van deze kracht neemt toe waarna het ijs zo ver doorbuigt dat het bezwijkt.

FIGUUR 2.4: BEZWIJKEN IJSPLAAT ONDER BUIGING (PRABHAKAR, VAN NES, CORONA, 2009)

2.2.4 "MIXED MODE"

De zogenaamde "mixed mode" bestaat hoofdzakelijk uit het afbrokkelen van het ijs. Daarnaast bezwijkt het ijs onder een combinatie van andere mechanismen zoals verpulvering en splitsing. Dit mechanisme kost vrij veel kracht en vindt voornamelijk plaats in relatief dikkere ijslagen.
Aangezien buiging het bezwijkmechanisme oplevert met de laagste bezwijklasten, zal er in dit werkstuk worden ingegaan op

FIGUUR 2.5: BEZWIJKEN VOLGENS "MIXED MODE" (G.W. TIMCO, 2005)

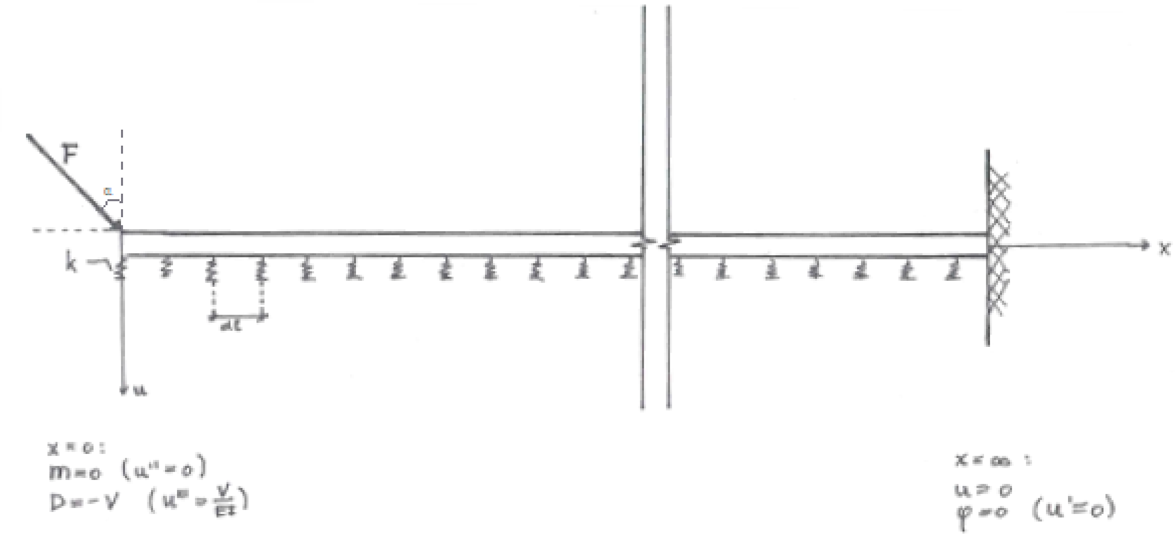
dit mechanisme. Offshore platforms die worden ontworpen zodat ijsbelasting hoofdzakelijk optreedt volgens kritische buiging zullen vanuit economisch en materiaalkundig oogpunt het meest optimaal zijn. In de volgende hoofdstukken zullen krachten op de constructie telkens worden uitgerekend per eenheid van breedte. Een modellering waarbij niet naar de geometrische invloeden van de derde dimensie wordt gekeken staat namelijk toe puur het mechanisme buiging in beschouwing te nemen. In werkelijkheid treedt het bezwijkmechanisme buiging bijna altijd op in combinatie met het “mixed mode” mechanisme.

3. HET MODEL

3.1 MODELLERING VAN HET IJS

3.1.1 HET ÉÉNDIMENSIONALE MODEL

Als de ijsplaat per eenheidsbreedte van één meter wordt bekeken kan deze worden beschouwd als een ligger die in het ene uiteinde een puntlast ondervindt van de offshore constructie en aan het andere (x=∞) stijf is ingeklemd. Hieronder wordt het model weergeven:

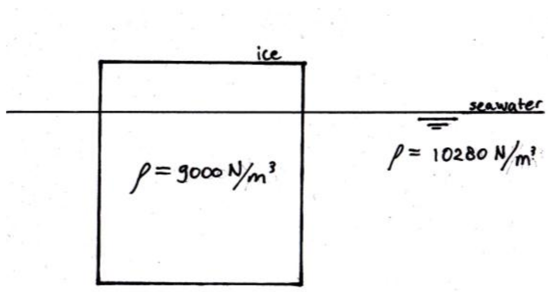


FIGUUR 3.1: ÉÉNDIMENSIONAAL MODEL

De ligger wordt verend ondersteund door veren met een onderlinge afstand δl en een veerstijfheid k welke gedefinieerd wordt door het Archimedes effect van het opdrijvende ijs. Als δl→ 0, dan kan de belasting van de veer worden gezien als een verdeelde belasting die afhankelijk is van de doorbuiging u. De verdeelde belasting afkomstig van het eigen gewicht van het ijs wordt opgeheven door dit zelfde Archimedes effect en kan in de uitgangssituatie dus buiten beschouwing worden gelaten.

3.1.2 VERENDE ONDERSTEUNING

Het opdrijvend vermogen van de ijsplaat kan worden gemodelleerd als een continue veer die van x=0 tot x=∞ een variabele verdeelde belasting kan uitoefenen. De veerstijfheid van deze ondersteuning wordt gevonden volgens de wet van Archimedes: "De opwaartse kracht die een lichaam in een vloeistof of gas ondervindt is even groot als het gewicht van de verplaatste vloeistof of gas".



FIGUUR 3.2 : MODELERING OPDRIJVING IJS

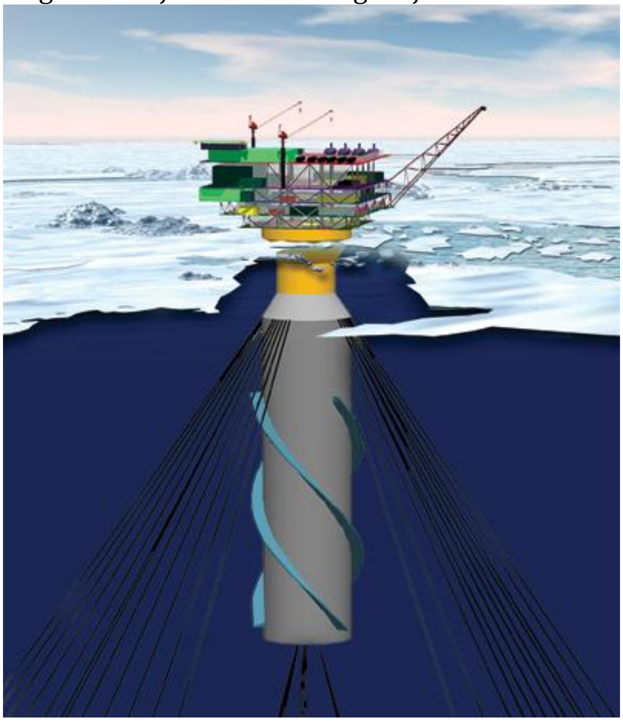
$$\mathbf{\Delta F = \Delta h * b * l * \rho_{zw}}$$
$$\mathbf{k = b * \rho_{zw} = 1 * 10280 = 10280\ {}^{N}/_{m2}}$$

3.2 MODELLERING VAN HET PLATFORM

3.2.1 SPAR PLATFORMS

Het ontwerp van platforms in Arctische zeeën kan worden aangepast op drijvend plaatijs maar een dergelijk platform is niet opgewassen tegen de meest kritische condities. Deze meest kritische omstandigheden ontstaan door drijvende ijsbergen die bijvoorbeeld van gletsjers afbreken en soms kilometers in doorsnede zijn. Om deze reden worden in Arctische gebieden alleen drijvende platforms toegepast die zo nodig kunnen worden weggesleept.

Het meest toepasbare platformtype voor ontginning in Arctische gebieden is het zogenaamde "Spar" platform (zie figuur 3.3). Een dergelijk platform bestaat in essentie uit een enkele dobber gekenmerkt door een grote diameter. Spar platforms die zijn ontworpen voor Arctische omstandigheden hebben aan het oppervlak een conische vorm ten doele aankomend ijs te breken. Op de dobber is het platform zelf gevestigd. Onderaan de dobber zit een bassin dat wordt verzwaard met een vloeistof met een grotere dichtheid dan water. Zo wordt het zwaartepunt verlaagd en de stabiliteit verzekerd. Een Spar platform wordt op zijn plek gehouden door meerdere kettinglijnen die op enige horizontale afstand van het platform in de zeebodem zijn verankerd.



FIGUUR 3.3 : ARCTISCH SPARPLATFORM (AFBEELDING *FLOATEC* 2008)

3.2.2 EIGENSCHAPPEN SYSTEEM

Het Sparplatform dat gemodelleerd wordt is weergeven in Bijlage 1. De volgende eigenschappen zijn ingeschat aan de hand van beschikbare literatuur (O.A. Montasir en V.J. Kurian 2010) en het Red Hawk platform in de Gulf of Mexico:

Sparplatform:

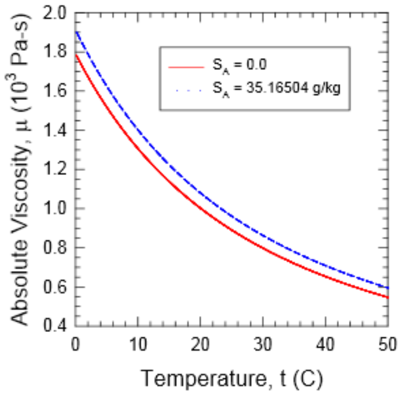
Massa (totaal):	10.800 ton
Profiel drijver:	Cilindrisch
Diepte drijver:	120 meter
Gemiddelde diameter drijver onder oppervlak:	30 meter
Diameter drijver aan oppervlak:	15 meter
Hoek tussen drijver en wateroppervlak:	45^0

Kettinglijnen:

Aantal:	48
Massa (onder water):	$277\ ^{kg}/_{m}$
Diameter:	12,4 cm

Water:

Dichtheid:	$1028\ ^{kg}/_{m3}$
Gemiddelde viscositeit (zie figuur 3.4):	$2*10^3$ Pa*s
Gemiddelde snelheid:	$2\ ^{m}/_{s}$

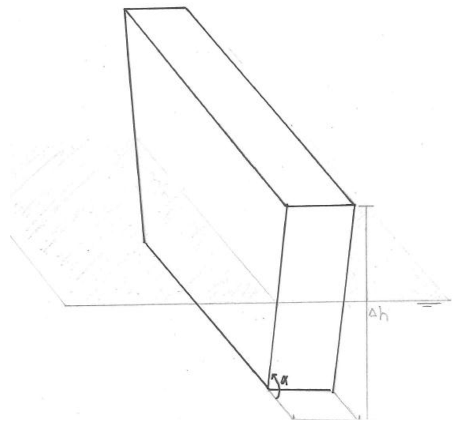


FIGUUR 3.4 : DE BLAUWE STIPPELLIJN WEERGEEFT μ VAN ZEEWATER ALS FUNCTIE VAN DE TEMPERATUUR

3.2.3 VERTALING NAAR 2D

In verband met het modeleren van alleen het buigmechanisme, wordt het Sparplatform uit Bijlage 1 vertaald naar elementen voor 2D berekening. Hiermee kunnen de belastingseffecten per eenheid van breedte worden bepaald op basis van buiging van het ijs. Zo een element is weergeven in figuur 3.5. Een dergelijk element bestaat uit een 3D trapezoïde met een eenheidsbreedte van 1 meter.

Verder geldt in dit model dat de diepte in uitgangssituatie (d_0) gelijk is aan 15 meter. Dit is gelijk aan de diameter van de drijver aan het platform aan het wateroppervlak.



FIGUUR 3.5 : ELEMENT 2D MODELERING

3.3 DIFFERENTIAALVERGELIJKING VAN DE EERSTE ORDE

Aangezien bezwijken door buiging wordt beschouwd zal de dwarskrachtscomponent van de puntlast F de grootste invloed hebben op het model. Er kan naar verwachting een goede benadering worden gevonden met een berekening in de eerste orde. Interpretatie van dit model leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:

$EIu^{IV} = q - ku$
$EIu^{IV} + ku = q$ $\quad$ $(q = 0)$
$\mathbf{EIu^{IV} + ku = 0}$

MET DE VOLGENDE RANDVOORWAARDEN (ZIE OOK FIGUUR3.1):

<u>Voor x = 0:</u>
$M = 0$ $\quad$ $(u^{II} = 0)$
$D = -V$ $\quad$ $(u^{III} = \frac{V}{EI})$

<u>Voor x = ∞:</u>
$u = 0$
$\varphi = 0$ $\quad$ $(u^{I} = 0)$

3.3.1 MODELERING IN MAPLE®

De volgende constanten worden gebruikt als uitgangspunt:

l= 250 m;	De lengte voor $x \rightarrow \infty$ wordt vastgesteld op 250 meter van de offshore constructie. Op deze manier is het mogelijk om eindige antwoorden in Maple® te genereren.
h= 2,5 m;	De meest kritische dikte voor eenjarig plaatijs.
b= 1,0 m;	Het vaststellen van de breedte op 1,0 meter zorgt voor uitkomsten van het model in eenheid van breedte.
$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$;	De hoek van het hellend oppervlak van de offshore constructie en de horizontaal ligt tussen de 45 en 90 °.
$E = 9.7 \cdot 10^9\ ^N/_{m2}$;	De elasticiteitsmodulus van het gemodelleerde ijs is 9.7 GPa (zo laag mogelijk, meest nadelig).
$\rho_{zw} = 10280\ ^N/_{m3}$;	Dichtheid van zeewater.
$\rho_{ijs} = 900\ ^N/_{m3}$;	Dichtheid van zeeijs.
$\sigma_{t,crit} = 1{,}43 \cdot 10^6\ ^N/_{m2}$;	Kritische trekspanning van ijs.

Hierbij worden de volgende aannames gedaan:

- Het ijs is volledig homogeen/isotroop
- Het optredende bezwijkmechanisme is buiging
- Het ijs breekt bros bij het bereiken van de kritische trekspanning
- Water is onsamendrukbaar
- De offshore constructie is oneindig star
- Het aandeel van de normaalkracht op de buiging is verwaarloosbaar
- Op x=l wordt de ijsplaat als stijf ingeklemd verondersteld

De modellering van de differentiaalvergelijking in Maple® is terug te vinden in Bijlage 2.

3.4 DIFFERENTIAALVERGELIJKING VAN DE TWEEDE ORDE

Bij de tweede orde benadering geldt figuur 3.1 nog steeds. Het verschil is dat er een extra factor wordt toegevoegd aan de differentiaalvergelijking welke het effect van de normaalkracht op de ijsplaat op de buiging in rekening brengt:

$EIu^{IV} + Nu^{II} = q - ku$
$EIu^{IV} + Nu^{II} + ku = q \qquad (q = 0)$
$\mathbf{EIu^{IV} + Nu^{II} + ku = 0}$

De constanten en uitgangspunten die onder 3.3.1 zijn beschreven worden aangehouden met uitzondering van de invloed van de normaalspanning op de buiging van de ijsplaat. Deze normaalspanning bestaat uit druk. De vervorming veroorzaakt door de dwarskracht zorgt ervoor dat de drukkracht kan bijdragen aan het moment op de plaat. Dit effect wordt voor een enkele orde in rekening gebracht. Een beschouwing van meerdere ordes waarbij de verplaatsing veroorzaakt door de drukkracht invloed heeft op het effect van dezelfde kracht wordt achterwege gelaten.

3.5 VERGELIJKING BENADERING VAN EERSTE EN TWEEDE ORDE

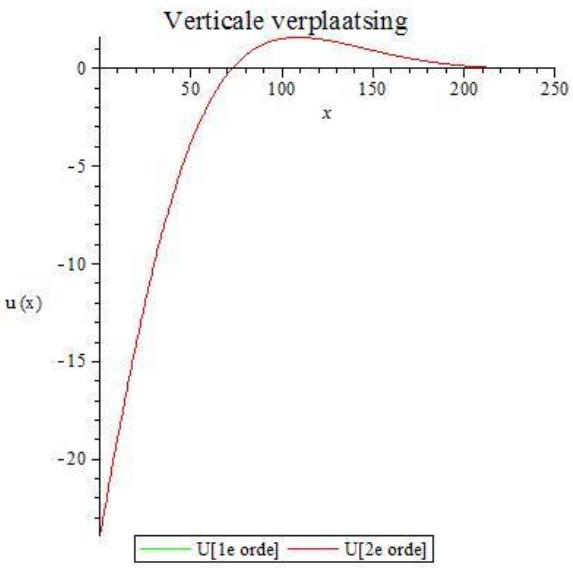
De eerste stap is om te onderzoeken hoe groot het effect is van de tweede orde berekening op de verplaatsingen in de ijsplaat. Als dit effect in het niet valt ten opzichte van het resultaat van de eerste orde berekening, is het tweede orde effect verwaarloosbaar te noemen. Een dergelijk resultaat zou betekenen dat een tweede orde berekening verder onnodig is.

Om het effect van de tweede orde berekening te onderzoeken, zal uit worden gegaan van de constanten onder paragraaf 3.3.1. Hierbij wordt als extra constante aangenomen dat $F=10^6\ {}^N/_m$. De berekening is een keer gedaan voor een belastingshoek van 45° (0,25π) en voor een hoek van $\alpha \rightarrow 90^0$. Bij een hoek van exact 90^0 zou er immers geen buiging maar knik optreden. α is gekozen als 89° (0,494π). Vervolgens worden in Maple® beide hieronder staande differentiaalvergelijkingen opgelost voor deze constante F:

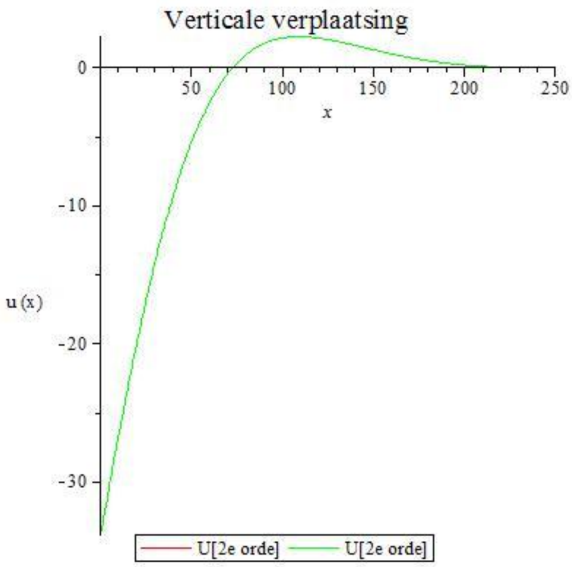
Eerste orde: $\mathbf{EIu^{IV} + ku = 0}$
Tweede orde: $\mathbf{EIu^{IV} + Nu^{II} + ku = 0}$

Hierbij is de normaalkracht een drukkracht.

Het resultaat is de volgende grafiek waarbij de verplaatsingen van de ijsplaat in beide gevallen is weergeven:



FIGUUR 3.6: ZAKKING 1E EN 2E ORDE 45°



FIGUUR 3.7: ZAKKING 1E EN 2E ORDE 89°

Hierbij is het verschil tussen de beide benaderingen voor beide hoeken niet te onderscheiden (grafieken liggen over elkaar heen). Er kan dus geconcludeerd worden dat een tweede orde benadering onnodig is. De berekeningen in Maple® waarmee de eerste orde- en tweede orde benadering worden vergeleken zijn terug te vinden in Bijlage 3.

4. RESULTATEN MODELLERING IN MAPLE®

4.1 BEREKENING VOOR EEN BELASTINGSHOEK VAN 45°

In de Maple® berekening wordt de differentiaalvergelijking uit paragraaf 3.3 opgelost voor de randvoorwaarden uit paragraaf 3.3.1. De oplossing in termen van de opgelegde puntlast aan het uiteinde van de ijsplaat is de volgende (α=¼π rad):

$$u(x) = 6.534444362\,10^{-14} F\,e^{-0.03776857961\,x} \sin(0.03776857961\,x) + 6.534444362\,10^{-14} F\,e^{0.03776857961\,x} \sin(0.03776857961\,x) + 0.000005195801152\,F\,e^{-0.03776857961\,x} \cos(0.03776857961\,x) - 3.381702542\,10^{-14} F\,e^{0.03776857961\,x} \cos(0.03776857961\,x)$$

Door de externe puntlast doorloopt de ijsplaat een golvend zettingsprofiel. Deze golving wordt gedempt door de stijfheid van de plaat zelf, en het verende karakter van het onderliggende water.

De volgende stap is om deze oplossing te conditioneren aan de sterkte eigenschappen van het ijs. In dit geval treedt een brosse breuk op door buiging. Op het moment van breken is de maximale trekspanning gelijk aan de kritische trekspanning ($\sigma_{t,crit}$= 1,43 MPa). De oplossing voor F wordt gevonden door de term voor de trekspanning te maximaliseren. Hierbij geldt:

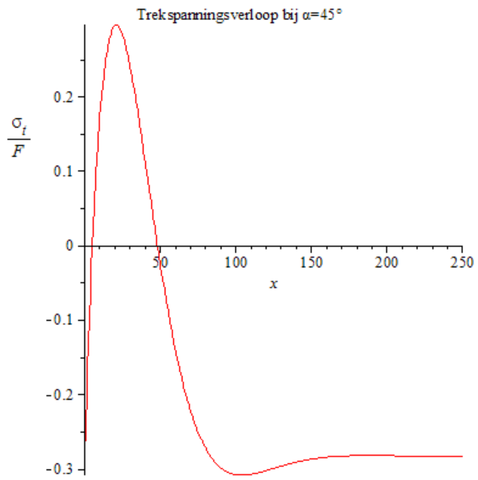
$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$$

In Maple® volgt de volgende definitie:

$$\sigma_t = (-N/(b*h) + ((EI*(diff(u(x),x,x)))*.5)*h/(0.10e\text{-}10*Ice)) =$$

$$(-0.2828427125 - 2.260381331\,10^{-8} e^{-0.03776857961\,x} \cos(0.03776857961\,x) + 2.260381331\,10^{-8} e^{0.03776857961\,x} \cos(0.03776857961\,x) + 1.797320672\,e^{-0.03776857961\,x} \sin(0.03776857961\,x) + 1.169791473\,10^{-8} e^{0.03776857961\,x} \sin(0.03776857961\,x))\,F$$

Omdat de spanning lineair afhankelijk is van de puntlast, zoals te zien is in de bovenstaande formule, kan de x-waarde van het maximum gevonden worden met de aanname F=1. Hiervoor geldt het volgende spanningsprofiel. Hierbij is op de positieve as de trekspanning weergeven.



FIGUUR 4.1:TREKSPANNINGSVERLOOP BIJ α=45°

Het ijs breekt op een afstand van 20,8 meter van de offshore constructie.:

$$x_{crit} = 20{,}8 \text{ m}$$

Het maximum kan nu als volgt worden geschaald met F zodat deze samenvalt met de kritische trekspanning.

$$\sigma_{Max[F=1]} * F = \sigma_{t,crit}$$

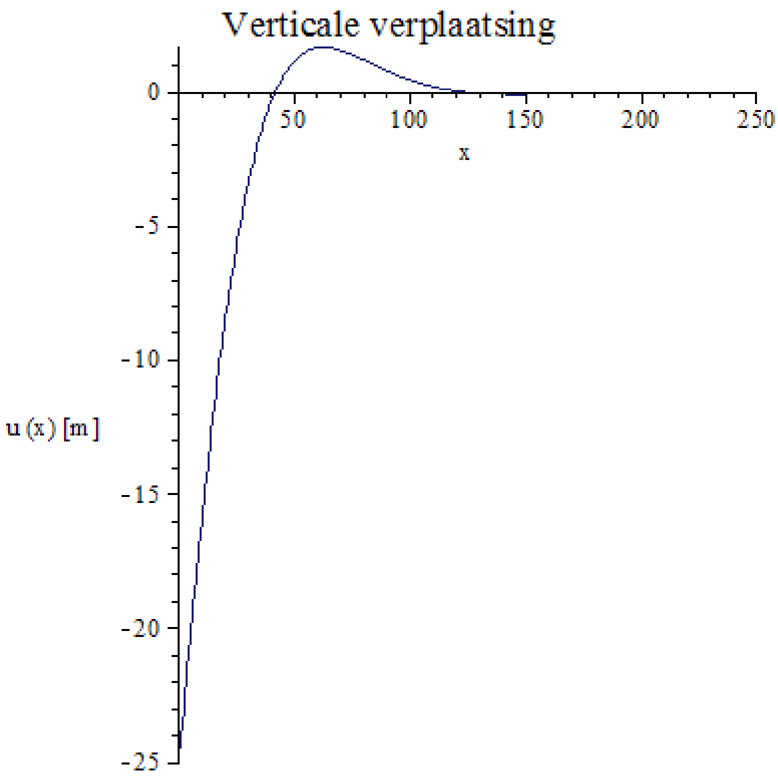
Hierbij geldt voor de (trek)spanning:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$$

Hieruit wordt de waarde voor F berekend:

$$F = 4{,}82 \text{ MN/m}$$

Met deze waarde voor F is de differentiaalvergelijking volledig opgelost. Met deze kennis wordt het zettingsverloop doorgerekend en deze ziet er als volgt uit:



FIGUUR 4.2: ZETTINGSVERLOOP BIJ α=45°

Opvallend is de grootte van de maximale zetting. Op een zich voorstrekkende ijsplaat kan de uiteindelijke zakking flink oplopen. Uit het model in Maple® blijkt dat de doorbuiging ter plaatse van de offshore constructie ongeveer 10 maal de hoogte van de ijsplaat is, wat neerkomt op 25 meter. Voor dunnere ijsplaten wordt deze verhouding hoger. Er kan geconcludeerd worden dat voor het bezwijken van de dikste ijsplaten een afbuiging van 25 meter nodig is. Een helling van 25 meter hoog zou zacht uitgedrukt onpraktisch zijn. Verder onderzoek is nodig om te bepalen of een helling over de volle hoogte van "25 meter" noodzakelijk is. Wellicht is het mogelijk om het ijs in bending mode te sturen door de ijsplaat aan het oppervlak met een helling af te buigen en op grotere diepte langs een verticaal oppervlak weg te leiden. Een van de eigenschappen waarvan deze mogelijkheid afhangt is de wandwrijving van het betreffende oppervlak.

4.2 PARAMETERSTUDIE

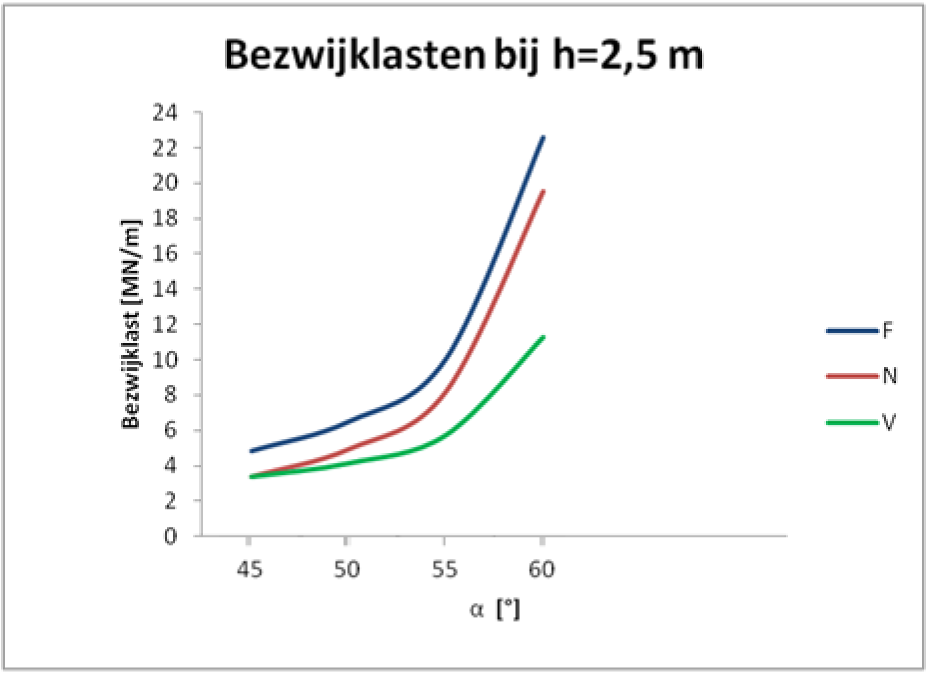
Uit de modellering in Maple® blijkt dat de resulterende breukafstand (x_{crit}) en breukbelasting (F) afhankelijk zijn van drie variabelen. Deze variabelen zijn de belastingshoek (α), de dikte (h) en de elasticiteitsmodulus (E). In dit (deel)hoofdstuk zal een beeld worden gegeven van de invloed van deze parameters op het bezwijkgedrag van de ijsplaat. Daarnaast zal worden ingegaan op de kritische belastingshoek (α_{crit}). Er zal telkens worden ingegaan op een van de drie invloedsvariabelen waarbij de andere variabelen en uitgangspunten als constant zullen worden aangehouden. Het uitgangspunt zijn de in hoofdstuk drie vermeldde differentiaalvergelijking en constanten.

4.2.1 INVLOED VAN DE BELASTINGSHOEK

In verband met de praktische aspecten van het ontwerp van een offshore constructie, is beeldvorming van de invloed van de belastingshoek op het belastingsmechanisme. Vanuit de belastingshoek is de bijbehorende helling van de wand van een offshore platform eenvoudig af te leiden.

De plek van bezwijken, x_{crit} blijft onveranderd bij een variërende belastingshoek (α), x_{crit} is namelijk puur afhankelijk van de plaats waar het moment maximaal is. Dit punt is afhankelijk van de plaats van de dwarskrachtsbelasting en de eigenschappen van het ijs.

De belastingshoek is daarentegen wel van grote invloed op de bezwijkbelasting (F). Hoe meer de hoek van de wand van de offshore constructie nadert tot de vertikaal, hoe kleiner de invloed van de dwarskrachtcomponent van de bezwijklast. Hierdoor neemt de totale bezwijklast toe:



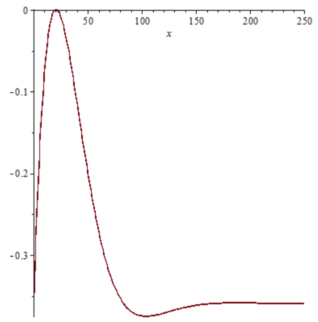
FIGUUR 4.3 : TOTALE BEZWIJKLAST (F), EN DE HORIZONTALE (N) EN VERTICALE (V) COMPONENT BIJ VERSCHILLENDE HOEKEN VAN BELASTING BIJ H = 2,5 M

Hierbij neemt de bezwijklast verder exponentieel toe tot en met een hoek van 63,9°. Deze maximale belastingshoek (kritische belastingshoek) met bijbehorende bezwijkbelasting ($F \rightarrow \infty$) is in verband met visualisering van de overige waarden niet weergeven in de grafiek.

4.2.2 INVLOED VAN DE DIKTE VAN DE IJSPLAAT

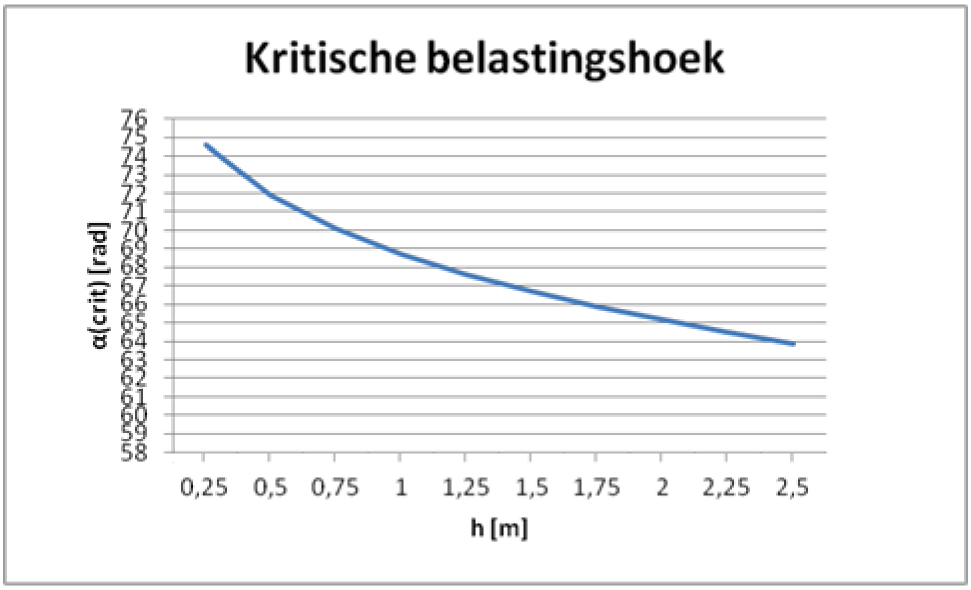
Kritische belastingshoek:
Een interessante parameter om te bekijken is de kritische belastingshoek (α_{crit}). Dit is de hoek waarbij er geen sprake meer is van het bezwijkmechanisme "buiging", maar waarbij het fysische proces over wordt genomen door het "mixed-mode" fenomeen als behandeld in paragraaf 2.2.4. De voorwaarde die geldt voor de kritische belastingshoek is de volgende waarna het beeld uit figuur 4.4 ontstaat:

$$\sigma_{max} = \max\left[\frac{M}{W} + \frac{N}{A}\right] = 0$$



FIGUUR 4.4: SPANNINGSVERLOOP IJSPLAAT

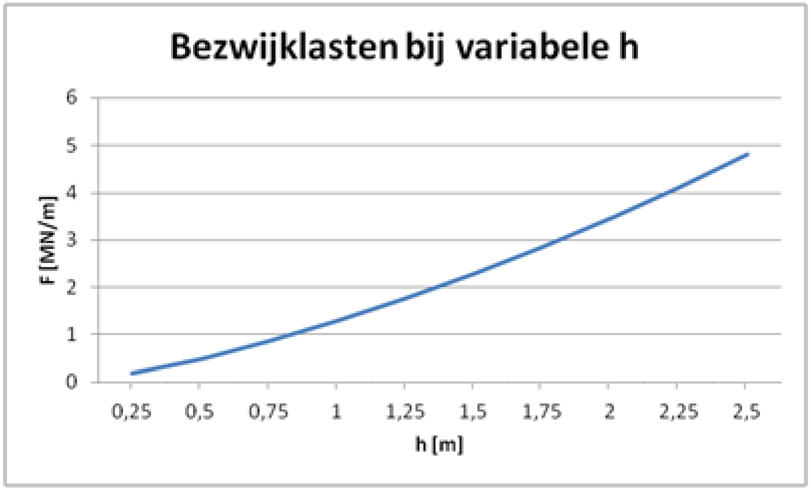
Bij het benaderen van de kritische belastingshoek wordt de invloed van de normaalkracht op het spanningprofiel op de kritische doorsnede steeds groter. Het resultaat hiervan is dat de doorsnede steeds meer op druk wordt belast, waardoor het moment uiteindelijk geen trekspanning meer teweeg brengt in de doorsnede. Hierdoor neemt niet alleen de benodigde bezwijkbelasting toe, maar ook de benodigde dwarskrachtcomponent, die de drukspanning van de normaalkrachtscomponent moet opheffen, zal toenemen. De doorsnede bezwijkt uiteindelijk niet meer op buiging. De kritische belastingshoek zou een belangrijke overweging kunnen zijn in het ontwerpproces van een offshore constructie aangezien een ontwerp dat bezwijken op buiging teweeg brengt lagere belastingen ondervindt. Voor de zwaarste categorie plaatijs is het gunstig om de hoek tussen het wateroppervlak en de offshore constructie onder de 60° te houden, nog beter is het om deze hoek zelfs onder de 55° te houden.



FIGUUR 4.5 : KRITISCHE BELASTINGSHOEK BIJ VERSCHILLENDE DOORSNEEDIKTES (α=45°)

De kritische belastingshoek blijkt afnemend dalend af te nemen voor een ijsplaat met toenemende dikte. Dit betekent dat hoe dunner de ijsplaat, hoe meer deze plaat op een horizontale manier kan worden belast (onder het bezwijkmechanisme buiging).

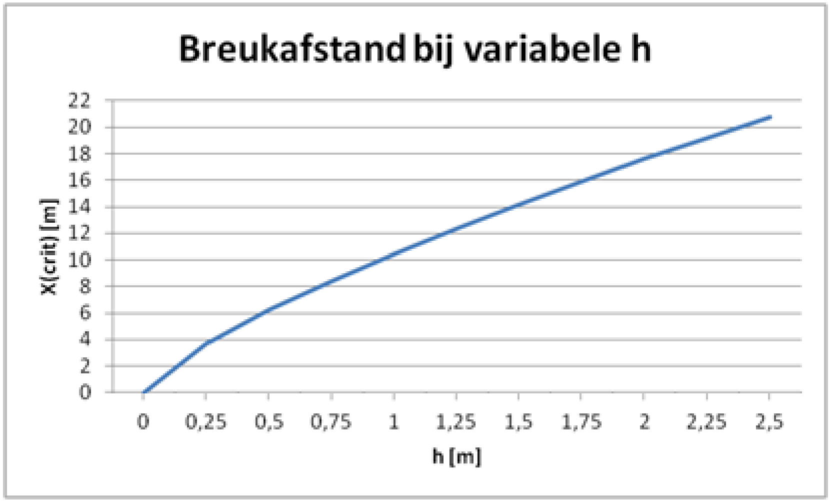
Bezwijkbelasting:
Omdat er veel spreiding is in de waargenomen diktes van ijsplaten in de praktijk, is het van belang een beeld te vormen van het effect van een variabele dikte op de opgewekte krachten. Met name in de lente, wanneer grote ijsplaten afbreken, komen grote diktes voor. De krachten op een platform hangen als volgt af van de dikte:



FIGUUR 4.6 : BEZWIJKLAST BIJ VARIABELE DIKTES (α=45°)

De krachten nemen dus steeds sneller toe bij grotere diktes, maar dit gedrag kan redelijk benaderd worden met een lineair verband.

Breukafstand:
Omdat de breukafstand uiteindelijk bepalend is voor de belastingsperiode van de dynamische belasting op een platform, is het ook interessant om te bekijken wat de invloed is van de dikte op de breukafstand. In de praktijk komt immers een grote verscheidenheid aan diktes voor.

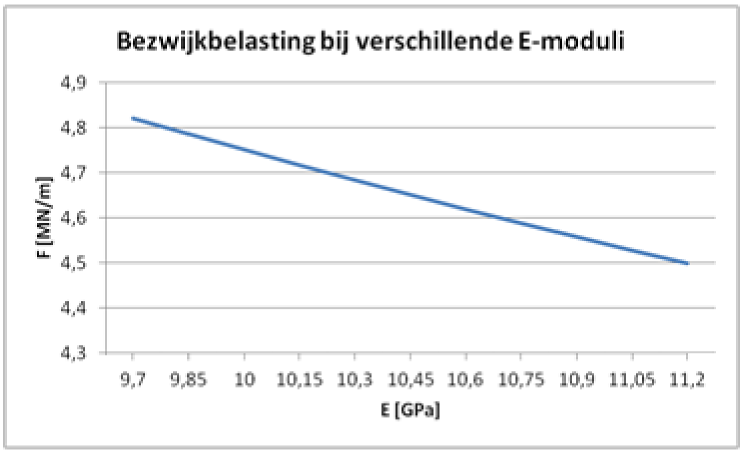


FIGUUR 4.7 : BREUKAFSTAND BIJ VERSCHILLENDE DIKTES (α=45°)

De breukafstand neemt verder toe naarmate de dikte van de ijsplaat toeneemt. De belastingsfrequentie zal dus voor kleinere ijsdiktes hoger zijn dan voor grotere ijsdiktes.

4.2.3 INVLOED VAN DE ELASTICITEITSMODULUS

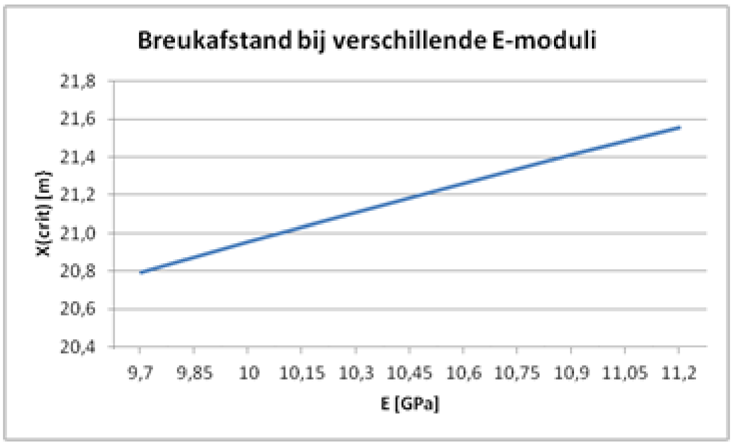
Bezwijkbelasting
In de praktijk zijn er veel invloeden die ten grondslag liggen aan sterkte-eigenschappen van ijs. Zo zijn de klimatologische condities tijdens de vorming van grote invloed. De elasticiteitsmodulus is bijvoorbeeld afhankelijk van het zoutgehalte wat voor zeeijs tussen de 3 en 7‰ ligt. Een hoger zoutgehalte zorgt voor lagere E-moduli door de aanwezigheid van zoutophopingen die de contactoppervlaktes in het ijs verkleinen. Naast het zoutgehalte spelen ook de porositeit en de temperatuur een rol. Hogere porositeit en temperatuur zorgen voor een afname van de E-modulus. Voor lage zoutgehaltes in homogeen ijs is de spreiding bij temperaturen rond de -10 ^{0}C niet zeer groot; deze ligt tussen de 9,7 en 11,2 GPa. Van deze waardes is uitgegaan waaruit het volgende (lineaire) verband volgt:



FIGUUR 4.8 : BEZWIJKLAST BIJ VARIABELE E-MODULI (α=45°; H=2,5 M)

Er blijkt een negatief lineair verband te zijn tussen een toenemende E-modulus en de kracht op de constructie. Hoe stijver het ijs is, hoe sneller bij een opgelegde belasting de piekspanningen de sterkte van het ijs overschrijden.

Breukafstand:
De breukafstand blijkt maar beperkt afhankelijk te zijn van de E-modulus van het plaatijs. Zie figuur 4.9.



FIGUUR 4.9 : BREUKAFSTAND BIJ VARIATIE E-MODULUS (α=45°; H=2,5)

Bij het aangenomen variatiegebied van de E-modulus van het plaatijs hoort maar een kleine, lineaire, positief afhankelijke variatie van de breukafstand. Dit effect speelt in het model dus maar weinig mee.

4.3 INTERPRETATIE BELASTING NAAR VOLLEDIGE SCHAAL

Om een inschatting te maken van het totaal van krachten van het ijs op het platform kan de belasting per eenheid van breedte met de volgende aanname worden opgeschaald naar het geheel:

$$F_{ijs}[totaal] = F * b_{opp} * H$$

Hierbij is H de vormfactor voor een cilinder onder verdeelde belasting van 0,2 (Heseltine J. 2003). De eigenschappen van het platform zijn als vermeld onder paragraaf 3.2.2 zodat $b_{opp} = D_{opp} = 15$ meter.

De volgende belastingen gelden voor een ijsdikte van respectievelijk 1 en 2,5 meter. Hierbij geldt E=9,7 GPa en $\sigma_{t,crit}$= 1,43 MPa.

Totale ijsbelasting		F [MN]	N [MN]	V [MN]
h=1 m	α=45°	3,85	2,72	2,72
	α=50°	4,82	3,7	3,1
	α=55°	6,52	0,54	3,74
	α=60°	10,16	8	5,08
h=2,5 m	α=45°	14,46	10,22	10,22
	α=50°	19,47	14,92	12,52
	α=55°	30,12	24,68	17,28
	α=60°	67,76	58,68	33,88

5. TIJDSAFHANKELIJKE BELASTINGSEFFECTEN

In dit hoofdstuk wordt een wijze verkend om de resultaten uit het ijsbelastingsmodel in Maple® te kunnen interpreteren naar een belastingsmodel dat ook overeenkomt met meetgegevens uit de praktijk. Hierna zullen de eigenschappen van een gedempt massa veersysteem worden bepaald, waarmee dynamische responsie van het beschouwde platform kan worden gemodelleerd. Ten slotte zal worden ingegaan op de effecten die de beschouwde periodieke belastingsfunctie heeft op dit gedempte massa veersysteem. Voor de beschouwingen in dit hoofdstuk worden de volgende variabelen als volgt aangenomen:

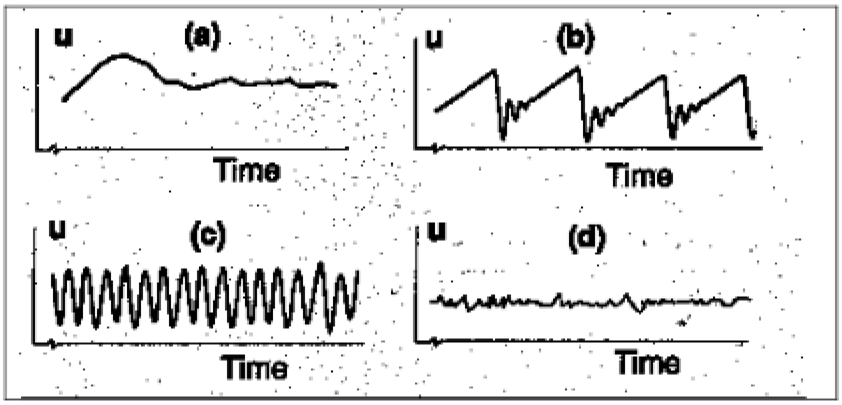
$\alpha = 45^0$;	De hoek van het hellend oppervlak van de offshore constructie ligt tussen de 45
$E = 9.7*10^9\ ^N/_{m2}$;	De elasticiteitsmodulus van het gemodelleerde ijs is 9.7 GPa.
$\rho_{zw} = 10280\ ^N/_{m3}$;	Dichtheid van zeewater.
$\sigma_{t,crit} = 1{,}43*10^6\ ^N/_{m2}$;	Kritische trekspanning van ijs.

Hierbij worden telkens twee diktes beschouwd, namelijk een dikte van 1 meter (een van de kleinste diktes van het ijs waarbij het ontstaan mogelijk is van grote, continue ijsplaten), en een dikte van 2,5 meter (ongeveer de maximale dikte van een eenjarige ijsplaat).

5.1 ICE INDUCED VIBRATION

Ice induced vibration is een fenomeen dat de laatste tijd steeds meer in het licht is gekomen. Ice induced vibration komt in vier verschillende vormen voor Kärnä, T. (2001);

- Respons op plastisch bezwijken bij zeer lage snelheden (zie figuur 5.1 a),
- Quasi-statische respons met uitdempende trillingen bij lage snelheden (zie figuur 5.1 b),
- Harmonische trillingen bij matige snelheden (zie figuur 5.1 c),
- Ruisrespons bij non-simultane verpulvering bij hoge snelheden (zie figuur 5.1 d).



FIGUUR 5.1 : VERSCHILLENDE VORMEN VAN DYNAMISCHE RESPONS BIJ IJSBELASTING KÄRNÄ, T. (2001)

In het geval van bezwijken door buiging is respons b van de constructie zeer relevant. De offshore constructie zal zowel in verticale als horizontale zin worden belast door een toenemende kracht van de ijsplaat. Wanneer de piekbelasting optreedt wordt het kritische moment bereikt en breekt de ijsplaat af op x_{crit}. Vervolgens zal de ijsplaat tot de afstand x_{crit} weggedrukt worden en neemt de kracht weer af tot er een nieuwe breuk plaatsvindt. Als de frequentie van dit belastingspatroon buiten het eigenfrequentiegebied valt van de offshore constructie, zal de trilling uitdempen. In het speciale geval dat de belastingsfrequentie nadert tot de eigenfrequentie van de constructie (5-15% lager dan de eigenfrequentie) kan respons c optreden. Hierbij ontstaat een nagenoeg harmonisch trillingspatroon waarbij de effecten van de dynamische belasting worden versterkt door het dynamisch gedrag van de constructie. Het ultieme belastingsscenario treedt op wanneer de belastingsfrequentie gelijk is aan de eigenfrequentie, dit scenario moet in de ontwerpfase worden overwogen en te allen tijde worden voorkomen.

Harmonische trillingsinductie kan leiden tot situaties waarbij werkzaamheden op platforms onmogelijk worden gemaakt. Daarenboven kan een dergelijke belastingssituatie leiden tot bezwijken door vermoeiing. Uit de praktijk zijn er gevallen bekend waarbij dit is voorgekomen. Een voorbeeld waarbij harmonische trillingen op zijn getreden is het platform in Cook Inlet (Blenkarn 1970). Vervolgens zijn vergelijkbare metingen gedaan in de Oostzee (Engelbrektson 1977; Määttänen 1978; Nordlund et al.1988) en in de Bohai baai (Yue 1998, 2000). Dit alles geeft aan dat onderzoek naar dit fenomeen zeer belangrijk is, met name met de alsmaar toenemende interesse voor het ontwinnen in Arctische gebieden.

5.2 PERIODIEKE BELASTING VANUIT HET MODEL IN MAPLE®

Met behulp van de twee belangrijkste parameters die zijn voortgevloeid uit het Maple® model, kan al inzicht worden verkregen in de vorm van periodiek belasten onder de uitgangscondities uit paragraaf 3.3. Deze twee parameters zijn:

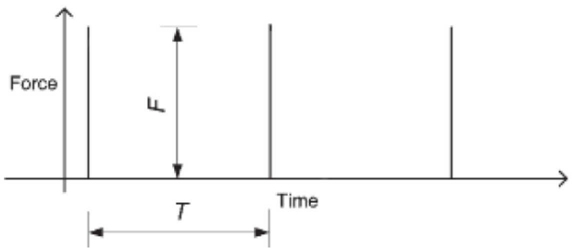
h=1,0 m
F = 3,85 MN
x_{crit} = 10,5 m

h=2,5 m
F = 14,46 MN
x_{crit} = 20,8 m

Hierbij is F de piekspanning van het systeem onder de meest extreme omstandigheden, en x_{crit} de afstand van het platform waar het ijs breekt. Omdat x_{crit} bekend is, kan nu de periode tussen de piekspanningen berekend worden simpelweg door de breukafstand te delen door de snelheid van het ijs (Qu et al., 2006):

$$\bar{T} = \frac{L_b}{V}$$

Volgens meetgegevens (University of Wisconsin 2007) blijkt dat drijvende ijsplaten in de Hudsonbaai zich voortbewegen met een snelheid van tussen de 0,01 en 0,6 m/s. Volgens de hiervoor genoemde formule komt dat neer op een belastingsperiode (T) van ten minste 35 seconde voor h=2,5m en ten minste 17 seconden voor h=1,0 m. Dit leidt tot het volgende belastingsmodel:



FIGUUR 5.2 : BELASTINGSMODEL PIEKSPANNINGEN MAPLE®

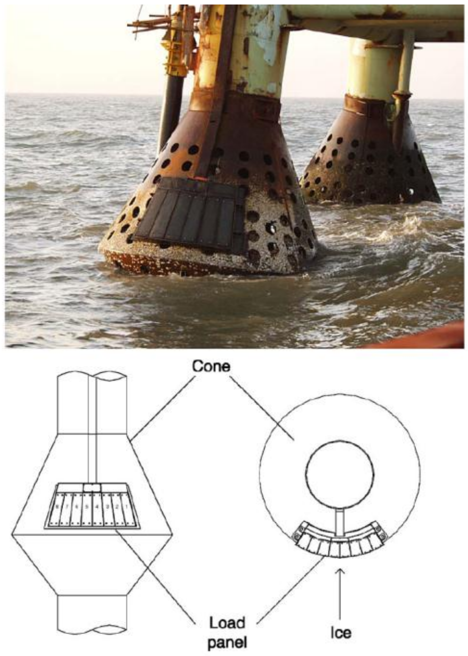
Zaak is nu om dit theoretische model aan de hand van meetgegevens uit de praktijk een realistische vorm te geven. Dit kan door in het model het verlopen van de belasting mee te nemen.

5.3 BENADERING PERIODIEKE BELASTING PRAKTIJK

5.3.1 HET DYNAMISCHE BELASTINGSMODEL

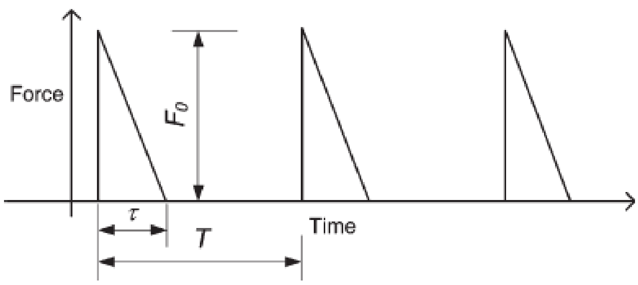
Het model kan nu worden aangepast tot een model welke de realiteit beter representeert door gebruik te maken van meetgegevens uit de praktijk. Zo hebben Yue en Bi in 1998 en 2000 metingen gedaan van ijsbelasting onder buiging op conische constructies. Uit de meetgegevens op het JZ20-2 MUQ platform (zie figuur 5.3) blijkt dat het dynamische belastingsprofiel goed te benaderen is met de volgende (discontinue) functie:

$$F(t) = \begin{cases} F_0\left(1-\dfrac{t}{\tau}\right) & (0 \le t < \tau) \\ 0 & (\tau \le t < T) \end{cases}$$



FIGUUR 5.3 : CONISCHE BELASTINGSPANELEN VAN HET JZ20-2-MUQ PLATFORM (YUE EN BI, 1998)

Hierbij is F_0 de piekbelasting, T de belastingsperiode onder 5.2 en τ de contacttijd. τ is ongeveer $^1/_3$ van de belastingsperiode van het plaatijs op de constructie (Yue en Bi, 2000). τ neemt toe naarmate de hoek van de constructie met de horizontaal toeneemt en naarmate de breedte verder toeneemt en is verder afhankelijk van de eigenschappen van het ijs. Het bijbehorende belastingsmodel ziet er als volgt uit:



FIGUUR 5.4 : BELASTINGSMODEL BENADERING MEETGEGEVENS (YUE EN BI, 2000)

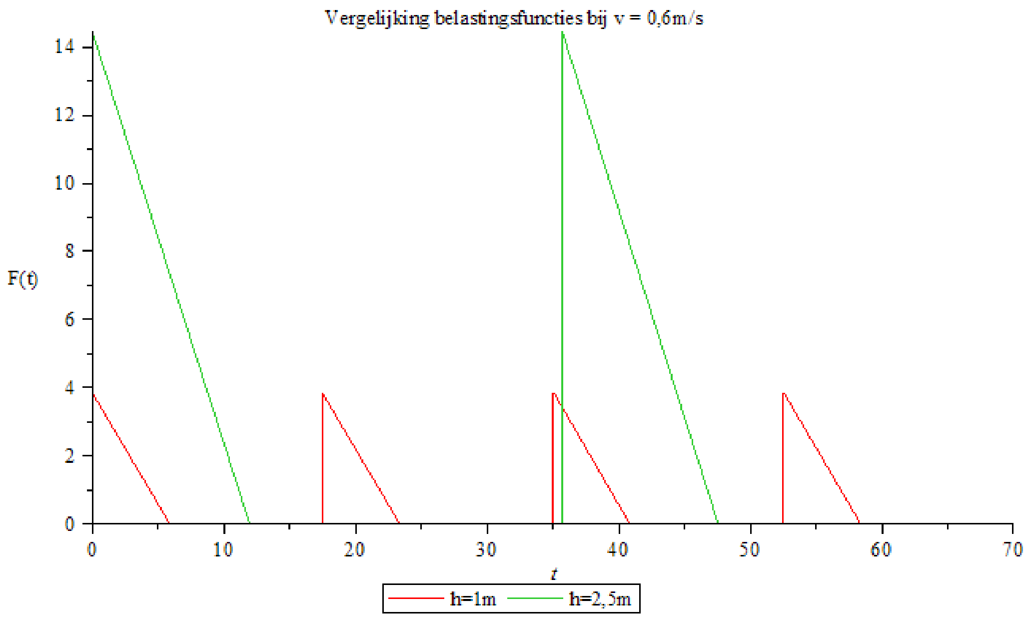
De interpretatie van dit belastingsprofiel is als volgt: het ijs breekt relatief plots bij de belasting F_0. Het afgebroken stuk plaat wordt tijdens periode τ langzaam afgevoerd/weggedrukt waarna de belasting volledig wegvalt. Vervolgens begint de nieuwe belastingsperiode. In werkelijkheid zijn de vormen van de individuele krachtimpulsen sterk variërend en afhankelijk van tangentiele en radiale scheurtjes in de ijsplaat. Hiervoor wordt in geavanceerde belastingsmodellen een *random factor* meegerekend, omdat de details van dit proces nog niet bekend zijn.

5.3.2 BELASTINGSPROFIELEN VOOR VERSCHILLENDE IJSDIKTES EN SNELHEDEN

Aan de hand van de breukbelasting (F), de breukafstand (x_{crit}) en de drijfsnelheid van de ijsplaat kan het belastingsmodel nu worden gedefinieerd. De volgende eigenschappen kunnen worden toegewezen aan het model in paragraaf 5.3.1:

Belastingsparameters		F [MN]	N [MN]	V [MN]	T [s]	τ [s]
h=1 m	v=0,2 m/s	3,85	2,72	2,72	52,5	17,5
	v=0,4 m/s	3,85	2,72	2,72	26,3	8,8
	v=0,6 m/s	3,85	2,72	2,72	17,5	5,8
h=2,5 m	v=0,2 m/s	14,5	10,2	10,2	104	34,7
	v=0,4 m/s	14,5	10,2	10,2	52	17,3
	v=0,6 m/s	14,5	10,2	10,2	35,7	11,9

Voor een snelheid van 0,6 $^{m}/_{s}$ kan de dynamische belasting als volgt weergeven worden [MN] (voor de programmering van de visualisatie zie Bijlage 5):



FIGUUR 5.5 : BELASTINGSFUNCTIES VOOR V=0,6M/S

Hierbij is de gemiddelde totale ijslast gelijk aan $(\frac{F}{2}\tau)/T$

Voor de horizontale en verticale component geldt respectievelijk $N_{gem}=(\frac{N}{2}\tau)/T$ en $V_{gem}=(\frac{V}{2}\tau)/T$.

5.3.3 FOURIERBENADERING VOOR HET SPECTRUM VAN BELASTINGSFREQUENTIES

Met een Fourierserie is het mogelijk om de discontinue belastingsfunctie om te schrijven naar een reeks (harmonische) sinussen en cosinussen met een verschillende amplitude en periode. Het doel van deze Fourierbenadering is om de bijdrage van de grondfrequenties en meervouden hiervan in kaart te brengen in paragraaf 5.5 en 5.6.2.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

$$met:$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$f(t):$$

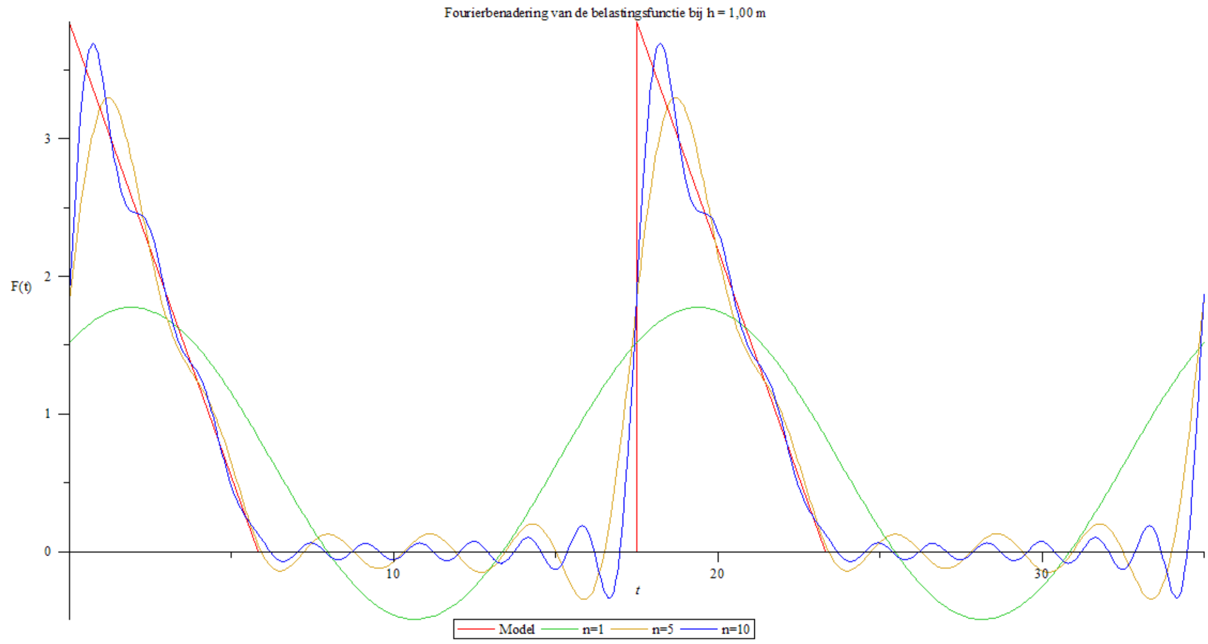
$$F_0(1-\frac{3}{T}t) \qquad voor \qquad \leq t \leq \frac{1}{3}T$$

$$0 \qquad voor \qquad \frac{1}{3}T \leq t \leq T$$

Uiteindelijk is het resultaat van de Fourierseries van de belastingsfunctie:

$$f_n(t) = \frac{F_0}{6} + \frac{F_0}{2}\left(\left(\frac{3-3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \left(\frac{2\pi n - 3\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2}\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

En dit leidt tot de benadering die in figuur 5.6 is weergeven hierbij is als uitgangspunt een dikte van 1 meter en een snelheid van 0,6 m/s gebruikt (zie paragraaf 5.3.2). De achterliggende functies zijn terug te vinden in Bijlage 5.



FIGUUR 5.6 : FOURIERBENADERING VAN DE BELASTINGSFUNCTIE VOOR N=1, N=5 EN N=10 (H=1M V=0,6 M/S)

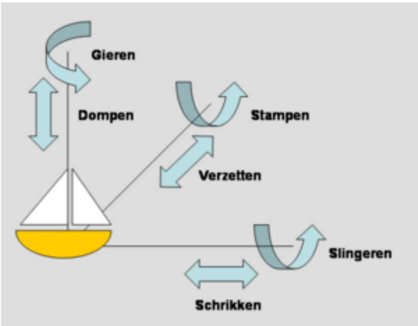
Zichtbaar is dat bij n=10 de benadering al dicht nadert tot de echte modelbelasting. Toch verschilt deze curve maar weinig van de n=5 curve. De invloed van de sinusoïden van de eerste vijf ordes is veruit het grootst. Deze invloed wordt vervolgens in kaart gebracht door de amplitude van de n^{de} orde term te relativeren aan de totale amplitude van de belasting uit het model. In de onderstaande tabel zijn de wegingen en frequenties van de eerste vijf ordetermen weergeven.

Orde	Weging	Frequentie bij v=0,6 m/s		
		Algemeen	Bij h=1m	bij h=2,5 m
1	0,83F_0	ω_0	0,057	0,028
2	0,50F_0	2ω_0	0,114	0,056
3	0,23F_0	3ω_0	0,171	0,084
4	0,20F_0	4ω_0	0,229	0,112
5	0,14F_0	5ω_0	0,286	0,140

De afname van de relatieve invloed van de n^{de} orde term is zoals is weergeven afnemend.

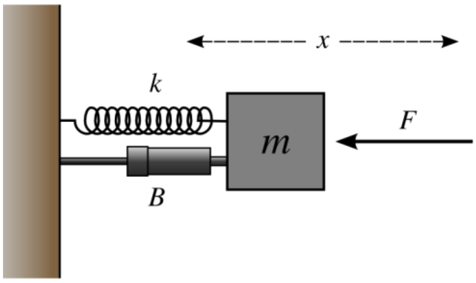
5.4 EIGENFREQUENTIE VAN EEN SPARPLATFORM

In de volgende paragraven wordt aandacht besteedt aan het benaderen van de veerstijfheid van het Sparplatform dat in Bijlage 1 is beschreven. Hierbij wordt ingegaan op de veerstijfheid in de verticale richting. Alleen het bewegingsfenomeen "dompen" wordt op deze manier behandeld waarbij andere fenomenen zoals weergeven in figuur 5.7 als "schrikken", "verzetten", "rollen", "stampen" en "gieren" buiten beschouwing worden gelaten.



FIGUUR 5.7 : MOGELIJKE BEWEGINGEN VAN EEN VAARTUIG OP ZEE BRON: HTTP://NL.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/SCHEEPSBEWEGINGEN (GERAADPLEEGD 13-05-2013)

Hierbij zal het volgende massaveersysteem als model worden gebruikt:



FIGUUR 5.8 : MODEL GEDEMPT MASSA VEERSYSTEEM BRON: HTTPS://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/DAMPING (GERAADPLEEGD 13-05-2013)

Hierbij stelt "k" de veerstijfheid voor van het systeem, welke bestaat uit een aandeel van het opdrijvend effect van het water, en het verend effect van de kettinglijnen. "B" zal voortaan "C" worden genoemd en is de dempingscoëfficiënt. Deze wordt vertegenwoordigd door viskeuze en traagheidsgerelateerde effecten van het zeewater.

Vervolgens bestaat de massa van het systeem uit de massa van het platform, en de massa van het met het platform meebewegende water. In plaats van "x" is in dit verslag de plaatsparameter "y" gekozen voor de verplaatsing van het systeem in verticale richting. Voor dit gedempte massa veersysteem geldt de volgende algemene (harmonische) vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{C}{m}\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}y=0$$

Waarbij ω_0 de eigenfrequentie is.

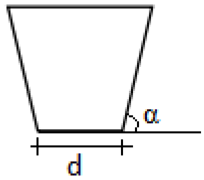
5.4.1 VEERSTIJFHEID PLATFORM OP BASIS VAN OPDRIJVING

Op basis van het Archimedes effect kan de veerstijfheid van het platform worden bepaald per eenheid van breedte. Er geldt: "De opwaartse kracht die een lichaam in een vloeistof of gas ondervindt is even groot als het gewicht van de verplaatste vloeistof of het gas".

$$\Delta F = \Delta h * b * l * \rho_{zw}$$

Het probleem is iets complexer doordat de breedte van de "dobber" variabel is met het verloop van de hoogte (zie figuur 5.9):

$$d = d_0 + \frac{2\Delta h}{\tan\alpha}$$



FIGUUR 5.9 : DWARSDOORSNEDE MODEL PLATFORM

Invullen geeft:

$$\Delta F = \Delta h * (d_0 + \frac{2\Delta h}{\tan\alpha}) * b * \rho_{zw}$$

Hieruit volgt:

$$k_{unit} = d * \rho_{zw} = (d_0 + \frac{2\Delta h}{\tan\alpha}) * \rho_{zw}$$

Met d_0 = 4 m, ρ_{zw}= 10280 $^N/_{m^3}$ en α = 45^0 geeft dit:

$$k_{unit} = 10280(15+2\Delta h)\ ^N/_{m^2}$$

5.4.2 VEERSTIJFHEID OP BASIS VAN OPDRIJVING EN KETTINGLIJNEN

De veerstijfheid van het Sparplatform bestaat naast het aandeel afkomstig van het opdrijvende vermogen van de "dobber" ook uit het aandeel van de veerstijfheid van de kettinglijnen. Deze veerstijfheid kan worden gevonden door een dergelijke kettinglijn te modeleren in Maple® zie hiervoor Bijlage 4. Voor de horizontale oplegreactie geldt de volgende differentiaalvergelijking:

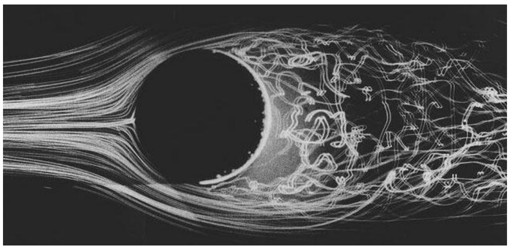
$$T\frac{d^2y}{dx^2} = q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Hierbij is q niet zomaar een verdeelde belasting. Er moet namelijk onderscheid worden gemaakt tussen een normale q-last die een bepaalde kracht voorstelt per afgelegde horizontale lengte, en de belasting van het eigen gewicht van de ketting die een kracht vertegenwoordigd langs de lengte van de ketting. Voor de verdeelde belasting en randvoorwaarden moeten getallen aangenomen die overeenkomen met de praktijk. Er wordt uitgegaan van condities in de Beaufortzee, waar meer en meer energiewinning plaatsvindt. Het gewicht van de ketting onder water wordt gesteld op 277$^{kg}/_{m}$. De volgende randvoorwaarden worden aangenomen (m):

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0m$$
$$x = 10 \quad \rightarrow \quad y = -1008m$$

Een schatting voor de horizontale kracht T op de kettinglijn kan worden verkregen door de krachten van de stroming en de krachten van de ijsplaat te sommeren. Het stromingsbeeld is weergeven in figuur 5.10. De waarden uit paragraaf 3.2.2 gelden als uitgangspunt. Daarnaast gelden de volgende ijscondities:

$h_{ijs} =$ 1.0 meter
$v_{ijs} =$ 0.6 $^m/_s$

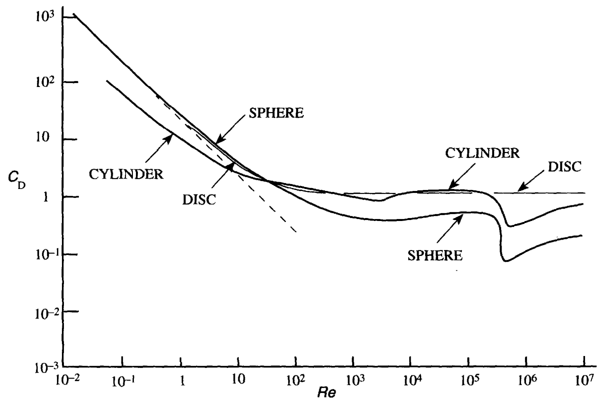


FIGUUR 5.10 : TURBULENTE STROMING LANGS EEN CILINDER BRON: HTTP://WWW.VIDIX.SE/FLUID_MECH.HTM (GERAADPLEEGD 14-05-2013)

Vervolgens kan met deze gegevens het Reynoldsgetal worden bepaald:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathbf{v} D_H}{\mu} = \frac{\mathbf{v} D_H}{\nu}$$

In dit geval is Re = 6.2. Uit het volgende figuur (Boss and Jumars, 2003) is de weerstandscoëfficient af te leiden voor een cilinder (c_D=6).



FIGUUR 5.11 : WEERSTANDSCOËFFICIENT VOOR VERSCHILLENDE VORMEN ALS FUNCTIE VAN RE (BOSS AND JUMARS, 2003)

Deze weerstandscoëfficient (c_D) is onderdeel van de volgende uitdrukking voor F (Battjes 2002):

$$F_w = c_D \frac{1}{2} \rho v^2 A$$
$$F_w = 6 * \frac{1}{2} 1028 * 2^2 * 120 * 30 = 44,41 \text{ MN}$$

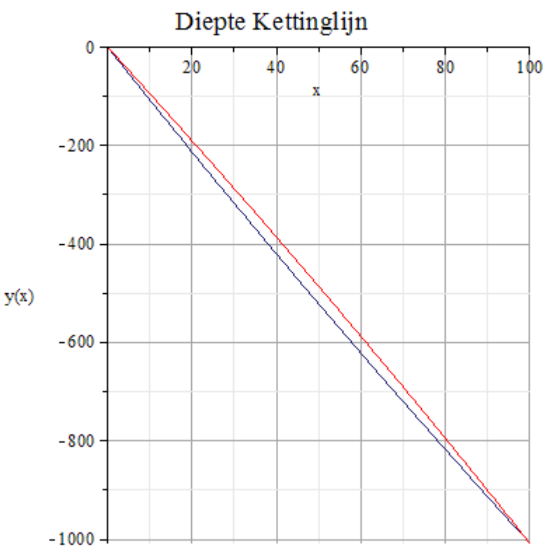
De horizontale ijsbelasting bedraagt gemiddeld $(\frac{N}{2}\tau)/T$ (paragraaf 5.3.2). Voor een ijsplaat van 1 meter en een snelheid van 0,6 $^m/_s$ komt de gemiddelde ijslast neer op F_{ijs} = 3,02 MN.

De gemiddelde horizontale kracht op een ketting wordt bepaald door de horizontale krachten op het platform te delen door het aantal actieve kettinglijnen. Bij een platform dat rondom is aangespannen door kettingen is de helft van de kettingen actief bij een eenzijdige horizontale belasting. De rest van de kettingen zal slap hangen. Dit komt neer op T = $\frac{F_w + F_{ijs}}{n_{act}} = \frac{44,41+3,02}{24} =$ 1976,3 kN. Dit gegeven is het laatste wat nodig is om de hiervoor genoemde differentiaalvergelijking op te lossen.

Vanuit de modellering in Maple® (Bijlage 4) worden twee manieren van het verlopen van de kettinglijn voorgesteld. Één daarvan lijkt als het ware op te drijven, maar de andere geeft de juiste oplossing (zie figuur 5.12). De tweevoudigheid van de oplossing van de differentiaalvergelijking heeft te maken met de randvoorwaarden die worden opgelegd aan de algemene oplossing van het systeem:

```
               cosh(_C1 qT + qT x)
      y(x) = ------------------- + _C2
                      qT
```

Wanneer C1 en C2 als randvoorwaarden worden gekozen, volgt een vergelijking van de vorm cosh(x) = B. De oplossing hiervoor is tweevoudig omdat de horizontale lijn twee keer snijdt met de cosh functie. Hierbij volgt dat de oplossing in het blauw in figuur 5.12 de juiste curve voorstelt (lengtemaat in meters).



FIGUUR 5.12 : VERLOOP KETTINGLIJN

Het beeld wordt gegeven van een strakgetrokken kabel die maar beperkt doorzakt onder het eigen gewicht.

De verticale component van de spankracht kan nu bepaald worden door:

$$\frac{dy(0)}{dt} = \left|\frac{V}{T}\right|$$

De veerconstante van een enkele kabel kan worden gevonden door deze formule toe te passen voor twee verschuivingen van de randvoorwaarde bij x=0. Namelijk een verschuiving van +0,5 meter en –0,5 meter. Het verschil van de verticale spankracht bij deze twee verschuivingen gedeeld door het verplaatsingsverschil van 1 meter is bij benadering gelijk aan de veerconstante voor de kabel.

Er geldt: T= 1850,4 kN

Voor x=0 → y=+0,5 meter geldt:
$\frac{dy(0)}{dt}$ = -9,391271622
Zodat V_+= 9,39*1976,3 = 18,56 MN

Voor x=0 → y=-0,5 meter geldt:
$\frac{dy(0)}{dt}$ = -9.381952622
Zodat V_-= 9,38*1976,3 = 18,54 MN

Hieruit volgt:

ΔF =	$n(V_+ - V_-)$ =	24(18,56-18,54) =	442 kN
$k_{ketting} = \frac{\Delta F}{\Delta h}$ =		$\frac{442}{1}$ =	442 $^{kN}/_{m}$

De totale veerstijfheid van het Sparplatform kan nu worden benaderd door de twee aandelen bij elkaar op te tellen. Voor het opdrijvend effect geldt de benadering:

$$k_{water} = k_{unit}[gem]*b_{opp}$$

Hierbij is k_{unit} de gemiddelde veerstijfheid per meter breedte en b is de breedte van het platform aan het wateroppervlak (gelijk aan de diepte in y-richting aan het oppervlak).

$$k_{water} = (10280*15)*15 = 2313\ {}^{kN}/_{m}$$

De totale veerstijfheid van het platform is dus:

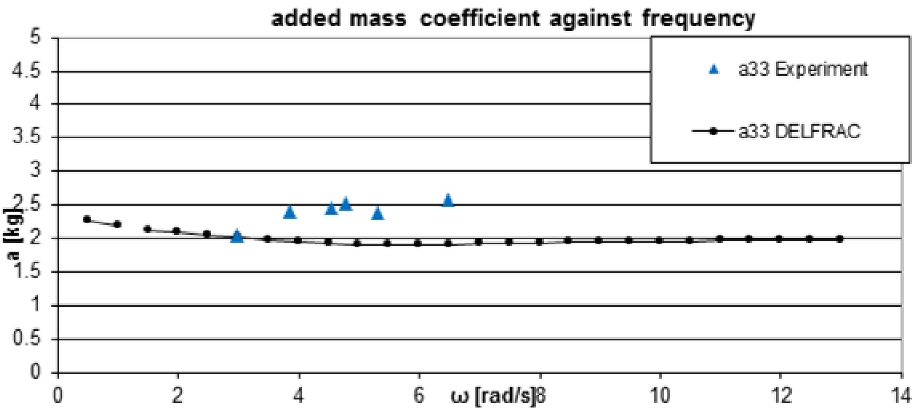
$$\mathbf{K_{tot}=k_{water}+k_{ketting} = 2,313 + 0,442 = 2,76\ {}^{MN}/_{m}}$$

Hierbij is de drijvende kracht van de grootste invloed (84%) en de spankracht van de kettinglijn van kleinere invloed (16%).

5.4.3 MASSA VAN HET MASSA-VEERSYSTEEM

De responsie van een sparplatform op een bepaalde frequentie is afhankelijk van de meewerkende massa in het massa-veersysteem. Deze massa bestaat behalve uit de massa van het platform zelf (10,800 ton zie paragraaf 3.2.2), ook uit de massa van het water dat meebeweegt tijdens excitatie van het platform.

Om de watermassa te bepalen worden meetgegevens van een schaalproef opgeschaald naar de schaal van het Sparplatform in de realiteit. Voor de meetgegevens geldt de volgende grafiek:



FIGUUR 5.13 : MEEWERKENDE WATERMASSA BIJ VERSCHILLENDE FREQUENTIES SCHAALPROEF (PETER NAAIJEN 2013)

Hierbij representeert de zwarte lijn ('DELFRAC') de potentiaal theorie. In deze theorie worden viskeuze effecten niet meegerekend. Vandaar dat de experimentele data (wel viskeus effect) hoger uitvallen. De toegevoegde watermassa is zwak afhankelijk van de frequentie van de dompelbeweging.

In deze grafiek wordt de frequentie uitgedrukt in de eenheid ${}^{rad}/_{s}$. Hierbij is 1Hz gelijk aan 2π ${}^{rad}/_{s}$. Om de grafiek af te kunnen lezen wordt allereerst de orde grootte van de frequentie bepaald. Hiervoor wordt de grondfrequentie van de belasting van een ijsplaat bij een snelheid van 0,6 ${}^{m}/_{s}$ genomen (zie paragraaf 5.3.2). De frequentie is voor een één meter dikke ijsplaat 0,057 Hz, wat neerkomt op 0,358 ${}^{rad}/_{s}$. De grondfrequentie van een 2,5 meter dikke ijsplaat met een snelheid van 0,6 ${}^{m}/_{s}$ komt neer op 0,176 ${}^{rad}/_{s}$.

Voor de schaalproef geldt (zie figuur 5.13) bij een ijsplaat van één meter dik met een snelheid van 0,6 $^{m}/_{s}$: m_{water} = 2,2 kg
Voor een 2,5 meter dikke ijsplaat bij 0,6 $^{m}/_{s}$ geldt: m_{water} = 2,3 kg.
Gemiddeld komt dit neer op 2,25 kg.

Om dit resultaat op te schalen naar de orde van het sparplatform (Bijlage 1) wordt de schaalwet van Froude gebruikt. De voorwaarde van deze wet is dat het Froude getal van de proef (Model) gelijk moet zijn aan het Froude getal van de realiteit (Full scale).

$$\frac{U_M}{\sqrt{gL_M}} = \frac{U_F}{\sqrt{gL_F}} \quad \Rightarrow \quad U_F = U_M\sqrt{\frac{L_F}{L_M}} = U_M\sqrt{\lambda}$$

Vanuit dit principe zijn de volgende verbanden afgeleid (bron: http://www.ivt.ntnu.no/imt/courses/tmr7/lecture/Scaling_Laws.pdf geraadpleegd 08-06-2013):

Physical Parameter	Unit	Multiplication factor
Length	[m]	λ
Structural mass:	[kg]	$\lambda^3 \cdot \rho_F / \rho_M$
Force:	[N]	$\lambda^3 \cdot \rho_F / \rho_M$
Moment:	[Nm]	$\lambda^4 \cdot \rho_F / \rho_M$
Acceleration:	[m/s^2]	$a_F = a_M$
Time:	[s]	$\sqrt{\lambda}$
Pressure:	[Pa=N/m^2]	$\lambda \cdot \rho_F / \rho_M$

De verhouding in massa is in dit geval afhankelijk van een opschaling in het volume (3 dimensies). Vandaar kan de schaalfactor voor de meewerkende watermassa worden verkregen door de derde macht te nemen van de lengteverhouding tussen volle schaal en model schaal $(\frac{L_F}{L_M})$. Daarnaast is er nog een versterkend effect doordat op volle schaal het water (zeewater) een grotere dichtheid heeft als in de proef (zoet water). De dimensies van het proefmodel en het volle schaal model zijn als volgt:

Proef:
Diameter 0,20 m
Diepgang 0,40 m

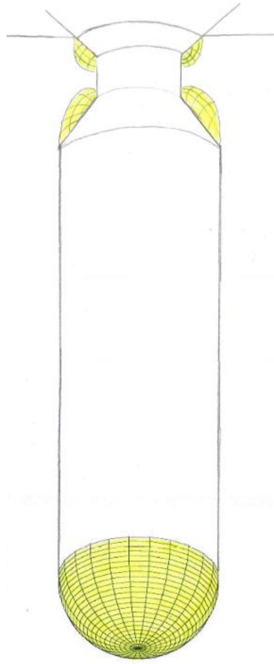
Volle schaal:
Diameter 30 m
Diepgang 120 m

Te zien is dat de verhouding tussen lengte en breedte van het proefmodel en het volle schaalmodel verschilt. Omdat dit de enige beschikbare meetgegevens zijn wordt ervan uitgegaan dat de lengte van het platform een kleine rol speelt en vooral de breedte van belang is. Langs de lengte spelen bij het fenomeen “dompen” vooral visceuze en wrijvingseffecten een rol. De breedtemaat daarentegen veroorzaakt een drukverloop. Als L_F en L_M wordt hierom de breedtemaat aangehouden zodat:

$$\lambda = \frac{L_F}{L_M} = \frac{30}{0{,}20} = 150$$

Vervolgens kan de meewerkende watermassa in de volle schaal berekend worden volgens:

$$\boldsymbol{m_{water} = m_{model}(\lambda)^3 \frac{\rho_F}{\rho_M} = 2{,}25(150)^3 \frac{1028}{1000} = 7806\ ton}$$



FIGUUR 5.14 : MEEBEWEGENDE WATERMASSA'S

Ter controle wordt de watermassa nogmaals ingeschat. Nu op basis van de aanname dat het volume water dat meedoet aan de veerbeweging zich manifesteert als een halve bol aan de onderkant van de "dobber" van het sparplatform. Deze bol heeft dezelfde diameter (30 m) als de cilindervormige "dobber" (zie figuur 5.14). De verwachting is dat de inschatting van de watermassa op basis van de halve bol lager uitkomt dan de opschaling van de proef. Dit komt doordat niet alleen de bol aan de onderkant van het platform zal meebewegen, maar door de conische vorm van het platform dicht bij het oppervlak zal er meer water worden meegenomen in de veerbeweging. Daarnaast spelen viskeuze- en wrijvingseffecten langs de lengte van de "dobber" een rol.

De watermassa wordt als volgt berekend:

$$\boldsymbol{m_{water} = \rho_{water}\frac{2}{3}\pi r^3 = 1028 * \frac{2}{3}\pi 15^3 = 7267\ ton}$$

Het klopt dus dat de gegevens uit de proef een vergelijkbare, maar hogere massa teweeg brengen dan de halve bol. De massa in het systeem wordt door het water met 72% verhoogd. Dit aandeel is zeer fors. De totale massa komt hiermee op **10.800+7.806 = 18.606 ton**

5.4.4 EIGENFREQUENTIE VAN EEN SPARPLATFORM

Nu de veerstijfheid en meewerkende massa van het model zijn benaderd kan volgens de volgende wet ook de eigenperiode worden bepaald.

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dit komt neer op een eigenperiode van T=$2\pi\sqrt{\frac{M_{pltf}+M_{water}}{k_{tot}}} = 2\pi\sqrt{\frac{10{,}8*10^6+7{,}806*10^6}{2.76*10^6}}$ = 16,31 s

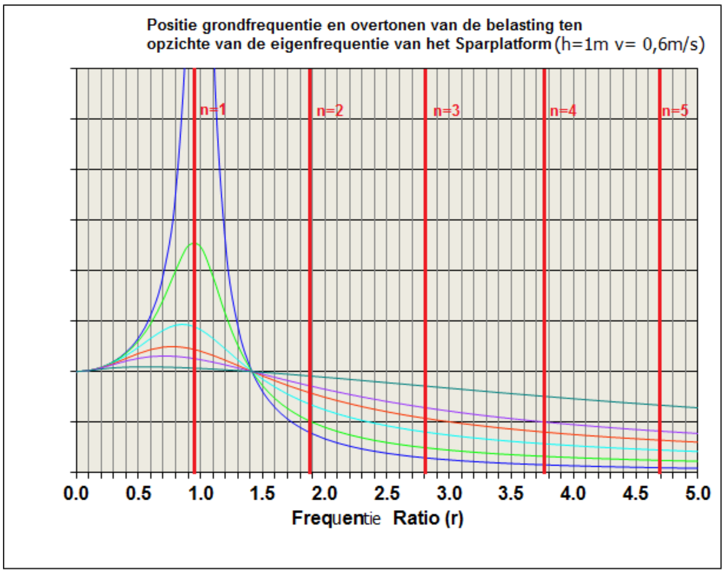
Vervolgens kan volgens onderstaand verband de eigenfrequentie worden bepaald.

$$f = \frac{1}{T}$$

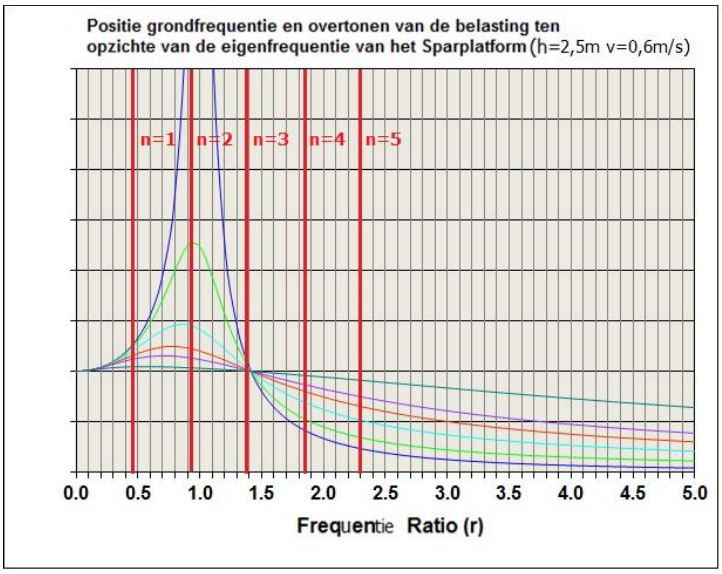
De eigenfrequentie van het platform is 0,061 Hz (0,383 rad/s).

5.5 VERGELIJKING EIGENFREQUENTIE PLATFORM EN BELASTINGSFREQUENTIES

Nu de eigenfrequentie van het platform bekend is, kunnen de verschillende aandelen van de belastingsfunctie hiermee worden vergeleken. Deze aandelen bestaan uit de n^{de} orde sinusoïden van de Fourierbenadering. Als de opgelegde belastingsfrequentie nadert tot de eigenfrequentie van het systeem, kunnen gevaarlijke situaties ontstaan.



FIGUUR 5.15 : FREQUENTIES T.O.V. EIGENFREQUENTIE H=1 M



FIGUUR 5.16 : FREQUENTIES T.O.V. EIGENFREQUENTIE H=2,5

Voor het overzicht worden de eigenschappen van de belastingsfuncties voor h=1m en h=2,5m nogmaals weergeven. Hierbij is V_0[1m] 2,72 MN en V_0[2,5m] 10,2 MN.

Orde	Weging	Frequentie bij v=0,6 m/s		
		Algemeen	Bij h=1m	bij h=2,5 m
1	0,83V_0	ω_0	0,057	0,028
2	0,50V_0	$2\omega_0$	0,114	0,056
3	0,23V_0	$3\omega_0$	0,171	0,084
4	0,20V_0	$4\omega_0$	0,229	0,112
5	0,14V_0	$5\omega_0$	0,286	0,140

Bij h=1m is met name de harmonische trilling van de eerste orde van sterke invloed. De frequentie van deze trilling is 93,4% van de eigenfrequentie (0,057 Hz). Afhankelijk van de dempingscoëfficiënt kan dit voor grote problemen zorgen. De overige termen zijn van kleine invloed.

In de werkelijkheid is de snelheid niet per definitie 0,6 m/s. Deze varieert namelijk. In het meest ongunstige geval valt de snelheid zo dat bij een ijsplaat van één meter dikte de basisfrequentie van de belasting overeenkomt met de eigenfrequentie van 0,061 Hz. De 2^e orde term zit dan op een frequentie die twee keer zo hoog is en de derde op een drie keer zo hoge frequentie enzovoorts. Dit is de meest kritieke situatie voor een 1 meter dikke ijsplaat en treedt op bij een snelheid van $F_{eig}*x_{crit[1m]}$ = 0,061*10,5 = 0,64 m/s. Deze snelheid is niet relevant, want deze valt buiten het domein van verwachtte snelheden voor ijsplaten. De situatie waar het sterkst mogelijke belastingsaandeel (de basisfrequentie) het dichts bij de eigenfrequentie ligt is maatgevend. Dit treedt in dit geval wel op bij een snelheid van 0,6 m/s.

Bij h=2,5m is met name de tweede orde term van grote invloed. Deze zit op 91,8% van de eigenfrequentie. Daarnaast zijn de effecten van de eerste en tweede orde term relatief groot. Deze worden vergeleken met een statische belasting vrijwel niet gedempt of versterkt. Doordat de basisfrequentie van de belasting lager is, liggen de boventonen van de hogere orde sinusoïden dichter bij elkaar. Dit betekend dat meerdere ordes een frequentie hebben die dicht in de buurt komt van de eigenfrequentie van het platform. Dit heeft als gevolg dat meerdere ordes een invloed hebben voor de dynamische excitatie van het systeem (zie paragraaf 5.6.2).

Omdat bij een ijsplaat van een dikte van 2,5 m ook geldt dat de frequentie van het meest gevaarlijke belastingsaandeel net *onder* de eigenfrequentie ligt, betekend dit dat een lagere snelheid van de ijsplaat geen versterkend effect heeft voor de dynamische belasting. Ook hier geldt dat de meest kritische belasting optreedt bij een snelheid van 0,6 m/s.

5.6 RESPONSIE VAN EEN SPARPLATFORM BIJ DYNAMISCHE IJSBELASTING

5.6.1 VERTICALE RESPONSIE BIJ STATISCHE BELASTING

De uitwijking bij statische belasting over de vertikaal wordt geheel opgelegd door de ijsplaat. Doordat de zee is bedekt met een ijslaag speelt golfexcitatie geen rol voor de verticale uitwijking. Ten gevolge van de ijsbelasting geldt:

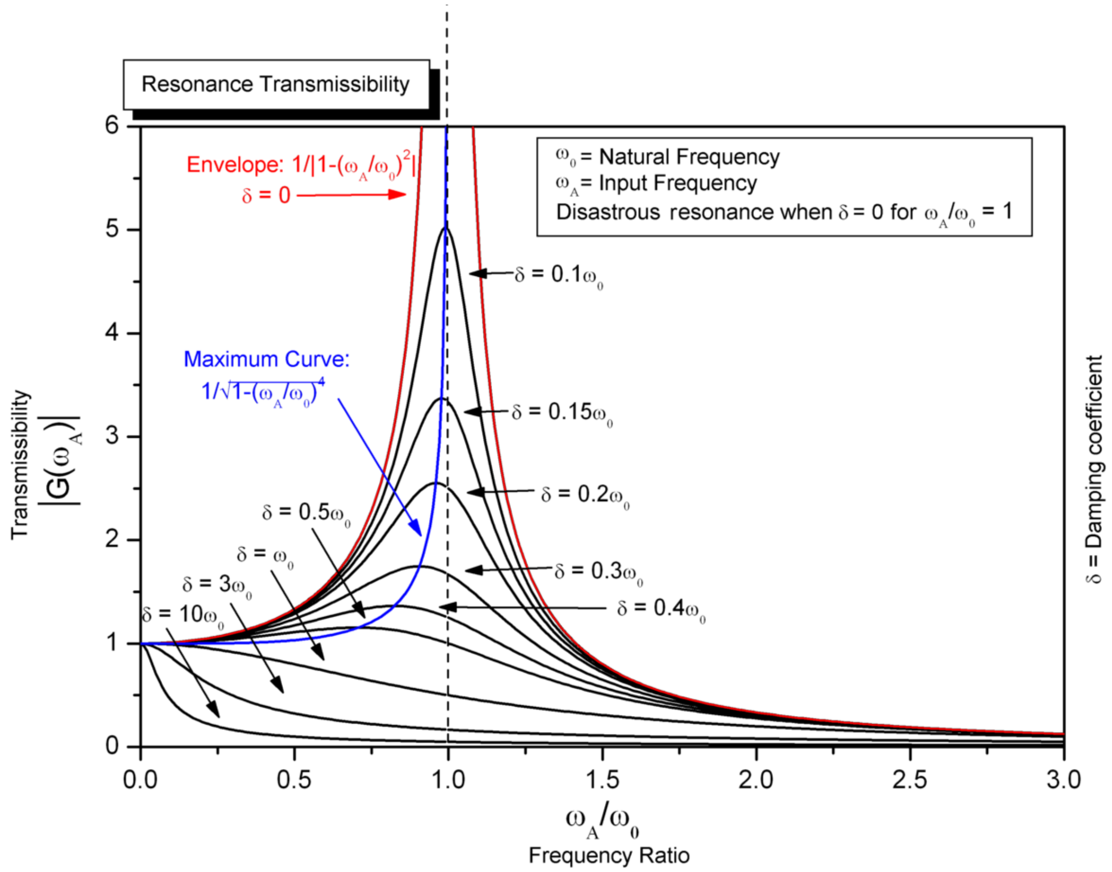
Voor h=1,0 m:
V_1 = 2,72 MN
$u_{1vs} = \frac{V_1}{k_{tot}} = \frac{12{,}9}{2{,}76} = 0{,}986$ m

Voor h=2,5 m:
V_1 = 10,2 MN
$u_{1vs} = \frac{V_1}{k_{tot}} = \frac{10{,}2}{2{,}76} = 3{,}696$ m

De verticale uitwijking zou dus al goed zichtbaar zijn zonder enige vorm van versterking door dynamische effecten. Hierbij moet in het achterhoofd worden gehouden dat deze (statische) uitwijkingen gelden voor de meest ongunstige materiaaleigenschappen van het ijs in combinatie met grote ijsdiktes.

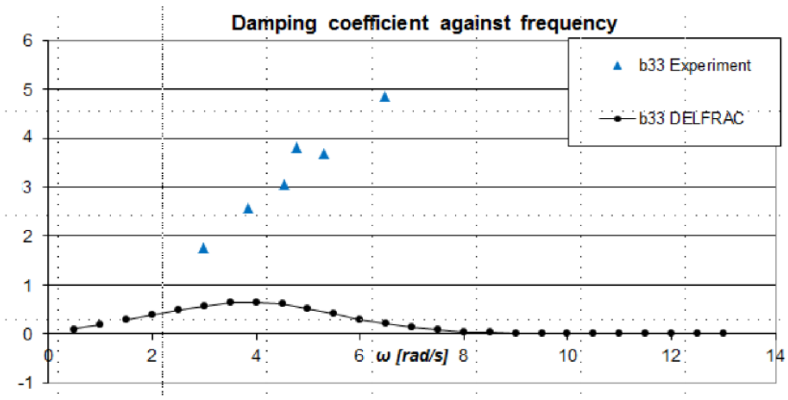
5.6.2 RESPONSIECURVE

Voor verschillende dempingsfactoren is voor de verhouding tussen de belastingsfrequentie en de eigenfrequentie van het platform het overdrachtsgetal weergeven in de onderstaande figuur.



FIGUUR 5.17 : OVERDRACHTSFUNCTIE GEDEMPT MASSA VEERSYSTEEM
BRON: [HTTPS://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/DAMPING](https://en.wikipedia.org/wiki/Damping) (GERAADPLEEGD 13-05-2013)

Het overdrachtsgetal G is gedefinieerd als de verhouding van de uitwijking bij dynamische belasting en de uitwijking bij een statische belasting $\frac{\hat{u}_p}{u_{stat}}$. De vorm van de overdrachtsfunctie is sterk afhankelijk van de dempingscoëfficiënt. Dit getal beschrijft alle krachten in het massa veersysteem die de oscillatie van het systeem doen afnemen. Om de dempingscoëfficiënt te bepalen worden meetgegevens van een schaalproef gebruikt om het gedrag in de realiteit te bepalen. Voor de meetgegevens geldt de volgende grafiek:



FIGUUR 5.18 : DEMPINGSCOËFFICIËNT BIJ VERSCHILLENDE FREQUENTIES SCHAALPROEF (PETER NAAIJEN 2013)

Hierbij wordt opnieuw gekeken naar de effecten van een ijsplaatdikte van respectievelijk één en 2,5 meter op de verticale excitatie van het platform. Voor elk van de diktes wordt de belastingsfrequentie van het meest actieve belastingsaandeel aangenomen als bewegingsfrequentie van het systeem. Deze treedt bij een plaatdikte van één meter op bij n=1 en bij een frequentie van 0,057 Hz (0,358 rad/s). Bij een plaatdikte van 2,5 meter geldt n=2 en f=0,056 Hz (0,352 rad/s). Dit leidt omdat deze frequenties zo dicht bij elkaar liggen tot de volgende (enkele) dempingscoëfficiënt: $\mathbf{b_{,schaal}} = \boldsymbol{\delta_{schaal}} \cong \mathbf{0,1}$.

Dit is de dempingscoëfficiënt op basis van de potentiaaltheorie voor de schaalproef. Literatuur (Chakrabarti, S. 2000) geeft aan dat het schaaleffect van de dempingscoëfficiënt zeer klein is. Dus de dempingscoëfficiënt uit het model kan over genomen worden naar het geval van volle schaal. Dit geeft vervolgens: $\boldsymbol{\delta \cong 0,1 * \frac{0,383}{0,383} = 0,26\ \omega_0}$.

Nu de dempingscoëfficiënt bekend is, is de overdrachtsfunctie gedefinieerd. Als volgt kan voor elk van de belastingsaandelen uit het spectrum van de Fourier benadering van paragraaf 5.3.3 de uitwerking op de uitwijking van het platform worden bepaald. Elk van deze aandelen wordt gekenmerkt door zijn eigen belastingsfrequentie en heftigheid. Hierbij is de oorzaak van het uitdempende effect van hogere orde termen van de belastingsfunctie tweeledig: de hogere ordetermen kennen een hogere frequentie, welke verder weg ligt van de eigenfrequentie van het platform en een kleiner overdrachtsgetal oplevert, daarnaast heeft deze hogere frequentie tot gevolg dat de dempingscoëfficiënt hoger is.

Voor een plaatdikte van één meter geldt:

Orde	**Weging statisch**	**Weging dynamisch**	**Frequentie bij v=0,6 m/s**		
			Algemeen	Bij h=1m	ω_A/ω_0
1	$0,83V_0$	$1,69V_0$	ω_A	0,057	0,93
2	$0,50V_0$	$0,16V_0$	$2\omega_A$	0,114	1,87
3	$0,23V_0$	$0,03V_0$	$3\omega_A$	0,171	2,80
4	$0,20V_0$	$0,02V_0$	$4\omega_A$	0,229	3,75
5	$0,14V_0$	$0,01V_0$	$5\omega_A$	0,286	4,69

Volgens de regels van superpositie geldt voor de maximale uitwijking $u_{max} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. In het geval van een continue ijsplaat met een dikte van één meter geldt dan:

$u_1 = \frac{V_0 * 1,69}{k_{tot}} = \frac{2,72*10^6*1,69}{2,76*10^6} = 1,67$ m

$u_2 = \frac{2,72*10^6*0,16}{2,76*10^6} = 0,16$ m

$u_3 = \frac{2,72*10^6*0,03}{2,76*10^6} = 0,03$ m

$u_4 = \frac{2,72*10^6*0,02}{2,76*10^6} = 0,02$ m

$u_5 = \frac{2,72*10^6*0,01}{2,76*10^6} = 0,01$ m

Hieruit volgt $u_{max} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cong 1,89$ m

Voor een plaatdikte van 2,5 meter geldt:

Orde	Weging statisch	Weging dynamisch	Frequentie bij v=0,6 m/s		
			Algemeen	Bij h=2,5m	ω_A/ω_0
1	0,83V_0	1,02V_0	ω_A	0,028	0,46
2	0,50V_0	1,00V_0	2ω_A	0,056	0,92
3	0,23V_0	0,21V_0	3ω_A	0,084	1,38
4	0,20V_0	0,06V_0	4ω_A	0,112	1,84
5	0,14V_0	0,03V_0	5ω_A	0,140	2,30

In het geval van een continue ijsplaat met een dikte van 2,5 meter geldt dan:

$u_1 = \frac{V_0 * 1{,}02}{k_{tot}} = \frac{10{,}2*10^6*1{,}02}{2{,}76*10^6} = 3{,}77$ m

$u_2 = \frac{10{,}2*10^6*1{,}00}{2{,}76*10^6} = 3{,}70$ m

$u_3 = \frac{10{,}2*10^6*0{,}21}{2{,}76*10^6} = 0{,}78$ m

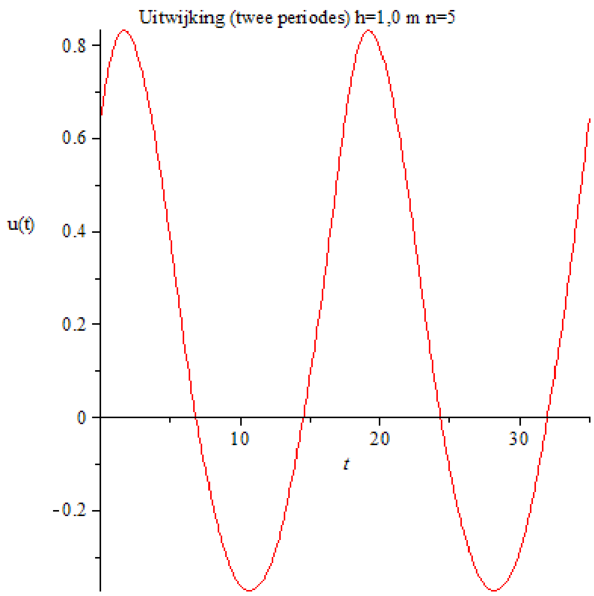
$u_4 = \frac{10{,}2*10^6*0{,}06}{2{,}76*10^6} = 0{,}22$ m

$u_5 = \frac{10{,}2*10^6*0{,}03}{2{,}76*10^6} = 0{,}11$ m

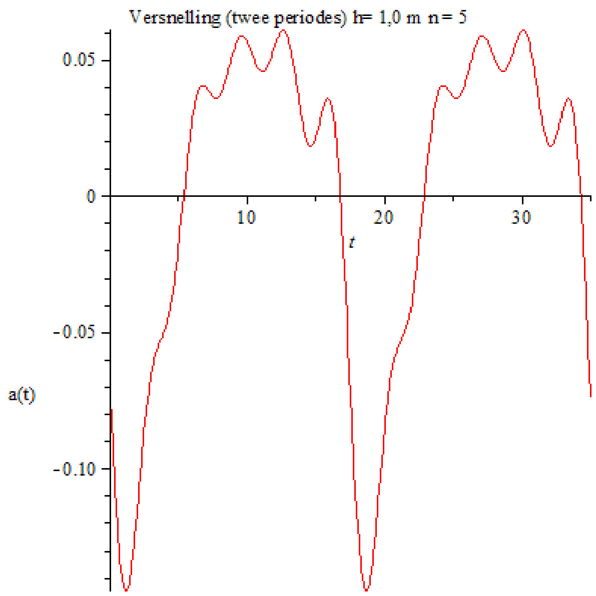
Hieruit volgt $u_{max} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cong 8{,}58$ m

5.6.3 BENADERING UITWIJKING EN ACCELERATIE VOOR VERSCHILLENDE IJSDIKTES

Op de fourierbenadering van de belastingsfunctie uit paragraaf 5.3.3 kan voor de eerste vijf ordes de dynamische weging van de overdrachtsfunctie worden toegepast. Op deze manier is het mogelijk om de uitwijking en versnelling (en snelheid; zie voor de berekening Bijlage 6) te weergeven voor de vijfde orde benadering. Voor een ijsdikte van één meter gelden de volgende grafieken (eenheden meters en seconden):



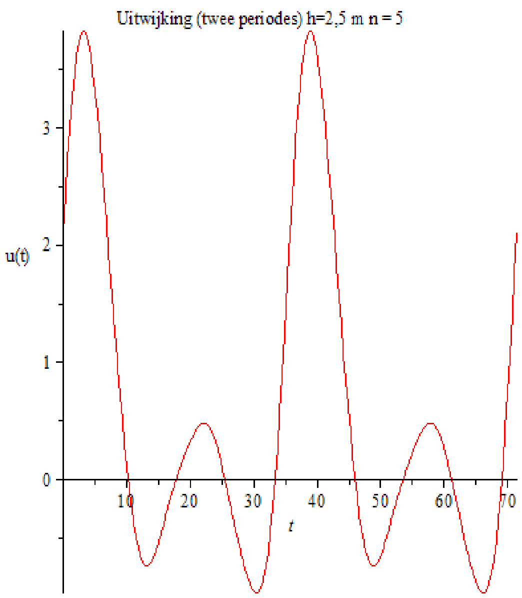
FIGUUR 5.19 : UITWIJKING H = 1,0 M



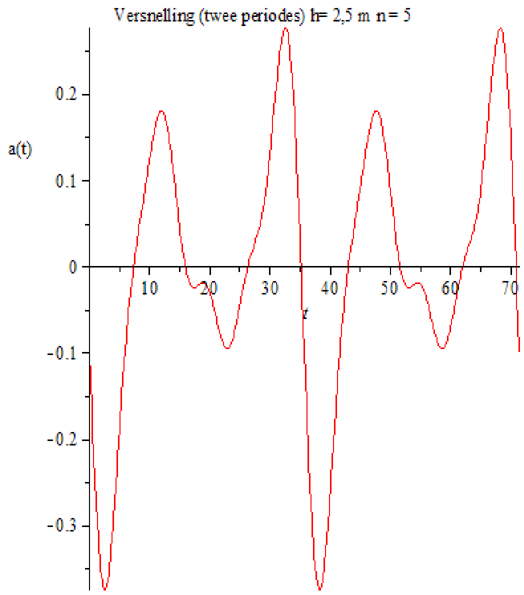
FIGUUR 5.20 : VERSNELLING H=1,0 M

Te zien is dat (zoals de tabel in paragraaf 5.6.2 doet vermoeden) de grondtoon dominant is voor de bepaling van de uitwijking. Bij de versnelling spelen de hogere ordes een grotere rol doordat de termen van de hogere ordes in de formule worden gedifferentieerd. Differentiëren van een hogere frequentie van de term van een hogere orde zorgt voor een grotere factor voor deze term. Dit zorgt voor een sterkere aanwezigheid in het versnellingsprofiel. De maximale versnelling is hierbij 0,035 m/s^2.

Voor een ijsdikte van 2,5 meter gelden de volgende grafieken:



FIGUUR 5.21 : UITWIJKING H = 2,5 M

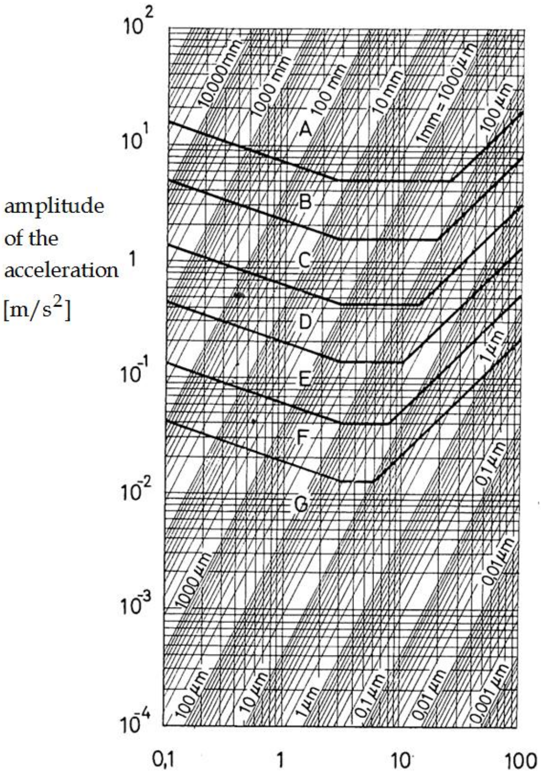


FIGUUR 5.22 : VERSNELLING H = 2,5 M

Te zien is dat eerst en tweede orde term beide sterk de eigenschappen van de uitwijkingsfunctie bepalen. Ook hier zijn de invloeden van de hogere ordes op de versnelling groter. De maximale versnelling is 0,37 m/s^2. Zoals verwacht kan worden zijn de negatieve effecten van een 2,5 meter dikke ijsplaat groter dan die van één meter: de uitwijking is 4,5 keer groter en de maximale versnelling is meer dan 10 keer zo groot.

5.6.4 INVLOED OP DE MENS

Niet de uitwijking van het platform in absolute zin, maar met name de versnelling van het platform onder ijsbelasting kan leiden tot ondragelijke arbeidsomstandigheden op het platform. Het volgende figuur komt van een publicatie van Van Koten H. en Hoogenboom P. over trillingen van funderingen van machines, en geeft aan hoe onaangenaam een trilling door de mens wordt ervaren. De term op de horizontale as is frequentie in Hertz.



	perception	acceptability in buildings	structural effects	examples
A	very unpleasant	not acceptable	danger of collapse	- earthquake
B	unpleasant	not acceptable	local damage	- emergency braking of a car
C	strongly noticeable	hardly acceptable	cracks in masonry	- in a tram or elevator
D	well noticeable	only rough work	small cracks	- start of seasickness
E	noticeable	shortly in rooms	no influence on building	
F	hardly noticeable	acceptable	no influence	
G	not noticeable			

FIGUUR 5.23 : EFFECT TRILLINGSVARIABELEN OP PERCEPTIE MENS (VAN KOTEN, HOOGENBOOM)

Bij een ijsbelasting door een ijsplaat van één meter geldt een maximale versnelling van $3{,}5*10^{-2}$ m/s^2 en een basisfrequentie van $5{,}7*10^{-2}$ Hz. Hiermee valt deze belasting in categorie F, waarbij werkzaamheden op het platform niet worden verstoord.

Bij een ijsbelasting door een ijsplaat van 2,5 meter dik geldt een versnellingsamplitude van $3{,}7*10^{-1}$ m/s^2 en een basisfrequentie van $2{,}8*10^{-2}$ Hz. De belasting van een 2,5 meter dikke ijsplaat valt in categorie E. Hierbij merkt men op het platform de effecten van de belasting maar is er nauwelijks hinder. Toch beweegt het platform met een maximale amplitude van meer dan 8 meter heen en weer.

6. AANBEVELINGEN

Voor het opstellen van dit rapport is er kennis genomen van vier verschillende bezwijkmechanismen voor plaatijs. Vanuit literatuurstudie is bekend dat bezwijken volgens “bending mode” veruit de laagste belastingen oplevert. Om deze reden is uitgegaan van het sparplatform uit Bijlage 1 voor het opstellen van het model in Maple® (Bijlage 2). Dit type platform maakt slim gebruik van een hellend oppervlak aan het wateroppervlak waar de ijsbelasting zich concentreert, welke het aandrijvende ijs in bending mode forceert.

De bevindingen die aan de hand van de modelering van belastingen van ijsplaten om een dergelijk platform zijn verkregen worden als volgt gepresenteerd. Vervolgens worden de conclusies van dit werkstuk en aanbevelingen gepresenteerd.

6.1 BEVINDINGEN

6.1.1 INVLOED VAN DE HELLING AAN HET OPPERVLAK

Vanuit de modellering in Maple® blijkt dat de invloed van de helling van de offshore constructie op de manifestatie van ijslasten zeer groot is. Wordt de helling te groot gekozen, dan zal het ijs zelfs bezwijken volgens “mixed-mode” waarbij veel hogere belastingen ontstaan. Daarnaast wordt duidelijk dat de ijsplaat onderworpen dient te worden aan grote verticale verplaatsingen eer deze uiteindelijk bezwijkt. Verder onderzoek zal moeten uitwijzen wat deze bezwijkvoorwaarde betekent voor de benodigde hoogte van de helling.

6.1.2 INVLOED VAN DE BELASTINGSFREQUENTIE

De breukafstand is met name afhankelijk van de dikte van de ijsplaat waaraan het platform onderworpen wordt. De breukafstand is mede met de snelheid van de ijsplaat bepalend voor de belastingsfrequentie van het ijs. En hiermee bepalend voor de invloed die de belasting heeft op de dynamische uitwijking van het platform. Dikkere ijsplaten hebben lagere belastingsfrequenties tot gevolg. Dit betekent dat de boventonen (sinusoïden van hogere frequenties welke de belastingfunctie benaderen) van de belastingsaandelen in het frequentiespectrum dichter bij elkaar liggen. Bij lagere frequenties is de kans dat meerdere (boven)tonen dicht bij de eigenfrequentie van het platform liggen. Dit betekent dat voor belastingsfuncties met lagere frequenties (dikkere ijsplaten) meerdere ordes sinusoïden een versterkte dynamische uitwerking hebben op de uitwijking van het platform. Boven het feit dat dikkere ijsplaten een hogere ijslast tot gevolg hebben, kent de belasting van dikkere platen een relatief sterker dynamisch opzwepend effect, welke relatief grotere uitwijkingen en versnellingen van het platform tot gevolg heeft.

6.1.2 CONCLUSIES

De volgende conclusies kunnen worden getrokken aan de hand van de modellering van het sparplatform in Bijlage 1:

- Het meest voordelige bezwijkmechanisme voor plaatijs is “buiging”, in de realiteit treedt dit mechanisme echter vaak op in combinatie met “mixed-mode” bezwijken.
- De bijdrage van tweede en hogere orde effecten van het belastingsmechanisme op het bezwijkgedrag van een ijsplaat is verwaarloosbaar.
- De intensiteit van de ijsbelasting
    - Heeft een sterk positief verband met de grootte van de hoek tussen de wand van het platform en de horizontaal.
    - Heeft een sterk positief verband met de dikte van de ijsplaat.
    - Heeft een zwak negatief verband met de Elasticiteitsmodulus van het ijs.
- De maximale ijsbelasting door plaatijs kan flink oplopen tot wel enkele MN/m breedte voor een hoek van 45^0 tussen de oppervlakte van het platform met de horizontaal. Deze belasting kan nog verder toe nemen naarmate deze hoek toeneemt.
- De belasting van een continue en homogene ijsplaat kan benaderd worden door een onderbroken zaagtandfunctie.
- De veerstijfheid van een sparplatform wordt met name bepaald door het opdrijvende effect (84%) en in mindere mate door het verende effect van de kettinglijnen (16%).
- De representatieve massa van het sparplatform gemodelleerd als gedempt massa veersysteem wordt met meer dan 70% verhoogd door het meeversnellende water om het platform heen.
- De frequentie van de beweging van het platform is van kleine invloed op het mee versnellende volume water.
- Een grotere omvang van het mee versnellende volume water leidt tot een lagere eigenfrequentie van het platform.
- De demping van de dynamische responsie ten gevolge van een periodieke belasting neemt toe naarmate de bewegingsfrequentie toeneemt.
- De uitdemping van het aandeel van boventonen van de basisfrequentie van de belastingsfunctie in de excitatie van het platform is tweeledig:
    - De hogere frequenties van de hogere orde aandelen in de belastingsfunctie zorgen voor een groter verschil tussen de belastingsfrequentie van de belastingsterm en de eigenfrequentie, waardoor er sterkere dynamische demping optreedt.
    - De hogere frequenties van de hogere orde aandelen in de belastingsfunctie resulteren in een hogere dempingscoëfficiënt.
- De amplitude van de verticale uitwijkingen van een sparplatform kan hoog oplopen (tot ongeveer 8,6 meter), de perceptie van hinder door de mens blijft echter beperkt door de relatief kleine versnellingen die hiermee gepaard gaan.

6.2 AANBEVELINGEN VOOR ONTWERP SPARPLATFORMS

Het doel van de verkenning van de effecten van de belasting van een ijsplaat op een offshore platform in dit rapport is om een advies uit te brengen voor het ontwerp welke het mogelijk maakt het platform in staat te stellen om productie voort te zetten gedurende de meest kritische ijsbelastingen. De volgende aanbevelingen gelden:

- In de meeste Arctische gebieden dient het platform mobiel te zijn, zodat het platform bij de meest kritische belastingsomstandigheden (zoals ijsbergen) weggesleept kan worden.
- De helling van de oppervlakte van het platform met de horizontaal aan het wateroppervlak dient zo klein mogelijk te worden genomen. Liefst onder de 55^0. Op deze manier wordt een eventuele ijsplaat in “bending mode” geforceerd en is de belasting lager.
- De doorsnede van het platform aan het wateroppervlak dient zo smal mogelijk te worden genomen ter vermindering van de ijsbelasting waaraan het platform wordt blootgesteld.
- De dompelbeweging van een platform kan worden beperkt door het verhogen van de veerstijfheid. Dit kan door zwaardere kettinglijnen toe te passen, of door de kettinglijnen onder een flauwere helling te spannen.
- Voor ijsplaten met kleine en middelmatige diktes (tot ± 1 m) kan de dompelbeweging verder worden verminderd door de eigenfrequentie van het platform te verlagen. Dit kan door de meewerkende massa te verhogen door een ongestroomlijnde vorm toe te passen voor beweging in verticale richting.
- De versnelling welke volgt uit de dynamische responsie is bepalend voor het comfort van de bemanning. Deze dient zo laag mogelijk te worden gehouden.

7. REFERENTIES

- Alec van Nes, Satish Prabhakar, Rafael Corona. (2009). *Arctic Design*: http://www.offshoremoorings.org/Moorings/2009/Group02_Prabhakar/OffshoreMooringsWEBSITE25sept2009/Bending.htm. Datum raadpleging 13-05-2013.
- Andrea Schaller. (2012). *Shell suspends Arctic drilling* : http://www.globalenvironmentalsociety.net/index.php?option=com_content&view=article&id=1463:shell-suspends-arctic-drilling&catid=52:energy-a-renewables&Itemid=104. Datum raadpleging 09-05-2013.
- Blanchet, D., Churcher, A., Fitzpatrick and Badra-Blanhcet, P. (1988). An analysis of observed failure mechanisms for laboratory, first-year and multi-year ice. Proc. 9th IAHR Ice Symp. Sapporo, Japan, Vol 3, pp. 89-136.
- Blenkarn, K.A. (1970). Measurement and analysis of ice forces on Cook Inlet Structures. Proc. 2nd OTC Conf., Houston, TX, OTC 1261, Vol II, pp. 365-378.
- Boss and Jumar. (2003). *SMS-491: Physical solutions of everyday problems in aquatic sciences.*: http://misclab.umeoce.maine.edu/boss/classes/SMS_491_2003/Week_5.htm. Datum raadpleging 27-05-2013.
- Cammaert, A. B. Muggeridge, D. B. (1988). *Ice interaction with offshore structures*. New York: Van Nostrand Reinhold
- Chakrabarti, S. (2000). Empirical calculation of roll damping for ships and barges, Offshore Structure Analysis, Inc, p. 915
- Chen, X., Xu, J., Wang. L and Määttänen, M. (1998). Fatigue analysis of ice-induced vibration isolated platform. Proc. 14th IAHR Ice Symposium. Potsdam, USA. Conf., San Francisco, Vol II, pp. 764-770.
- Engelbrektson, A. (1977). Dynamic ice loads on a lighthouse structure. Proc. 4th POAC Conf. St.John's, Canada. pp. 655-663.
- Eranti, E. (1992). Dynamic ice structure interaction - Theory and applications. VTT Publications No. 90. 81 p.
- Heseltine, J. (2003). Flow around a Circular Cylinder with a Free End. Department of Mechanical Engineering University of Saskathewan August 2003
- Hovland, Justin. (2008). *Simulation and Laboratory Te sts of Ice Induced Offshore Structure Vibrations* : http://web2.clarkson.edu/projects/reushen/reu_china/Website/assets/participants_assets/Reports/Justin.pdf. Datum raadpleging 25-05-2013.
- IBM Corporation. (2009). *Emerging Issue Summary CHANGING SEA ICE/OCEAN CONDITIONS*: http://quickplace.mtri.org/LotusQuickr/nssi/PageLibrary852570A00051053F.nsf/h_Index/6BFCE30409A777868525768800772B3E/?OpenDocument. Datum raadpleging 13-05-2013
- Islam, A.B.M.S. Jameel, M en Jumaat, M.Z. (2011). Effect of time elapse after wave hitting on coupled Spar platform. 2011 Academic Journals
- Izumiyama, K. and Uto, S., (1997). Ice loading on a compliant indentor. Proc 14th Int. Conf. Port Ocean Eng. Arctic Conditions. Yokohama, Vol IV. pp. 431-436.
- Izumiyama, K., Irani, M.B. and Timco, G.W. (1994). Influence of compliance of structure on ice load. Proc. 12th Int. Symp on Ice, Vol. 1, pp.229-238.
- Jefferies, M.G. and Wright, W.H. (1988). Dynamic response of "Molipaq" to ice-structure interaction. Proc. 7th OMAE Conf. Houston Vol. IV, pp. 201-220.
- Kamesaki, K., Yamauchi, Y and Kärnä, T. (1996). Ice force as a function of structural compliance. Proc. 13th IAHR Ice Symposium. Beijing, 1996. Vol. I, pp. 395-402.
- Kärnä, t. & Muhonen, A. (1990). Preliminary results from ice indentation tests using flexible and rigid indentors. Proc. 10th IAHR Ice Symp. Helsinki, Finland, Vol 3, pp. 261-275.

- Kärnä, T. & Turunen, R. (1990). A straightforward technique for analysing structural response to dynamic ice action. Proc. 9th OMAE Conf. Houston. Vol IV, pp. 135 - 142.
- Kärnä, T. (1992). A procedure for dynamic soil-structure-ice interaction. Proc. 2nd ISOPE
- Kärnä, T. (1994). Finite ice failure depth in penetration of a vertical indentor into an ice edge. Annals of Glaciology, 19 (1994), pp. 114-120
- Kärnä, T. (1994). Mitigation of steady-state vibrations induced by ice. Proc. 4th ISOPE Conf., Osaka, Japan, April 10-15, 1994, pp. 534-539.
- Kärnä, T. (2001). Simplified modelling of ice-induced vibrations of offshore structures. Proc. 16th International Symposium on Okhotsk Sea & Sea Ice. 4-8 February 2001, Mombetsu, Japan. pp. 114-122.
- Kärnä, T., Kamesaki, K. & Tsukuda, H., (1999). A numerical model for dynamic ice-structure interaction. Computers and Structures 72(1999) 645-658.
- Katie Mazerov. (2012). *The Arctic: Confronting the cold, hard truths about the last frontier*: http://www.drillingcontractor.org/wp-content/uploads/2012/01/webWW85185_high.jpg. Datum raadpleging 09-05-2013.
- Määtänen, M. (1987). Ten years of ice-induced vibration isolation in lighthouses. Proc. 6th OMAE Conf. Houston, USA. Vol. 4, pp. 261-266.
- Määttänen, M. (1978). On conditions for the rise of self-excited ice-induced autonomous oscillations in slender marine pile structures. Winter Nav. Board, Finland, Res. Rep., 25.
- Määttänen, M. (1981). Laboratory tests for dynamic ice-structure interaction. Eng. Struct., 3(1982), pp. 111-116.
- "mmc". (2012). *Dimensonal analysis of damping constant?.*: http://physics.stackexchange.com/questions/9754/dimensonal-analysis-of-damping-constant. Datum raadpleging 08-06-2013.
- Montasir, O.A. en Kurian, V.J. (2010) Effect of slowly varying drift forces on the motion characteristics of truss spar platforms. 2011ElsevierLtd.
- Muhonen, A., Kärnä, T., Eranti, E., Riska, K., Järvinen, E and Lehmus E. (1992). Laboratory indentation tests with thick freshwater ice. Vol I. VTT Research Notes 1370. Espoo, 92 p.
- Murray, John . (2008). *Floating Production Advances: New spar design takes on the Arctic.*: http://www.epmag.com/Production/Floating-Production-Advances-spar-design-takes-the-Arctic_8296. Datum raadpleging 26-05-2013.
- Nature 482. (2012). *The great Arctic oil race begins*: http://www.nature.com/news/the-great-arctic-oil-race-begins-1.9932. Datum raadpleging 09-05-2013.
- Nordlund, O.P., Kärnä. T. and Järvinen E. (1988). Measurements of ice-induced vibrations of channel markers. Proc. 9th IAHR Ice Symp. Sapporo. Vol 2, pp. 537-548.
- Onbekend. (2012). *Red Hawk, Gulf of Mexico, United States of America.*: http://www.offshore-technology.com/projects/red-hawk/. Datum raadpleging 03-06-2013.
- Onbekend. (2013). *Pancake Ice*: http://nl.wikipedia.org/wiki/Pancake_ice. Datum raadpleging 11-05-2013.
- Petrovic, J.J. (2003). *Review Mechanical properties of ice and snow*: http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1021134128038. Datum raadpleging 04-05-2013.
- Serreze, Mark. (2012). *All about sea ice*: http://nsidc.org/cryosphere/seaice/characteristics/formation.html. Datum raadpleging 11-05-2013.
- Singh, S.K., Timco, G.W., Frederking, R.M and Jordaan, L.J. (1990). Tests of ice crushing on a flexible structure. Proc. 9th OMAE Conf. Houston. Vol IV, pp. 89 - 94.
- Sodhi, D. (1991). Effective pressures measured during indentation tests in freshwater ice. Proc. 6th Int. Cold Regions Eng. Specialty Conf. Hanover, NH, pp. 619-627.
- Steen, Sverre . (2012). *General Modelling and Scaling Laws.*: http://www.ivt.ntnu.no/imt/courses/tmr7/lecture/Scaling_Laws.pdf. Datum raadpleging 08-06-2013.

- Technip - Group. (2012). *Offshore Energy Solutions.*: http://www.technip.com/sites/default/files/technip/publications/attachments/Offshore_Energy_Solutions_Jan2012_Web.pdf. Datum raadpleging26-05-2013.
- Timco , G.W (2007). *THICKNESS DEPENDENCE OF THE FAILURE MODES OF ICE FROM FIELD OBSERVATIONS ON WIDE STRUCTURES* : ftp://ftp2.chc.nrc.ca/CRTreports/POAC_07_Failure_Modes.pdf. Datum raadpleging 13-05-2013.
- Timco, G., Irani, M.B., Tseng, J., Liu, L.K and Zheng, C.B. (1992). Model tests of dynamic ice loading on the Chinese JZ-20-2 jacket platform. Can. J. Civ. Eng.Vol. 19, pp. 819-832.
- Timco, G.W., Frederking, R.M. and Singh, S.K. (1989). The transfer function approach for a structure subjected to ice crushing. Proc. 10th POAC Conf. Luleå, Vol I, pp. 420-430.
- Toyama, Y., Sensu, T., Minami, M and Yashima, N. (1983). Model tests on ice-induced self-excited vibration of cylindrical structures. Proc. 7th POAC Conf., Vol II, pp. 834-844.
- Tsuchiya, M., Kanie, S., Ikejiri, K., Yoshida, A. and Saeki, H. (1985). An experimental study of ice-structure interaction. Proc. OTC Conf. Paper No. OTC-5055, Houston, pp. 321-327.
- Van Koten, H. Hoogenboom, P. Vibrations of machine foundations and surrounding soil. Flow-Engineering, TU Delft, pp 77
- Vershinin S.A. and Iliady, A.A. (1990). A new approach to dynamic ice-flexible structure interaction. Proc. 10th IAHR Ice Symp., Espoo, Finland. Vol III, 73 - 80.
- Xu, J. and Wang, L. (1986). The ice force oscillator model for dynamic ice-structure interaction analysis. Proc. 1st ICETECH Conf. Cambridge, Springer-Verlag, pp. 391-397.
- Y. Qu, Q. Yue, X. Bi and T. Kärnä, A random ice force model for narrow conical structures, Cold Regions Sci. Tech. 45 (2006), 148-157.
- Yue, Q.J and Bi, X.J, (1998). Full-scale tests and analysis of dynamic interaction between ice sheet and conical structures. Proc. 14th IAHR Ice Symposium. Potsdam, USA. Vol 2.
- Yue, Q.J. and Bi, X. (2000). Ice-induced jacket structure vibrations in Bohai Bay Sea. Journal of Cold Regions Engineering. Vol. 14, No 2, June 2000, Paper No 21698, pp. 81-92

BIJLAGE 1: OVERZICHT GEMODELLEERD PLATFORM

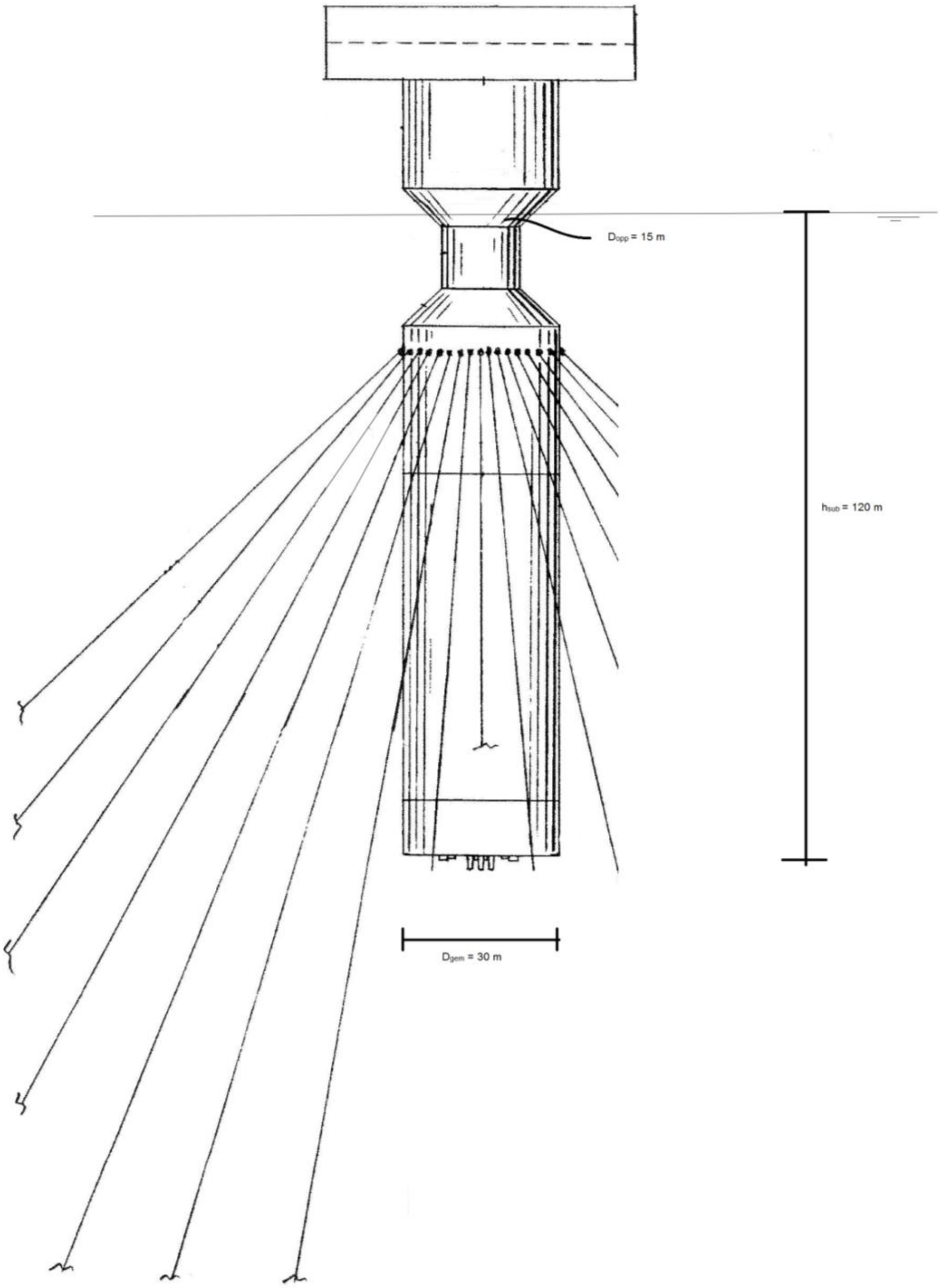
Voor het hieronder weergeven Sparplatform, dat is gebruikt voor de berekeningen in dit verslag, is in 2006 door de heren Lyle Finn en Atle Steen een patent aangevraagd. Voor de toepassing in dit verslag gelden de volgende eigenschappen:

Sparplatform:

Massa (totaal):	10.800 ton
Profiel drijver:	Cilindrisch
Diepte drijver:	120 meter
Gemiddelde diameter drijver onder oppervlak:	30 meter
Diameter drijver aan oppervlak:	15 meter
Hoek tussen drijver en wateroppervlak:	45^0

Kettinglijnen:

Aantal:	48
Massa:	277 $^{kg}/_{m}$
Diameter:	12,4 cm



BIJLAGE 2: BEREKENING EERSTE ORDE IJSLAST IN MAPLE®

> restart :

>

1. Parameters

> $x = 'x';$

$$x = x \quad (1.1)$$

> $l := 250\# \; m$

$$l := 250 \quad (1.2)$$

> $h := 2.5 \; \# \; m$

$$h := 2.5 \quad (1.3)$$

> $b := 1 \; \# \; m$

$$b := 1 \quad (1.4)$$

> $alfa := \frac{45}{180} \cdot \pi \# \; rad$

$$alfa := \frac{1}{4} \pi \quad (1.5)$$

> $E := 9.7e9 \; \#`\;` \frac{N}{m^2}$

$$E := 9.7 \; 10^9 \quad (1.6)$$

> $Iice := \frac{1000 \cdot b \cdot (1000 \cdot h)^3}{12}; \# \; mm^4$

$$Iice := 1.302083333 \; 10^{12} \quad (1.7)$$

> $EI := \frac{E \cdot Iice}{10e12}; \# \; Nm^2$

$$EI := 1.263020833 \; 10^9 \quad (1.8)$$

> $RHOsw := 10280 \; \# \frac{N}{m^3}$

$$RHOsw := 10280 \quad (1.9)$$

> $RHOice := 9000 \; \# \frac{N}{m^3}$

$$RHOice := 9000 \quad (1.10)$$

> $k := \; b \cdot (RHOsw) \; \# \frac{N}{m^2}$

$$k := 10280 \quad (1.11)$$

> $\sigma_t := 1.43e6 \; \# \frac{N}{m^2}$

$$\sigma_t := 1.43 \; 10^6 \quad (1.12)$$

> $q := 0$

$$q := 0 \quad (1.13)$$

> $\#F := 10000 \;\; \# \; Nm^{-1}$

>

2. Vergelijkingen:

> $DV := EI * diff(u(x), x, x, x, x) + k * u(x) = q\# - N * diff(u(x), x, x);$

$$DV := 1.263020833\ 10^{9} \left(\frac{d^4}{dx^4} u(x)\right) + 10280\ u(x) = 0 \quad (2.1)$$

> $N := \sin(alfa) \cdot F$

$$N := \frac{1}{2}\sqrt{2}\ F \quad (2.2)$$

> $V := \cos(alfa) \cdot F$

$$V := \frac{1}{2}\sqrt{2}\ F \quad (2.3)$$

> $RV := (D@@2)(u)(0) = 0, (D@@3)(u)(0) = V/EI, D(u)(l) = 0, u(l) = 0;$

$$RV := D^{(2)}(u)(0) = 0, D^{(3)}(u)(0) = 3.958762888\ 10^{-10}\sqrt{2}\ F, D(u)(250) = 0, u(250) = 0 \quad (2.4)$$

> $Opl := dsolve(\{DV, RV\}, u(x)):$

> $assign(Opl):$

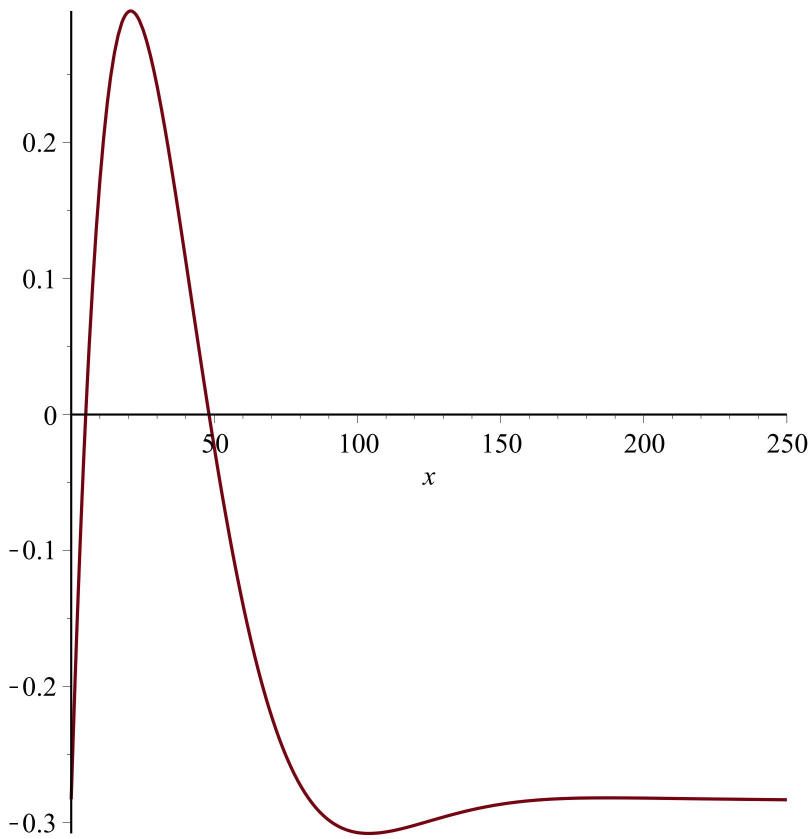
> $evalf(u(x));$

$$6.534444365\ 10^{-14}\ F\ e^{-0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x) + 6.534444365\ 10^{-14}\ F\ e^{0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x) + 0.000005195801153\ F\ e^{-0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) - 3.381702547\ 10^{-14}\ F\ e^{0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) \quad (2.5)$$

> $evalf(-N/(b*h) + ((EI*(diff(u(x), x, x)))*.5)*h/(0.10e\text{-}10*Iice));$
$collect(\%, F);$
$plot(op(1, \%), x = 0..l);$

$$-0.2828427124\ F - 2.260381333\ 10^{-8}\ F\ e^{-0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) + 2.260381333\ 10^{-8}\ F\ e^{0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) + 1.797320672\ F\ e^{-0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x) + 1.169791475\ 10^{-8}\ F\ e^{0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x)$$

$$(-0.2828427124 - 2.260381333\ 10^{-8}\ e^{-0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) + 2.260381333\ 10^{-8}\ e^{0.03776857961\ x} \cos(0.03776857961\ x) + 1.797320672\ e^{-0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x) + 1.169791475\ 10^{-8}\ e^{0.03776857961\ x} \sin(0.03776857961\ x))\ F$$



3. Oplossing:

```
> sm := Optimization:-Maximize(eval( -N/(b*h) - ((-EI*(diff(u(x), x, x)))*.5)*h
     /(0.10e-10*Iice), F = 1), x = 0 .. 0.3·l);
  eq := sm[1]*F = sigma[t];
  F := solve(eq, F);
```

$$sm := [0.296608021710872, [x = 20.7950155149033]]$$

$$eq := 0.296608021710872\ F = 1.43\ 10^6$$

$$F := 4.821177768\ 10^6 \qquad \textbf{(3.1)}$$

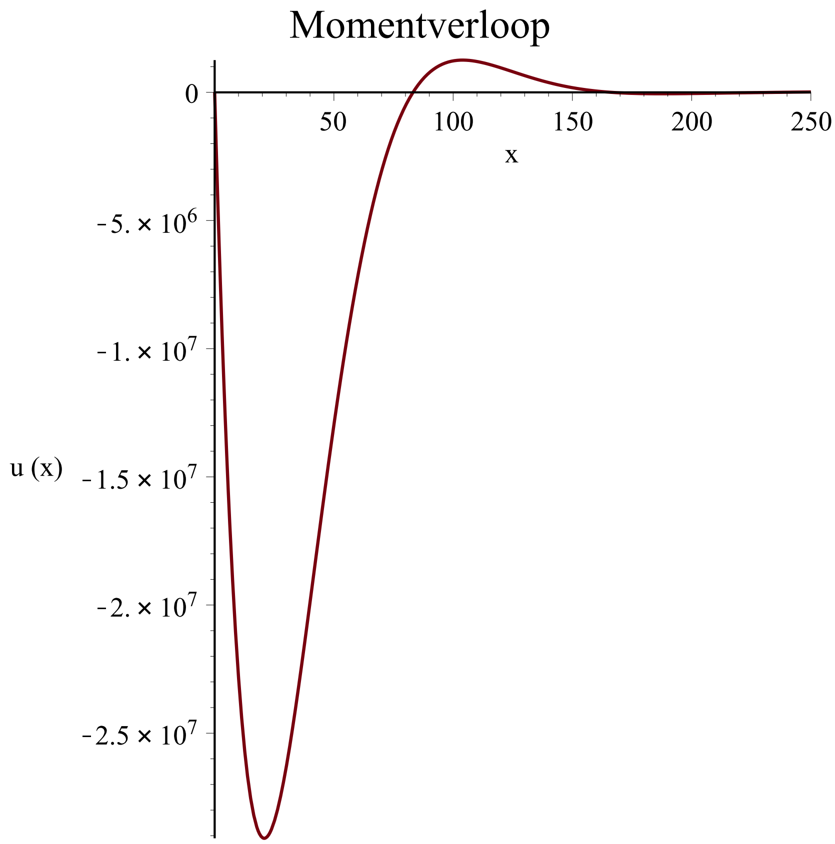
```
> evalf(V);
```

$$3.409087492\ 10^6 \qquad \textbf{(3.2)}$$

```
> evalf(N);
```

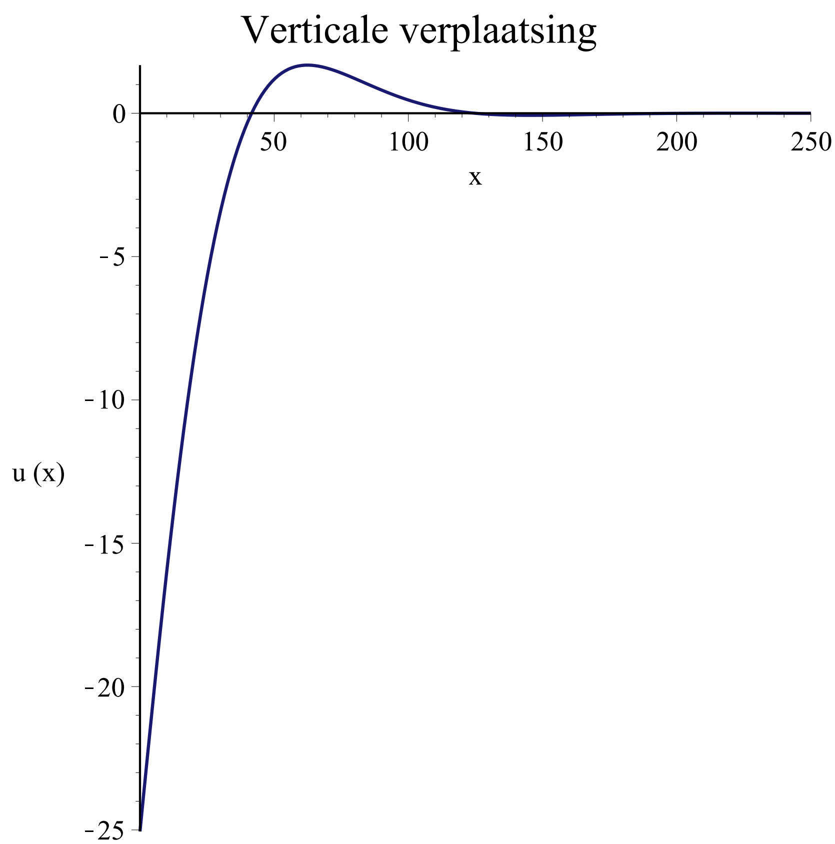
$$3.409087492\ 10^6 \qquad \textbf{(3.3)}$$

```
> plot( -EI*(diff(u(x), x, x)), x = 0 ..l, title = "Momentverloop", titlefont = ["ROMAN", 15],
     labels = ["x", "u (x)"]);
```



>

> *plot*(−*u*(*x*), *x* = 0 ..*l*, *title* = "Verticale verplaatsing", *titlefont* = ["ROMAN", 15], *labels* = ["x", "u (x)"], *color* = "MidnightBlue");


Verticale verplaatsing
0
50
100
150
200
250
x
-5
-10
u (x)
-15
-20
-25

>

>

>

BIJLAGE 3: VERGELIJKING 1E EN 2E ORDE BEREKENING IN MAPLE®

> $restart:$

>

Parameters

> $x = 'x';$

$$x = x \tag{1}$$

> $l := 250\# \ m$

$$l := 250 \tag{2}$$

> $h := 2.5 \ \# \ m$

$$h := 2.5 \tag{3}$$

> $b := 1 \ \# \ m$

$$b := 1 \tag{4}$$

> $alfa := 0.4944 \cdot \pi \# \ rad$

$$alfa := 0.4944\ \pi \tag{5}$$

> $E := 9.7e9 \ \# \ \frac{N}{m^2}$

$$E := 9.7\ 10^9 \tag{6}$$

> $Iice := \frac{1000 \cdot b \cdot (1000 \cdot h)^3}{12}; \# \ mm^4$

$$Iice := 1.302083333\ 10^{12} \tag{7}$$

> $EI := \frac{E \cdot Iice}{10e12}; \# \ Nm^2$

$$EI := 1.263020833\ 10^9 \tag{8}$$

> $RHOsw := 10280 \ \# \frac{N}{m^3}$

$$RHOsw := 10280 \tag{9}$$

> $RHOice := 9000 \ \# \frac{N}{m^3}$

$$RHOice := 9000 \tag{10}$$

> $k := \ b \cdot (RHOsw - RHOice) \ \# \frac{N}{m^2}$

$$k := 1280 \tag{11}$$

> $\sigma_t := 1.43e6 \ \# \frac{N}{m^2}$

$$\sigma_t := 1.43\ 10^6 \tag{12}$$

> $q := 0$

$$q := 0 \tag{13}$$

> $F := 1000000 \ \# \ Nm^{-1}$

$$F := 1000000 \tag{14}$$

Vergelijkingen eerste orde:

> $DV := EI * diff(u(x), x, x, x, x) + k * u(x) = q;$

(15)

$$DV := 1.263020833\ 10^9 \left(\frac{d^4}{dx^4} u(x)\right) + 1280\, u(x) = 0 \quad \textbf{(15)}$$

> $N := \sin(alfa) \cdot F$

$$N := 1000000 \sin(0.4944\, \pi) \quad \textbf{(16)}$$

> $V := \cos(alfa) \cdot F$

$$V := 1000000 \cos(0.4944\, \pi) \quad \textbf{(17)}$$

> $RV := (D@@2)(u)(0) = 0,\ (D@@3)(u)(0) = V/EI,\ D(u)(l) = 0,\ u(l) = 0;$

$$RV := D^{(2)}(u)(0) = 0,\ D^{(3)}(u)(0) = 0.0007917525775 \cos(0.4944\, \pi),\ D(u)(250) = 0,\ u(250) = 0 \quad \textbf{(18)}$$

> $Opl1 := dsolve(\{DV, RV\}, u(x)) :$

> $assign(Opl);$

> $U_{eerste\ orde} := evalf(u(x));$

$$U_{eerste\ orde} := u(x) \quad \textbf{(19)}$$

Vergelijkingen tweede orde:

> $DV2 := EI * diff(u(x), x, x, x, x) + k * u(x) = q - N * diff(u(x), x, x) :$

> $RV2 := (D@@2)(u)(0) = 0,\ (D@@3)(u)(0) = V/EI,\ D(u)(l) = 0,\ u(l) = 0;$

$$RV2 := D^{(2)}(u)(0) = 0,\ D^{(3)}(u)(0) = 0.0007917525775 \cos(0.4944\, \pi),\ D(u)(250) = 0,\ u(250) = 0 \quad \textbf{(20)}$$

> $Opl2 := dsolve(\{DV, RV\}, u(x)) :$

> $assign(Opl2) :$

> $U_{tweede\ orde} := evalf(u(x));$

$$\begin{aligned} U_{tweede\ orde} := {} & 0.00001010938655\, e^{-0.02243545419\, x} \sin(0.02243545419\, x) \\ & + 0.00001010938655\, e^{0.02243545419\, x} \sin(0.02243545419\, x) \\ & + 0.6166745201\, e^{-0.02243545419\, x} \cos(0.02243545419\, x) \\ & - 2.036909003\ 10^{-7}\, e^{0.02243545419\, x} \cos(0.02243545419\, x) \end{aligned} \quad \textbf{(21)}$$

> $with(plots) :$

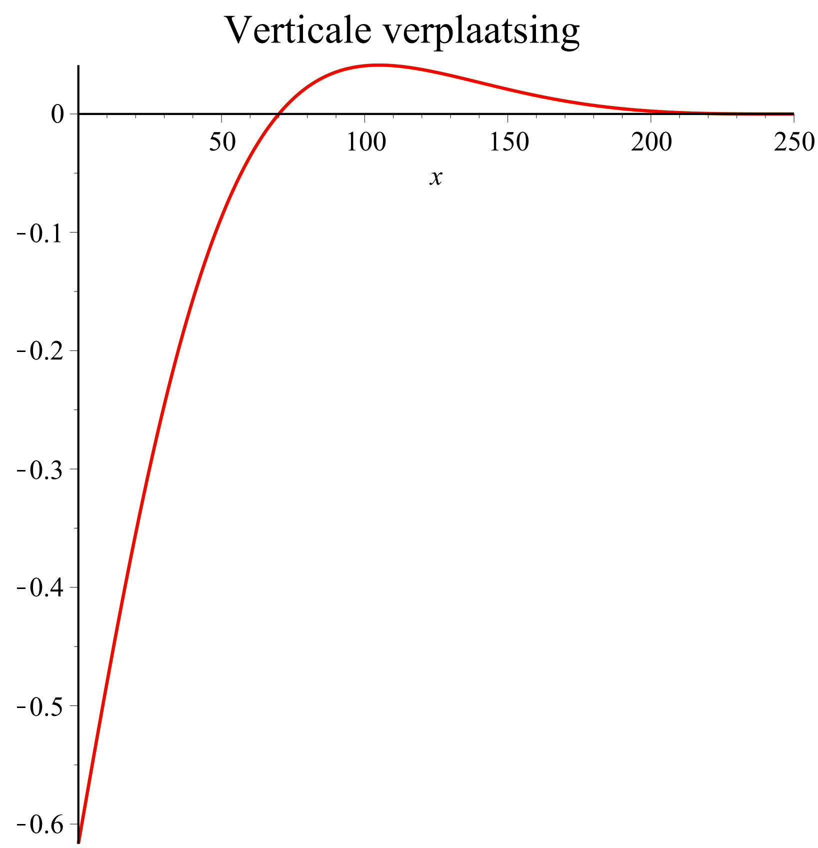
> $p1 := plot(-U_{eerste\ orde}(x), x = 0..l, title = \text{"Verticale verplaatsing"}, titlefont = [\text{"ROMAN"}, 15], color = green);$

$$p1 := PLOT(\ldots) \quad \textbf{(22)}$$

> $p2 := plot(-U_{tweede\ orde}(x), x = 0..l, title = \text{"Verticale verplaatsing"}, titlefont = [\text{"ROMAN"}, 15], color = \text{"red"});$

$$p2 := PLOT(\ldots) \quad \textbf{(23)}$$

> $display(\{p1, p2\});$


Verticale verplaatsing
0
50
100
150
200
250
x
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6

BIJLAGE 4: MODELLERING KETTINGLIJN IN MAPLE®

```
> restart :
> Digits:= 15:
> q0 := 2.77 : T0 := 1976.3 :
> qT0 := q0/T0 :
> DIV := diff(y(x), x, x) = qT·sqrt(1 + diff(y(x), x)^2);
```

$$DIV := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) = qT \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right)^2} \tag{1}$$

```
> RV := y(0) = 0.5, y(100) = -1008 :
> Opl := dsolve({DIV, RV}, y(x));
```

$$Opl := y(x) = \frac{1}{qT} \Big(\cosh\big(qT\, x + \ln\big(RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big)\big)\big)\Big) + \frac{1}{2}\, \frac{1}{\big((e^{qT})^{100} - 1\big)^2\, qT\, (e^{100\, qT} - 1)\, e^{100\, qT}} \Big(2\, RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big)\, e^{400\, qT} - RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big)\, e^{500\, qT} - RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big)\, e^{200\, qT} - (e^{100\, qT})^2\, RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big) + e^{100\, qT}\, RootOf\big(\big((e^{100\, qT})^2 - e^{100\, qT}\big)\, \_Z^2 + 2017\, qT\, e^{100\, qT}\, \_Z - e^{100\, qT} + 1\big) - 2016\, qT\, e^{400\, qT} + 4032\, qT\, e^{300\, qT} + 2017\, (e^{100\, qT})^2\, qT - 2017\, qT\, e^{100\, qT} - (e^{qT})^{300}\, qT - 2015\, (e^{qT})^{200}\, qT - 2016\, qT\, e^{200\, qT} + 2016\, (e^{qT})^{100}\, qT\Big) \tag{2}$$

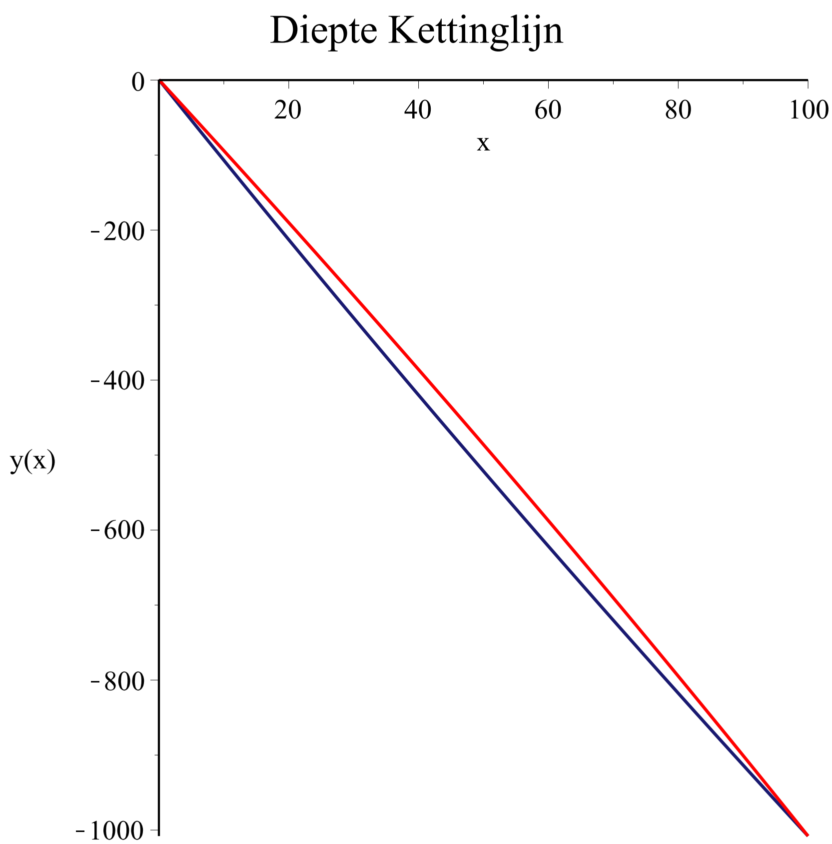
```
> Opl2 := expand(Opl) :
> Opl3:= allvalues(Opl2):
> Sol1 := eval(Opl3[1], qT=qT0);
```

$$Sol1 := y(x) = 7746.72872645889 \cosh(0.00140160906744927\, x) - 7713.80403242139 \sinh(0.00140160906744927\, x) - 7746.22872646093 \tag{3}$$

```
> Sol2 := eval(Opl3[2], qT=qT0);
```

$$Sol2 := y(x) = -6738.22872645375 \cosh(0.00140160906744927\, x) - 6700.35021915001 \sinh(0.00140160906744927\, x) + 6738.72872648907 \tag{4}$$

```
> plot(rhs~([Sol1, Sol2]), x = 0 ..100, title = "Diepte Kettinglijn", titlefont = ["Roman", 15], labels = ["x","y(x)"], color = ["MidnightBlue", red]);
```



> $Helling := evalf(diff(Sol2, x));$

$$Helling := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = -9.44436248154472 \sinh(0.00140160906744927\, x) - 9.39127162224636 \cosh(0.00140160906744927\, x) \tag{5}$$

>

```
> eval(Helling, x= 0);
```

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) \right|_{x=0} = -9.39127162224636 \tag{6}$$

BIJLAGE 5: VISUALISATIE FOURIER BENADERING IN MAPLE®

> $F01 := 3.85; T1 := 17.5;$

$$F01 := 3.85$$
$$T1 := 17.5 \tag{1}$$

> $F02 := 14.46; T2 := 35.7;$

$$F02 := 14.46$$
$$T2 := 35.7 \tag{2}$$

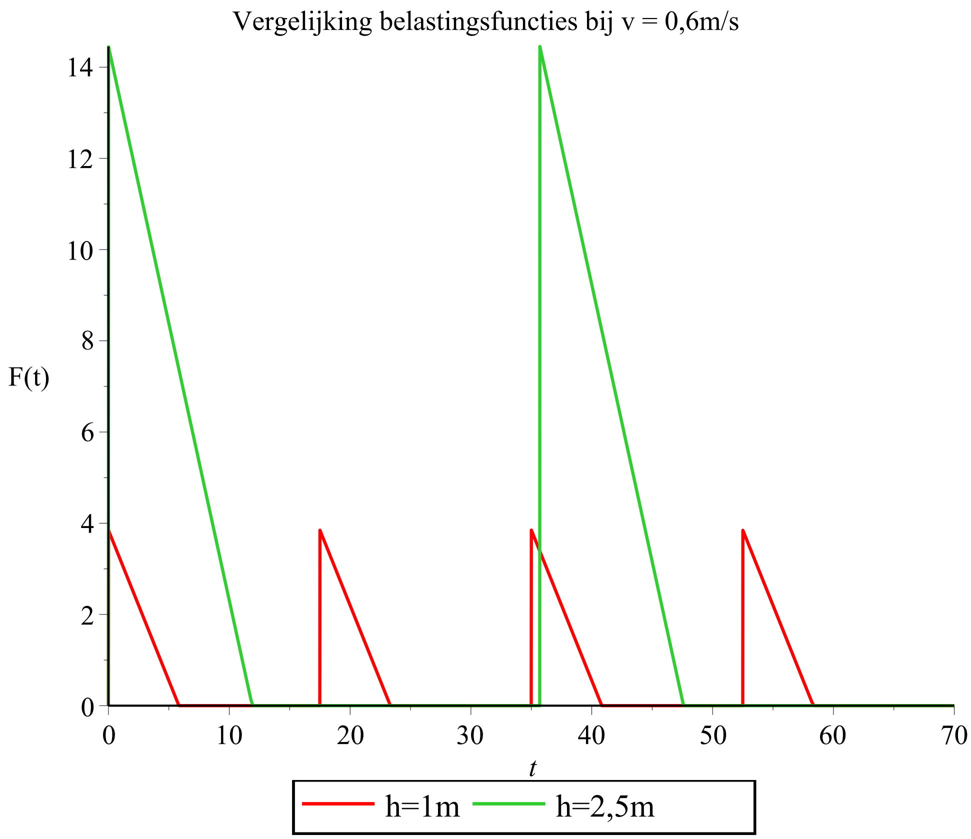
> $freal1 := piecewise\left(x \le 0, 0, x \le \frac{T1}{3}, F01\cdot\left(1 - \frac{3\,x}{T1}\right), x \le T1, 0, x \le T1 + \frac{T1}{3}, F01\cdot\left(1 - \frac{3\,(x - T1)}{T1}\right), x \le 2\cdot T1, 0, x \le 2\cdot T1 + \frac{T1}{3}, F01\cdot\left(1 - \frac{3\,(x - 2\,T1)}{T1}\right), x \le 3\cdot T1, 0, x \le 3\cdot T1 + \frac{T1}{3}, F01\cdot\left(1 - \frac{3\,(x - 3\,T1)}{T1}\right), x \le 4\cdot T1, 0\right);$

$$freal1 := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 3.85 - 0.6599999999\,x & x \le 5.833333333 \\ 0 & x \le 17.5 \\ 15.40000000 - 0.6599999999\,x & x \le 23.33333333 \\ 0 & x \le 35.0 \\ 26.95000000 - 0.6599999999\,x & x \le 40.83333333 \\ 0 & x \le 52.5 \\ 38.50000000 - 0.6599999999\,x & x \le 58.33333333 \\ 0 & x \le 70.0 \end{cases} \tag{3}$$

> $freal2 := piecewise\left(x \le 0, 0, x \le \frac{T2}{3}, F02\cdot\left(1 - \frac{3\,x}{T2}\right), x \le T2, 0, x \le T2 + \frac{T2}{3}, F02\cdot\left(1 - \frac{3\,(x - T2)}{T2}\right), x \le 2\cdot T2, 0, x \le 2\cdot T2 + \frac{T2}{3}, F02\cdot\left(1 - \frac{3\,(x - 2\,T2)}{T2}\right), x \le 3\cdot T2, 0\right);$

$$freal2 := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 14.46 - 1.215126050\,x & x \le 11.90000000 \\ 0 & x \le 35.7 \\ 57.84000000 - 1.215126050\,x & x \le 47.60000000 \\ 0 & x \le 71.4 \\ 101.2200000 - 1.215126050\,x & x \le 83.30000000 \\ 0 & x \le 107.1 \end{cases} \tag{4}$$

> $plot([freal1, freal2], x = 0\,..4\cdot T1);$



Vergelijking belastingsfuncties bij v = 0,6m/s
F(t)
14
12
10
8
6
4
2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
t
h=1m
h=2,5m

> $F0 := 3.85;\ T := 17.5;\ k := 2.76;$

$$F0 := 3.85$$
$$T := 17.5$$
$$k := 2.76 \quad \textbf{(1)}$$

>

> $freal := piecewise\left(x \le 0, 0, x \le \frac{T}{3}, F0\cdot\left(1 - \frac{3\,x}{T}\right), x \le T, 0, x \le T + \frac{T}{3}, F0\cdot\left(1 - \frac{3\,(x-T)}{T}\right), x \le 2\cdot T, 0, x \le 2\cdot T + \frac{T}{3}, F0\cdot\left(1 - \frac{3\,(x-2\,T)}{T}\right), x \le 3\cdot T, 0\right);$

$$freal := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 3.85 - 0.6599999999\,x & x \le 5.833333333 \\ 0 & x \le 17.5 \\ 15.40000000 - 0.6599999999\,x & x \le 23.33333333 \\ 0 & x \le 35.0 \\ 26.95000000 - 0.6599999999\,x & x \le 40.83333333 \\ 0 & x \le 52.5 \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

> $t :=\text{'}x\text{'};$

$$t := x \quad \textbf{(3)}$$

> $f1 := \frac{F0}{6} + \frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3 - 3\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(2\cdot\mathrm{Pi} - 3\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$

$$f1 := 0.6416666667 + \frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} + \frac{1.925000000\left(2\,\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} \quad \textbf{(4)}$$

> $f2 := f1 + \frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3 - 3\cdot\cos\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(4\cdot\mathrm{Pi} - 3\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\,\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$

$$f2 := 0.6416666667 + \frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} \quad \textbf{(5)}$$

$$+\frac{1.925000000\left(2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{2.165625000\cos(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.4812500000\left(4\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

> $f3 := f2+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{6\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{6\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(6\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{6\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{6\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$

$$f3 := 0.6416666667+\frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} \tag{6}$$

$$+\frac{1.925000000\left(2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{2.165625000\cos(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.4812500000\left(4\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{1.283333334\sin(0.3428571428\,\pi\,x)}{\pi}$$

> $f4 := f3+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{8\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{8\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(8\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{8\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{8\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$

$$f4 := 0.6416666667+\frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} \tag{7}$$

$$+\frac{1.925000000\left(2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{2.165625000\cos(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.4812500000\left(4\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{1.283333334\sin(0.3428571428\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{0.5414062500\cos(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.1203125000\left(8\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

> $f5 := f4+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{10\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{10\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(10\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{10\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{10\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$

$$f5 := 0.6416666667+\frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2} \tag{8}$$

$$+\frac{1.925000000\left(2\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{2.165625000\cos(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.4812500000\left(4\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{1.283333334\sin(0.3428571428\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{0.5414062500\cos(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.1203125000\left(8\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.3465000000\cos(0.5714285714\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.07700000000\left(10\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.5714285714\,\pi\,x)}{\pi^2}$$

$$> f10 := f5 + \frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{12\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{36\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{12\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(12\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{12\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{36\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{12\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right)+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{14\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{49\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{14\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(14\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{14\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{49\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{14\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right)+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{16\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{64\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{16\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(16\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{16\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{64\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{16\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right)+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{18\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{81\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{18\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(18\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{18\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{81\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{18\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right)+\frac{F0}{2}\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{20\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{100\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{20\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)+\frac{\left(20\cdot\mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{20\cdot\mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{100\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{20\cdot\mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right);$$

$$f10 := 0.6416666667+\frac{8.662500000\cos(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{1.925000000\left(2\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{2.165625000\cos(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{0.4812500000\left(4\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{1.283333334\sin(0.3428571428\,\pi\,x)}{\pi}+\frac{0.5414062500\cos(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{0.1203125000\left(8\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.4571428571\,\pi\,x)}{\pi^2}+\frac{0.3465000000\cos(0.5714285714\,\pi\,x)}{\pi^2} \quad \textbf{(9)}$$

$$+\frac{0.07700000000\left(10\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.5714285714\,\pi x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.6416666665\sin(0.6857142857\,\pi x)}{\pi}+\frac{0.1767857143\cos(0.8000000000\,\pi x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.03928571428\left(14\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.8000000000\,\pi x)}{\pi^2}$$

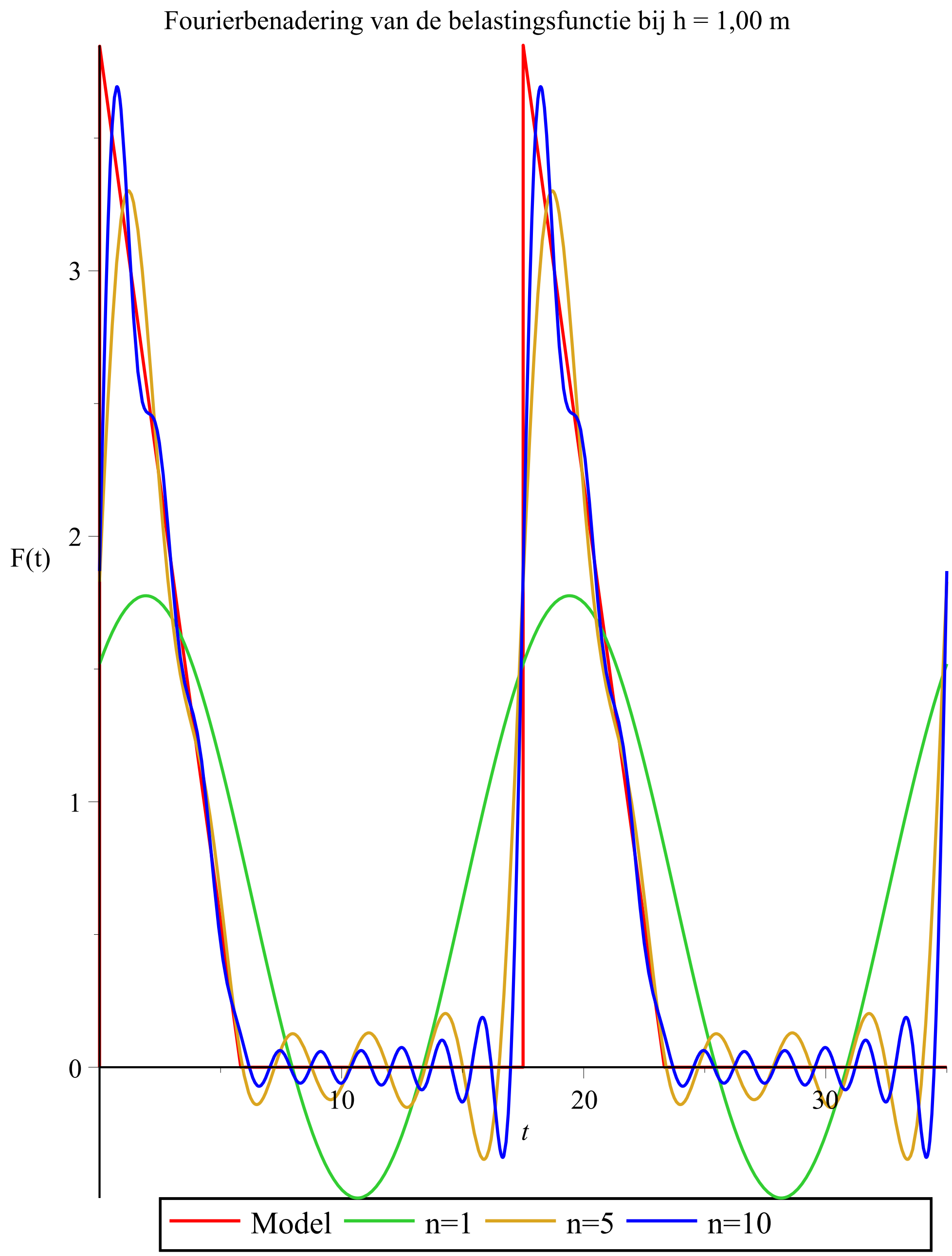
$$+\frac{0.1353515625\cos(0.9142857142\,\pi x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.03007812500\left(16\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.9142857142\,\pi x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.4277777778\sin(1.028571429\,\pi x)}{\pi}+\frac{0.08662500000\cos(1.142857143\,\pi x)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.01925000000\left(20\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(1.142857143\,\pi x)}{\pi^2}$$

> $plot([freal, f1, f5, f10], t = 0 .. 2 \cdot T);$


Fourierbenadering van de belastingsfunctie bij h = 1,00 m
F(t)
3
2
1
0
10
20
30
t
Model
n=1
n=5
n=10

BIJLAGE 6: VISUALISATIE VAN DE UITWIJKING EN VERSNELLING VAN HET PLATFORM

Voor een dikte van 2,5 m:

> $V0 := 10.2;\ T := 35.7;\ k := 2.76;$

$$V0 := 10.2$$
$$T := 35.7$$
$$k := 2.76 \tag{1}$$

> $a1 := \frac{1.02}{0.83};\ a2 := \frac{1}{.5};\ a3 := \frac{0.21}{.23};\ a4 := \frac{0.06}{.2};\ a5 := \frac{0.03}{.14};$

$$a1 := 1.228915663$$
$$a2 := 2.000000000$$
$$a3 := 0.9130434783$$
$$a4 := 0.3000000000$$
$$a5 := 0.2142857143 \tag{2}$$

> $u5 := \frac{1}{k}\left(\frac{V0}{6} + \frac{V0}{2}\cdot a1\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(2\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right) + \frac{V0}{2}\cdot a2\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(4\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\,\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right) + \frac{V0}{2}\cdot a3\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(6\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right) + \frac{V0}{2}\cdot a4\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(8\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right) + \frac{V0}{2}\cdot a5\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right) + \frac{\left(10\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T}\right)\right)\right)$

$$u5 := 0.6159420290 + \frac{10.21870089\cos(0.05602240896\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{2.270822420\left(2\,\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.05602240896\,\pi\,t)}{\pi^2} \tag{3}$$

$$+\frac{4.157608696\cos(0.1120448179\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.9239130435\left(4\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1120448179\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{1.124763705\sin(0.1680672269\,\pi\,t)}{\pi}+\frac{0.1559103261\cos(0.2240896358\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.03464673913\left(8\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2240896358\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

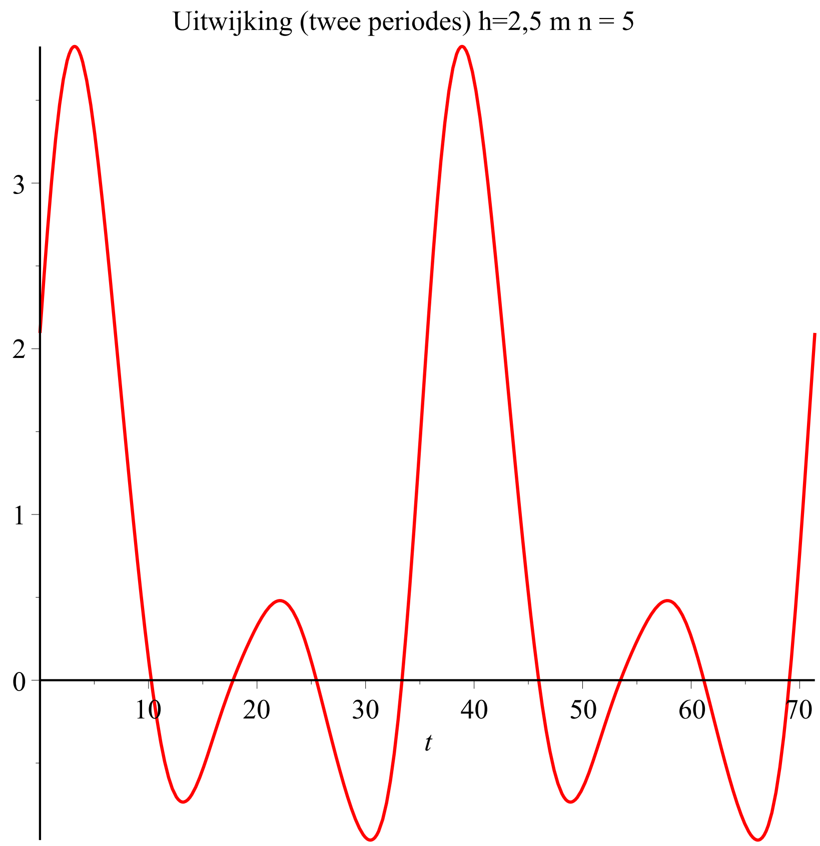
$$+\frac{0.07127329196\cos(0.2801120448\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.01583850932\left(10\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2801120448\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

> *evalf*(*u5*);

$$0.6159420290+1.035370869\cos(0.1759995884\,t)+0.8478788016\sin(0.1759995884\,t)+0.4212538340\cos(0.3519991768\,t)+1.419573638\sin(0.3519991768\,t)+0.3580234068\sin(0.5279987654\,t)+0.01579701878\cos(0.7039983537\,t)+0.07910678365\sin(0.7039983537\,t)+0.007221494300\cos(0.8799979422\,t)+0.05458487266\sin(0.8799979422\,t) \quad \textbf{(4)}$$

> *plot*(*u5*, $t=0..2\cdot T$);



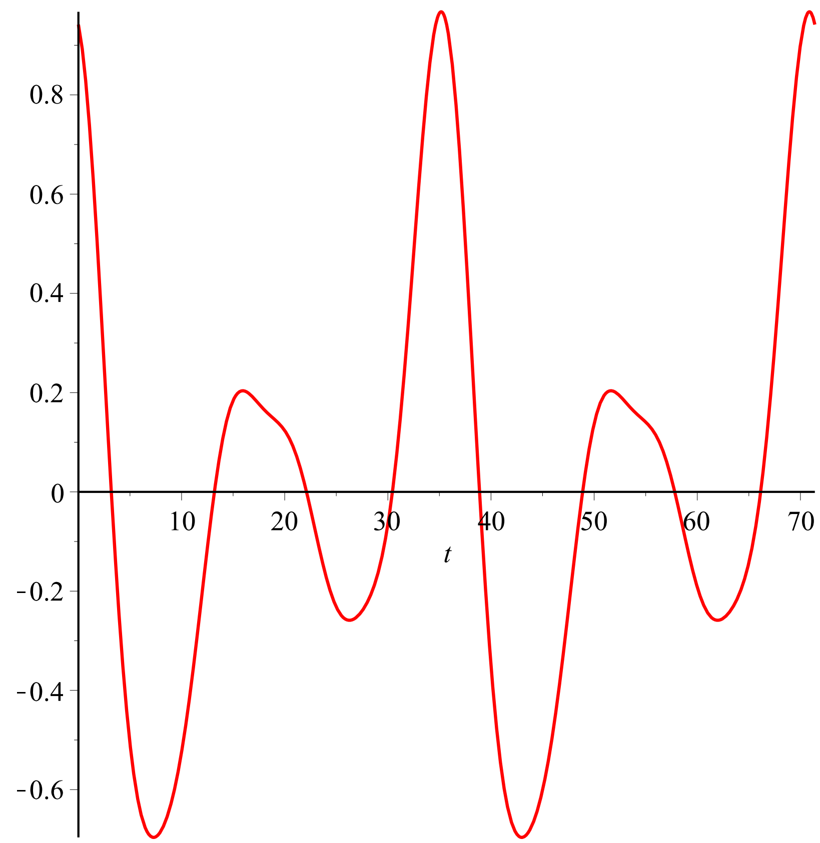
> $v5 := diff(u5, t)$

$$v5 := -\frac{0.5724762403 \sin(0.05602240896 \pi t)}{\pi} + \frac{0.1272169423 \left(2\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \cos(0.05602240896 \pi t)}{\pi} - \frac{0.4658385092 \sin(0.1120448179 \pi t)}{\pi} + \frac{0.1035196687 \left(4\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \cos(0.1120448179 \pi t)}{\pi} + 0.1890359168 \cos(0.1680672269 \pi t) - \frac{0.03493788819 \sin(0.2240896358 \pi t)}{\pi} + \frac{0.007763975153 \left(8\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \cos(0.2240896358 \pi t)}{\pi} \quad \textbf{(5)}$$

$$-\frac{0.01996450755 \sin(0.2801120448 \pi t)}{\pi}$$

$$+\frac{0.004436557232 \left(10 \pi + \frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \cos(0.2801120448 \pi t)}{\pi}$$

> $plot(v5, t = 0 ..2 \cdot T)$



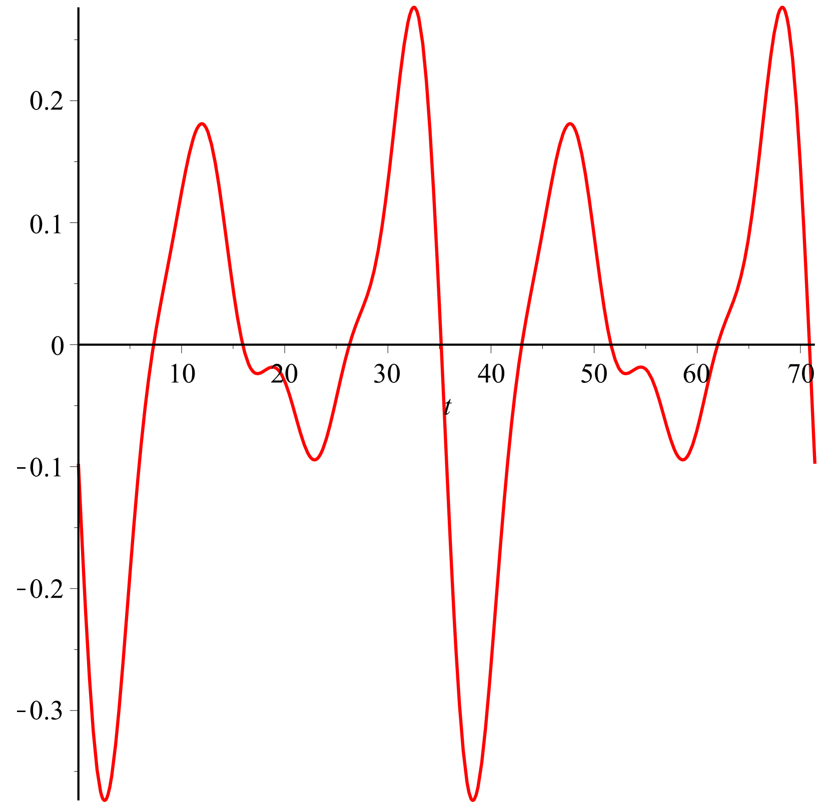
> $acc5 := diff(v5, t);$

$$acc5 := -0.03207149805 \cos(0.05602240896 \pi t) - 0.007126999568 \left(2 \pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \sin(0.05602240896 \pi t) - 0.05219479093 \cos(0.1120448179 \pi t) - 0.01159884243 \left(4 \pi + \frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \sin(0.1120448179 \pi t) - 0.03177074232 \sin(0.1680672269 \pi t) \pi - 0.007829218640 \cos(0.2240896358 \pi t) - 0.001739826364 \left(8 \pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \sin(0.2240896358 \pi t) \quad (6)$$

$$-0.005592299033\cos(0.2801120448\,\pi\,t) - 0.001242733118\left(10\,\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2801120448\,\pi\,t)$$

> $plot(acc5, t = 0..2 \cdot T)$

Versnelling (twee periodes) h= 2,5 m n = 5



> $Amax := Optimization\text{:-}Minimize(acc5, x = 0\,..\,T);$

$$Amax := [-0.373705409213763717, [t = 2.54033305743973, x = 17.8500000000000]] \quad (7)$$

Voor een dikte van 1,0 m:

> $V1 := 2.72;\ T1 := 17.5;\ k := 2.76;$

$$V1 := 2.72$$
$$T1 := 17.5$$
$$k := 2.76 \quad (8)$$

> $a11 := \frac{1.69}{.83};\ a12 := \frac{0.16}{.5};\ a13 := \frac{0.03}{.23};\ a14 := \frac{0.02}{.2};\ a15 := \frac{0.01}{.14};$

$$a11 := 2.036144578$$

$$a12 := 0.3200000000$$
$$a13 := 0.1304347826$$
$$a14 := 0.1000000000$$
$$a15 := 0.07142857143 \tag{9}$$

$$> u15 := \frac{1}{k}\left(\frac{V1}{6} + \frac{V1}{2}\cdot a11\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right) + \frac{\left(2\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right)\right) + \frac{V1}{2}\cdot a12\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right) + \frac{\left(4\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{4\,\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right)\right) + \frac{V1}{2}\cdot a13\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right) + \frac{\left(6\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{6\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right)\right) + \frac{V1}{2}\cdot a14\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right) + \frac{\left(8\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{16\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{8\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right)\right) + \frac{V1}{2}\cdot a15\cdot\left(\frac{\left(3-3\cdot\cos\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right) + \frac{\left(10\cdot \mathrm{Pi}-3\cdot\sin\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}}{3}\right)\right)}{25\cdot\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{10\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{T1}\right)\right)\right)$$

$$u15 := 0.1642512077 + \frac{4.514929283\cos(0.1142857143\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{1.003317618\left(2\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{0.1773913044\cos(0.2285714286\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{0.03942028986\left(4\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{0.04284814116\sin(0.3428571428\,\pi\,t)}{\pi} + \frac{0.01385869565\cos(0.4571428571\,\pi\,t)}{\pi^2} + \frac{0.003079710145\left(8\,\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.4571428571\,\pi\,t)}{\pi^2} \tag{10}$$

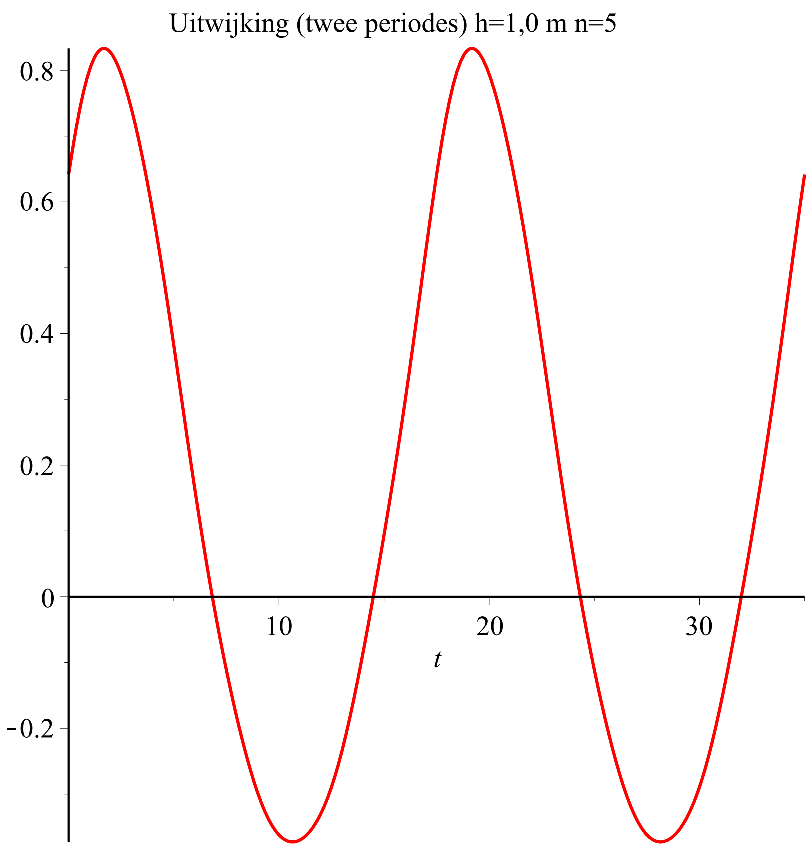
$$+\frac{0.006335403725\cos(0.5714285714\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

$$+\frac{0.001407867495\left(10\,\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.5714285714\,\pi\,t)}{\pi^2}$$

> *evalf*(*u15*);

$$0.1642512077+0.4574579788\cos(0.3590391605\,t)+0.3746183462\sin(0.3590391605\,t)+0.01797349692\cos(0.7180783210\,t)+0.06056847522\sin(0.7180783210\,t)+0.01363898693\sin(1.077117481\,t)+0.001404179446\cos(1.436156642\,t)+0.007031714102\sin(1.436156642\,t)+0.0006419106040\cos(1.795195802\,t)+0.004851988680\sin(1.795195802\,t) \quad \textbf{(11)}$$

> *plot*(*u15*, $t=0..2\cdot T1$);



> *v15* := *diff*(*u15*, *t*)

$$v15 := -\frac{0.5159919181\sin(0.1142857143\,\pi\,t)}{\pi} \quad \textbf{(12)}$$

$$+\frac{0.1146648706\left(2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos(0.1142857143\,\pi\,t)}{\pi}$$

$$-\frac{0.04054658387\sin(0.2285714286\,\pi\,t)}{\pi}$$

$$+\frac{0.009010351969\left(4\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos(0.2285714286\,\pi\,t)}{\pi}$$

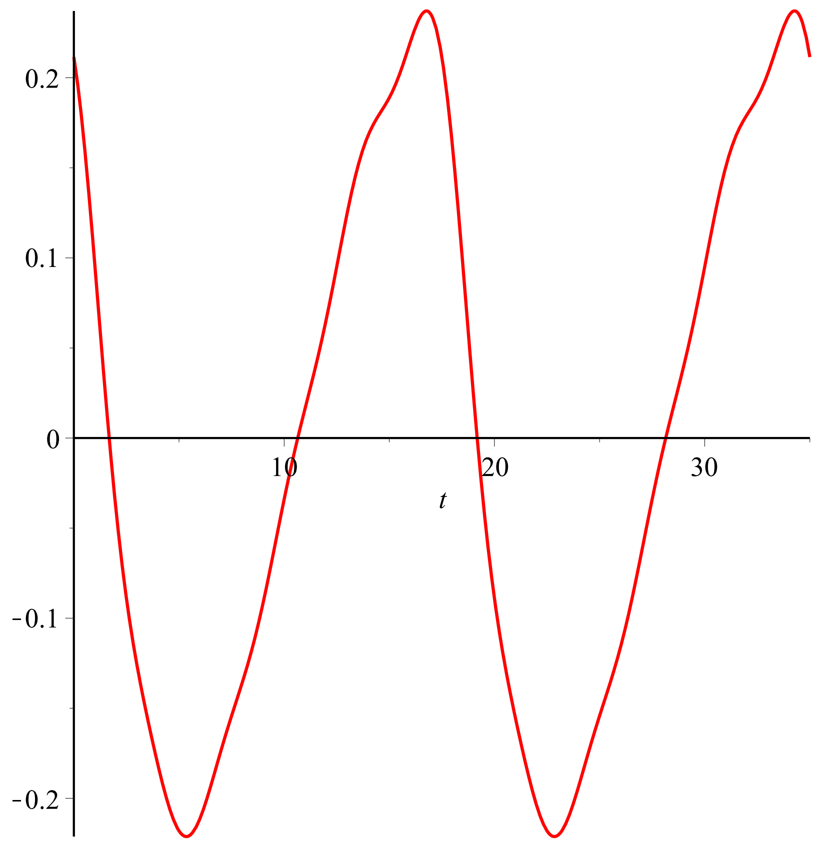
$$+0.01469079125\cos(0.3428571428\,\pi\,t)-\frac{0.006335403725\sin(0.4571428571\,\pi\,t)}{\pi}$$

$$+\frac{0.001407867495\left(8\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos(0.4571428571\,\pi\,t)}{\pi}$$

$$-\frac{0.003620230700\sin(0.5714285714\,\pi\,t)}{\pi}$$

$$+\frac{0.0008044957114\left(10\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cos(0.5714285714\,\pi\,t)}{\pi}$$

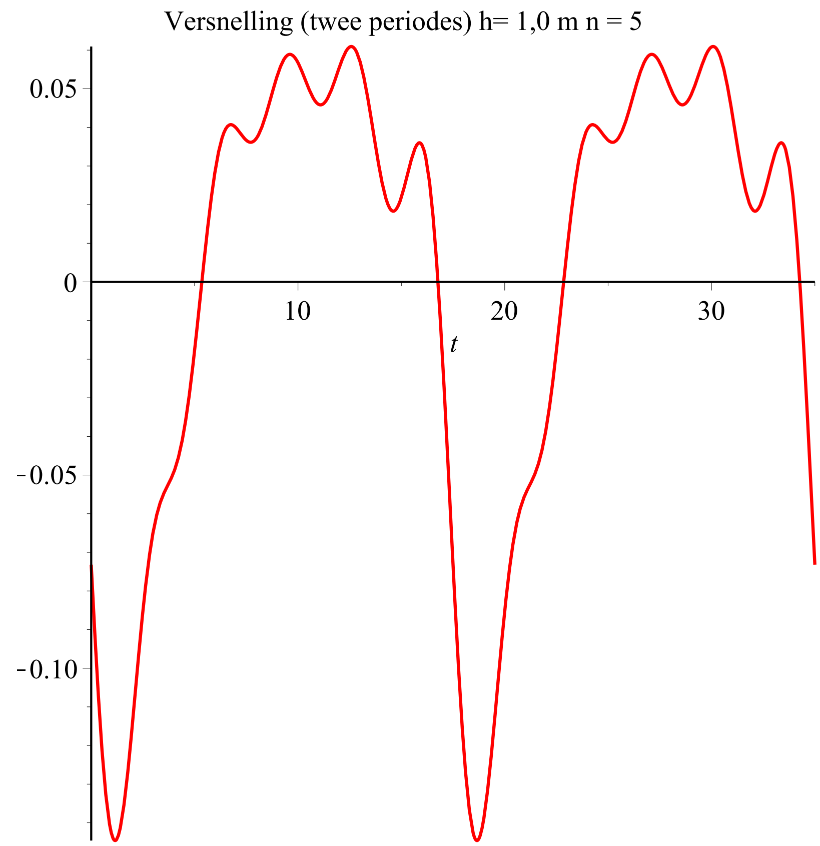
> $plot(v15, t=0..2\cdot T1)$



> $acc15 := diff(v15, t);$

$$acc15 := -0.05897050493\cos(0.1142857143\,\pi\,t) - 0.01310455664\left(2\,\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.1142857143\,\pi\,t) - 0.009267790600\cos(0.2285714286\,\pi\,t) - 0.002059509022\left(4\,\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.2285714286\,\pi\,t) - 0.005036842713\sin(0.3428571428\,\pi\,t)\,\pi - 0.002896184560\cos(0.4571428571\,\pi\,t) - 0.0006435965691\left(8\,\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.4571428571\,\pi\,t) - 0.002068703257\cos(0.5714285714\,\pi\,t) - 0.0004597118351\left(10\,\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\sin(0.5714285714\,\pi\,t) \quad \textbf{(13)}$$

> $plot(acc15, t = 0..2\cdot T1)$



> Amax := Optimization:-Minimize(acc15, t = 0 .. 2 · T1);

$$Amax := [-0.144607233104716, [t = 18.6576318557098]] \tag{14}$$

>