Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen
Bachelor-eindwerk

Maarten Kuijvenhoven

Delft, juni 2006

Begeleiders:
Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. J.W. Welleman

Technische Universiteit Delft

Samenvatting

In dit eindwerk is getracht om een stijfheidsmatrix af te leiden, die bruikbaar is om het gedrag van kipinstabiliteit te implementeren in een raamwerkprogramma. Hiertoe is een al bestaande stijfheidsmatrix uitgebreid naar een meer algemene vorm, waarbij nu ook normaalkracht op het te beschouwen element kan werken. Voorheen was de matrix namelijk alleen geldig als er een (constant) moment op het element aangreep.

Bovendien is er een experiment uitgevoerd waarbij een probleemstelling, die uit een voorgaand onderzoek naar voren was gekomen, onderzocht is. Uit dat voorgaand onderzoek bleek dat de vervormingen, wanneer deze berekend werden met behulp van een afgeleide stijfheidsmatrix (gebaseerd op differentiaalvergelijkingen), kleiner werden bij een toenemende belasting. Aangezien dit geen logisch resultaat was, is er een proefopstelling gebouwd waarmee deze probleemstelling onderzocht kon worden. De proefopstelling bestond uit een houten lat, die belast kon worden op buiging in twee richtingen.

De belangrijkste conclusie van dit eindwerk is dat vervormingen wel degelijk groter worden bij een toenemende belasting. Echter de vervormingen in het experiment werden veel groter dan berekend met behulp van de differentiaalvergelijkingen. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat de differentiaalvergelijkingen niet geldig zijn voor belastingen die veel kleiner zijn dan de kritische kipbelasting.

English summary

The purpose of this thesis was to derive a stiffness matrix that can be used to implement behaviour of lateral buckling in computer programs. In order to do so, an earlier derived matrix has been elaborated to a more general form, in which also a normal force can be applied on the considered element. Up until now, the matrix could only be applied on elements that where loaded by a (constant) moment.
Furthermore, there has been undertaken an experiment to answer a question that had come up in an earlier thesis. In this thesis it appeared that deformations, when calculated with the help of a stiffness matrix (based on differential equations), got smaller under an increasing load. This was not expected, and therefore an experiment was set up in which a wooden slat could be loaded on bending in two different directions.
The main conclusion of this thesis is that deformations do increase under an increasing load. However the deformations in the experiment got much larger than calculated with the help of the differential equations. A possible explanation could be that the derived differential equations are not valid for loads that are much smaller then the critical load.

Voorwoord

Dit rapport is geschreven in het kader van het bachelor-eindwerk ter afsluiting van de bachelorfase van mijn studie Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Tijdens dit eindwerk werd ik begeleid door dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. J.W. Welleman, beide van de sectie ConstructieMechanica. Bij dezen zou ik mijn beide begeleiders hartelijk willen bedanken voor hun advies en begeleiding.

Maarten Kuijvenhoven

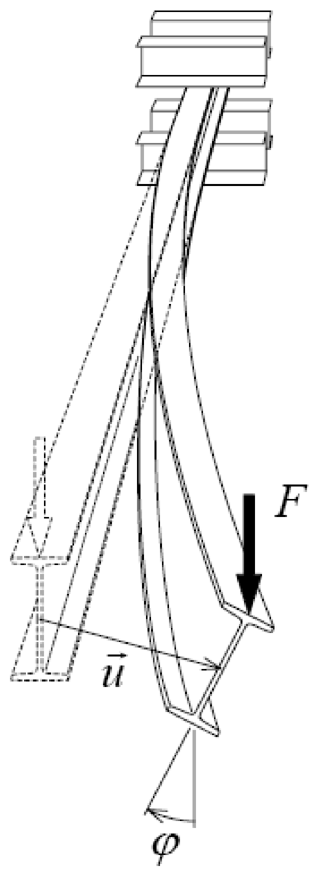
Delft, juni 2006

Inhoudsopgave

Samenvatting 3
English summary 5
Voorwoord 7
Inhoudsopgave 9
1 Inleiding 11
2 Beschrijving van de proefopstelling 13
2.1 Proefstuk 13
2.2 Oplegcondities 13
2.3 Belasting 14
2.4 Meetopstelling 15
2.5 Verwerking meetresultaten 17
2.6 Verstoringen 18
3 Analytisch model 21
3.1 Schematisering 21
3.2 Differentiaalvergelijkgen 22
3.3 Randvoorwaarden 22
4 Resultaten 25
4.1 Vergelijking 25
5 Berekening volgens NEN6760 27
5.1 Materiaaleigenschappen 27
5.2 Bepaling modificatiefactor k_{ins} 27
5.3 Bepaling rekenwaarde buigspanning 28
5.4 Toetsing 28
5.5 Vergelijking met analytische berekening 29
6 Stijfheidsmatrix inclusief normaalkracht 31
6.1 Afleiding 31
6.2 Controles 32
6.2.1 Geen normaalkracht 33
6.2.2 Eerste-orde matrix 33
7 Conclusies en aanbevelingen 35
7.1 Conclusies 35
7.2 Aanbevelingen 35
Literatuurlijst 37
Bijlage A: Bepaling modificatiefactor k_{ins} 39
Bijlage B: CD-Rom 41
Bijlage C: Orginele opdracht 43

1 Inleiding

Wanneer een ligger wordt belast op buiging in het vlak met de grootste buigstijfheid, dus om de sterke as, heeft de gedrukte bovenflens de neiging zich in zijdelingse richting te verplaatsen (uit te knikken). De getrokken onderflens zal echter recht willen blijven. Naast een zijwaartse verplaatsing treedt er dus ook een rotatie van het profiel op (zie ook Figuur 1). Deze vorm van instabiliteit, waarbij het profiel een zijwaartse verplaatsing en een rotatie ondergaat, wordt kipinstabiliteit genoemd.



Figuur 1: Kipmechanisme[1]

Kipcontrole van liggers is een vaak terugkerende taak in de constructiepraktijk. Vandaar dat veel raamwerkprogramma's kipcontroles automatisch uitvoeren. Hierbij worden benaderings-formules gebruikt uit de geldende normen. Deze aanpak is weliswaar veilig, maar niet erg nauwkeurig. Het nauwkeurige kipgedrag wordt beschreven door twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen.
In een voorgaand Bachelor eindwerk is hiermee een stijfheidsmatrix afgeleid. Als deze matrix geïmplementeerd wordt in een raamwerkprogramma kan hiermee nauwkeurig de invloed van kip en torsieknik op constructiegedrag onderzocht worden. Echter, er zijn een aantal

[1] Prof. Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder; Structural stability; 2003

problemen met de afgeleide stijfheidsmatrix. De stijfheidsmatrix is niet algemeen geldig, maar alleen voor liggers belast zijn door een constant zijdelings kipmoment zonder aanwezigheid van normaalkracht. Bovendien blijkt het tweede-orde effect kleinere verplaatsingen tot gevolg te hebben in plaats van grotere verplaatsingen, dit komt niet overeen met wat er verwacht werd.

Het doel van dit Bachelor-eindwerk is tweeledig. Allereerst is het doel om een verklaring te geven voor het onverwachte gedrag van de stijfheidsmatrix.

In het onderzoek van T. Hooijkaas[2] zijn drie mogelijke verklaringen gegeven:

- De differentiaalvergelijkingen zijn niet geldig voor tweede-orde gedrag
- De afleiding van de stijfheidsmatrix bevat fouten
- Het onverwachte gedrag is toch correct

Om deze mogelijke verklaringen te onderzoeken, wordt er een experiment gedaan waarbij een houten lat op tweede-orde effecten onderzocht zal worden. Bovendien wordt er een analytisch model opgesteld en zullen de resultaten van dit model vergeleken worden met de resultaten zoals deze zijn waargenomen in het experiment.

Het tweede doel van dit Bachelor-eindwerk is om de stijfheidsmatrix uit te breiden naar het meer algemene belastingsgeval waarbij ook normaalkracht aanwezig kan zijn.

Allereerst wordt in hoofdstuk 2 een beschrijving gegeven van de proefopstelling waarmee het experiment is uitgevoerd. Vervolgens wordt in hoofdstuk 3 het analytische model toegelicht, waarna in hoofdstuk 4 de resultaten van dit model vergeleken worden met de resultaten uit het experiment. In hoofdstuk 5 wordt de lat uit de proefopstelling getoetst volgens de geldende normen. Ook zal hier de berekeningsmethode uit de normen vergeleken worden met de nauwkeurige analytische berekening. In hoofdstuk 6 wordt vervolgens een stijfheidsmatrix bepaald, die geldig is voor een ligger die door zowel een constant moment als een normaalkracht is belast. Deze matrix zal ook aan een aantal controleberekeningen onderworpen worden. Tenslotte zal in hoofdstuk 7 het rapport afgesloten worden met conclusies en aanbevelingen.

[2] T. Hooijkaas; Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen; 2004

2 Beschrijving van de proefopstelling

Om het werkelijke kipgedrag van liggers te onderzoeken is er een serie proeven gedaan in het laboratorium. In dit hoofdstuk wordt een beschrijving gegeven van de hierbij gebruikte proefopstelling.

Figuur 2: Proefopstelling

2.1 Proefstuk

Er is voor gekozen om als proefstuk een lat van Cederhout te gebruiken met een symmetrische doorsnede (rechthoekig 14 x 40 mm). Er is gekozen voor het materiaal hout, omdat dit een geringe buigstijfheid heeft. Dit maakt het uitvoeren van proeven eenvoudiger, omdat de vervormingen dan gemakkelijker waarneembaar zijn. Bovendien is hout eenvoudig verwerkbaar. Het proefstuk kan beschouwd worden als homogeen en prismatisch.

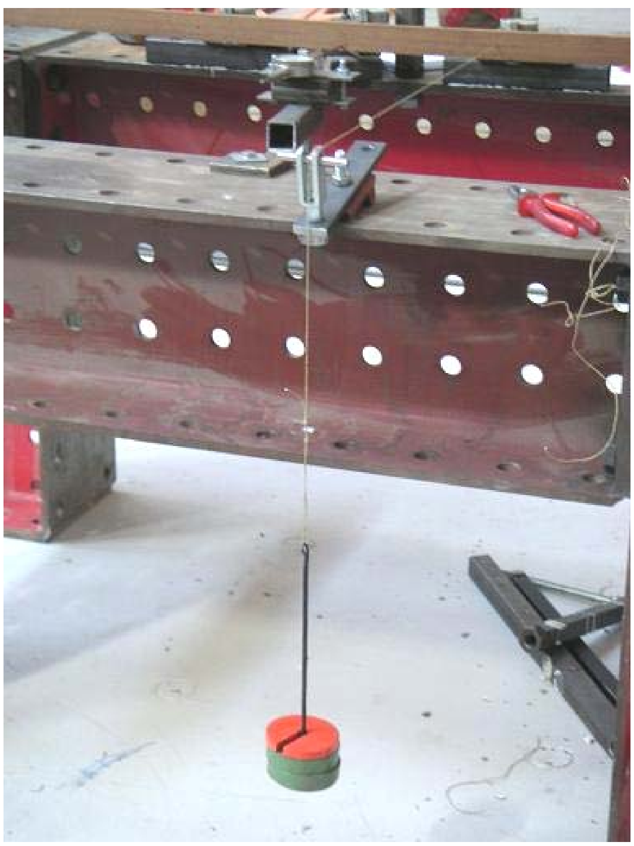
2.2 Oplegcondities

De lat is aan weerszijden opgelegd op gaffels (zie Figuur 3). Deze vorm van oplegging verhindert rotatie om de lengteas van het proefstuk, terwijl rotatie om de andere twee assen wel mogelijk blijft.

Figuur 3: Gaffeloplegging

2.3 Belasting

Als belasting is gebruik gemaakt van gewichten. Deze gewichten hingen aan het proefstuk via een gaatje dat in de lat geboord is ter plaatse van de zwaartelijn van de lat. Door dat gaatje zat een ring, waaraan een haak hing waarop gewichten gelegd konden worden.



Figuur 4: Belasting

Om de zijdelingse belasting aan te brengen, is door hetzelfde gaatje een stuk vliegertouw gestoken met aan het uiteinde een knoop. Het andere uiteinde van het touw werd over een katrol (zie Figuur 5) geleid en hieraan hing vervolgens weer een haak met gewichten (zie Figuur 4).

Figuur 5: Katrol

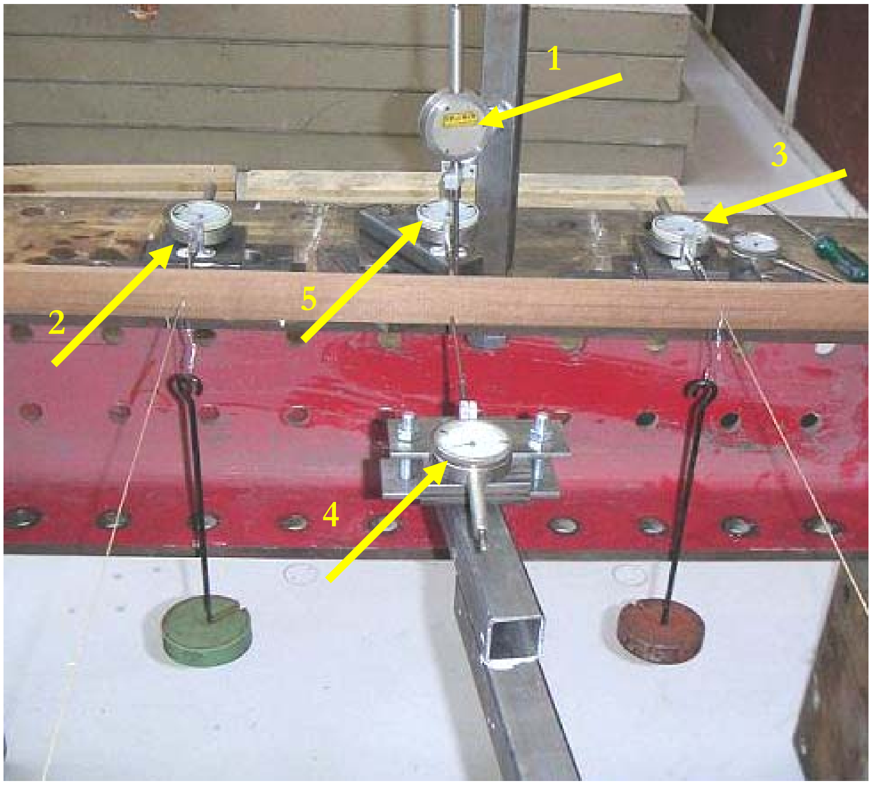
De experimenten zijn in sessies uitgevoerd. Per sessie werd eerst de belasting in horizontale richting aangebracht, zodat de lat een vooruitbuiging kreeg. Vervolgens werd de verticale belasting aangebracht. Deze verticale belasting werd stapsgewijs opgevoerd door steeds extra gewichten toe te voegen. De belasting in beide aangrijpingspunten werd hierbij aan elkaar gelijk gehouden. Nadat de maximale verticale belasting aangebracht was, werden alle gewichten verwijderd, waarna een nieuwe sessie gestart kon worden met een andere horizontale belasting. In Tabel 1 is te zien welke gewichten er toegepast zijn.

Horizontaal (kg)	Verticaal (kg)
0,71	0,68
1,21	1,21
1,71	1,68
2,21	2,21
2,71	2,68
	3,21

Tabel 1: Toegepaste gewichten

2.4 Meetopstelling

De vervormingen werden met behulp van vijf meetklokjes gemeten. In Figuur 6 is te zien hoe deze meetklokjes op de lat gepositioneerd waren. Meetklokje 1 meette de zakking van de lat in het midden van de overspanning, meetklokjes 2 en 3 meetten de zijdelingse uitbuiging ter plaatse van de aangrijpingspunten van de belasting, meetklokjes 4 en 5 meetten de zijdelingse uitbuiging in het midden van de overspanning. Meetklokjes 2 en 3 waren allebei op de zwaartelijn van de lat gepositioneerd. Meetkokje 4 had in onbelaste toestand een afstand van 9,0 mm tot de zwaartelijn van de lat, meetkokje 5 had een afstand van 17,8 mm tot de zwaartelijn. Doordat meetklokjes 4 en 5 niet op gelijke hoogte tegen de lat gepositioneerd waren (zie ook Figuur 8), kon hiermee ook de rotatie om de lengteas van de lat bepaald worden.



Figuur 6: Meetklokjes

Helaas hadden de meetklokjes slechts een beperkt bereik. De maximale mogelijke uitbuiging van het proefstuk, dat met de meetklokjes gemeten kon worden, was circa vijf centimeter. Dit werd al bereikt als de lasten een gewicht van ongeveer drie kilo hadden. Voor grotere belastingen is de vervorming daarom bepaald aan de hand van foto's. In Figuur 7 is hiervan een voorbeeld te zien.

Figuur 7: Vervorming bij verticale belasting van 17,5 kg in beide aangrijpingspunten

Duidelijk zichtbaar is dat de doorsnede om de lengteas van de lat geroteerd is. Voor elke belastingstap is een foto gemaakt; in deze foto's is vervolgens de vervorming opgemeten. De foto's zijn als bijlage B toegevoegd aan het rapport.

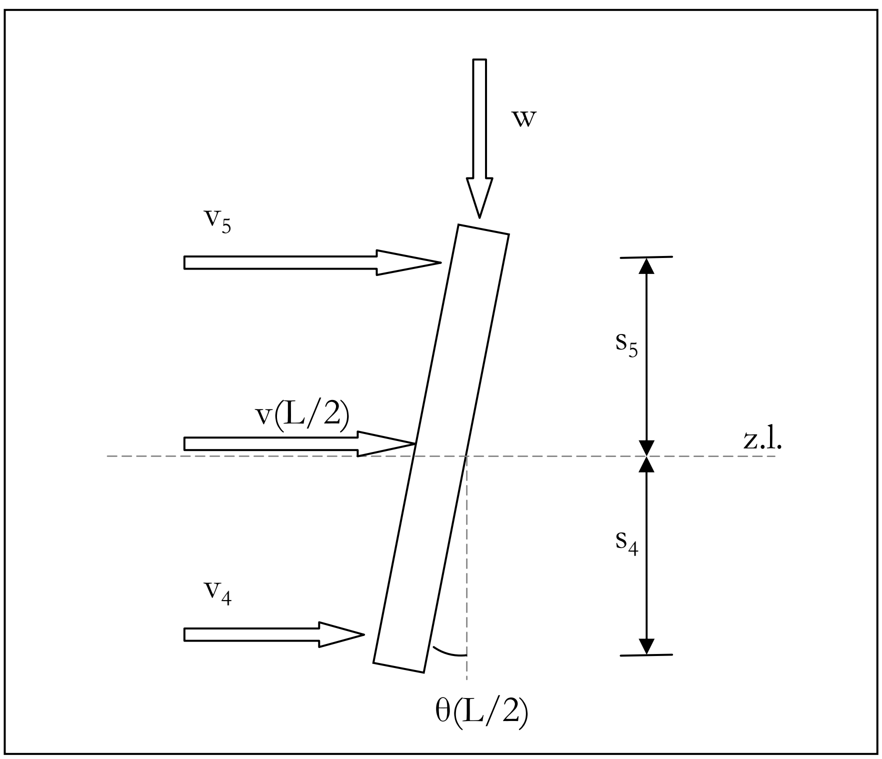
2.5 Verwerking meetresultaten

De afgelezen waarden van de meetkokjes zijn ingevoerd in een Excel-sheet (zie Bijlage B). Deze Excel-sheet heeft hieruit automatisch de verplaatsingen en rotatie bepaald. Doordat de lat een zakking ondergaat ten gevolge van de neerwaartse belasting, verandert de afstand van de meetklokjes ten opzichte van de zwaartelijn van de lat. In de Excel-sheet is hiermee rekening gehouden bij het bepalen van de zijdelingse uitbuiging in het midden van de overspanning. De formules die gebruikt zijn voor het bepalen van de vervormingen zijn:

$$v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{\left(S_4+w\right)\left(V_5-V_4\right)}{S_4+S_5}$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right)=\arctan\left(\frac{V_5-V_4}{S_4+S_5}\right)$$

De variabelen in deze formules zijn gedefinieerd zoals in Figuur 8 is aangegeven.



Figuur 8: Definities variabelen middendoorsnede

2.6 Verstoringen

Hoewel het experiment met de grootst mogelijke zorg is uitgevoerd, is het onvermijdelijk dat er toch kleine verstoringen kunnen plaatsvinden waardoor de gevonden resultaten niet volledig met de theorie overeenkomen. De belangrijkste verstoringen zullen hieronder besproken worden.

Materiaal imperfecties

Hout is nooit perfect homogeen, dus ook het gebruikte proefstuk bevatte imperfecties. Wel is bij het selecteren van een geschikt proefstuk gekeken of er geen knoesten of andere duidelijke imperfecties zichtbaar waren. Verder was de lat niet perfect recht, maar had deze al een kleine initiële vooruitbuiging.

Geboorde gaten

Om de belasting aan te kunnen laten grijpen ter plaatse van de zwaartelijn van de lat is het noodzakelijk geweest om twee gaatjes in de lat te boren. De diameter van deze gaatjes was 3,0 mm. Deze gaatjes verstoren de homogeniteit van het materiaal.

Verhinderde welving

De lat was niet precies even lang als de afstand tussen de twee gaffels, maar stak aan beide kanten 13,0 cm uit. Dit had tot gevolg dat er een geringe verhindering van de welving optrad. Uit het onderzoek van T. Hooijkaas[2] blijkt dat een verhindering van de welving alleen op kleine afstanden van de gaffels een (geringe) invloed heeft.

Wrijving katrollen

Voor de belasting in zijwaartse richting is gebruik gemaakt van katrollen. Deze katrollen bestonden uit een metalen staafje dat kon draaien in een metalen houder (zie Figuur 5). Bij het draaien van de katrol ontstaat er wrijving tussen het staafje en de houder. De grootte van deze wrijving is moeilijk te bepalen. Verondersteld is dat dit een geringe invloed heeft en de wrijving is daarom verwaarloosd.

Speling gaffels

De gaffels waren iets te ruim voor de breedte van de lat. Dit is verholpen door de spelingruimte op te vullen met papier.

Wrijving uiteinden meetklokjes op lat

De meetklokjes konden niet meezakken met de lat, hierdoor ontstond er wrijving tussen de uiteinden van de staafjes van de meetklokjes en de lat. Om deze wrijving te verminderen, is er ter plaatse van de contactpunten tussen de meetklokstaafjes en de lat plakband aangebracht. Dit is te zien in Figuur 9.

Niet symmetrische belasting

De gewichten die gebruikt zijn om de lat te belasten hadden niet allemaal exact dezelfde massa. Hierdoor was het onvermijdelijk dat de belasting ter plaatse van het ene aangrijpingspunt iets verschilde ten opzichte van het andere aangrijpingspunt. Dit verschil was maximaal 2 á 3 honderdsten van een kilogram.

[2] T. Hooijkaas; Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen; 2004

Figuur 9: Plakband om wrijving te verminderen

Krachten door meetklokjes op lat uitgeoefend

De meetklokjes werkten door middel van een veermechanisme dat ervoor zorgt dat de uiteinden van de staafjes altijd op het proefstuk blijven staan. Dit veermechanisme veroorzaakte echter ook een kracht die de lat probeert weg te drukken. Drie van deze krachten werkten aan de ene zijde van de lat en slechts één kracht werkte aan de andere kant. Het gevolg was dat de lat een extra initiële vooruitbuiging kreeg van ongeveer 5 mm in het midden van de overspanning en ongeveer 3 mm ter plaatse van de aangrijpingspunten van de belasting. Deze extra vooruitbuiging is wel in het analytische model, dat in hoofdstuk 3 beschreven zal worden, meegenomen, maar omdat deze moeilijk te bepalen is, is het toch een mogelijke bron van fouten.

Dwarscontractiecoëfficiënt

De dwarscontractiecoëfficiënt ν is moeilijk experimenteel te bepalen, om deze reden is hiervoor 0,1 aangenomen. Uit een gevoeligheidsanalyse van het analytische model is gebleken dat het model slechts weinig gevoelig is voor een variatie van ν tussen de waarden 0 en 0,5 (dit zijn waarden waartussen ν zich met zeer grote waarschijnlijkheid zal bevinden).

Richting horizontale belasting

Alleen in onbelaste toestand greep de horizontale belasting ook echt horizontaal aan. Zodra de verticale belasting aangebracht werd kreeg de lat een zakking, en liepen de draden die van de lat naar de katrollen liepen dus onder een helling. Dit is ook te zien in Figuur 7. Hierdoor werd een omhoogwerkende kracht op de lat uitgeoefend.

Bevestiging verticale belasting

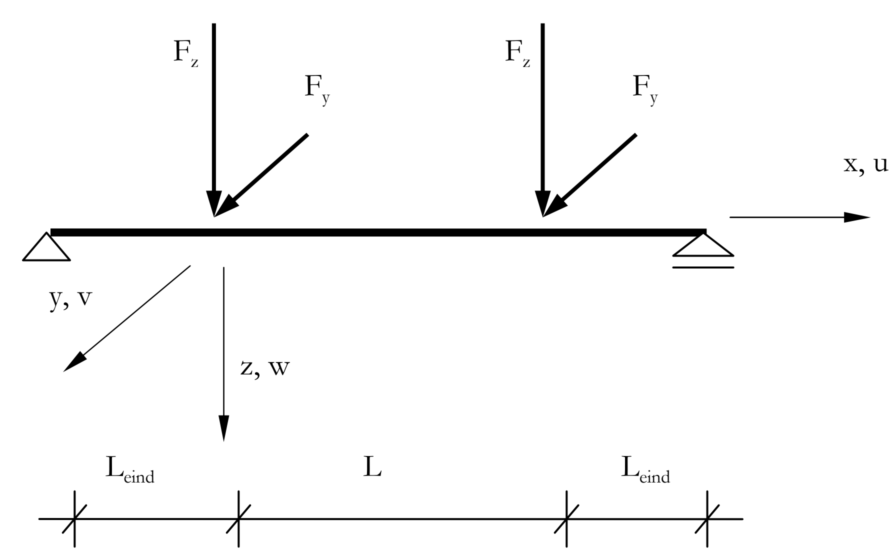
De verticale belasting greep op de lat aan via een stukje ijzerdraad wat door een gaatje in de lat geknoopt was. Nadeel hiervan was dat wanneer de lat een rotatie om de lengteas onderging het hierin enigszins verhinderd werd door het ijzerdraad.

3 Analytisch model

In Vrouwenvelder[1] zijn, met behulp van het principe van minimale potentiële energie, twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen afgeleid die het kipgedrag van liggers beschrijven. Om te onderzoeken of de resultaten uit het experiment hiermee overeenkomen, is er een analytisch model opgesteld waarin deze differentiaalvergelijkingen toegepast worden op de proefopstelling. In dit hoofdstuk zal dit model toegelicht worden. Het volledige model is te vinden op de cd-rom, die als bijlage B aan dit rapport is toegevoegd.

3.1 Schematisering

De proefopstelling is geschematiseerd tot het mechanicaschema zoals dat in Figuur 10 is afgebeeld.



Figuur 10: Schematisatie proefopstelling

De differentiaalvergelijkingen zijn afgeleid voor de situatie waarbij twee momenten op de uiteinden van de ligger werken. Dit komt overeen met het middengedeelte tussen de puntlasten in bovenstaande schematisatie. Voor de twee delen van de ligger tussen de opleggingen en de puntlasten gaat deze theorie echter niet op. Er zal dus alleen gekeken worden naar het middengedeelte van de ligger. De twee buitenste delen hebben echter wel invloed op de vervorming van het middengedeelte. Ter plaatse van de puntlasten is de ligger namelijk al vervormd. Deze vervormingen zijn verwerkt in de randvoorwaarden.

[1] Prof. Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder; Structural stability; 2003

3.2 Differentiaalvergelijkgen

De algemene vorm van de differentiaalvergelijkingen luidt[3]:

$$\left(EI_{yy}v''\right)''-\left(M_y^0\theta\right)''+\left(Nv'\right)'=\Delta n_y$$

$$\left(Cw\times\theta''\right)''-\left[\left(\frac{N\times I_p}{A}+S_t\right)\theta'\right]'+M_y^0v''=\Delta m_t$$

Aangenomen wordt dat voor niet-dunwandige staven de welvingstijfheid Cw hierin verwaarloosd kan worden[2]. Omdat het proefstuk als prismatisch beschouwd kon worden en omdat Δn_y en Δm_t in het beschouwde belastinggeval nul waren, konden de differentiaal-vergelijkingen verder vereenvoudigd worden tot:

$$EI_{yy}v''''+M_y\theta''-Nv''=0$$

$$-\left(\frac{N\times I_p}{A}+S_t\right)\theta''+M_yv''=0$$

Dit zijn de differentiaalvergelijkingen zoals deze in het analytische model gebruikt zijn.

3.3 Randvoorwaarden

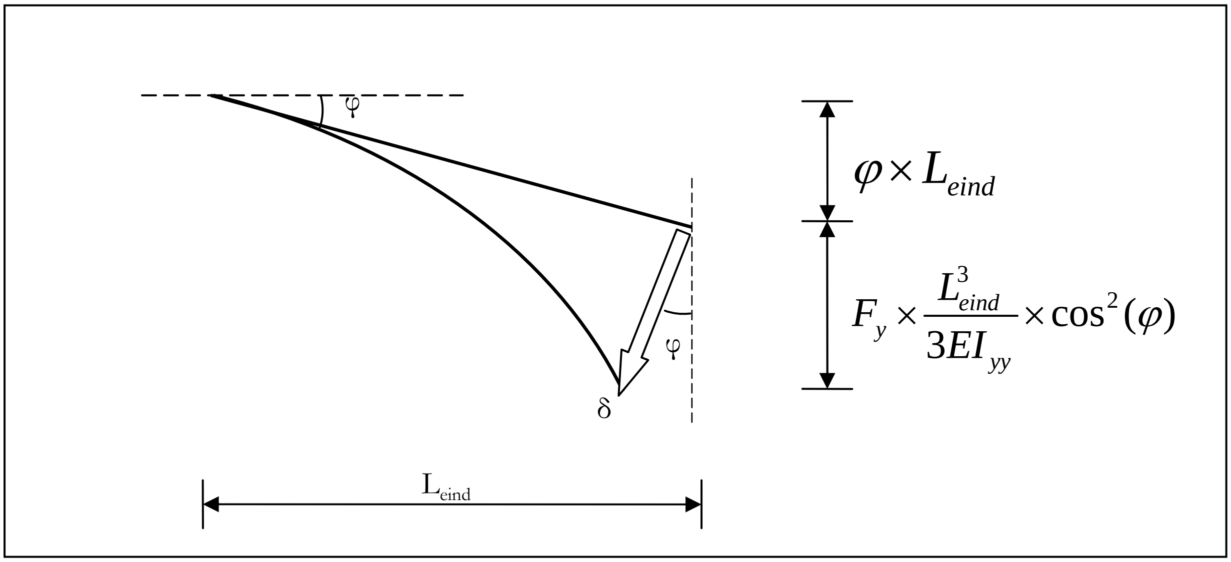
Er is sprake van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen waarvan één van de vierde orde en één van de tweede orde. Er zijn dus in totaal zes randvoorwaarden nodig om een oplossing te kunnen vinden. In Tabel 2 is een overzicht gegeven van de gebruikte randvoorwaarden.

x=0	1	$\theta(0)=\frac{d}{dx}\theta(0)\times L_{eind}$
	2	$M_y=-EI_{yy}\times\frac{d^2}{dx^2}v(0)$
	3	$v(0)=\frac{d}{dx}v(0)\times L_{eind}+F_y\times\frac{L_{eind}^3}{3EI_{yy}}\times\cos^2(\frac{d}{dx}v(0))$
x=L	4	$\theta(L)=-\frac{d}{dx}\theta(L)\times L_{eind}$
	5	$M_y=-EI_{yy}\times\frac{d^2}{dx^2}v(0)$
	6	$v(L)=-\frac{d}{dx}v(L)\times L_{eind}+F_y\times\frac{L_{eind}^3}{3EI_{yy}}\times\cos^2(\frac{d}{dx}v(0))$

Tabel 2: Randvoorwaarden

[3] Z. P. Bažant & L. Cedolin. 1991. Stability of structures. Hoofdstuk 6: Thin-walled beams. New York, Oxford University Press.
[2] T. Hooijkaas; Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen; 2004

Randvoorwaarde 3 en 6 schrijven de verplaatsing voor ter plaatse van de aangrijpingspunten van de puntlasten (x=0 en x=L) ten opzichte van de gaffelopleggingen. In Figuur 11 is het deel van de ligger rechts van de puntlasten te zien.



Figuur 11: Bepaling randvoorwaarde

De uitbuiging δ is hierin berekend met behulp van het vergeet-me-nietje:

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{F_y \times L_{eind}^3}{3EI_{yy}}$$

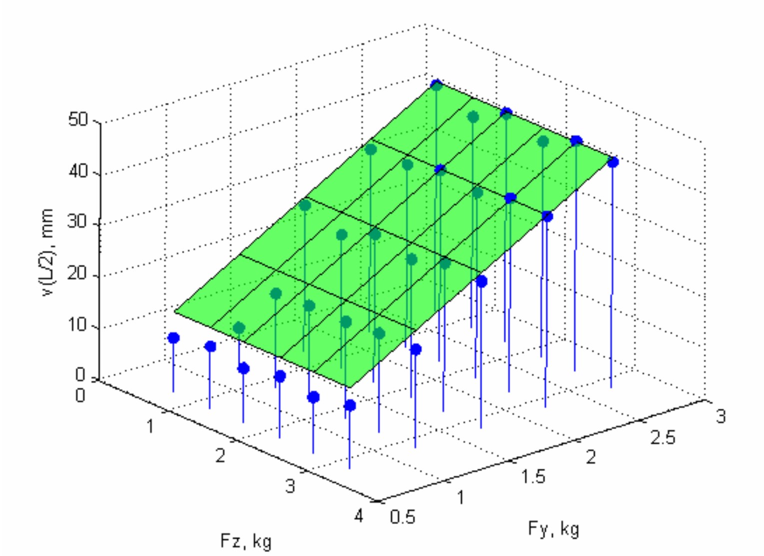
Wanneer φ wordt geschreven als de afgeleide van v(x) naar x volgt nu de uitdrukking zoals deze in Tabel 2 is gegeven. De zes randvoorwaarden vormen samen met de twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen het model, dat het kipgedrag van de ligger kan beschrijven.

4 Resultaten

In dit hoofdstuk wordt een overzicht gegeven van de resultaten zoals deze gevonden zijn tijdens het experiment. Deze resultaten worden vervolgens vergeleken met de vervorming die op analytische wijze bepaald is.

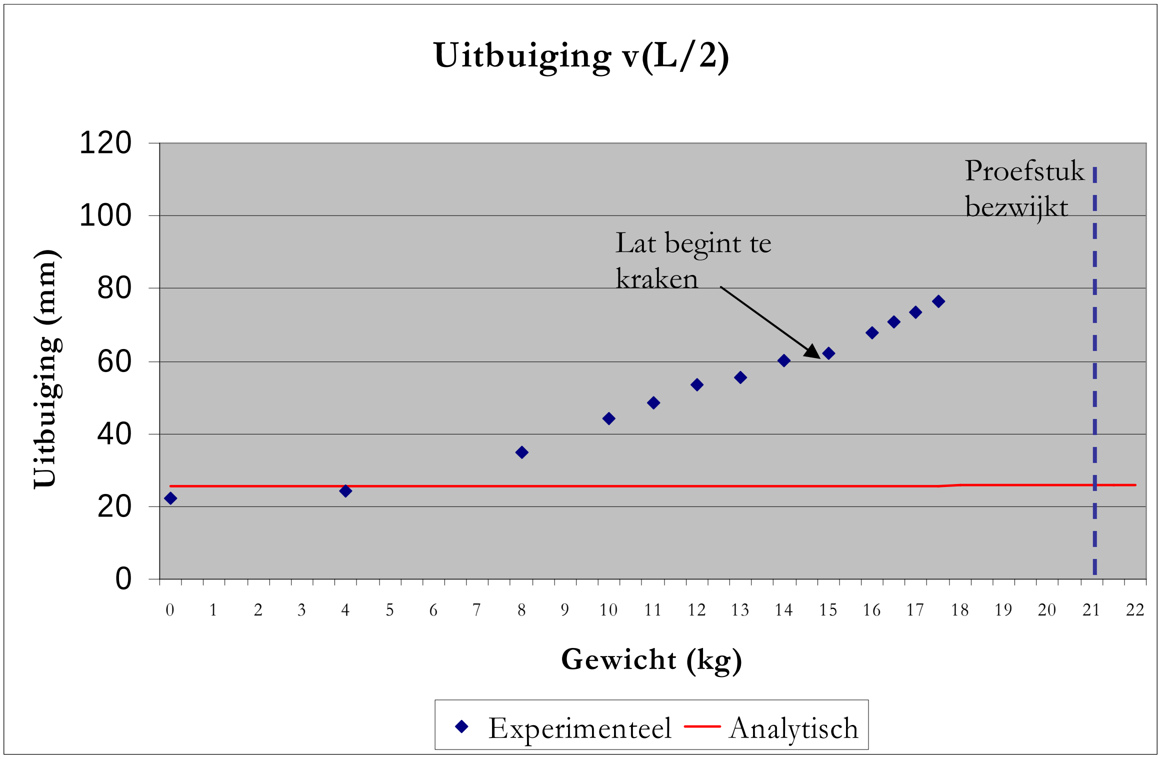
4.1 Vergelijking

Tot verticale belasting van ongeveer drie kilo zijn de metingen verricht met behulp van meetklokjes. Het blijkt dat deze metingen redelijk overeenkomen met de analytische bepaalde waarden. Voor kleine waarden van F_y kwamen de resultaten iets minder goed overeen. In werkelijkheid waren de vervormingen hier 30 á 40% kleiner dan zoals met het analytische model voorspeld was. Voor waarden van F_y groter dan ongeveer 1,5 kg kwamen de waarden wel goed overeen. Het analytische model gaf hier waarden die tussen de 0 en 10% te hoog waren. Het één en ander is weergegeven in Figuur 12. Het groene vlak geeft de analytische waarden weer en de blauwe bollen zijn de experimenteel bepaalde waarden.



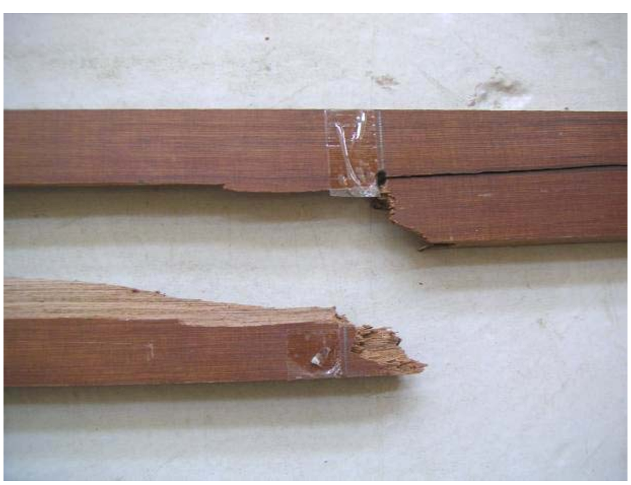
Figuur 12: Vergelijking meetresultaten met analytische model

Zoals ook in Figuur 12 te zien is laten zowel het experiment als de differentiaalvergelijking geen overtuigende extra zijdelingse verplaatsing door de verticale belasting F_z zien. Om te kunnen concluderen dat de differentiaalvergelijking klopt moet ook gekeken worden naar de resultaten die voor grotere waarden van de verticale belasting F_z zijn bepaald (zie de foto's in bijlage B). Hieronder in Figuur 13 is te zien dat in tegenstelling tot het experiment de differentiaalvergelijking slechts een zeer kleine extra zijdelingse uitbuiging laat zien.



Figuur 13: Uitbuiging bij toenemende verticale belasting en een horizontale belasting van 1,21 kg

Voor de hoekverdraaiing om de lengteas θ geldt hetzelfde: uit de analytische berekening volgt bijvoorbeeld bij een verticale belasting van 17,5 kg en een horizontale belasting van 1,21 kg een rotatie van 0,0102 rad. Uit het experiment volgt echter een rotatie van 0,4012 rad.
Een verklaring hiervoor is dat de differentiaalvergelijking mogelijk niet toegepast kan worden bij belastingen die veel lager zijn dan de kritische kipbelasting. Uit onderzoek van het analytische model blijkt dat deze kritische kipbelasting voor het beschouwde proefstuk ongeveer 114 kg is. De lat is echter al bezweken bij een belasting van 21 kg. De verklaring hiervoor is dat de lat niet is bezweken op kipinstabiliteit, maar op een overschrijding van de treksterkte. Aan de breuk van de lat (zie Figuur 14) is te zien dat er een trekbreuk is ontstaan tussen de aangrijpingspunten en de onderkant van de lat. Doordat hier gaatjes in geboord zijn, was dit dus een zwakkere plek in het materiaal.



Figuur 14: Breuk

5 Berekening volgens NEN6760

Om de veiligheid van een constructies te waarborgen is er wettelijk bepaald dat deze altijd aan normen getoetst moeten worden, onder andere op sterkte, stijfheid en stabiliteit, voordat er daadwerkelijk tot de bouw mag worden overgegaan. Voor liggers moet hierbij ook altijd de veiligheid ten aanzien van kipinstabiliteit getoetst worden. De norm die gehanteerd dient te worden bij het toetsen van houten constructie-elementen is NEN6760:2001. In dit hoofdstuk zal voor het proefstuk, dat in het experiment gebruikt is, worden nagegaan hoe groot de belasting maximaal mag zijn. Tevens wordt deze waarde vergeleken met de berekening via de differentiaalvergelijkingen.

5.1 Materiaaleigenschappen

Het proefstuk bestaat uit gezaagd en geschaafd Cederhout. Aangenomen wordt dat de sterkteklasse hiervan D30 is. De sterktegegevens van hout met deze sterkteklasse staan in onderstaande tabel[4].

Eigenschap	Waarde	Eenheid
$f_{m;0;rep}$	30	N/mm^2
$E_{0;ser;rep}$	10000	N/mm^2
ϱ_{rep}	530	kg/m^3
$f_{t;0;rep}$	18	N/mm^2
$f_{t;90;rep}$	0,6	N/mm^2
$f_{c;0;rep}$	23	N/mm^2
$f_{c;90;rep}$	8,0	N/mm^2
$f_{v;0;rep}$	3,0	N/mm^2
$E_{0;u;rep}$	8000	N/mm^2
$E_{90;ser;rep;loofhout}$	640	N/mm^2
$G_{ser;rep}$	600	N/mm^2

Tabel 3: Materiaaleigenschappen gezaagd hout, sterkteklasse D30

5.2 Bepaling modificatiefactor k_{ins}

Bij een berekening volgens NEN6760 dient de modificatiefactor k_{ins} bepaald te worden. De buigspanningen in een onderdeel moeten dan voldoen aan:

$$\sigma_{m;0;d} \leq k_{ins} \times f_{m;0;d}$$

Waarin:
$\sigma_{m;0;d}$ = de rekenwaarde van de buigspanning
$f_{m;0;d}$ = de rekenwaarde van de buigsterkte in uiterste grenstoestand

Voor een complete berekening van deze modificatiefactor wordt verwezen naar bijlage A. Het blijkt dat k_{ins}= 1,0.

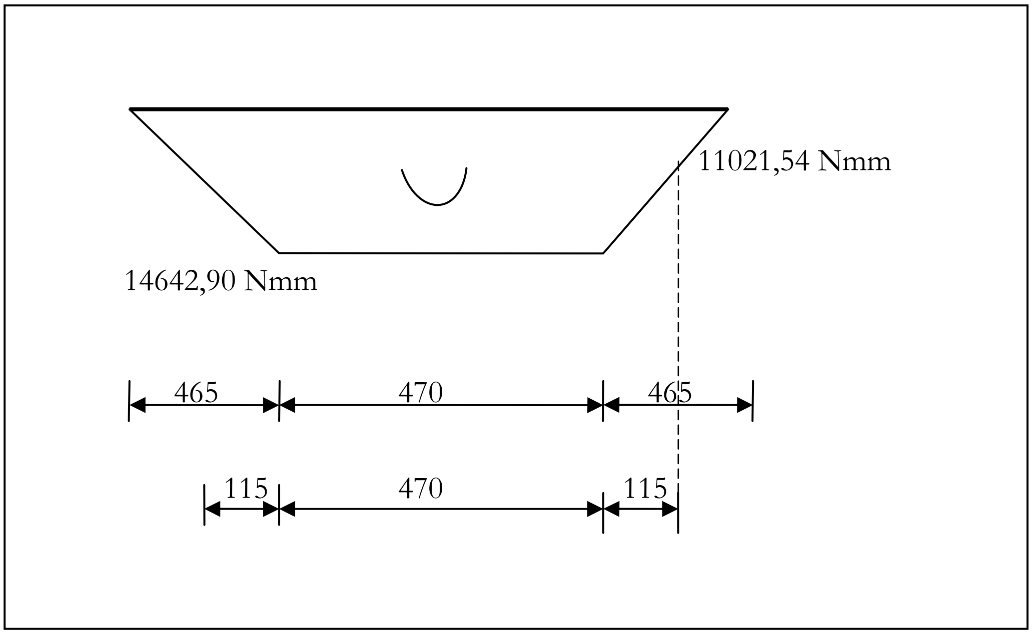
[4] Stichting Centrum-Hout: www.houtinfo.nl. Geraadpleegd op: 29 mei 2006

5.3 Bepaling rekenwaarde buigspanning

Voor het bepalen van de rekenwaarde van de buigspanning $\sigma_{m;0;d}$ geeft NEN6760 de volgende formule:

$$\sigma_{m;0;d} = \frac{2}{l \times W_y} \times \int_{+0,25 \times l}^{+0,75 \times l} M_q dx$$

In het experiment is het proefstuk maximaal met een moment M_y van 14642,90 Nmm belast. De momentenlijn over de gehele ligger ziet er dan uit zoals in Figuur 15 is afgebeeld.



Figuur 15: Momentenlijn

Bepaald moet worden wat de gemiddelde waarde van het moment is over het deel van de ligger dat wordt begrensd door x = 0,25 * l en x = 0,75 * l. Voor de situatie zoals in Figuur 15 is dit dus 14047,96 Nmm. Voor de rekenwaarde van de buigspanning volgt nu dan:

$$\sigma_{m;0;d} = \frac{2}{l \times W_y} \times \int_{+0,25 \times l}^{+0,75 \times l} M_q dx = \frac{14047,96}{\left(\frac{14 \times 40^2}{6} \right)} = 3,76 \frac{N}{mm^2}$$

5.4 Toetsing

Alle grootheden zijn nu bekend, dus het proefstuk kan getoetst worden:

$$\sigma_{m;0;d} \leq k_{ins} \times f_{m;0;d} \Rightarrow 3,76 \leq 1,0 \times \frac{30}{1,5} = 20$$

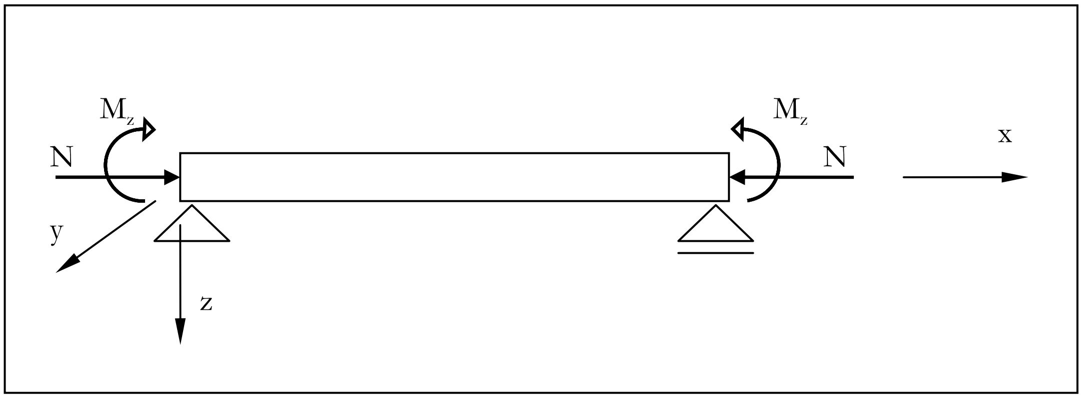
Het blijkt dat de zwaarste belasting in het experiment voldoende veilig was bij een toetsing op kipstabiliteit.

5.5 Vergelijking met analytische berekening

Berekend kan worden dat de maximale belasting waarbij de constructie nog als veilig beschouwd mag worden volgens NEN6760 77828,85 Nmm is. Om dit moment te bereiken moeten gewichten van ruim 17 kg aan de lat gehangen worden.
Uit onderzoek aan het analytische model (zie bijlage B) blijkt dat instabiliteit pas bij een belasting van rond de 114 kg verwacht mag worden. Dit is ongeveer 7 keer zo veel als berekend volgens de normen. Uit het experiment is gebleken dat de lat bij een belasting van 21 kg bezweken is, dit is dus iets hoger. Het bezwijken is echter niet veroorzaakt door kipinstabiliteit, maar door een overschrijding van de treksterkte. Bij welke belasting kipinstabiliteit in werkelijkheid op zou treden is dus niet bekend, maar ligt in elk geval boven de 21 kg.

6 Stijfheidsmatrix inclusief normaalkracht

In dit hoofdstuk wordt de tweede-orde stijfheidsmatrix voor een raamwerkelement, die is belast op buiging in het xy-vlak, bepaalt. Daarbij wordt de invloed van kip, ten gevolge van twee randmomenten M_y en een normaalkracht N, meegenomen.



Figuur 16: Ligger belast door randmomenten en normaalkracht

6.1 Afleiding

Een stijfheidsmatrix geeft het verband tussen de vervorming en de belasting:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{Oftewel} \qquad \{f\} = [K]\{v\}$$

Hierin is K dus de stijfheidsmatrix.

Het bepalen van de stijfheidsmatrix is grotendeels met behulp van het computerprogramma Maple gedaan. De sheet die hiermee gemaakt is, is opgenomen als bijlage B. De matrix zoals deze door Maple wordt afgeleid is erg onoverzichtelijk en deze wordt hier dan ook niet weergegeven. Met behulp van zeven substituties is de stijfheidsmatrix sterk te vereenvoudigen.

$$NI_p + S_t A = \alpha$$

$$-N\alpha - N\alpha A + A\left(N\alpha + M_y^2\right) = \beta$$

$$\sqrt{EI_{yy}\alpha} = \varepsilon$$

$$\frac{\sqrt{\beta}l}{\varepsilon} = \zeta$$

$$\sqrt{\beta}\sin(\zeta)=\psi$$

$$\frac{1}{\alpha\left(\psi l-2\varepsilon+2\varepsilon\cos\left(\zeta\right)\right)}=\mu$$

$$\beta\varepsilon\cos\left(\zeta\right)=\kappa$$

$$\left[K\right]=\mu\begin{bmatrix}-\beta\psi & -\beta\psi l+\varepsilon\beta-\kappa & \beta\psi & \kappa-\varepsilon\beta\\ \kappa-\varepsilon\beta & \kappa l-\varepsilon^2\psi & -\kappa+\varepsilon\beta & \varepsilon^2\psi-\varepsilon\beta l\\ \beta\psi & -\kappa+\varepsilon\beta & -\beta\psi & -\varepsilon\beta+\kappa+\beta\psi l\\ \kappa-\varepsilon\beta & \varepsilon^2\psi-\varepsilon\beta l & -\kappa+\varepsilon\beta & \kappa l-\varepsilon^2\psi\end{bmatrix}$$

Het is nu veel eenvoudiger om regelmaat te ontdekken in de matrix. Het blijkt dat de matrix bestaat uit de som van een symmetrische matrix en een puntsymmetrische matrix:

$$\left[K\right]=\left[K_{symmetrisch}\right]+\left[K_{puntsymmetrisch}\right]$$

waarin:

$$\left[K_{symmetrisch}\right]=\mu\begin{bmatrix}-\beta\psi & \frac{-\beta\psi l}{2} & \beta\psi & \kappa-\varepsilon\beta\\ \frac{-\beta\psi l}{2} & \kappa l-\varepsilon^2\psi & -\kappa+\varepsilon\beta & \varepsilon^2\psi-\varepsilon\beta l\\ \beta\psi & -\kappa+\varepsilon\beta & -\beta\psi & \frac{\beta\psi l}{2}\\ \kappa-\varepsilon\beta & \varepsilon^2\psi-\varepsilon\beta l & \frac{\beta\psi l}{2} & \kappa l-\varepsilon^2\psi\end{bmatrix}$$

$$\left[K_{puntsymmetrisch}\right]=\mu\begin{bmatrix}0 & -\kappa+\varepsilon\beta-\frac{\beta\psi l}{2} & 0 & 0\\ \kappa-\varepsilon\beta+\frac{\beta\psi l}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \kappa-\varepsilon\beta+\frac{\beta\psi l}{2}\\ 0 & 0 & -\kappa+\varepsilon\beta-\frac{\beta\psi l}{2} & 0\end{bmatrix}$$

6.2 Controles

Om de validiteit van de stijfheidsmatrix aan te tonen, wordt er een aantal controles uitgevoerd.

6.2.1 Geen normaalkracht

In een eerder Bachelor eindwerk[2] is een stijfheidsmatrix afgeleid voor kip, ten gevolge van twee randmomenten, waarbij geen normaalkracht in het element aanwezig was. De stijfheidsmatrix, zoals die in dit hoofdstuk is afgeleid, is dus in feite een meer algemene vorm van de stijfheidsmatrix. Wanneer de normaalkracht op nul gesteld zou worden, zouden de twee matrices dus dezelfde resultaten moeten geven. In bijlage B is te zien dat dit inderdaad het geval is.

6.2.2 Eerste-orde matrix

De matrix K beschrijft het tweede-orde gedrag in het xy-vlak van een raamwerkelement, ten gevolge van twee randmomenten M_y. Wanneer deze randmomenten naar nul naderen, moet dus de eerste-orde stijfheidsmatrix in het xy-vlak volgen. Met behulp van Maple is deze limiet berekend (zie bijlage B). Het blijkt dat deze inderdaad gelijk is aan de eerste-orde stijfheidsmatrix:

$$\lim_{M_y \to 0} \left[K \right] = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \left[K_{eerste-orde} \right]$$

[2] T. Hooijkaas; Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen; 2004

7 Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk worden de conclusies, die uit dit eindwerk getrokken kunnen worden, uiteengezet en worden er aanbevelingen gedaan voor vervolgonderzoek.

7.1 Conclusies

In een eerder bachelor-eindwerk werd met behulp van een stijfheidsmatrix gesteld dat vervormingen kleiner zouden worden bij een toenemende belasting. Voor dit niet verwachtte resultaat werden drie mogelijke verklaringen gegeven:

- Het onverwachte gedrag treedt in werkelijkheid toch op
- De differentiaalvergelijkingen zijn niet geldig voor de beschouwde situatie
- Er zijn fouten gemaakt in de afleiding van de stijfheidsmatrix

Naar aanleiding van de resultaten van het experiment kan geconcludeerd worden dat bij een toenemende belasting de vervorming ook toeneemt. De eerste verklaring kan dus niet correct zijn. Berekeningen met behulp van differentiaalvergelijkingen laten ook een toename zien in de vervorming bij toenemende belasting. Dus ook de tweede mogelijke verklaring kan niet correct zijn.
In dit eindwerk is nogmaals de stijfheidsmatrix (in meer algemene vorm) afgeleid, welke, indien de normaalkracht op nul gesteld wordt, overeenkomt met de eerder afgeleide matrix. Dit bevestigd nogmaals dat het zeer waarschijnlijk is dat er geen fouten zijn gemaakt bij de afleiding van de stijfheidsmatrix. Het is dus ook niet waarschijnlijk dat de derde mogelijke verklaring juist is.
Een andere wel mogelijke verklaring is dat de afgeleide matrix niet juist is toegepast op de beschouwde situatie. De mogelijkheid van deze verklaring is in dit eindwerk niet onderzocht.

Opvallend is dat de analytisch bepaalde toename van de vervormingen veel geringer is dan er is waargenomen in het experiment. Dit zou verklaard kunnen worden doordat de differentiaalvergelijkingen alleen geldig zijn voor belastingen in de nabijheid van de kritieke kipbelasting.

Een andere conclusie die getrokken kan worden uit dit eindwerk is dat NEN6760 een conservatieve (en bewerkelijke) berekeningsmethode geeft. De belasting waarbij kip-instabiliteit optreedt volgens een meer nauwkeurige berekening, namelijk via differentiaal-vergelijkingen, ligt een factor 7 hoger. Er moet wel bedacht worden dat deze hoge belasting in de praktijk nooit gehaald zal worden, omdat het element al eerder bezweken zal zijn vanwege de beperkte treksterkte. Dit is ook gebleken in het experiment; het proefstuk bezweek bij een belasting die ongeveer een factor 5 lager lag dan de theoretische kiplast (maar nog altijd hoger dan de maximaal toelaatbare belasting volgens de geldende norm).

7.2 Aanbevelingen

Er is nog geen geschikte verklaring gevonden voor het onverwachte gedrag van de stijfheidsmatrix uit het voorgaande bachelor-eindwerk. Het verdient dus aanbeveling om dit verder te onderzoeken. Ook zou onderzocht moeten worden of de afgeleide differentiaal-vergelijkingen alleen toepasbaar zijn voor belastingen in de nabijheid van de kritische

kipbelasting, of dat de differentiaalvergelijkingen in het geheel niet bruikbaar zijn in de beschouwde situaties.
Voordat de afgeleide stijfheidsmatrix toegepast kan worden in raamwerkprogramma's zal deze eerst ook verder uitgebreid moeten worden naar meer algemene toepassingssituaties. Met name het uitbreiden van de matrix zodat deze toegepast kan worden op raamwerkelementen die zijn belast op buiging door een niet-constant kipmoment.

Literatuurlijst

1. Prof. Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder; Structural stability; Februari 2003; Delft

2. T. Hooijkaas; Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen; Oktober 2004; Delft

3. Z. P. Bažant & L. Cedolin. 1991. Stability of structures. Hoofdstuk 6: Thin-walled beams. New York, Oxford University Press

4. Stichting Centrum-Hout: www.houtinfo.nl. Geraadpleegd op: 29 mei 2006

Bijlage A: Bepaling modificatiefactor k_{ins}

Om de modificatiefactor te kunnen berekenen moeten er eerst een aantal andere grootheden berekend worden.

Kritieke buigspanning

De formule voor het bepalen van de kritieke buigspanning is:

$$\sigma_{m;cr} = \frac{k_{E;z} \times h}{2 \times r_y} \times \frac{f_{c;0;rep}}{1 - \frac{I_z}{I_y}} \times \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{I_z}{I_y}\right) \times \left(\frac{4 \times l_{buc}^2 \times G_{ser;rep} \times I_{tor}}{\pi^2 \times E_{0,ser;rep} \times I_z \times h^2} + \frac{4 \times C_w}{h^2 \times I_z} \right)} + \frac{e}{h} \right) \qquad (1)$$

Waarin:

$$i_z = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{14 \times 40^3}{12}\right)}{14 \times 40}} = 11,55$$

$$l_{buc} = l_{sys} = 1400$$

$$\lambda_z = \frac{l_{buc;z}}{i_z} = \frac{1400}{11,55} = 121,21$$

$$k_{E;z} = \frac{\pi^2 \times E_{0;u;rep}}{\lambda_z^2 \times f_{c;0;rep}} = \frac{\pi^2 \times 8000}{121,21 \times 23} = 28,32$$

$$r_y = \frac{W_y}{A} = \frac{\left(\frac{14 \times 40^2}{6}\right)}{14 \times 40} = 6,67$$

$$C_w = \frac{h^3 \times b^3}{160} = \frac{40^3 \times 14^3}{160} = 1097600$$

Wanneer deze waarden in formule (1) ingevuld worden, volgt dat $\sigma_{m;cr}$ = 19985,59 N/mm^2.

Factor k_m

De modificatiefactor k_{ins} is ook afhankelijk van de factor k_m die volgens vergelijking (2) bepaald dient te worden.

$$k_m = \frac{\sigma_{m;cr}}{f_{m;0;rep} \times \left(1 + 0{,}1 \times \sqrt{\frac{\eta_z \times E_{0;u;rep}}{f_{m;0;rep}}}\right)} \tag{2}$$

Waarin:

$$r_z = \frac{W_z}{A} = \frac{\left(\frac{40 \times 14^2}{6}\right)}{14 \times 40} = 2{,}33$$

$$\eta_z = \frac{i_z}{300 \times r_z} = \frac{11{,}55}{300 \times 2{,}33} = 0{,}017$$

Wanneer de waarden voor r_z en η_z in formule (2) ingevuld worden, volgt dat k_m = 549,24.

Modificatiefactor k_{ins}

Het blijkt dat $k_m \geq 1$; NEN6760 zegt dan dat de modificatiefactor met formule (3) berekend dient te worden:

$$k_{ins} = \frac{k_m \times \left(1 + 0{,}1 \times \sqrt{\eta_z \times \frac{E_{0;u;rep}}{f_{m;0;rep}}}\right)}{k_m + \sqrt{0{,}5 \times k_{E;z} \times \eta_z \times \lambda_z \times \frac{f_{c;0;rep}}{f_{m;0;rep}}}} \tag{3}$$

Wanneer alle waarden in deze formule ingevuld worden, volgt dat k_{ins} = 1,20. NEN6760 stelt echter dat k_{ins} nooit groter dan 1 mag zijn, hieruit volgt dus dat k_{ins} = 1,0.

Bijlage B: CD-Rom

- Maple-sheet: Analytisch model
- Maple-sheet: Bepaling stijfheidsmatrix
- Excel-sheet: Resultaten experiment
- Filmpje bezwijken proefstuk
- Foto's experiment

Bijlage C: Orginele opdracht

BSc – eindwerk

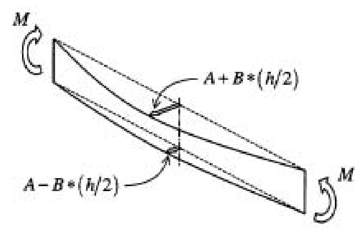
Structural Engineering

Stijfheidsmatrix voor kipberekeningen II

Toelichting

Kipcontrole van liggers is een vaak terugkerende taak in de constructiepraktijk. Vandaar dat veel raamwerkprogramma's kipcontroles automatisch uitvoeren. Hierbij worden benaderingsformules gebruikt uit de geldende normen. Deze aanplak is weliswaar veilig maar niet erg nauwkeurig.

Het nauwkeurige kipgedrag wordt beschreven door twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen. In een voorgaand B.Sc. project is hiermee een stijfheidsmatrix afgeleid. Dit is een belangrijk resultaat omdat als deze matrix geïmplementeerd wordt kan een raamwerk programma nauwkeurig de invloed van kip en torsieknik op constructiegedrag laten zien.



Echter, er zijn twee problemen met de afgeleide stijfheidsmatrix: 1) Het is alleen geldig voor een constant zijdelings kipmoment en 2) het tweede-orde-effect blijkt kleinere verplaatsingen tot gevolg te hebben in plaats van grotere verplaatsingen. Dit laatste vinden we heel vreemd maar zou niettemin correct kunnen zijn.

Opdracht

Leidt de stijfheidsmatrix af voor een tweedimensionaal raamwerkelement belast op normaalkracht en buiging door een lineair variërend kipmoment.
Doe een experiment op een schaalmodel om te zien of verplaatsingen inderdaad kleiner worden door het tweede-orde-effect van een zijdelings moment.

Secties

Constructiemechanica

Nadere info

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom kamer 5.24 tel. 015 278 8081
p.hoogenboom@citg.tudelft.nl
ir. J.W. Welleman kamer 6.07 tel. 015 278 4856
j.w.welleman@hetnet.nl

TU Delft Bachelor Opleiding Civiele Techniek

11 juli 2003