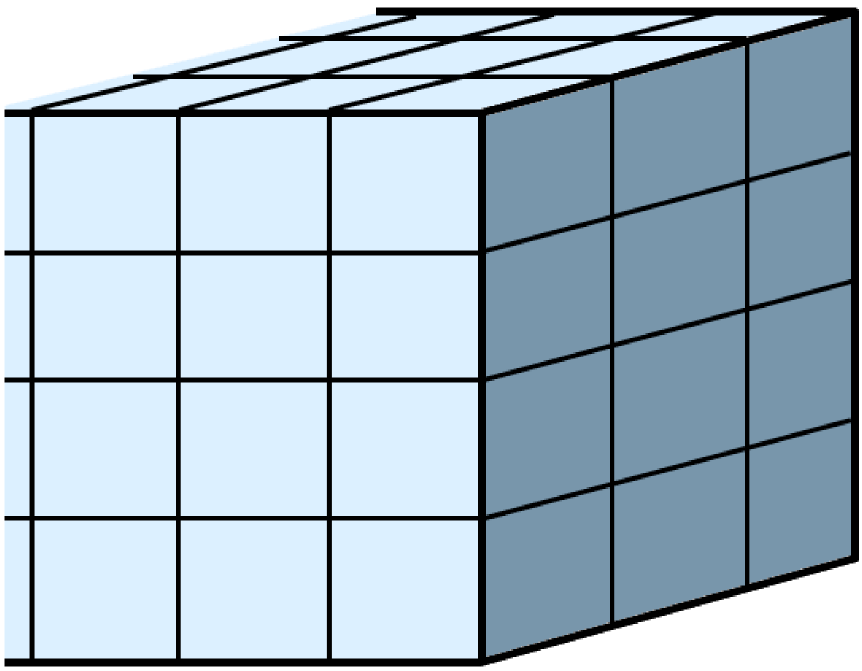
De nauwkeurigheid van wringspanningen berekend met de 3D eindige-elementenmethode

BSc Eindwerk 2022

Stan Landers

Delft University of Technology



TU Delft

De nauwkeurigheid van wringspanningen berekend met de 3D eindige-elementenmethode

BSc Eindwerk 2022

door

Stan Landers

Studentnummer
4910222

Supervisor 1:	Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
Supervisor 2:	Ir. C. Kasbergen
Datum:	30 oktober 2022
Faculteit:	Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen, Delft

TU Delft

Voorwoord

Voor u ligt het bachelor eindproject *De nauwkeurigheid van wringspanningen berekend met de 3D eindige-elementenmethode*. Gedurende dit traject heb ik onderzoek gedaan naar de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode, gebruikmakend van volume-elementen. Het gaat hierbij om de schuifspanningen in een rechthoekige doorsnede ten gevolge van een wringend moment. Het eindproject is geschreven voor het afstuderen aan de TU Delft voor de BSc Civiele Techniek.

Hierbij wil ik mijn eerste begeleider dhr P.C.J. Hoogenboom en tweede begeleider dhr C. Kasbergen bedanken voor het assisteren bij mijn bachelor eindproject.

Ik wens u veel leesplezier toe, en voor vragen of opmerkingen kunt u contact opnemen met mij.

Stan Landers
S.F.Landers@student.tudelft.nl
Delft, October 2022

Samenvatting

In het dictaat over wringing van P.C.J. Hoogenboom staat een regel beschreven over de nauwkeurigheid van de eindige-elementenmethode, gebruikmakend van volume-elementen. Echter, de regel is opgesteld aan de hand van onvoldoende gegevens en zal deze hypothese onderzocht moeten worden. Om zo nauwkeurig mogelijke oplossingen te krijgen uit het eindige-elementenprogramma is ook gekozen om te kijken naar foutwaarden bij 5 volume-elementen in de dikte. De onderzoeksvraag luidt dan ook als volgt: *In hoeverre is de regel, opgesteld door P.C.J. Hoogenboom [1, p. 22], correct wat betreft foutmarges bij drie- en vier volume-elementen in de dikte? En welke regel kan er opgesteld worden voor 5 elementen in de dikte?*

In deze studie is daarom onderzoek gedaan naar deze hypothese in het 3D eindige-elementenprogramma Ansys Workbench. Het eerste deel van de onderzoeksvraag is onderzocht door de numerieke schuifspanningsfout te berekenen op basis van een groot aantal hoogte-breedteverhoudingen. Dit is gedaan voor liggers met 3- en 4 dikte-elementen in de rechthoekige dwarsdoorsnede. De schuifspanningsfouten zijn apart berekend op basis van zowel tabelwaarden als Roark's formulas. Dezelfde aanpak is gebruikt om ook de fouten te bepalen bij 5 dikte-elementen. Voor deze situatie is daarentegen nog geen regel opgesteld.

De belangrijkste resultaten die hieruit tot stand zijn gekomen, zijn dat voor 3 dikte-elementen de regel wel klopt, voor 4 volume-elementen in de dikte echter niet. Tevens is van toepassing dat voor een rechthoekige doorsnede met b/h > 1 een numeriek foutpercentage geldt die rond de 1 % of lager ligt bij 5 dikte-elementen.

Inhoudsopgave

Voorwoord i

Samenvatting ii

1 Introductie 1

2 Theorie 3
- 2.1 De 3D eindige-elementenmethode . . . 3
  - 2.1.1 Bepalen van spanning . . . 3
  - 2.1.2 SOLID186 volume-element . . . 4
  - 2.1.3 Wringend moment en inklemming . . . 5
- 2.2 Analytische oplossing . . . 7
  - 2.2.1 Waardentabel voor rechthoekige doorsnede . . . 7
  - 2.2.2 Roark's formulas . . . 8
- 2.3 Numerieke oplossing . . . 9
  - 2.3.1 Drie dikte-elementen . . . 9
  - 2.3.2 Vier dikte-elementen . . . 10

3 Resultaten 3- en 4 Dikte-elementen 11
- 3.1 Berekening schuifspanning . . . 11
  - 3.1.1 Berekening analytische methode . . . 11
  - 3.1.2 Numerieke oplossing . . . 12
- 3.2 Foutberekening . . . 13
  - 3.2.1 3 elementen . . . 15
  - 3.2.2 4 elementen . . . 16

4 Resultaten 5 Dikte-elementen 17
- 4.1 Hoogte-elementen sprongen . . . 17
- 4.2 Foutberekening . . . 17

5 Conclusies en Aanbevelingen 21
- 5.1 Conclusies . . . 21
  - 5.1.1 Onderdeel regel 3 dikte-elementen . . . 21
  - 5.1.2 Onderdeel regel 4 dikte-elementen . . . 21
  - 5.1.3 Regel 5 dikte-elementen . . . 22
  - 5.1.4 Verschil tussen tabel en Roark . . . 22
- 5.2 Aanbevelingen . . . 23

Referenties 24

A Vormfuncties 25

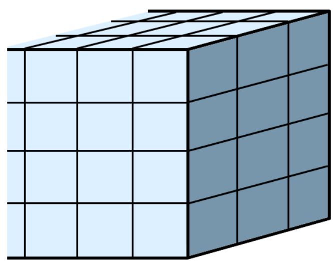
B Schuifspannings- en foutentabellen 26

C Python scripts 32

1
Introductie

Er is al eerder onderzoek gedaan naar de eindige-elementenmethode met behulp van volume-elementen door I. Shalom [2] in 2013. Met behulp van deze methode zijn spanningen berekend in een ligger met rechthoekige doorsnede. De ingeklemde ligger ondergaat in dit geval een wringend moment. P.C.J. Hoogenboom [1, p. 22] heeft uit dit onderzoek een regel geformuleerd over het aantal elementen dat nodig is in de dikte om deze wringspanningen te berekenen. Deze regel luidt als volgt:

"De wringspanningen worden berekend met een fout kleiner dan 3% als wordt gekozen voor 3 elementen in de dikte. In de hoogte moeten dan zoveel elementen worden gekozen dat de elementen ongeveer vierkant zijn in de dwarsdoorsnede. Een fout kleiner dan 1% wordt bereikt met 4 elementen in de dikte."



Figuur 1.1: Rechthoekige doorsnede met 3 volume-elementen in de dikte.

Figuur 1.1 visualiseert deze regel beter. In de figuur geeft de doorsnede 3 volume-elementen in de dikte weer. Voor de hoogte worden in dit geval 4 elementen gekozen om zo aan die vierkante elementen configuratie te komen. De regel is gebaseerd op slechts een paar metingen en kan daarom worden bestempeld als een aanname. Het is daarom belangrijk dat deze hypothese gecontroleerd wordt en eventueel kan worden verworpen.

Dit rapport beantwoordt de volgende vraag: *In hoeverre is de regel, opgesteld door P.C.J. Hoogenboom [1, p. 22], correct wat betreft foutmarges bij drie- en vier volume-elementen in de dikte? En welke regel kan er opgesteld worden voor 5 elementen in de dikte?* Dit gebeurt op basis van berekeningen die gedaan worden met een analytische methode en resultaten uit een numerieke proefopstelling. Aangezien de regel alleen geldt voor rechthoekige doorsneden, zal er uiteraard voor zowel de handberekening als de proefopstelling gekozen worden voor verschillende rechthoekige configuraties.

De opbouw van dit rapport is als volgt. In hoofdstuk 2 zal eerst de theorie worden besproken die onder andere gaat over de eindige-elementen methode met behulp van volume elementen. Deze berekeningen worden gedaan in de engineering simulatie-software genaamd Ansys Workbench. Tevens zal in dit hoofdstuk ook besproken worden hoe de analytische- en numerieke schuifspanningen berekend kunnen worden. De analytische resultaten hieruit zijn met de hand berekend en vormen de referentiewaarden om de numerieke fout te bepalen. Hoofdstuk 3 presenteert de verkregen resultaten en de foutmarges voor 3- en 4 dikte-elementen. Daarna zal in hoofdstuk 4 de additie aan de regel van P.C.J. Hoogenboom worden besproken die gaat over de foutpercentages bij gebruik van 5 volume-elementen in de dikte van de doorsnede. Hoofdstuk 5 zal tot slot een conclusie worden geven gebaseerd op de verkregen resultaten. Alle berekeningen die zijn uitgevoerd kunnen worden teruggevonden in de bijlagen van dit rapport, evenals alle verkregen resultaten.

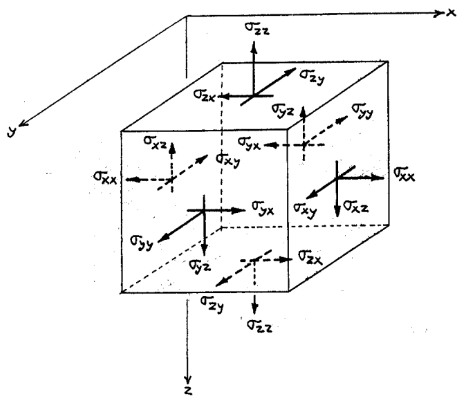
2
Theorie

2.1. De 3D eindige-elementenmethode

Voor het bepalen van spanningen in een constructie kan een eindige-elementen methode worden gebruikt. Voor dit onderzoek betreft het een 3D eindige-elementenmethode met behulp van volume-elementen. Een dergelijke methode deelt in dit geval een ligger op in een eindig aantal volume-elementen. Op elk individueel element kunnen vervolgens de spanningen worden benaderd. Één van de programma's waar deze 3D eindige-elementen problemen kunnen worden benaderd is Ansys Workbench. Voor de rest van dit rapport zullen daarom de berekeningen worden gemaakt met Ansys Workbench.

2.1.1. Bepalen van spanning

Elk volume-element heeft een aantal knooppunten, en op al die knooppunten werken een aantal verplaatsingen en spanningen. De spanningen op een dergelijk knooppunt staan weergegeven in figuur 2.1. Voor het bepalen van de spanning op de elementen wordt de stijfheidsmatrix gebruikt. Deze matrix volgt uit de wet van Hooke [4]. De eerste stap is het opstellen van de formules voor de verplaatsing van de knooppunten. Van deze verplaatsingen is u de verplaatsing in x-richting, v in y-richting en w in z-richting. Door verplaatsing van alle knooppunten in een element treedt een vervorming op. Deze kunnen opgedeeld worden in rek ten gevolge van de normaalspanning en rek ten opzichte van de schuifspanning. Formules 2.1 en 2.2 beschrijven de wet van Hooke.



Figuur 2.1: 3D element met aangegeven normaal- en schuifspanningen [3]

.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
2\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}, \;\; 2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}, \;\; 2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}
\tag{2.2}
$$

In deze vergelijkingen is E de elasticiteitsmodulus $[Pa]$, G is de glijdingsmodulus $[Pa]$ en ν is de Poisson-factor $[-]$. De glijdingsmodulus kan tevens worden bepaald aan de hand van $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Formules 2.1 en 2.2 kunnen in een stijfheidsmatrix worden gezet. Dit resulteert in de volgende vergelijking van de matrix:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Door formule 2.3 te inverteren komen de onbekende spanningen voor het isgelijkteken te staan en kunnen de normaal- en schuifspanningen benaderd worden. Deze vergelijking staat hieronder weergegeven (formules 2.4 en 2.5).

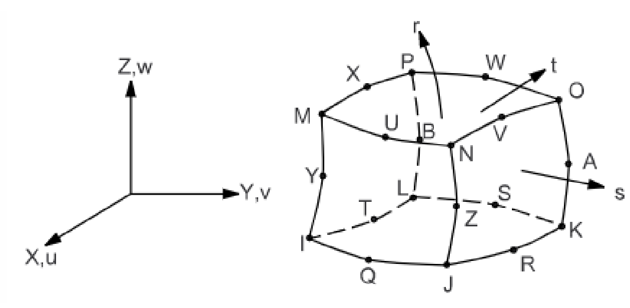
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$met\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.5}$$

Door bepaling van de verplaatsing van de knooppunten kunnen nu ook de spanningen worden bepaald. Deze spanningen zijn belangrijk voor later in het rapport.

2.1.2. SOLID186 volume-element

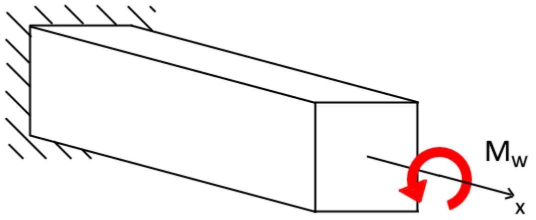
Een volume-element kan een verschillend aantal knooppunten hebben. Hoe meer knooppunten per element, hoe meer berekeningen in hetzelfde volume-element. Oftewel, een nauwkeuriger resultaat. Echter meer berekeningen betekent ook een langere rekentijd. Voor dit onderzoek zal alleen gekeken worden naar een soort kubusvormige volume-elementen. In 3D eindige-elementenprogramma Ansys worden hier spanningen berekend op elementen met 20 knooppunten genaamd SOLID186 (figuur 2.2). De verplaatsing van de elementen (u, v en w) wordt in de drie verschillende richtingen bepaald door bepaalde vormfuncties. Deze vormfuncties zijn behoorlijk lang en zijn daarom terug te vinden in bijlage A.



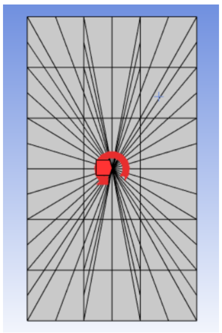
Figuur 2.2: SOLID186 volume-element met 20 knooppunten [5].

2.1.3. Wringend moment en inklemming

In dit sub-hoofdstuk, zal de theorie achter de aanpak en berekeningen van Ansys worden bestudeerd om een goed inzicht te krijgen van hoe de software opereert. Om de spanningen in de rechthoekige ligger te bepalen zal eerst een belasting moeten worden aangebracht op de ligger. In dit geval gaat het uiteraard om een wringend moment. Wringing ontstaat door de aanleg van een moment aan het uiteinde van een uitkragende ligger (figuur 2.3).



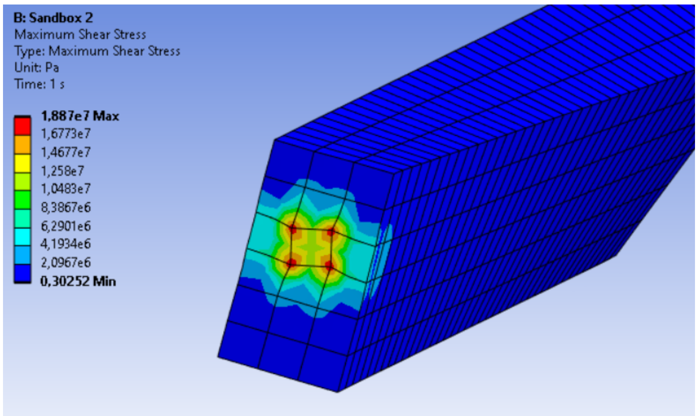
Figuur 2.3: Wringend moment grijpt aan op vlak, en roteert om de x-as.



Figuur 2.4: Wringend moment grijpt aan op een remote point en wordt herverdeeld over alle knooppunten van het vlak.

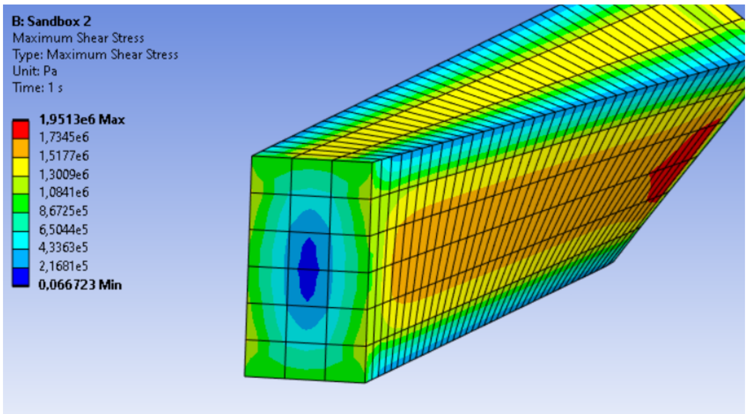
Het wringend moment grijpt aan in een zogenaamd 'remote point' op het vlak en wordt verdeeld over de knooppunten. Dit staat visueel weergegeven in figuur 2.4. In de figuur kan worden gezien dat het wringend moment wordt verdeeld over alle knooppunten van het vlak. Visueel wordt dit zichtbaar door de zwarte lijnen die vanuit het remote point naar ieder knooppunt leiden.

Om de gewenste schuifspanningen te krijgen door het wringend moment, moet de ligger ingeklemd worden. In Ansys kan gekozen worden om het hele vlak in te klemmen, of een of meer volume elementen. Beide manieren leveren verschillende resultaten op. Wanneer een of meer elementen worden ingeklemd, betekent dat enkel die elementen op de plek blijven staan, de overige elementen ondergaan een deformatie. Naast een deformatie treedt ook een reactie moment op als gevolg van het wringend moment. Dat reactiemoment bevind zich echter alleen ter plaatse van de opgelegde volume-elementen. Dit fenomeen staat in figuur 2.5 afgebeeld. Hierin kan het uiteinde van de ligger worden gezien waar deze is ingeklemd. De vervormingen in de figuur zijn niet de realistische vervormingen, maar een overdreven weergave om duidelijk te demonstreren wat de effecten zijn van verschillende inklem-methodes. Rood betekent een hele hoge spanning, en blauw daarentegen een hele lage spanning. De grootste spanning is te zien rond het element dat is ingeklemd. Doordat bijna alle schuifspanningen rond een punt zijn geconcentreerd in het midden de ligger, is er praktisch geen schuifspanning aanwezig aan de buitenkanten van de ligger.



Figuur 2.5: Schuifspanningen op ligger bij enkel ingeklemd volume-element.

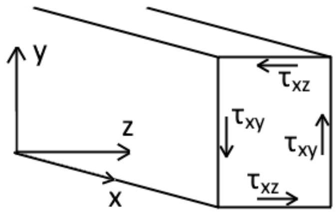
Het uiteinde van de ligger kan ook in zijn geheel worden ingeklemd. Dit betekent alle volume-elementen aan het uiteinde die vast staan en verder niet kunnen vervormen in welke richting dan ook. Doordat het hele vlak is ingeklemd, wordt ook het reactiemoment over het hele vlak verdeeld, net als het vlak waar het wringend moment over is verdeeld. Op deze manier worden de schuifspanningen verdeeld over de hele ligger, zodat de maximale waarden zich aan de buitenkant van de ligger bevinden. Dit komt overeen met hoe later in dit rapport de analytische schuifspanningen zullen worden berekend. Figuur 2.6 laat goed zien dat de spanningen zich aan de zijkanten de doorsnede bevinden. Wederom laten de rode gebieden zien waar de hoogste schuifspanningen zitten, en de blauwe gebieden de laagste. Dit staat tevens ook weergegeven in de legenda van de figuur.



Figuur 2.6: Schuifspanningen op ligger bij volledig ingeklemd vlak.

2.2. Analytische oplossing

Om er achter te komen hoe groot de fout is bij het gebruik van een 3D eindige-elementen methode, zal eerst de analytische oplossing gevonden moeten worden. In dit geval is het ten eerste belangrijk om te weten welke soort spanning er gezocht wordt.
Zoals eerder vermeld is de regel die staat beschreven in 1 gebaseerd op het werk van I. Shalom. In zijn werk wordt aandacht gegeven aan schuifspanningen in xy- en xz-richting (figuur 2.7) ten gevolge van een wringend moment en zal er in dit rapport uitsluitend gewerkt worden met dezelfde spanningen.



Figuur 2.7: Schuifspanningen ten gevolge van een wringend moment in

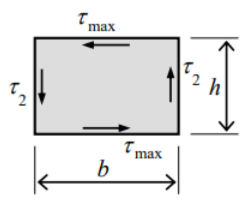
In het eerste deel van dit subhoofdstuk worden de schuifspanningen berekend aan de hand van tabelwaarden. De tweede subsectie wordt besteed aan de analytische berekening van de schuifspanningen met behulp van Roark's formulas.

2.2.1. Waardentabel voor rechthoekige doorsnede

In het dictaat over wringing van P.C.J. Hoogenboom [1, p. 4] staat een tabel voor de berekening van schuifspanningen. In figuur 2.8 staat deze tabel weergegeven en wordt deze gebruikt voor de analytische berekening van de schuifspanning. Aangezien alleen de schuifspanningen worden berekend, wordt alleen gebruik gemaakt van de kolommen met τ_{max} en τ_2. Deze representeren τ_{xy} en τ_{xz} respectievelijk voor de rest van het rapport.

Om een goed resultaat neer te kunnen zetten, en daarmee representatieve foutmarges te kunnen bepalen, worden er een groot aantal berekeningen gedaan. De tabel heeft daarentegen een gelimiteerd aantal waarden om mee te werken. Om die reden zijn waarden met nog onbekende b/h-verhoudingen lineair geïnterpoleerd. Op die manier kunnen toch de schuifspanningen worden berekend die niet in de tabel voorkomen.

$\frac{b}{h}$	$\frac{\boldsymbol{I_w}}{bh^3}$	$\frac{I_p}{bh^3}$	$\frac{M_w}{\boldsymbol{\tau_{max}}bh^2}$	$\frac{M_w}{\tau_2 bh^2}$	$1000\frac{\boldsymbol{C_w}}{b^3h^3}$	$\frac{100\,B}{\boldsymbol{\sigma_{max}}b^2h^2}$
1,0	0,141	0,167	0,210	0,210	0,134	0,368
1,2	0,166	0,203	0,221	0.237	0,352	0,565
1,4	0,187	0,247	0,230	0.262	0,838	0,987
1,6	0,204	0,297	0,237	0.281	1,418	1,37
1,8	0,218	0,353	0,243	0.299	2,000	1,69
2,0	0,229	0,417	0,249	0.314	2,540	1,94
2,5	0,250	0,604	0,261	0.342	3,640	2,35
3,0	0,264	0,833	0,271	0.362	4,416	2,59
4,0	0,281	1,417	0,288	0.388	5,354	2,82
5,0	0,292	2,167	0,299	0.398	5,865	2,90
10,0	0,314	8,417	0,323	0.400	6,642	2,94
50,0	0,331	208,417	0,329	0.400	6,931	2,82
∞	$\frac{1}{3}$	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1000}{144}$	$\frac{100}{36}$



Figuur 2.8: Tabel voor het berekenen van de schuifspanningen in een rechthoekige doorsnede.[1, p. 4]

Een rechthoekige doorsnede van 300 mm bij 390 mm resulteert in een b/h-verhouding van 1,3. Vervolgens kan deze echter niet worden afgelezen in de eerste kolom van figuur 2.8. Door lineaire interpolatie tussen de waarden van b/h = 1,2 en b/h = 1,4 kan de b/h-waarde worden bepaald van b/h = 1,3. In bijlage C staat het Python script dat geschreven is om die interpolaire waarden te bepalen. Tevens staat in de bijlage ook de oplossing van het voorbeeld hierboven bij een b/h-verhouding van 1,3.

2.2.2. Roark's formulas

Een andere manier voor het bepalen van enkel de maximale schuifspanning is door gebruik te maken van een formule uit "Roark's Formulas for Stress & Strain" [6]. Vergelijking 2.6 geeft deze formule weer.

$$\tau_{max} = \frac{3M_w}{8ab^2}\left[1 + 0,6095\frac{b}{a} + 0,8865\frac{b^2}{a^2} - 1,8023\frac{b^3}{a^3} + 0,9100\frac{b^4}{a^4}\right] \tag{2.6}$$

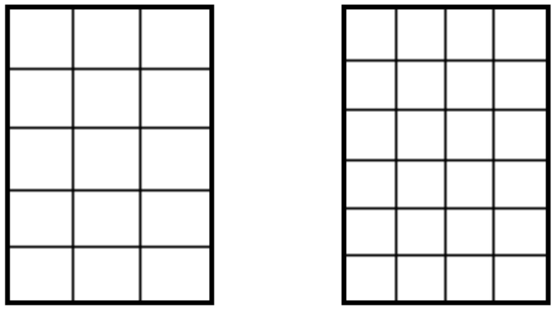
Hierin zijn a en b respectievelijk de hoogte en de breedte gedeeld door 2. Zoals kan worden afgelezen in zowel de tabel als Roark's formulas, wordt de schuifspanning bepaald door enkel de breedte, de hoogte en het wringend moment van de rechthoekige doorsnede. De lengte van de uitkragende ligger heeft geen invloed op de analytische berekening van de schuifspanning. Dit geldt tevens voor de materiaaleigenschappen. Die hebben eveneens geen invloed op de schuifspanning.
Bij een vierkante doorsnede, geldt echter een andere formule volgens Roark's formulas. Deze simpelere formule staat hieronder gepresenteerd en gebruikt wederom enkel de afmetingen van de doorsnede en het wringend moment.

$$\tau_{max} = \frac{M_w}{1,66a^3} \tag{2.7}$$

Het enige nadeel van beide formules is het feit dat alleen de maximale spanning wordt berekend van de doorsneden. Dit betekent alleen een schuifspanning in xy-richting.

2.3. Numerieke oplossing

Het tweede onderdeel dat nodig is voor het berekenen van de foutmarges zijn de numerieke schuifspanningen. Deze numerieke eindige-elementen methode wordt gebruikt in Ansys om de schuifspanningen te bepalen. De resultaten hiervan kunnen verschillen door het gebruik van verschillende aantallen volume-elementen. In dit hoofdstuk wordt de bepaling van de schuifspanning uiteengezet in twee onderdelen. De eerste subsectie behandelt het gebruik van 3 volume-elementen in de breedte, en subsectie twee het gebruik van 4 volume-elementen in de breedte (figuur 2.9).



Figuur 2.9: Rechthoekige doorsnede met 3 elementen in de dikte links en 4 elementen in de dikte rechts.

2.3.1. Drie dikte-elementen

Voor dit onderzoek is gekeken naar een aantal b/h-verhoudingen. Deze verhoudingen bepalen wat de verhouding elementen in de hoogte is tegenover het aantal elementen in de breedte. In dit subhoofdstuk zal ten eerste gekeken worden naar het aantal elementen in de hoogte (EY), met een gegeven 3 elementen in de breedte. Dit is weergegeven in tabel 2.1.

b/h	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
EY	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6

b/h	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
EY	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9

Tabel 2.1: Een aantal hoogte- en breedte verhoudingen met corresponderende aantal volume-elementen in de hoogte

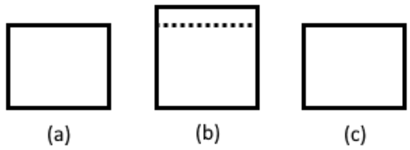
Het aantal elementen in de hoogte wordt bepaald door het aantal elementen in de dikte. In de hoogte moeten dan zoveel elementen worden gekozen dat de elementen ongeveer een vierkant zijn in de dwarsdoorsnede. Echter, de meeste b/h-verhoudingen hebben niet de precieze afmetingen van een vierkant. In dat geval wordt eerder gekozen voor een element meer in de hoogte dan een element minder. Dit heeft als voornaamste reden dat meer volume-elementen resulteert in een accuratere berekening.

De overgang tussen twee verschillende aantallen elementen in de hoogte kan zorgen voor een sprong in de schuifspanning. In tabel 2.2 is terug te zien bij welke b/h-verhouding een sprong ontstaat in de schuifspanning. Deze wordt aangegeven in de tabel door de verandering in hoogte-elementen.

b/h	1,0	1,333	1,667	2,0	2,333	2,667
EY	$3 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 9$

Tabel 2.2: Overgang van aantal hoogte-elementen en daarbij horende b/h-verhoudingen.

Het overgangspunt wordt bepaald door de hoogte/breedte-verhouding van de elementen in de doorsnede. Een element wordt toegevoegd wanneer de hoogte van een element absoluut gezien groter is dan de breedte van het element. Oftewel, wanneer de hoogte gedeeld door de breedte groter is dan 1. Dit staat weergegeven in figuur 2.10. Als eerst wordt a) de verhouding verhoogt tot het punt waar b) het element een vierkant is. Hier is de breedte even groot als de hoogte en daarvoor h/b = 1. Iedere vergroting in het gevolg van de verhouding resulteert in een h/b > 1, en wordt er c) een nieuw element toegevoegd.



Figuur 2.10: Verloop van hoogte-element overgang.

2.3.2. Vier dikte-elementen

Eveneens bij 4 elementen in de breedte kunnen voor alle b/h-verhoudingen ook het aantal hoogte-elementen worden opgesteld. Er zijn, in tegenstelling tot 3 elementen, al een groot extra aantal elementen bij het gebruik van 4 elementen in totaal. Dit komt doordat bij dezelfde b/h-verhouding een kleiner elementoppervlak in de doorsnede voorkomt. Voor de meeste b/h-waarden geldt dat het elementenaantal in de doorsnede met een factor groter dan 1.5 wordt vermenigvuldigd. In tabel 2.3 is terug te zien hoeveel hoogte-elementen zich in de dwarsdoorsnede bevinden per b/h-waarde.

b/h	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
EY	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8

b/h	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
EY	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12

Tabel 2.3: Een aantal hoogte- en breedte verhoudingen met corresponderende aantal volume-elementen in de hoogte

Net als in tabel 2.2 staan in tabel 2.4 de overgangen van aantal elementen in de hoogte tegenover de hoogte/breedte-verhoudingen.

b/h	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75
EY	$4 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 9$	$9 \rightarrow 10$	$10 \rightarrow 11$	$11 \rightarrow 12$

Tabel 2.4: Overgang van aantal hoogte-elementen en daarbij horende b/h-verhoudingen.

Het is belangrijk om te weten en te noteren waar de schuifspanningen verspringen. De grootste en meest abrupte veranderingen in de schuifspanningen gebeuren door de sprong in aantal hoogte-elementen. Dit komt door het plotselinge grote contrast in het aantal beschikbare knooppunten van de volume-elementen. Het zou dus zomaar kunnen zijn dat de kritische waarden op deze overgangspunten extra veel invloed kunnen hebben op de foutmarges. Dit zal later bij de resultaten duidelijk worden.

3
Resultaten 3- en 4 Dikte-elementen

In dit hoofdstuk zullen de daadwerkelijke berekeningen gedaan worden om de foutmarges te bepalen uit het eerste deel van de hoofdvraag. De belangrijkste berekeningen zullen in dit hoofdstuk geplaatst worden. Echter, zullen de meeste overige berekeningen en tabellen terug te vinden zijn in de bijlagen.

3.1. Berekening schuifspanning

Uiteindelijk is gevraagd om de fout van de zogenaamde 3D eindige-elementen programma's. Om die fout te berekenen is als eerste de analytische berekening nodig voor de schuifspanning. Dit is de referentiewaarde voor het bepalen van de fout. De numerieke waarden worden vervolgens berekend in het 3D eindige-elementen programma Ansys. De formule voor het berekenen van de fout is als volgt gegeven. Hierin heeft de teller van de breuk een absolute waarde om alleen positieve fouten te krijgen. Tevens zijn zowel de analytische- als de numerieke schuifspanningen in formule 3.1 in Pa.

$$fout\ [\%] = \frac{|numerieke\ schuifspanning - analytische\ schuifspanning|}{analytische\ schuifspanning} \cdot 100\% \tag{3.1}$$

3.1.1. Berekening analytische methode

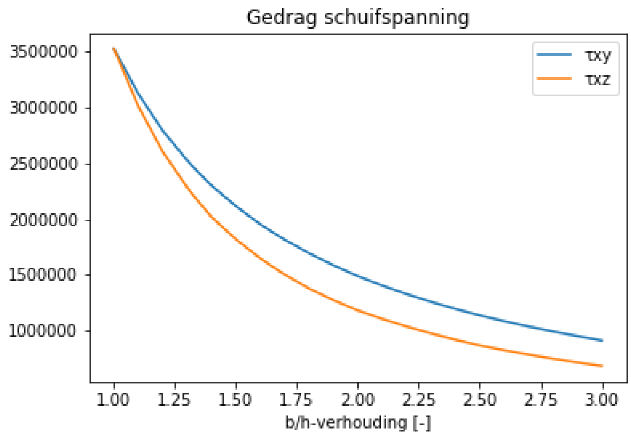
In deze subsectie zullen de berekeningen en resultaten worden gepresenteerd als resultaat van de analytische berekening. Ten eerste kan de formule uit figuur 2.8 afgeleid worden tot formule 3.2. Deze kan gebruikt worden voor de bepaling van zowel de schuifspanning in de xy-richting (τ_{max}), als in de xz-richting (τ_2).

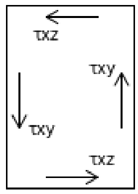
$$\tau = \frac{M_w}{bh^2} \cdot \frac{1}{tabelwaarde} \tag{3.2}$$

Zoals eerder vermeld in 2.2 zijn alle overige tabelwaarden, die niet in de tabel staan, te benaderen door lineaire interpolatie. Er is tevens van uitgegaan om te variëren met b/h-waarden tussen de 1,0 en 3,0 met daartussen stappen van 0,1. Bij die lijst komen vervolgens nog de extra kritische waarden, afhankelijk van 3 elementen in de dikte of 4 (en later 5 elementen). In formule 3.2 moet ook het wringend moment worden meegenomen. Voor nu is een moment gekozen van **20000 Nm** die links om gaat, oftewel tegen de klok in. Om consistent te blijven in de berekening van de fouten, wordt ook nu gekozen voor een standaard dikte van **0,3 m**. De hoogte van de doorsnede wordt dus bepaald op basis van de constante dikte en de al bekende b/h-verhoudingen.

Nu al de onbekenden bepaald zijn, kunnen daadwerkelijk de analytische schuifspanningen worden berekend. In bijlage C staat het Python script geschreven voor het bepalen van de schuifspanningen aan de hand van de tabelwaarden uit figuur 2.8. Tevens is ook een tabel te vinden in bijlage B.1 met daarin alle schuifspanningen en de bijbehorende dimensies van de doorsnede die uit het Python script gekomen zijn.

De schuifspanningen kunnen analytisch ook berekend worden door Roark's formulas (formule 2.6). Deze formule berekent echter alleen de maximale schuifspanning τ_{xy}, en niet de schuifspanning in de xz-richting van de dwarsdoorsnede. Figuur 3.1 laat alle schuifspanningen zien, uitgezet tegenover de bijbehorende b/h-verhoudingen. De schuifspanningen zijn ook terug te vinden in tabelbijlage B.1. Aangezien de tabel- en Roark schuifspanningen op deze grote schaal praktisch even groot zijn, is slechts één τ_{xy}-lijn gegeven in de figuur. Het precieze verschil in schuifspanning is pas relevant bij de berekening van de fouten. Voor nu is het alleen belangrijk om het gedrag van de schuifspanning te analyseren.





Figuur 3.1: Gedrag van schuifspanning $[Pa]$ tegenover b/h-verhouding.

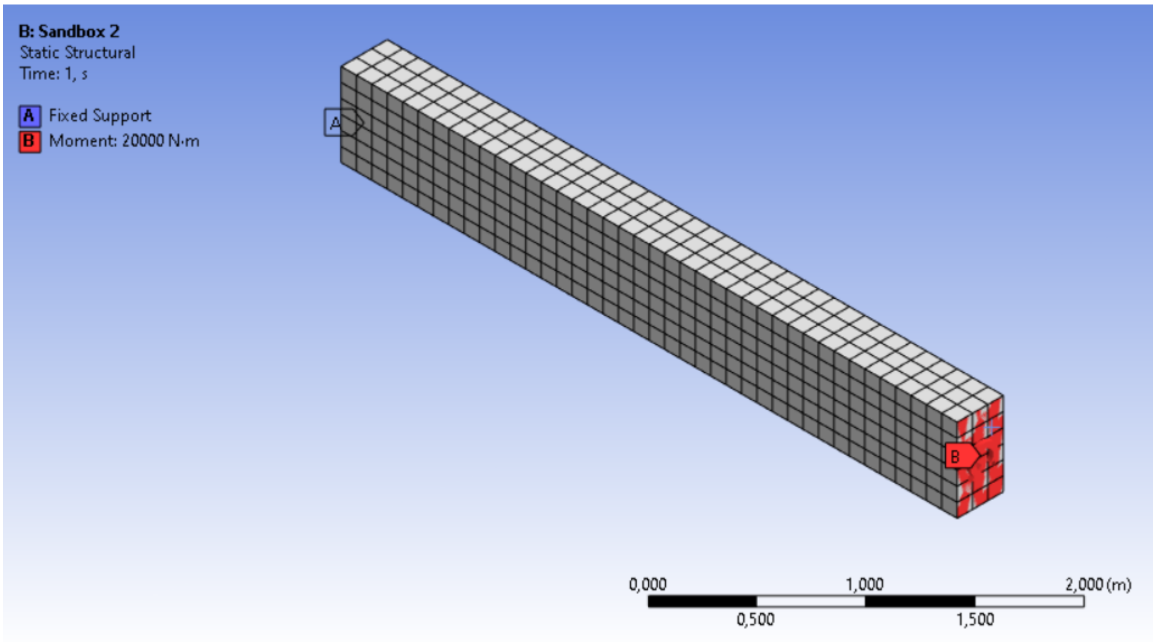
Zoals in de figuur is te zien, neemt de schuifspanning voor zowel de xy-richting als de xz-richting niet heel veel meer af vanaf b/h = 3,0. Om deze reden heeft het niet veel toegevoegde waarde om nog extra data te vergaren met nog grotere b/h-verhoudingen.

3.1.2. Numerieke oplossing

Voor het tweede deel van de foutformule (3.1) wordt de numerieke schuifspanning bepaald. Dit wordt in dit rapport gedaan in het 3D eindige-elementenprogramma Ansys Workbench. De eerste stap is het ontwerpen van een proefopstelling. Deze heeft diverse parameters die aangepast kunnen worden om verschillende schuifspanningen te krijgen. In tegenstelling tot de analytische berekening, worden er meer variabelen gebruikt om de schuifspanning te berekenen. Buiten de hoogte en breedte van de doorsnede, is ook de lengte in zekere mate van belang voor de bepaling van de fout. De maximale schuifspanning heeft namelijk tijd nodig om constant te worden over de lengte van de ligger. De ligger moet bij voorkeur ook niet te lang worden, aangezien er dan extra onnodige berekeningen gedaan moeten worden voor de bepaling van de schuifspanning. Bij een dikte van wederom 0,3 m is er om die reden een lengte van 4 meter gekozen. Uiteraard verandert de hoogte van de ligger mee met de b/h-verhouding net als bij de analytische berekening. Bij een ingekorte ligger met lengte 1 m en een b/h-verhouding van 1,8 geldt bijvoorbeeld al een verschil in fout van 0,26 % (berekend met formule 3.1). Een klein maar toch wel significante afwijking die een negatieve invloed kan hebben op de conclusies van dit onderzoek.

De 4 meter lange ligger wordt ingeklemd, en aan het uiteinde wordt een wringend moment aangebracht op het vlak. Dit wringend moment is nogmaals gelijk aan 20000 Nm tegen de klok in zodat de analytische- en numerieke schuifspanningen vergeleken kunnen worden. Daarnaast zijn de materiaaleigenschappen niet relevant aangezien de schuifspanningwaarden niet veranderen bij een afwisseling van materiaal. Daarnaast zijn ook de specifieke breedtes en hoogtes individueel niet relevant, aangezien de foutwaarden enkel afhankelijk is van de verhouding. Ook een verandering van wringend moment heeft verder geen invloed op de fout. Zolang voor de analytische- en numerieke berekening van de schuifspanning het wringend moment voor beide maar hetzelfde is, treden er geen verschillende foutwaarden op bij dezelfde b/h-verhouding.

De laatste stap is het toevoegen van een mesh. Oftewel, de ligger opdelen in volume-elementen. Bij een dikte van de ligger van 0,3 m en 3 volume-elementen in de breedte, geldt een volume-elementdikte van 0,3 / 3 = 0,1 m. Voor een ligger met 4 elementen in de dikte betekent dat 0,3 / 4 = 0,075 m brede volume-elementen. De ligger met deze dimensies, oplegging, wringend moment en volume-elementen kan vervolgens worden afgebeeld in figuur 3.2.



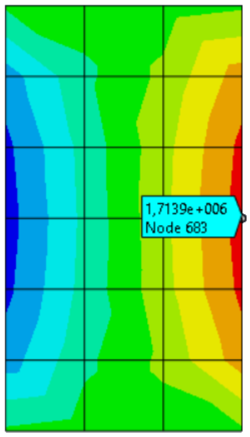
Figuur 3.2: Numerieke proefopstelling gemodelleerd in Ansys Workbench met 3 dikte-elementen.

Nu de ligger is gemodelleerd en de belastingen zijn toegevoegd, kunnen de schuifspanningen worden berekend. Om een accurate benadering te verkrijgen, worden de schuifspanningen afgelezen in het midden van de ligger (x = 2 m). Op dit punt veranderen de spanningen, voor zowel de xy- als xz-richting, niet meer over de lengte van de ligger. De schuifspanningen kunnen nu per knooppunt worden afgelezen. De schuifspanning ten gevolge van het wringend moment is het grootst in het midden van de zijkanten van de ligger (figuur 3.3).

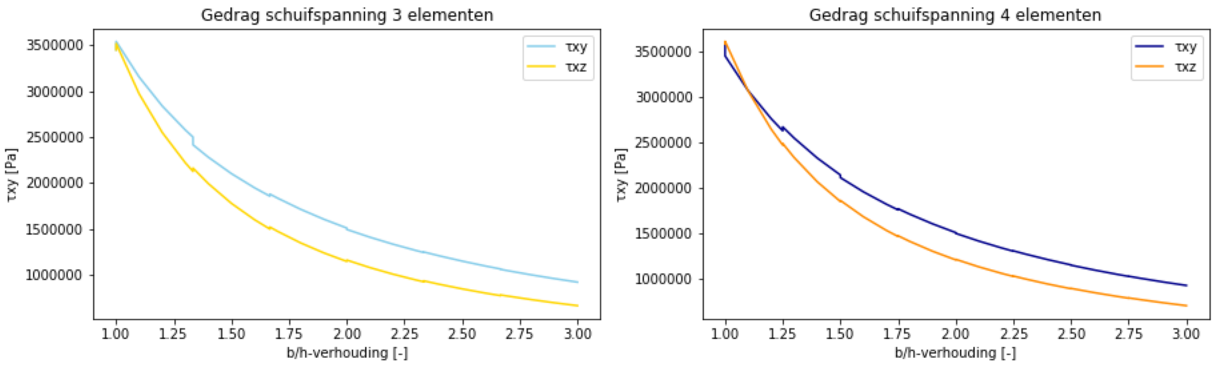
De Ansys oplossingen voor deze schuifspanningen zijn te vinden in figuur 3.4. Hierin staan wederom τ_{xy} en τ_{xz} uitgezet tegenover de b/h-verhoudingen. Net als in subsectie 3.1.1 zijn de schuifspanningen te vinden in een tabel in de bijlagen (bijlage B.2). De getallen uit deze tabel zijn rechtstreeks verkregen uit Ansys en genoteerd. In beide grafieken zijn duidelijke sprongen aan te merken, schokken als het ware. Dit komt door de overgang van het aantal hoogte-elementen in de rechthoekige doorsnede. De grootste 'schokken' in de grafiek treden op bij de schuifspanningen in de xy-richting voor zowel 3- als 4 dikte-elementen. Dit betekent waarschijnlijk dat de fouten het grootst zullen zijn voor τ_{xy} in die kritische punten.

3.2. Foutberekening

In dit subhoofdstuk zullen de fouten worden berekend en gepresenteerd. Nu alle schuifspanningen bekend zijn, kunnen deze worden ingevuld in formule 3.1. In bijlage B.3 staat een tabel met daarin alle foutwaardes en de corresponderende b/h-waarden. Deze fouten zijn gebaseerd op de analytische tabelwaarden uit hoofdstuk 2.2. Figuren 3.5 en 3.6 laten deze fouten zien voor 3- en 4 dikte-elementen. Hierin geeft de eerste figuur de fouten aan in de xy-richting, en de onderste figuur de fouten in xz-



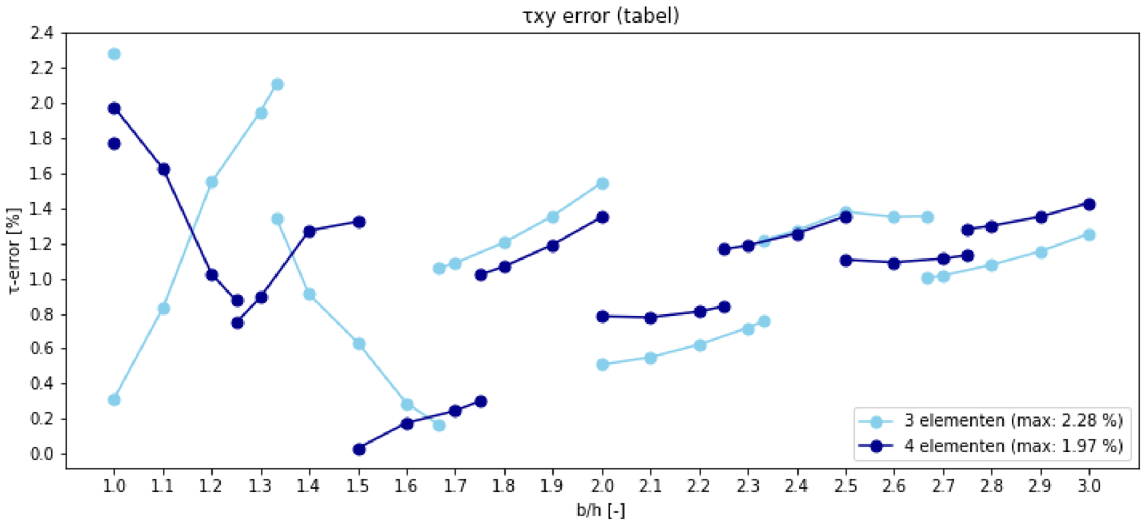
Figuur 3.3: Schuifspanning τ_{xy} op x = 2 m. Hierin is de b/h-verhouding gelijk aan 1,8.



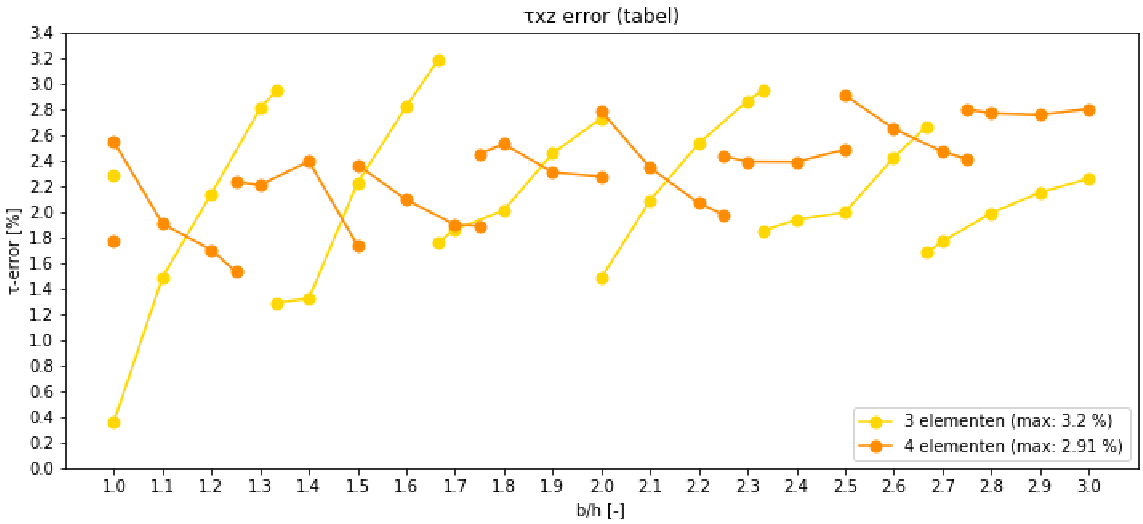
Figuur 3.4: Gedrag schuifspanning tegenover b/h-verhouding, opgelost in Ansys.

richting.

In de figuur zijn de waarden opgedeeld in verschillende groepen, waarin elke groep hetzelfde aantal elementen in de hoogte heeft. Op deze manier worden de sprongen in de fouten duidelijker aangegeven bij de kritische punten (b/h-punten waar het aantal hoogte-elementen verandert). Tevens zijn ook de maximale waarden van de schuifspanningsfouten weergegeven in de legenda van de figuren.
Wat direct opvalt is dat de τ_{xz}-foutwaarden over het algemeen aanzienlijk hoger zijn dan de τ_{xy}-fouten. Gemiddeld ligt de τ_{xy}-error rond de 2,3 %. Daarentegen liggen de schuifspanningsfouten in de xy-richting rond de 1,2 %. Dit geldt voor zowel 3- als 4 volume-elementen in de dikte. Daarnaast valt ook op dat tussen alle individuele hoogte-elementengroepen een convergerend effect optreedt. Dit wil zeggen dat hoe groter de b/h-waarde, hoe kleiner het verschil in foutwaarde tussen begin- en eindpunt van de hoogte-elementengroep wordt.



Figuur 3.5: Numerieke fout van de schuifspanning in xy-richting, gebaseerd op de analytische tabelwaarden.

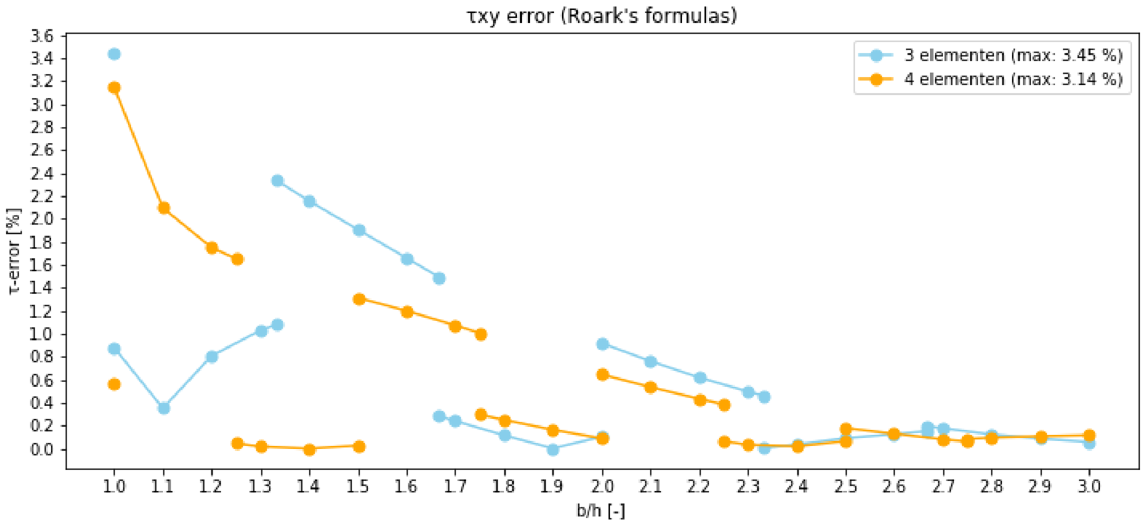


Figuur 3.6: Numerieke fout van de schuifspanning in xz-richting, gebaseerd op de analytische tabelwaarden.

De numerieke foutpercentages zijn eveneens berekend aan de hand van Roark's formulas' analytische oplossing. Invullen van deze formules (formules 2.6 en 2.7) resulteert wederom in een tabel met τ_{xy}-foutwaarden (tabel B.4), uitgezet tegen de b/h-verhoudingen. Die foutwaarden zijn overzichtelijk terug te vinden in figuur 3.7. Net als bij de andere spanningsfoutgrafieken staat tevens de maximale fout aangegeven in de legenda van de figuur.
Opvallend in de figuur is dat de foutwaarden afnemen bij toenemende b/h-verhoudingen. De reden hiervoor zou kunnen zijn dat door de toenemende hoogte van de vierkante dwarsdoorsnede, bij gelijke dikte, de schuifspanningen meer ruimte en lengte hebben om tot een equilibrium te komen. Daarmee worden de exacte waarden van de schuifspanningen beter benaderd.

3.2.1. 3 elementen

Tabel. De regel geschreven door P.C.J. Hoogenboom [1, p. 22] stelt dat alle foutpercentages van de schuifspanningen voor 3 elementen in de dikte onder de 3% moeten liggen. Deze regel is correct voor



Figuur 3.7: Numerieke fout van de schuifspanning in xy-richting, gebaseerd op Roark's formulas.

de bepaling van de schuifspanningen in de xy-richting van een ligger met rechthoekige doorsnede. De maximale τ_{xy} is namelijk gelijk aan 2,28 %.
Voor schuifspanningen aan de korte kant van de rechthoekige doorsnede (τ_{xz}) geldt echter een maximaal foutpercentage van 3,2 %. Deze percentages zijn ontstaan uit de analytische berekening, gebruikmakend van de tabelwaarden uit figuur 2.8.

Roark's formulas. Het maximale foutpercentage berekend aan de hand van Roark's formulas [6] bij 3 dikte-elementen komt neer op 3,45 %. Een getal dat toch wel relatief ver boven de grens ligt van 3 %. Zoals eerder vermeld in 2.2 worden voor de formules van Roark's formulas enkel gebruikt voor de bepaling van de maximale schuifspanning. Er is daarom geen maximale τ_{xz} berekend.

3.2.2. 4 elementen

Tabel. Voor 4 elementen in de dikte geldt een andere regel. Er zouden in dit geval alleen foutmarges onder de 1 % moeten voorkomen. Voor zowel de schuifspanningen in xy- als xz-richting komen de foutpercentages boven de 1 %. Voor de τ_{xy}-fout betekent dit een maximale waarde van 1,97 %, en voor τ_{xz} een waarde van 2,91 %. Voor de τ_{xz}-fouten is het zelfs zo dat geen enkel data punt zich onder de 1 % bevindt.

Roark's formulas. Voor 4 volume-elementen in de dikte ligt de maximale schuifspanningsfout een significant stuk hoger dan 1 %. De waarde van de τ_{xy}-fout is namelijk gelijk aan 3,14 %.

4

Resultaten 5 Dikte-elementen

Om er achter te komen vanaf wanneer de foutpercentages daadwerkelijk onder de 1 % zijn, wordt een aanvullend experiment uitgevoerd. In dit hoofdstuk worden de foutpercentages berekend wanneer gebruik wordt gemaakt van 5 volume-elementen in de dikte. Dit is een stap dichterbij het bereiken van een fout van kleiner dan 1 %. Dit hoofdstuk zal op de zelfde manier de error berekenen als bij de 3- en 4 volume-elementen, en worden dezelfde stappen ondernomen. De verwachting van dit experiment zal zijn dat de foutpercentages, ten opzichte van een kleiner aantal dikte-elementen, reduceren tot een lager getal.

4.1. Hoogte-elementen sprongen

De eerste stap is het bepalen van de numerieke oplossing in geval van 5 dikte-elementen. Aangezien de kritische punten van de oplossing de meest belangrijke zijn, staan in tabel 4.1 deze waarden gegeven. In deze kritische punten ontstaan de grootste sprongen in schuifspanningsfouten en komen de grootste foutpercentages het meest voor in deze kritische punten.

b/h	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
EY	$5 \to 6$	$6 \to 7$	$7 \to 8$	$8 \to 9$	$9 \to 10$	$10 \to 11$	$11 \to 12$	$12 \to 13$	$13 \to 14$	$14 \to 15$

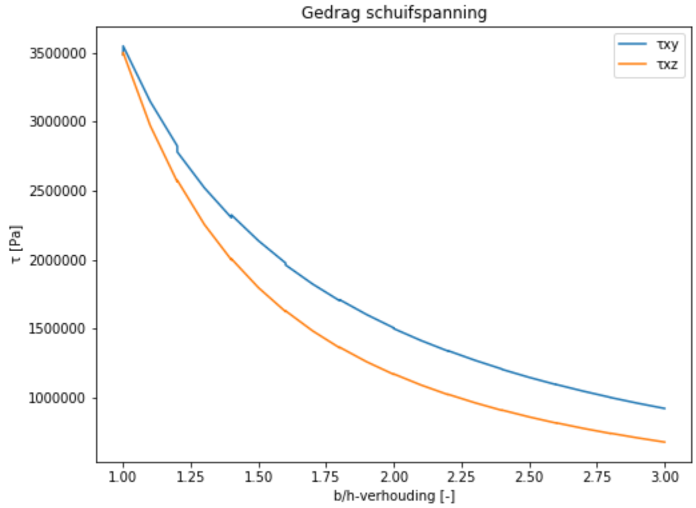
Tabel 4.1: Overgang van aantal hoogte-elementen en daarbij horende b/h-verhoudingen.

In de tabel kan worden opgemerkt dat de kritische punten behoren tot de punten die voorheen al berekend zijn voor de bepaling van de foutmarges. Er hoeven dus geen aanvullende analytische schuifspanningen worden berekend, aangezien deze al eerder in hoofdstuk 3 zijn bepaald. Dit geldt voor de analytische waarden gebaseerd op zowel de tabelwaarden als de Roark's formulas.

4.2. Foutberekening

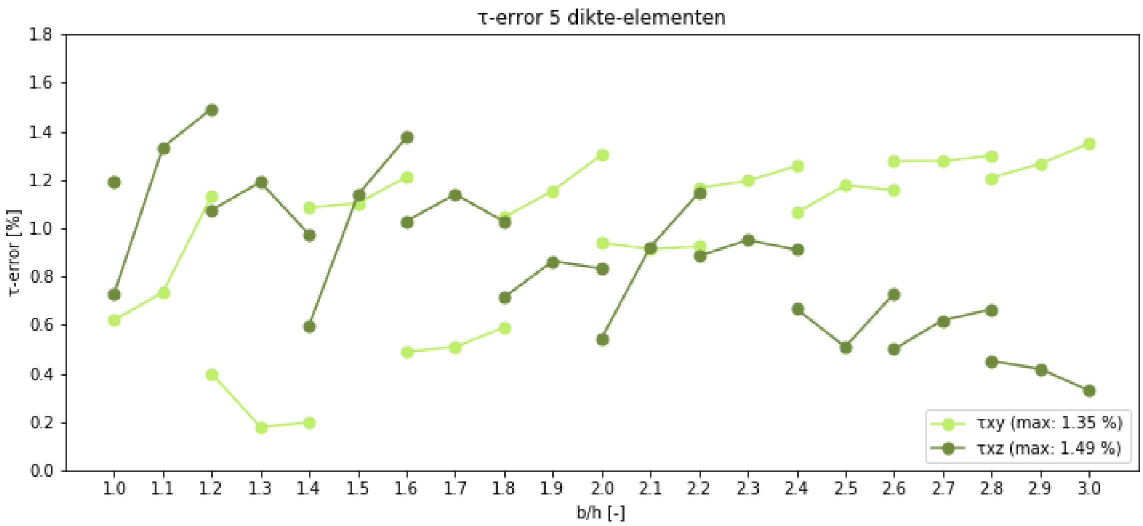
Nu de b/h-verhoudingen waar het aantal hoogte-elementen verandert bekend zijn, kunnen de schuifspanningen berekend worden. Dit gaat wederom met dezelfde methode als voorheen. Eerst worden de analytische schuifspanningen berekend. Dit wordt gedaan aan de hand van de tabelwaarden van P.C.J. Hoogenboom en Roark's formulas. Het wringend moment is gelijk aan 20000 Nm en de rechthoekige doorsnede heeft een constante dikte van 0,3 m plus een variabele hoogte die ervoor zorgt dat alle b/h-waarden worden gebruikt. De feitelijke waarden van de analytische schuifspanningen per b/h-verhouding zijn terug te vinden in bijlage B.1. Deze waarden zijn al eerder berekend in 3. Ze kunnen in dat hoofdstuk ook terug gevonden worden in een grafiek voor een overzichtelijker aanzicht (figuur 3.1).

Voor het bepalen van de fouten zijn nu alleen nog de numerieke schuifspanningen nodig. Deze zijn wederom opgelost in Ansys Workbench (bijlage B.5). Dezelfde afmetingen zijn gebruikt voor de lengte van de ligger, evenals het wringend moment. Deze zijn respectievelijk 4 m en 20000 Nm. Om te variëren in de b/h-verhoudingen is een constante dikte gebruikt van 0,3 m en variabele hoogte. De numerieke schuifspanningen zijn terug te zien in figuur 4.1. De grafiek laat zien dat vooral τ_{xy} overduidelijke sprongen aangeeft in de schuifspanning. Dit resulteert waarschijnlijk in een abrupte verandering van de fout.



Figuur 4.1: Gedrag van numerieke schuifspanning tegenover b/h-verhouding.

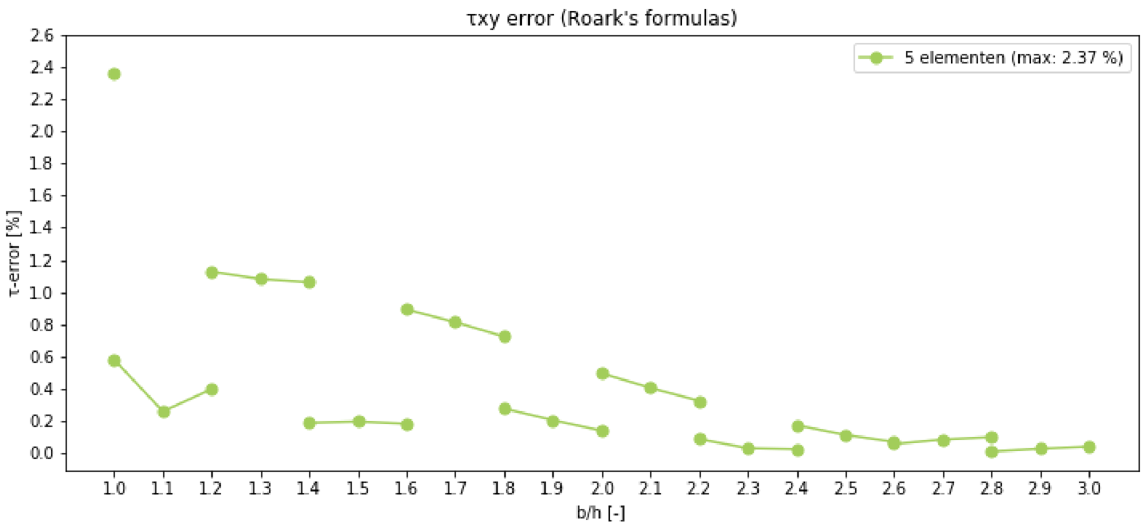
Nu de numerieke schuifspanningen zijn bepaald voor beide richtingen, kunnen de fouten worden berekend. Door nogmaals formule 3.1 te hanteren wordt voor elke b/h-verhouding de schuifspanningsfout bepaald. De resultaten bij een rechthoekige doorsnede met diverse b/h-verhoudingen is weergegeven in figuur 4.2. De figuur is gebaseerd op enkel de tabelwaarden en bevat zowel de schuifspanningsfouten in xy- als xz-richting.



Figuur 4.2: Numerieke fout van de schuifspanning in xy- en xz-richting, gebaseerd op de analytische tabelwaarden.

In de figuur valt af te lezen wat de maximale foutpercentages zijn voor τ_{xy} en τ_{xz}. Deze zijn gelijk aan 1,35 % en 1,49 % respectievelijk. Vergeleken met 3- en 4 dikte-elementen in de doorsnede is dit een hele vooruitgang wat betreft de nauwkeurigheid van de numerieke fout. Voor de xy-richting geldt een reductie van meer dan een half procent bij toevoeging van 1 element in de dikte. Voor dezelfde situatie voor τ_{xz} een reductie van meer dan anderhalf procent. Een significant verschil dus. Alle overige foutwaarden kunnen overigens worden afgelezen in tabelbijlage B.6.

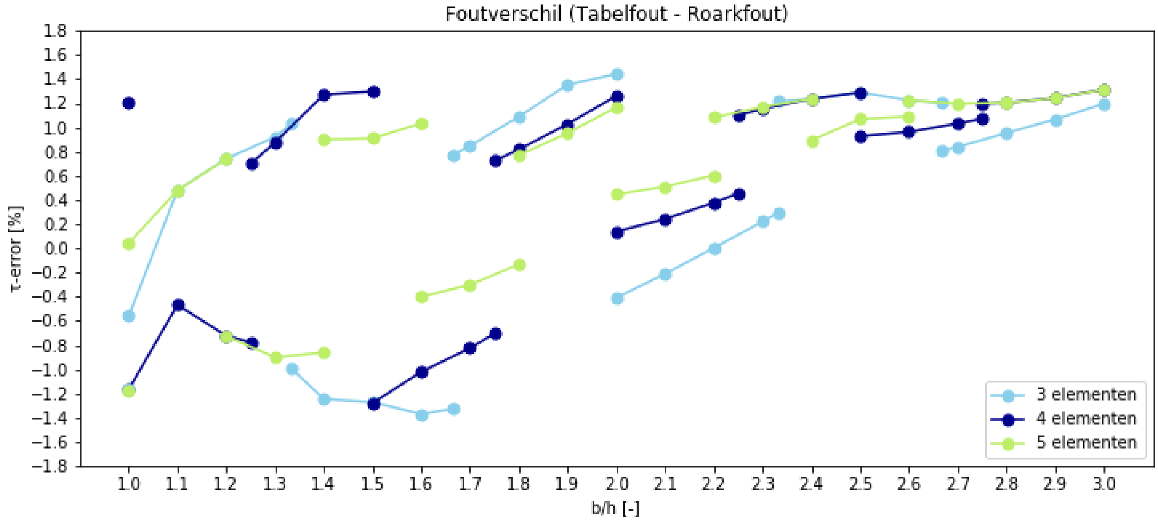
Uitgaande van Roark's formulas zijn de foutwaarden ook berekend (bijlage B.6). Nogmaals worden alleen de schuifspanningen berekend in de xy-richting en staan afgebeeld in figuur 4.3. De maximale fout staat weergegeven en heeft een waarde van 2,37 %. Dit getal ligt nog steeds ver boven de grens. Echter, de overige schuifspanningsfouten zijn gelijk aan 1 % of lager.



Figuur 4.3: Numerieke fout van de schuifspanning in xy-richting, gebaseerd op Roark's formulas.

Wat betreft de schuifspanningsfouten gehaald uit de tabelwaarden, kan een nieuwe regel worden opgesteld bij het toepassen van 5 dikte-elementen. Wanneer de analytische oplossing volgt uit de tabelwaarden van P.C.J. Hoogenboom zijn alle schuifspanningsfouten in een rechthoekige doorsnede kleiner 1,5 %.
Echter, in het geval dat de analytische schuifspanningen worden berekend met behulp van Roark's formulas, liggen alle schuifspanningsfouten van een rechthoekige doorsnede rond de 1 % of lager. Er is één uitzondering op deze laatste regel, en dat is wanneer de dikte en de hoogte even groot zijn.

Nu alle foutpercentages zijn berekend voor zowel de tabelwaarden als Roark's formulas, kunnen de verschillen worden geanalyseerd. Figuur 4.4 presenteert het absolute verschil van de τ_{xy}-fout tussen de tabelwaarden en Roark's formulas. Hierbij worden de Roark foutpercentages afgetrokken van de tabel foutpercentages.



Figuur 4.4: Absolute verschil van de fout tussen tabelwaarden en Roark.

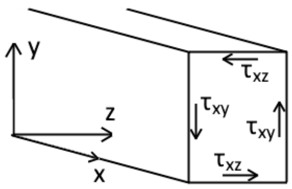
Uit de figuur kan worden afgelezen dat het verschil tussen de tabel foutpercentages en de Roark foutpercentages convergeert naar ongeveer +1,2 % bij toenemende b/h-waarde. Dit betekent een grotere fout op basis van de tabelwaarden dan gebaseerd op Roark's formulas. Bij lagere b/h-verhoudingen zijn de foutverschillen zowel positief als negatief. Voor deze punten lijken de foutverschillen enigszins arbitrair.

5

Conclusies en Aanbevelingen

5.1. Conclusies

Uit dit onderzoek kunnen diverse conclusies getrokken worden. Deze conclusies zijn ten eerste allemaal voortgekomen uit het feit dat de resultaten zijn berekend tussen b/h = 1,0 en b/h = 3,0. Er is tevens bij de berekening van de foutwaarden een onderscheid gemaakt tussen analytische berekeningen op basis van de tabelwaarden en Roark's formulas. Dit komt doordat de resultaten van de verschillende methoden ook diverse conclusies met zich mee brengen.



Figuur 5.1: Schuifspanningsrichtingen

5.1.1. Onderdeel regel 3 dikte-elementen

Tabel. Het eerste onderdeel van de hoofdvraag onderzoekt in hoeverre de foutpercentages van numerieke schuifspanningen onder de 3 % liggen, mits er gebruikt wordt gemaakt van 3 volume-elementen in de dikte. Uit de resultaten van hoofdstuk 3.2 is gebleken dat deze regel deels correct is. Namelijk de maximale foutwaarde, gebaseerd op de analytische berekening die gebruik maakt van de tabelwaarden (tabel 2.8), in de xy-richting is gelijk aan **2,28 %**. Bij gebruik van hetzelfde aantal volume-elementen in de breedte, geeft τ_{xz} een andere fout. In deze richting heeft de maximale foutwaarde een veel hoger percentage, namelijk **3,2 %**. In tegenstelling tot τ_{xy} komt dit percentage boven de grens uit en klopt daarmee de regel wiskundig gezien niet. Voor een constructeur zal de 0,2 % boven de limiet niet voor veel verschil uitmaken, en kan worden gesteld dat de regel wel degelijk klopt wat betreft het eerste deel van de regel.
Roark's formulas. De analytische waarden berekend met behulp van Roark's formulas hebben een maximum opgeleverd van **3,45 %**, waarbij 3 volume-elementen in de dikte zijn gebruikt. Dit getal geldt echter alleen voor een compleet vierkante doorsnede. In het geval van een rechthoekige doorsnede (b/h > 1) liggen alle foutwaardes onder de 3 %. Onder die omstandigheden kan worden gesteld dat aan de regel wordt voldaan. Voor deze conclusie is uiteraard alleen uitgegaan van analytische waarden uit Roark's formulas.

Bij berekening van de foutpercentages, gebruikmakend van de tabelwaarden, kan worden geconcludeerd dat de regel voldoet in geval van 3 volume-elementen in de dikte van de doorsnede. Bij gebruik van Roark's formulas voldoet de regel ook, mits de b/h-verhouding groter is dan 1.

5.1.2. Onderdeel regel 4 dikte-elementen

Tabel. Het tweede onderdeel van de hoofdvraag bespreekt dat dezelfde foutpercentages onder de 1 % moeten liggen bij 4 dikte-elementen. Wederom zijn de maximale percentages berekend in hoofdstuk 3.2 op basis van de tabelwaarden. Hieruit zijn ook wederom twee maximum waarden gekomen, voor zowel de xy- als xz-richting. De numerieke schuifspanningen τ_{xy}, die vergeleken zijn met de tabel handberekeningen, geeft een maximale fout van **1,97 %**. Dit komt niet overeen met de hypothese van P.C.J. Hoogenboom, die stelt dat alle foutwaarden van de numerieke berekeningen onder 1 % moe-

ten liggen. In de xz-richting bevindt zich een maximale waarde van **2,91 %**. Dit getal ligt wederom ver boven het limietpercentage. Er kan dus geconcludeerd worden dat het tweede deel van de regel incorrect is, in het geval van de analytische oplossing gebaseerd op de tabelwaarden.
Roark's formulas. Voor 4 elementen in de dikte van de rechthoekige doorsnede geldt een lager maximum foutpercentage. Een fout van **3,14 %** wordt hier bereikt. Dit getal is riant hoger dan de 1 % grens die geldt voor 4 dikte-elementen. De hypothese kan dus worden verworpen op basis van de resultaten.

Voor zowel de berekening van de foutpercentages bij de tabelwaarden als bij Roark's formulas kan worden geconcludeerd dat de regel niet voldoet in geval van 4 volume-elementen in de dikte van de doorsnede. In tabel 5.1 staat een overzicht of de foutpercentages voldoen aan de regel uit de hoofdvraag.

	τ_{xy} (tabel)	τ_{xz} (tabel)	τ_{xy} (Roark's)
3 dikte-elementen	Voldoet **wel**	Voldoet **wel**	Voldoet **wel***
4 dikte-elementen	Voldoet **niet**	Voldoet **niet**	Voldoet **niet**

Tabel 5.1: Tabel in hoeverre de schuifspanningsfouten voldoen aan de regel van P.C.J. Hoogenboom.
**Voldoet voor b/h > 1.*

5.1.3. Regel 5 dikte-elementen

Tabel. Het laatste deel van de hoofdvraag betreft het opstellen van een regel wanneer er 5 volume-elementen worden gebruikt in de breedte van de doorsnede. Voor de tabelwaarden geldt een maximale foutwaarde van **1,35 %** in de xy-richting, en een foutwaarde van **1,49 %** wanneer de schuifspanning in xz-richting werkt. *Voor de tabelwaarden kan dus een regel worden opgesteld bij 5 dikte-elementen dat de numerieke fout onder de 1,5 % ligt voor alle b/h-verhoudingen in een rechthoekige doorsnede.*
Roark's formulas. In het geval dat Roark's formulas wordt geraadpleegd, kan er een andere regel worden opgesteld. De maximale fout voor een vierkante doorsnede is gelijk aan **2,37 %**. In het geval van een b/h-verhoudingen groter dan 1 (rechthoekige doorsnede), liggen de foutpercentages een stuk lager. Deze liggen rond de 1 % en lager. De regel die nu opgesteld kan worden bij gebruik van Roark's formulas luidt dan als volgt. *Voor een rechthoekige doorsnede met b/h > 1 geldt een numeriek foutpercentage die rond de 1 % of lager ligt bij 5 dikte-elementen.*

5.1.4. Verschil tussen tabel en Roark

Een opvallende conclusie die kan worden getrokken uit de resultaten van de schuifspanningsfouten, is dat de waarden uit de tabel opgesteld door P.C.J. Hoogenboom wellicht niet accuraat genoeg zijn om de foutpercentages te bepalen. Figuur 3.7 geeft de schuifspanningen weer die berekend zijn door Roark's formule. In de figuur kan worden afgelezen dat de fouten wel degelijk convergeren richting 0 %, in tegenstelling tot de tabelwaarden. Deze komen gemiddeld niet verder dan 1 %. Een mogelijke verklaring zou dus kunnen zijn dat de waarden uit de tabel (figuur 2.8) zelf niet accuraat genoeg zijn.
Uit figuur 3.7 en 4.3 kan worden opgemerkt dat voor vierkante doorsneden ($b/h \approx 1$) een relatief hoge foutwaarde optreedt. Er kan dus wellicht al worden geconcludeerd dat voor Roark's formulas de numerieke foutwaarden bij een vierkante doorsnede minder nauwkeurig zijn dan bij rechthoekige doorsneden.

5.2. Aanbevelingen

Er zijn een aantal zaken vanuit dit onderzoek die nog verder onderzocht kunnen worden. Een van die conclusies was dat de tabelwaarden uit het dictaat van P.C.J. Hoogenboom niet accuraat genoeg zouden zijn. In het vervolg zou meer onderzoek gedaan kunnen worden naar die tabelwaarden, en wellicht een zelfde soort model opgesteld kunnen worden om nog nauwkeuriger de schuifspanningen te bepalen. Op die manier kunnen de numerieke schuifspanningsfouten nog preciezer worden gecalculeerd.

Om nog meer te weten te komen over de foutwaarden van de numerieke schuifspanningen kan dit onderzoek nog verder uitgebreid worden. Dit vertaalt zich in het onderzoeken van eventueel 6 volume-elementen in de dikte en de bijbehorende maximale foutwaardes. De doelstelling is om zo dicht mogelijk die 0 % te benaderen. De vraag is of 6 dikte-elementen daarvoor toereikend is, of dat er nog meer volume-elementen in de dikte nodig zijn om die ambitie te bereiken.

Een laatste aanbeveling voor toekomstig onderzoek is het analyseren van het gedrag van de schuifspanningsfouten. Uit hoofdstuk 3 en 4 kunnen de grafieken voor de fouten worden teruggevonden. In zekere mate zit er enig patroon in het gedrag van de fouten. Dit verschilt echter in zowel xy- en xz-richting als in de h/b-verhoudingen. Toekomstig onderzoek zou kunnen verklaren waarom de fouten gedragen als dat ze dat nu doen, om eventueel te kunnen voorspellen waar de grootste fouten zitten.

Referenties

[1] P.C.J. Hoogenboom. *Aantekeningen over wringing*. 2019. URL: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/dictaatwringing.pdf.

[2] I. Shalom. *Computations of stresses with volume-elements in rectangular and HE sections*. 2013. URL: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_shalom.pdf.

[3] J.W. Welleman. *Spanningstensor*. 2017. URL: https://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/CT3109/collegestof/elasticiteitsleer/files/les1.pdf.

[4] Massachusetts Institute of Technology: MIT. *Constitutive Equations*. URL: http://web.mit.edu/16.20/homepage/3_Constitutive/Constitutive_files/module_3_with_solutions.pdf.

[5] Ansys. *SOLID186 - 3D 20-Node homogeneous/Layered Structural Solid*. 2022. URL: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v222/en/ans_thry/thy_el186.html.

[6] W.C. Young. *Roark's Formulas for Stress & Strain*. 6th ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1989.

[7] Ansys. *3D Solids*. 2022. URL: https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v222/en/ans_thry/thy_shp8.html%23thyeq1brick20nov1501.

A

Vormfuncties

De eerste vormfunctie u hieronder beschrijft de verplaatsing van een element in de x-richting. Verder staan daaronder de verkorte weergaven van dezelfde verplaatsing v en w respectievelijk in y- en z-richting [7].

$$
\begin{aligned}
u=\tfrac{1}{8}\big(&u_I(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2)+u_J(1+s)(1-t)(1-r)(s-t-r-2)\\
&+u_K(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2)+u_L(1-s)(1+t)(1-r)(-s+t-r-2)\\
&+u_M(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2)+u_N(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2)\\
&+u_O(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2)+u_P(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2)\big)\\
&+\tfrac{1}{4}\big(u_Q(1-s^2)(1-t)(1-r)+u_R(1+s)(1-t^2)(1-r)\\
&+u_S(1-s^2)(1+t)(1-r)+u_T(1-s)(1-t^2)(1-r)\\
&+u_U(1-s^2)(1-t)(1+r)+u_V(1+s)(1-t^2)(1+r)\\
&+u_W(1-s^2)(1+t)(1+r)+u_X(1-s)(1-t^2)(1+r)\\
&+u_Y(1-s)(1-t)(1-r^2)+u_Z(1+s)(1-t)(1-r^2)\\
&+u_A(1+s)(1+t)(1-r^2)+u_B(1-s)(1+t)(1-r^2)\big)
\end{aligned}
$$

$$v=\frac{1}{8}(v_I(1-s)\ldots \text{(analogous to u)}$$

$$w=\frac{1}{8}(w_I(1-s)\ldots \text{(analogous to u)}$$

B

Schuifspannings- en foutentabellen

h $[m]$	b/h $[-]$	τ_{xy} $[Pa]$ (tabel)	τ_{xz} $[Pa]$ (tabel)	τ_{xy} $[Pa]$ (Roark's)
0,3	1,0	3527336	3527336	3569834
0,33	1,1	3124829	3012978	3139764
0,36	1,2	2793140	2604573	2813693
0,375	1,25	2654390	2436146	2675410
0,39	1,3	2526831	2283769	2549867
0,40	1,333	2447381	2190101	2472276
0,42	1,4	2300437	2019468	2329712
0,45	1,5	2114891	1818885	2142328
0,48	1,6	1953430	1647555	1980648
0,50	1,667	1859600	1548587	1884638
0,51	1,7	1815541	1502517	1839723
0,525	1,75	1752714	1437285	1775863
0,54	1,8	1693509	1376330	1715891
0,57	1,9	1584811	1271985	1606339
0,60	2,0	1487431	1179523	1508847
0,63	2,1	1403078	1103672	1421627
0,66	2,2	1326636	1035364	1343223
0,675	2,25	1291051	1003714	1306943
0,69	2,3	1257069	973583	1272433
0,70	2,333	1235254	954290	1250350
0,72	2,4	1193511	917485	1208257
0,75	2,5	1135235	866363	1149856
0,78	2,6	1083271	823411	1096523
0,80	2,667	1050862	796686	1063482
0,81	2,7	1035277	783853	1047656
0,825	2,75	1012633	765228	1024734
0,84	2,8	990825	747317	1002742
0,87	2,9	949546	713486	961341
0,90	3,0	911120	682082	923073

Tabel B.1: Analytisch berekende schuifspanningen door tabelwaarden en Roark's formulas. Doorsnede breedte is 0,3 m

3 elementen			
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy} $[Pa]$	τ_{xz} $[Pa]$
1,0	3	3446800	3446800
1,0	4	3538500	3514500
1,1	4	3150800	2968000
1,2	4	2836400	2548700
1,3	4	2576100	2219600
1,333	4	2499000	2125500
1,333	5	2414600	2161800
1,4	5	2279500	1992700
1,5	5	2101500	1778300
1,6	5	1947800	1601000
1,667	5	1856500	1499100
1,667	6	1879300	1521200
1,7	6	1835300	1474500
1,8	6	1713900	1348600
1,9	6	1606300	1240700
2,0	6	1510400	1147300
2,0	7	1495000	1162000
2,1	7	1410800	1080600
2,2	7	1334900	1009100
2,3	7	1266100	945650
2,333	7	1244600	926100
2,333	8	1250300	936570
2,4	8	1208700	899670
2,5	8	1150900	849050
2,6	8	1097900	803430
2,667	8	1065100	775440
2,667	9	1061400	783280
2,7	9	1045800	769970
2,8	9	1001500	732420
2,9	9	960500	698120
3,0	9	922540	666650

4 elementen			
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy} $[Pa]$	τ_{xz} $[Pa]$
1,0	4	3590000	3590000
1,0	5	3457700	3617300
1,1	5	3074000	3070500
1,2	5	2764500	2649000
1,25	5	2631200	2473500
1,25	6	2674200	2490700
1,3	6	2549400	2334300
1,4	6	2329700	2067900
1,5	6	2142900	1850500
1,5	7	2114200	1862000
1,6	7	1956900	1682100
1,7	7	1820000	1531100
1,75	7	1758000	1464500
1,75	8	1770600	1472600
1,8	8	1711600	1411200
1,9	8	1603700	1301400
2,0	8	1507500	1206400
2,0	9	1499100	1212400
2,1	9	1414000	1129600
2,2	9	1337400	1056800
2,25	9	1301900	1023600
2,25	10	1306100	1028200
2,3	10	1272000	996900
2,4	10	1208500	939440
2,5	10	1150600	887940
2,5	11	1147800	891600
2,6	11	1095100	845240
2,7	11	1046800	803250
2,75	11	1024100	783710
2,75	12	1025600	786670
2,8	12	1003700	768040
2,9	12	962380	733180
3,0	12	924150	701220

Tabel B.2: Numerieke schuifspanningen per h/b-verhouding. Links 3 dikte-elementen, rechts 4 dikte-elementen.

3 elementen			
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy}-fout [%]	τ_{xz}-fout [%]
1,0	3	2,28	2,28
1,0	4	0,32	0,36
1,1	4	0,83	1,49
1,2	4	1,55	2,15
1,3	4	1,95	2,81
1,333	4	2,11	2,95
1,333	5	1,34	1,29
1,4	5	0,91	1,33
1,5	5	0,63	2,23
1,6	5	0,29	2,83
1,667	5	0,17	3,20
1,667	6	1,06	1,77
1,7	6	1,09	1,86
1,8	6	1,20	2,01
1,9	6	1,36	2,46
2,0	6	1,54	2,73
2,0	7	0,51	1,49
2,1	7	0,55	2,09
2,2	7	0,62	2,54
2,3	7	0,72	2,87
2,333	7	0,76	2,95
2,333	8	1,22	1,86
2,4	8	1,27	1,94
2,5	8	1,38	2,00
2,6	8	1,35	2,43
2,667	8	1,35	2,67
2,667	9	1,00	1,68
2,7	9	1,02	1,77
2,8	9	1,08	1,99
2,9	9	1,15	2,15
3,0	9	1,25	2,26

4 elementen			
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy}-fout [%]	τ_{xz}-fout [%]
1,0	4	1,78	1,78
1,0	5	1,97	2,55
1,1	5	1,63	1,91
1,2	5	1,03	1,71
1,25	5	0,87	1,53
1,25	6	0,75	2,24
1,3	6	0,89	2,21
1,4	6	1,27	2,40
1,5	6	1,32	1,74
1,5	7	0,03	2,37
1,6	7	0,18	2,10
1,7	7	0,25	1,90
1,75	7	0,30	1,89
1,75	8	1,02	2,46
1,8	8	1,07	2,53
1,9	8	1,19	2,31
2,0	8	1,35	2,28
2,0	9	0,78	2,79
2,1	9	0,78	2,35
2,2	9	0,81	2,07
2,25	9	0,84	1,98
2,25	10	1,17	2,44
2,3	10	1,19	2,39
2,4	10	1,26	2,39
2,5	10	1,35	2,49
2,5	11	1,11	2,91
2,6	11	1,09	2,65
2,7	11	1,11	2,47
2,75	11	1,13	2,42
2,75	12	1,28	2,80
2,8	12	1,30	2,77
2,9	12	1,35	2,76
3,0	12	1,43	2,81

Tabel B.3: Numerieke schuifspanningsfouten (tabelwaarden) per h/b-verhouding. Links 3 dikte-elementen, rechts 4 dikte-elementen.

3 elementen		
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy}-fout [%]
1,0	3	3,45
1,0	4	0,88
1,1	4	0,35
1,2	4	0,81
1,3	4	1,03
1,333	4	1,08
1,333	5	2,33
1,4	5	2,16
1,5	5	1,91
1,6	5	1,66
1,667	5	1,49
1,667	6	0,28
1,7	6	0,24
1,8	6	0,12
1,9	6	0,00
2,0	6	0,10
2,0	7	0,92
2,1	7	0,76
2,2	7	0,62
2,3	7	0,50
2,333	7	0,46
2,333	8	0,00
2,4	8	0,04
2,5	8	0,09
2,6	8	0,13
2,667	8	0,15
2,667	9	0,20
2,7	9	0,18
2,8	9	0,12
2,9	9	0,09
3,0	9	0,06

4 elementen		
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy}-fout [%]
1,0	4	0,56
1,0	5	2,98
1,1	5	2,09
1,2	5	1,75
1,25	5	1,65
1,25	6	0,05
1,3	6	0,02
1,4	6	0,00
1,5	6	0,03
1,5	7	1,31
1,6	7	1,20
1,7	7	1,07
1,75	7	1,01
1,75	8	0,30
1,8	8	0,25
1,9	8	0,16
2,0	8	0,09
2,0	9	0,65
2,1	9	0,54
2,2	9	0,43
2,25	9	0,39
2,25	10	0,06
2,3	10	0,03
2,4	10	0,02
2,5	10	0,06
2,5	11	0,18
2,6	11	0,13
2,7	11	0,08
2,75	11	0,06
2,75	12	0,08
2,8	12	0,10
2,9	12	0,11
3,0	12	0,12

Tabel B.4: Numerieke schuifspanningsfouten (Roark's formulas) per h/b-verhouding. Links 3 dikte-elementen, rechts 4 dikte-elementen.

5 elementen			
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy} $[Pa]$	τ_{xz} $[Pa]$
1,0	5	3485400	3485400
1,0	6	3549200	3501600
1,1	6	3147800	2972800
1,2	6	2824800	2565700
1,2	7	2782000	2576600
1,3	7	2522300	2256600
1,4	7	2305000	1999800
1,4	8	2325400	2007400
1,5	8	2138200	1798200
1,6	8	1977100	1624900
1,6	9	1963000	1630600
1,7	9	1824800	1485400
1,8	9	1703500	1362200
1,8	10	1711200	1366500
1,9	10	1603100	1261000
2,0	10	1506800	1169700
2,0	11	1501400	1173100
2,1	11	1415900	1093500
2,2	11	1338900	1023500
2,2	12	1342100	1026200
2,3	12	1272100	964320
2,4	12	1208500	909130
2,4	13	1206200	911370
2,5	13	1148600	861950
2,6	13	1095800	817410
2,6	14	1097100	819290
2,7	14	1048500	779000
2,8	14	1003700	742350
2,8	15	1002800	743940
2,9	15	961560	710500
3,0	15	923410	679830

Tabel B.5: Numerieke schuifspanningen per h/b-verhouding bij 5 dikte-elementen.

5 elementen				
b/h $[-]$	EY $[-]$	τ_{xy}-fout [%] (tabel)	τ_{xz}-fout [%] (tabel)	τ_{xy}-fout [%] (Roark's)
1,0	5	1,19	1,19	2,37
1,0	6	0,62	0,73	0,58
1,1	6	0,74	1,33	0,26
1,2	6	1,13	1,49	0,39
1,2	7	0,40	1,07	1,13
1,3	7	0,18	1,19	1,08
1,4	7	0,20	0,97	1,06
1,4	8	1,09	0,60	0,19
1,5	8	1,10	1,14	0,19
1,6	8	1,21	1,38	0,18
1,6	9	0,49	1,03	0,89
1,7	9	0,51	1,14	0,81
1,8	9	0,59	1,03	0,72
1,8	10	1,04	0,71	0,27
1,9	10	1,15	0,86	0,20
2,0	10	1,30	0,83	0,14
2,0	11	0,94	0,54	0,49
2,1	11	0,91	0,92	0,40
2,2	11	0,92	1,15	0,32
2,2	12	1,17	0,89	0,08
2,3	12	1,20	0,95	0,03
2,4	12	1,26	0,91	0,02
2,4	13	1,06	0,67	0,17
2,5	13	1,18	0,51	0,11
2,6	13	1,16	0,73	0,07
2,6	14	1,28	0,50	0,05
2,7	14	1,28	0,62	0,08
2,8	14	1,30	0,66	0,10
2,8	15	1,21	0,45	0,01
2,9	15	1,27	0,42	0,02
3,0	15	1,35	0,33	0,04

Tabel B.6: Numerieke schuifspanningsfouten per h/b-verhouding. Zowel voor tabelwaarden als Roark's formulas.

C

Python scripts

Hieronder staat het Python script geschreven voor de lineaire interpolatie van de waardentabel uit subsectie 2.2.1.

```
b = 0.39
h = 0.3

tmax = [[1,0.21],[1.2,0.221],[1.4,0.23],[1.6,0.237],
        [1.8,0.243],[2.0,0.249],[2.5,0.261],[3.0,0.271],
        [4.0,0.288],[5.0,0.299],[10,0.323],[50,0.329]]
t2 = [[1,0.21],[1.2,0.237],[1.4,0.262],[1.6,0.281],
      [1.8,0.299],[2.0,0.314],[2.5,0.342],[3.0,0.362],
      [4.0,0.388],[5.0,0.398],[10,0.4],[50,0.4]]

tmax_x = [row[0] for row in tmax]
tmax_y = [row[1] for row in tmax]

t2_x = [row[0] for row in t2]
t2_y = [row[1] for row in t2]

for i in range(len(tmax)):
    if (tmax[i][0]) == (b/h):
        tmax_table = tmax[i][1]
    else:
        tmax_table = np.interp(b/h, tmax_x, tmax_y)
    if (t2[i][0]) == (b/h):
        t2_table = t2[i][1]
    else:
        t2_table = np.interp(b/h, t2_x, t2_y)

print ('b/h =', b/h)
print ('tmax_table =', tmax_table)
print ('t2_table =', t2_table)
```

```
b/h = 1.3
tmax_table = 0.2255
t2_table = 0.2495
```

Python berekening van de schuifspanning, gebruikmakend van de waardentabel uit hoofdstuk 2.2.1.

```
Mw = 20000
b = 0.39
h = 0.3

print (f'tmax = {Mw / (tmax_table*b*h**2)}')
print (f't2 = {Mw / (t2_table*b*h**2)}')
```

```
tmax = 2526831.795124478
t2 = 2283769.8188399593
```

Hieronder staat het Python script geschreven voor de berekening van de Roark's formulas schuifspanningen. Hierin worden zowel de schuifspanningen berekend bij vierkante- als rechthoekige doorsneden.

```
b = 0.57
h = 0.3
Mw = 20000

a = b/2
c = h/2

tmax_roark = 3*Mw/(8*a*c**2)*(1+0.6095*(c/a)+0.8865*(c**2/a**2)
                              -1.8023*(c**3/a**3)+0.9100*(c**4/a**4))
tmax_square = Mw/(1.66*a**3)
print (f'{tmax_roark}')
print (f'{tmax_square}')

```