CT3000-09: Bachelor eindwerk, Nadieh Meinen (1528610)

Optimalisatie van het aantal volume-elementen in een op dwarskracht belaste balk

Begeleiding: dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. P.A. de Vries

oktober 2012

Voorwoord

In dit rapport is onderzocht op welke manier een eenzijdig ingeklemde ligger belast op dwarskracht zo efficient mogelijk in volume-elementen kan worden verdeeld.
Het onderzoek is onderdeel van het bachelor eindwerk voor de studie Civiele Techniek aan de TU Delft en ondanks enkele complicaties rondom het rekenprogramma *ANSYS* heb ik de afgelopen zeven weken met ontzettend veel plezier aan dit onderzoek gewerkt.
Ik wil graag mijn directe begeleider dhr. P.C.J. Hoogenboom bedanken voor het beschikbaar stellen van zijn ruimte en faciliteiten gedurende dit kwartaal, maar bovenal ook voor de vele brainstormsessies die we hebben gehad over enkele (vooralsnog onverklaarbare) resultaten.
Tevens wil ik mijn secundaire begeleider dhr. P.A. de Vries bedanken voor zijn nuttige en vooral practische tips, die ervoor gezorgd hebben dat het onderzoek zijn uiteindelijke doel niet voorbij schoot.
Daarnaast wil ik ook dhr M.G. van de Ruijtenbeek bedanken, die mij met andere ogen naar het gebruik van eindige elementenprogramma's heeft doen kijken.

Ik wens de lezer veel plezier tijdens het doornemen van dit verslag. Mochten er vragen of opmerkingen zijn, neem dan gerust contact met mij op.

Nadieh Meinen
n.meinen@student.tudelft.nl

Delft, oktober 2012

Inhoudsopgave

6. Conclusies en aanbevelingen

Bijlagen

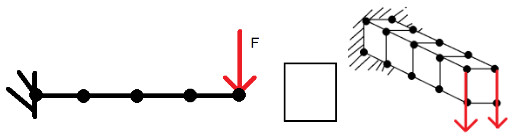
1. Inleiding

Om het gedrag van constructies te analyseren worden deze door de constructeur geschematiseerd en in rekenmodellen beschreven. Dit model (1- 2- of 3 dimensionaal) wordt gebruikt om spanningen en vervormingen die ontstaan onder invloed van de belasting op de constructie, zo nauwkeurig mogelijk te voorspellen.
De schematisering / modellering die de constructeur kiest om de analyse mee uit te voeren hangt af van verschillende factoren:

1. Het gemak van de modellering
2. De nauwkeurigheid van de berekening
3. De totale rekentijd

Eén van de mogelijkheden is om de te analyseren constructie te berekenen in een volledig 3-dimensionaal model. Dit heeft als voordeel dat de geometrische afmetingen van de constructie direct zichtbaar zijn en kunnen worden (her)gebruikt. Het 3-dimensionale model van de architect hoeft dan dus niet opnieuw geschematiseerd te worden in een 1- of 2-dimensionaal model, maar kan direct gebruikt worden voor de berekening.
Dit past volledig in de gedachte van het Bouwwerk Informatie Model (BIM), waarbij veel of alle informatie van een gebouw of constructie geïntegreerd als één informatiemodel wordt vastgelegd. Een 3D model vormt tevens een onderdeel van dit model.

Bij het modelleren in 3D wordt de constructie opgedeeld in volume-elementen, die uit knooppunten bestaan. Het aantal knooppunten in een 3D model, en daarmee de rekentijd om een analyse uit te voeren, is groot ten opzichte van de traditionele 1D staaf modellen.

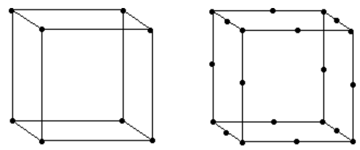


Afbeelding 1.1) Bij toepassing van evenveel elementen heeft het 1D-model (links) een stuk minder knooppunten dan het 3D-model (rechts)

Om de capaciteit van de computers waarmee de analyse wordt uitgevoerd zo goed mogelijk te benutten, is het van belang bij het genereren van het 3D model het aantal elementen (knooppunten) te optimaliseren. Dit houdt in dat men met zo min mogelijk elementen een zo nauwkeurig mogelijk resultaat wil genereren. Echter werken de meeste rekenprogramma's volgens de eindige elementen methode, waarbij de berekening nauwkeuriger wordt naarmate er méér elementen worden toegevoegd. Het optimale aantal elementen ligt dus ergens in het midden.
Uit het onderzoek van W. Steenstra [1] is gebleken dat een ligger belast op dwarskracht of wringing voor een zelfde nauwkeurigheid méér elementen in de doorsnede vereist dan een ligger belast op normaalkracht of een buigend moment. De hoofdvraag van dit verslag luidt dus:

Hoofdvraag
Hoe kan een eenzijdig ingeklemde ligger belast op dwarskracht zo efficient mogelijk in volume-elementen worden verdeeld voor een voldoende nauwkeurig resultaat?

Waarbij "zo efficient mogelijk" inhoudt dat de betreffende nauwkeurigheid verkregen wordt met een minimaal aantal elementen in de balk.
Hierbij beperkt het onderzoek zich op een homogene lineair elastische ligger met rechthoekige doorsnede, waarbij de lengte van de ligger minimaal een tienvoud is van de hoogte of de breedte. De nadruk wordt gelegd op het vinden van de piekspanningen en hoofdvervormingen. Als eindige elementenprogramma wordt *ANSYS* gebruikt. Zowel 8- als 20- knoops elementen worden in het verslag overwogen (Afbeelding 1.2).



Afbeelding 1.2) 8-knoops element (links) en 20-knoops element (rechts)

Om tot de meest efficiente verdeling van een balk in volume-elementen te komen wordt in hoofdstuk 2 eerst ingezoomd op de meest efficiente, oftewel optimale elementcombinaties in de doorsnede. Daarbij wordt deelvraag 1 beantwoord voor een op dwarskracht belaste balk met een hoogte breedte verhouding van respectievelijk h/b=1 en h/b=5, doorgerekend met 20-knoops elementen.

<u>Deelvraag 1</u>
In hoeveel 20-knoops elementen moet de doorsnede van een op dwarskracht belaste balk minimaal worden opgedeeld om de inwendige spanningsverdeling zo efficient mogelijk te benaderen, met een maximale onauwkeurigheid van respectievelijk 1,3 of 10% ?

Om de berekening te optimaliseren is het van belang om niet alleen het juiste aantal, maar ook het juiste soort elementen in het model toe te passen. De keuze van het elementtype heeft namelijk een grote invloed op de precisie van de berekening en dus ook op het aantal benodigde elementen. Daarom wordt in hoofdstuk 3 deelvraag 2 beantwoord.

<u>Deelvraag 2</u>
Welke van het 8-knoops en 20-knoops elementtype is het meest geschikt om een balk belast op dwarskracht mee te modelleren?

Als de constructeur meer inzicht en invloed heeft in (het onstaan van) de fout, zou hij deze kennis kunnen gebruiken tijdens het modelleren. Als hij bijvoorbeeld weet in welke richting (hoogte, breedte, lengte) de discretisatie kwalitatief het meeste efficient is, kan hij in die betreffende richting de meeste elementen toevoegen. Als de verwachte fout gekwantificeerd kan worden, weet de constructeur of het uitvoeren van de berekening lonend is. Als de voorkennis van de constructeur gecombineerd wordt met de output van een eindige elementen programma kan er een beter resultaat worden verkregen met toepassing van minder elementen.
In hoofdstuk 4 wordt er daarom dieper ingegaan op deelvraag 3.

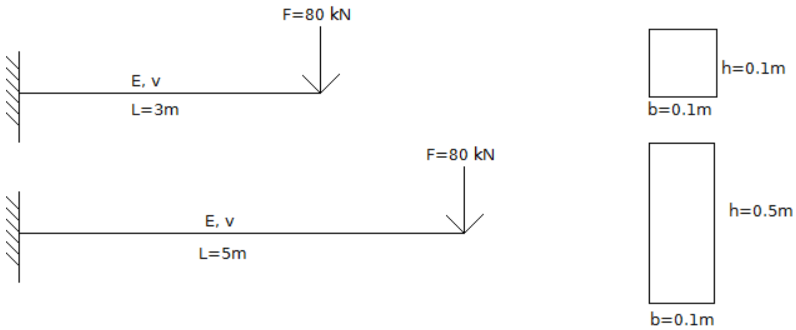
<u>Deelvraag 3</u>
In hoeverre kan de constructeur invloed uitoefenen op de uiteindelijke fout in de numerieke benadering?

Hoewel de sterkte-eisen in hoge mate de constructieve veiligheid van een gebouw bepalen, zijn deze vaak niet doorslaggevend bij de dimensionering ervan. Doorbuigingseisen waaraan een vloer of balk in de bruikbaarheidsgrenstoestand aan moet voldoen, zijn daarentegen vaak wél doorslaggevend voor de dimensionering. Daarom wordt er tot slot van dit onderzoek ook gekeken naar het benaderen van de vervormingen in een op dwarskracht belaste balk met h/b=1. Voor zowel het 8-knoops als het 20-knoops element wordt deelvraag 4 in hoofdstuk 5 beantwoord.

<u>Deelvraag 4</u>
In hoeveel elementen in de hoogte, breedte en lengte moet een dwarskracht belaste balk worden opgedeeld om de maximale vervormingen van de balk binnen een nauwkeurigheid van 1,3 of 10% te benaderen?

De conclusies en aanbevelingen volgen in hoofdstuk 6.

2. Optimale elementcombinaties in de doorsnede



Afbeelding 2.1) Op dwarskracht belaste balken met verschillende h/b-verhoudingen.

Bovenstaande balken met verschillende hoogte/breedte verhouding en verschillende lengte zijn een versimpelde versie van constructie-elementen die heden ten dage in de bouw worden toegepast. De balken worden op dwarskracht belast en de situatie leent zich voor een lineair elastische berekening.

Tijdens de synthese-fase van het voorontwerp wordt een eerste schatting van de optredende spanningen gemaakt. Echter is het ontwerp nog maar in de beginfase. De berekening mag niet te veel tijd kosten en als deze zo'n 10% nauwkeurig is, is dat afdoende.
In een later stadium van het ontwerp moeten de piekspanningen binnen de balken een stuk nauwkeuriger worden berekend; op bijvoorbeeld 3% of zelfs 1 % nauwkeurigheid.
Omdat een hoger nauwkeurigheidspercentage in de regel zorgt voor een grotere rekentijd, is het van belang om het aantal elementen en daarmee het aantal knooppunten in de doorsnede van de balk te optimaliseren (zo klein mogelijk te maken).
De vraag luidt dus:

Deelvraag 1
In hoeveel 20-knoops elementen moet de doorsnede van een op dwarskracht belaste balk minimaal worden opgedeeld om de inwendige spanningsverdeling zo efficient mogelijk te benaderen, met een maximale onauwkeurigheid van respectievelijk 1,3 of 10% ?

Een dergelijke vraag kan niet worden beantwoord zonder dat de balk op een juiste manier gemodelleerd is. Om de resultaten goed te kunnen interpreteren is het van belang om te begrijpen hoe het eindige elementenprogramma de spanningswaarden berekent en vervolgens aan de knooppunten toebedeelt. In §2.1 Theorie worden daarom de volgende vragen beantwoord:

Hoe moet de balk worden gemodelleerd?	(§2.1.1 t/m §2.1.3)
Hoe berekent het eindige elementenprogramma de spanningen in de balk?	(§2.1.4 t/m §2.1.5)
Hoe kunnen de resultaten het beste worden afgelezen/geplot?	(§2.1.6)

Na enkele tussenstappen wordt vervolgens in §2.2.4 wordt antwoord gegeven op deelvraag 1.

2.1 Theorie

2.1.1 Analytische benadering

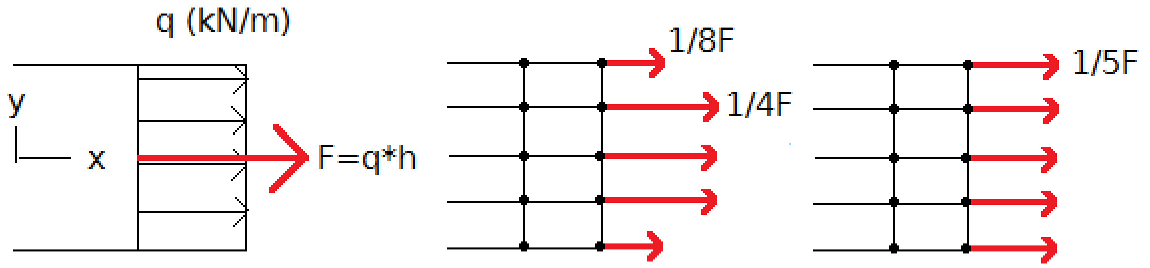
Om een eerste indruk te krijgen van de optredende krachten wordt er een dwarskrachtenlijn, momentenlijn en de maximale schuifspanning analytisch bepaald. Deze vormen de basis van de modellering.

2.1.2 Het modelleren van de balk (pre-processing)

De balk wordt in Ansys gemodelleerd en verdeeld in EY aantal elementen in de hoogte en EZ aantal elementen breedte van de doorsnede. In het volgende hoofdstuk zal blijken dat het Solid186 elementtype erg geschikt is voor het benaderen van een schuifspanningsverdeling. Er wordt dus gebruikt gemaakt van dit elementtype.

2.1.3 Randvoorwaarden aanbrengen (solving)

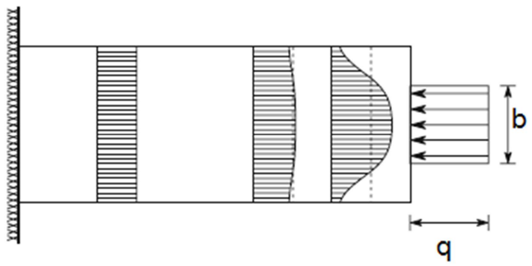
De randvoorwaarden en krachten worden op het model aangebracht. Het aanbrengen van de krachten brengt reeds enige complicatie met zich mee. Om dit toe te lichten wordt als voorbeeld een doorsnede belast op een gelijkmatig verdeelde normaalkracht bekeken.



Afbeelding 2.1.3.1) Modelleren normaalkracht naar verhouding (links) of eenvoudig (rechts)

Zie bovenstaande afbeelding. De normaalkracht kan *naar verhouding* worden verdeeld over de knooppunten (links), of kan uit gemak *gelijkmatig* worden verdeeld over alle knooppunten (rechts). Hoewel de beide situaties statisch equivalent zijn, zal er direct na de krachtsinleiding een afwijkend spanningsverloop over de balk heersen.
Op een voldoende grote afstand van de krachtsinleiding zal er sprake zijn van het Saint Venant principe, wat inhoudt dat

... the difference between the effects of two different but statically equivalent loads becomes very small at sufficiently large distances from load." [Wikipedia]



Afbeelding 2.1.3.2) Principe van Saint Venant [Wikipedia]

Als men de spanningen en rekken dus ver genoeg van het lastinleidinggebied bepaalt, is er een uniforme spanningsverdeling.
In [1] is afgeleid dat de invloed van de modellering van de dwarskracht op het spanningsverloop in het midden van de balk verwaarloosbaar klein is indien de lengte van de balk is L=min{10*h,10*b}.

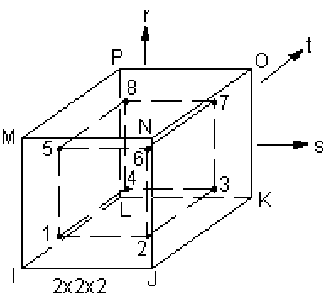
Het feit dat in de bouw de meeste liggers een stuk langer zijn dan hun doorsnede afmetingen maakt het samen met het Saint Venant principe mogelijk om de krachten aan te brengen volgens de rechter methode van Afbeelding 2.1.3.1, die een stuk eenvoudiger is dan de linker methode. Dit geldt nog meer indien er sprake is van bijvoorbeeld wringbelasting of, in dit geval, dwarskracht.

2.1.4 De berekening (solver)

Als de krachten en de randvoorwaarden juist gemodelleerd zijn, wordt de solver van het eindige elementen-programma aangezet. Dit houdt in dat in eerste instantie de totale stijfheidsmatrix K wordt bepaald. Samengevat bepaalt Ansys dan uiteindelijk op ieder knooppunt de verplaatsingen, vervolgens de rekken en erna de spanningen. Om te begrijpen hoe nauwkeurig deze uitkomsten zijn en waar deze van afhankelijk zijn, is het van belang deze stappen iets meer onder de loep te nemen.

Stijfheidsmatrix K

Om de verplaatsingen van de elementen te berekenen wordt eerst de stijfheidsmatrix K_e per elementje bepaald. Met behulp van de evenwichtsvergelijkingen, constitutieve vergelijkingen ontstaat er een uitdrukking voor K_e in de vorm van een integraal.
Om de waarde van de integraal te bepalen, wordt er gebruik gemaakt van (Gauss) integratiepunten, die zich binnen het element op bepaalde (ideale) afstanden binnen het element bevinden. Het aantal integratiepunten is afhankelijk van het soort element dat gebruikt wordt.
Het 20-knoopse Solid186 element heeft 2x2x2 integratiepunten (zie Afbeelding 2.1.4.1). Hoe meer integratiepunten een element heeft, des te nauwkeuriger de stijfheidsmatrix zal zijn. Hoe meer elementen er dus zullen zijn, hoe nauwkeuriger de stijfheidsmatrix.
Ook het 8-knoopse Solid185 element heeft 8 integratiepunten, waarom deze dan toch onnauwkeuriger is dan Solid186 wordt duidelijk in hoofdstuk 3.



Afbeelding 2.1.4.1) Integratiepunten [3]

2.1.5 Postprocessing

Vanuit de gevonden waarden op de integratiepunten worden de waarden op de knooppunten bepaald via extrapolatie. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van de “Element Shape Functions” die afhankelijk zijn van het soort element dat wordt gebruikt [3].

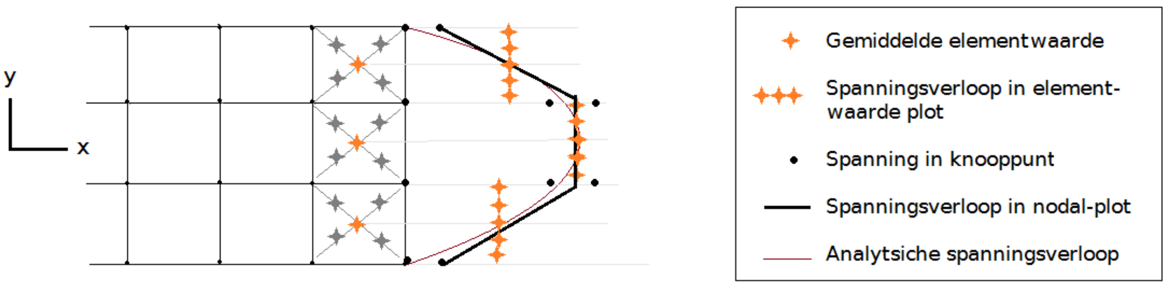
De waarden op de knooppunten zijn dus afhankelijk van de manier van modellering, de nauwkeurigheid in de integratiepunten, de element shape functions en uiteraard van de afstand tot het integratiepunt. Hoe groter de afstand vanaf het integratiepunt, hoe onnauwkeuriger de extrapolatie wordt. Als de constructie dus wordt opgedeeld in meerdere elementjes is de afstand van het knooppunt tot het extrapolatiepunt kleiner. De waarde in het knooppunt zal dan dus nauwkeuriger zijn.

Ieder knooppunt in een element heeft nu een waarde voor de verplaatsing, rek en spanning opgelegd gekregen. Echter worden de knooppunten gedeeld door meerdere elementen. De waarde van respectievelijk de verplaatsing, rek en spanning op het gezamenlijke knooppunt is dus de gemiddelde waarde van de knooppunten van de vier omliggende elementen. Dit is uiteraard

gevaarlijk als er een sprong in de spanning hoort te zitten door bijvoorbeeld verandering van stijfheid. De hoge waarden voor de spanning wordt dan onterecht afgevlakt.
Bij de meeste FEM programma's kan daarom gekozen worden om in plaats van de waarden op de knooppunten op te vragen, de waarden in de elementen op te vragen. De waarde voor de spanning, rek of verplaatsing is dan het gemiddelde van de verschillende integratiepunten binnen een element. De spanning binnen een element is dan constant en wordt dus niet afgevlakt.

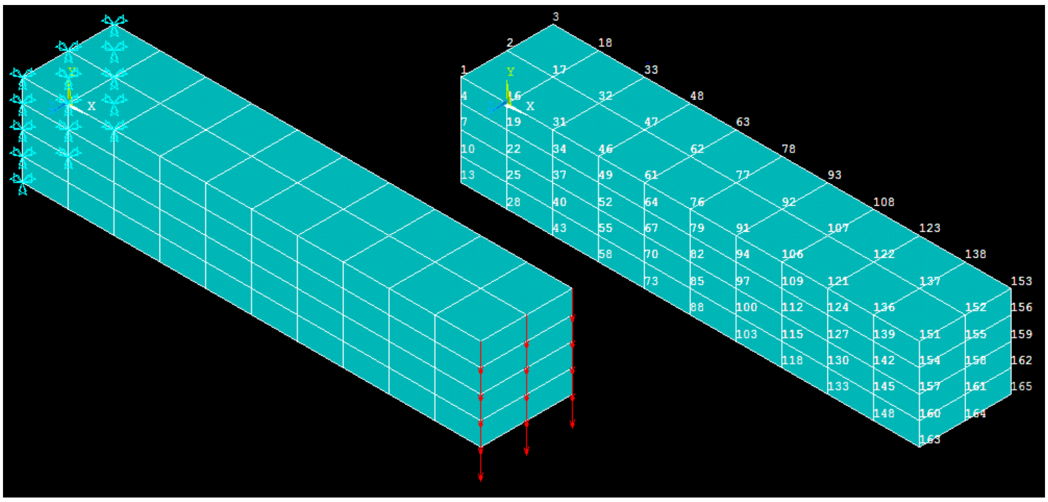
2.1.6 Interpreteren van de resultaten (evaluatie)

Toch kiezen constructeurs er meestal voor om de waarden op de knooppunten af te lezen.
De spanningen op de integratiepunten zijn namelijk de spanningen *binnen* een element. Vaak ligt de maximale spanning niet binnen in een element, maar juist *op de rand* van een element, dus daar waar de knooppunten zich bevinden. Bovendien is het met de gemiddelde elementwaarden onmogelijk om een spanningsverloop binnen een element af te beelden. <u>Het element heeft immers maar één waarde</u> voor de spanning.
Dit is niet het geval indien de spanning wordt bepaald aan de hand van de knooppunten, de knooppunten van een element kunnen namelijk in waarde verschillen. Dit principe worden duidelijk in afbeelding 2.1.6.1.
De (schuif) spanning loopt voor zowel het Solid185 als het Solid186 element lineair tussen de knooppunten.



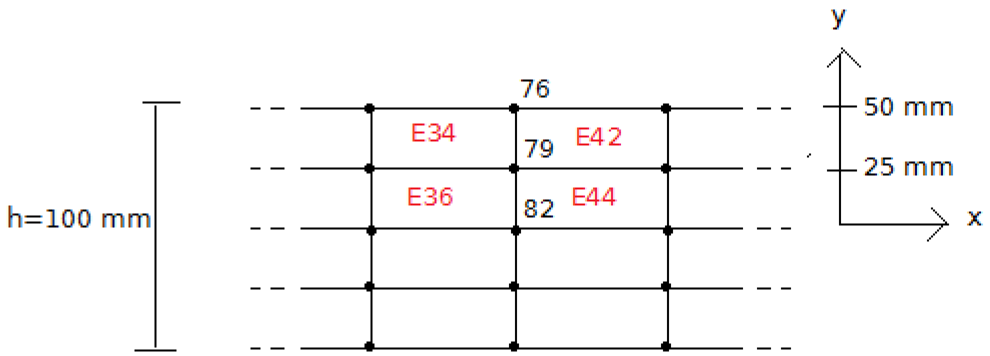
Afbeelding 2.1.6.1) Zijaanzicht van een op dwarskracht belaste balk; verschil tussen elementwaarde- en nodal-plot

Voorbeeld
Stel je wil van onderstaande balk het verloop van de schuifspanning benaderen met Solid186 elementen.
De balk heeft de afmetingen h=b=100mm en L=500mm en de dwarkrachtbelasting is 80 kN.
E=210.000 kN/mm^2. Analytisch kan eenvoudig worden berekend dat de optredende schuifspanning halverwege de doorsnede ongeveer 12 N/mm2 zal zijn.



Afbeelding 2.1.6.2) Eenzijdig ingeklemde balk belast op dwarskracht, verdeeld in 4*2 elementen in de doorsnede.

Om de nauwkeurigheid van de elementwaarden en de knooppuntswaarden met elkaar te kunnen vergelijken, moet worden gekeken naar de benadering van de spanning door beide soorten over de gehele hoogte. Daar de schuifspanning parabolisch verloopt en gespiegeld kan worden over de x-as, is het slechts nuttig om de bovenste helft te analyseren. Op afbeelding 2.1.6.3 is een schematisch zijaanzicht van de balk te zien.



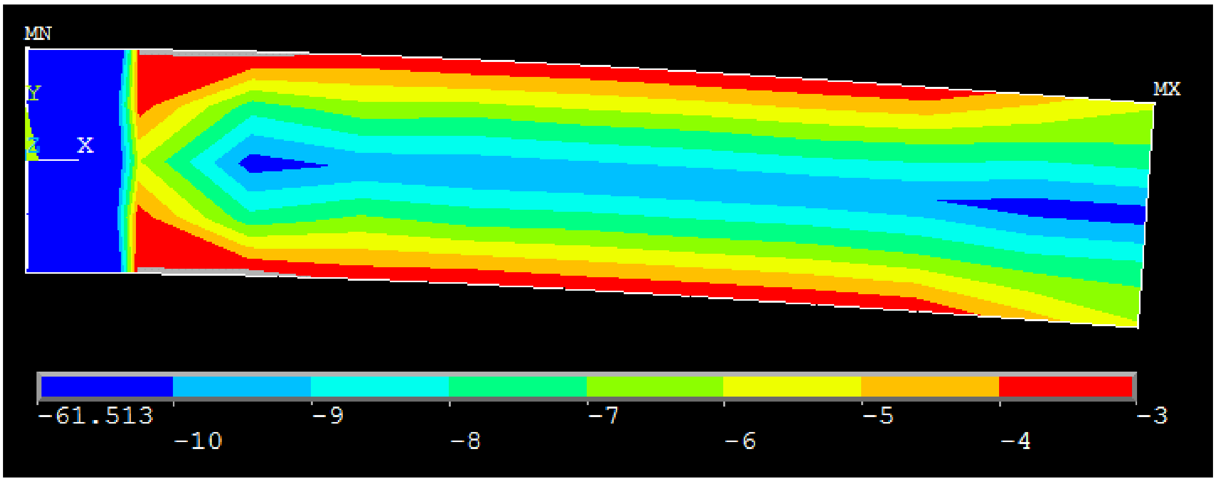
Afbeelding 2.1.6.3) Zijaanzicht van de balk opgedeeld in elementen met knooppuntsnummering (zwart) en elementnummering (rood)

Voor bijvoorbeeld knooppunt 82 is het redelijk duidelijk welke waarde deze zou moeten representeren, namelijk de waarde van de schuifspanning op afstand y=0 vanaf het normaalkrachtencentrum, zijnde 12 kN/mm2.
Voor een element is het minder eenduidig welke waarde deze representeert. De spanning bepaald uit element 36 zou namelijk representatief moeten zijn voor het interval tussen y=0 en y=25. In onderstaande Tabel 2.1.6.1 zijn respectievelijk de knooppunts- element- en analytische spanningen uitgezet.

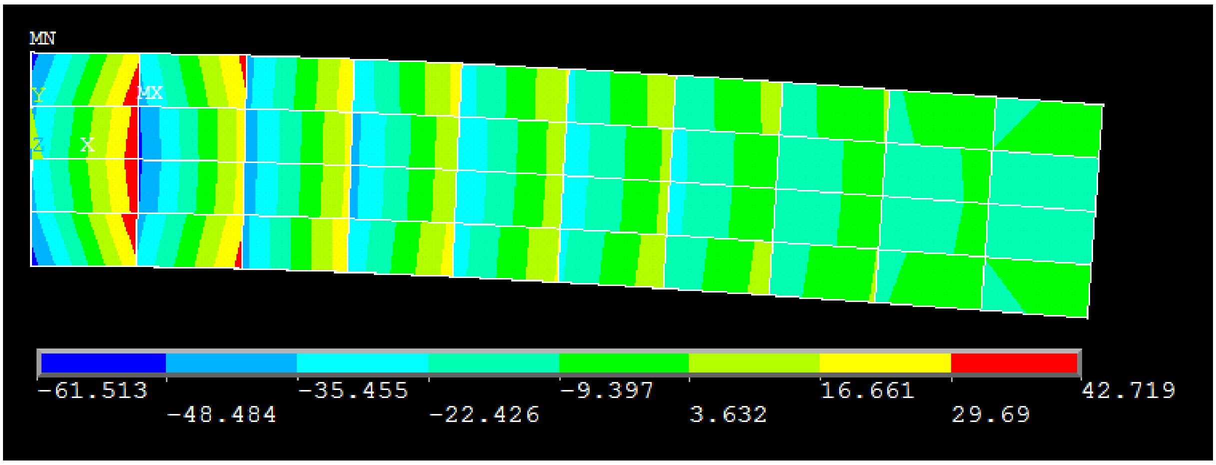
Tabel 2.1.6.1) Procentuele fout in de grootste schuifspanning t.o.v. analytische waarde voor knooppunten en elementen

	Y=afstand tot neutrale lijn (mm)	Analytisch berekende spanning (N/mm2)	Numeriek berekende spanning (N/mm2)	Absolute fout (N/mm2)	%fout
Knooppunt 76	50	0	-3.10	3.10	ondefinieerbaar
Knooppunt 79	25	-9	-6.78	-2.22	24.64
Knooppunt 82	0	-12	-9.92	-2.08	17.37
Element 34	50	0	-5.27	5.27	ondefinieerbaar
	37.5	-5.25	-5.27	0.02	-0.46
	25	-9	-5.27	-3.73	41.40
Element 36	25	-9	-10.73	1.73	-19.18
	12.5	-11.25	-10.73	-0.52	4.66
	0	-12	-10.73	-1.27	10.62
Element 42	50	0	-5.18	5.18	ondefinieerbaar
	37.5	-5.25	-5.18	-0.07	1.33
	25	-9	-5.18	-3.82	42.44
Element 44	25	-9	-10.82	1.82	-20.22
	12.5	-11.25	-10.82	-0.43	3.82
	0	-12	-10.82	-1.18	9.83

In de tabel kan men zien dat de elementwaarde van de schuifspanning erg nauwkeurig is halverwege het element (geel gemarkeerd), dus daar waar het gemddelde van de integratiepunten zich ook daadwerkelijk bevindt. Voor element 34 geldt zefs een afwijking van slechts 0.46%. Kijk je voor dit element onderaan (dus op y=25) dan zorgt dit zelfde element voor een afwijking van meer dan 40%! Dit fenomeen wordt ook duidelijk als de schuifspanning wordt geplot . Zie Afbeelding 2.1.6.4 voor de nodal plots en afbeelding 2.1.6.5 voor de elementwaarden.



Afbeelding 2.1.6.4) Plot gebaseerd op knooppuntswaarden

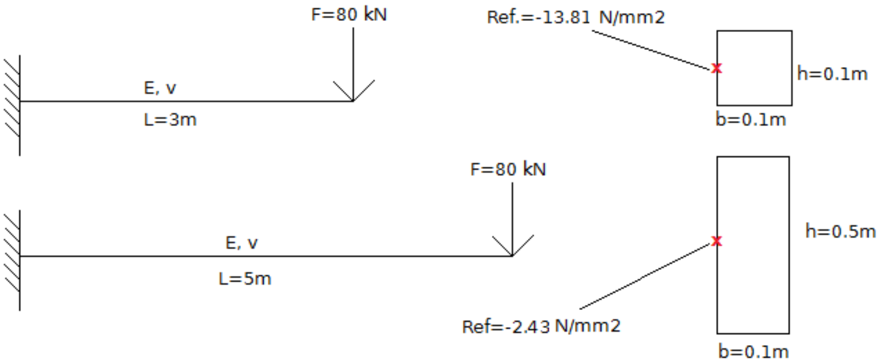


Afbeelding 2.1.6.5) Plot gebaseerd op elementwaarden.

Op de nodal plots is er een veel duidelijker inzicht in de werkelijke spanningsverdeling. De constructeur zal dus voornamelijk van dit type plot gebruik maken.

Nu duidelijk is hoe Ansys de schuifspanningen in de knooppunten berekent en vervolgens plot is het eenvoudig te beredeneren hoe en waar de spanning het beste zou kunnen worden afgelezen. Wil je dus bijvoorbeeld de schuifspanning weten tussen knooppunt 76 en 79 weten, dan beeldt Ansys in de plot het gemiddelde van de twee knooppunten af.
Stel de balk is dus verdeeld in een oneven aantal elementen en men wil de schuifspanning in het midden weten, moet dus simpelweg het gemiddelde genomen worden van de twee omliggende knooppunten (zie Afbeelding 2.1.6.1).

2.2 Toepassing



Afbeelding 2.2) Uitgangspunt berekeningen §2.2

2.2.1 Nauwkeurigheidstabellen

Gezocht wordt naar de optimale elementcombinaties in de doorsnede voor de balken uit afbeelding 2.2 met h/b=1 en h/b=5, doorgerekend met 20-knoops elementen. Om tot de optimale elementcombinaties *in de doorsnede* te komen wordt het aantal elementen in de lengte op "oneindig" gesteld. Dit houdt in dat de elementlengte kleiner is dan de hoogte of breedte van het element en klein genoeg is om géén invloed op de nauwkeurigheid van de berekening uit te oefenen.

Tabel 2.2.1.1 geeft weer in hoeveel procent nauwkeurigheid de numeriek bepaalde maximale schuifspanning afwijkt van de referentiewaarde (zie Ref. Afbeelding 2.2). De (numeriek verkregen) referentiewaarde is berekend met 10 x 10 (EY*EZ) 20-knoops elementen in de doorsnede en een "oneindig" aantal elementen in de lengte van de balk.
EY is het aantal elementen in de hoogte en EZ is het aantal elementen in de breedte. De procentuele afwijking wordt berekend volgens formule 2.1, waarin M de referentiewaarde is en N(h) de numerieke benadering.

$$\frac{100\% * (M - N(h))}{M} \qquad (2.1)$$

Tabel 2.2.1.1) Procentuele fout in de grootste schuifspanning t.o.v. referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met 20-knoops elementen

h/b=	*1*	EZ								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY	2	-12.8								
	3	6.5	4.7							
	4	-0.1	-1.9	-2.5						
	5	4.9	3.2	2.5	2.2					
	6	2.0	0.3	-0.3	-0.6	-0.8				
	7	4.3	2.6	2.0	1.7	1.5	1.4			
	8	2.8	1.1	0.4	0.1	-0.1	-0.2	-0.3		
	9	4.1	2.4	1.7	1.4	1.2	1.1	1.1	1.0	
	10	3.1	1.4	0.8	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0

Tabel 2.2.1.2) Procentuele fout in de grootste schuifspanning t.o.v. referentiewaarde voor h/b=5, doorgerekend met 20-knoops elementen

h/b= 5	EZ 2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 2	-15.7								
3	4.4	4.3							
4	-3.3	-3.4	-3.4						
5	2.1	2.0	2.0	2.0					
6	-1.0	-1.1	-1.1	-1.2	-1.2				
7	1.5	1.4	1.4	1.3	1.3	1.3			
8	-0.2	-0.3	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4		
9	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	
10	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Een willekeurige a*b (EY*EZ) combinatie heeft evenveel elementen in de doorsnede als een b*a combinatie. Als geldt dat b > a dan blijkt uit [1] dat de laatste combinatie de spanning nauwkeuriger benadert. De a x b combinaties zijn dus voor de constructeur triviaal en weggelaten.

Interpreteren resultaten
Een positieve procentuele afwijking betekent in feite een onderschatting van de optredende spanning.
Voor beide h/b verhoudingen geldt dat de relatieve fout bij een oneven aantal elementen in de hoogte groter is dan bij een even aantal elementen in de hoogte. Dit komt door het feit dat bij de oneven aantallen de spanning niet exact halverwege de balk kan worden afgelezen; hier bevindt zich immers geen knooppunt. De spanning zal hier dus ten alle tijde onderschat worden (zie §2.1.6 en Afbeelding 2.1.6.1)
Tevens geldt voor beide h/b verhoudingen dat, zoals verwacht, het aantal elementen in de breedte een ondergeschikte rol heeft. Zeker naarmate de h/b verhouding toeneemt neemt de invloed van het aantal elementen in de breedte af.

2.2.2 Ordenen resultaten
In de komende paragrafen worden de resultaten van de balk h/b=1 verder verwerkt om tot een optimale doorsnedecombinatie te komen. Om tot de optimale doorsnedecombinatie van een h/b=5 balk te komen worden parallal dezelfde stappen gemaakt. Deze zijn weergegeven in Bijlage II.

Ten eerste wordt de efficientie van de elementcombinaties bekeken. Er wordt een rangorde gemaakt van de resultaten uit Tabel 2.2.1.1 en voor elke elementcombinatie is het gemiddelde aantal vrijheidsgraden per doorsnede toegevoegd (zie Bijlage I). Het aantal vrijheidsgraden (Degrees Of Freedom) in de doorsnede is representatief voor de benodigde rekentijd.

Tabel 2.2.2.1) Procentuele fout in de grootste schuifspanning t.o.v. referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met 20-knoops elementen, geordend van de grootste (absolute) afwijking naar de kleinste afwijking.

EY	EZ	%	DOF's
2	2	12.8	45
3	2	6.5	62
5	2	4.9	95
3	3	4.7	84
7	2	4.3	128
9	2	4.1	161
5	3	3.2	129
10	2	3.1	177
8	2	2.8	144
7	3	2.6	174
4	4	2.5	135
5	4	2.5	164
9	3	2.4	219
5	5	2.2	198
6	2	2.0	111

EY	EZ	%	DOF's
7	4	2.0	221
4	3	1.9	107
9	4	1.7	278
7	5	1.7	267
7	6	1.5	314
9	5	1.4	336
10	3	1.4	242
7	7	1.4	360
9	6	1.2	395
9	7	1.1	453
8	3	1.1	197
9	8	1.1	512
9	9	1.0	570
6	6	0.8	273
10	4	0.8	306

EY	EZ	%	DOF's
6	5	0.6	233
10	5	0.4	371
8	4	0.4	249
6	4	0.3	192
6	3	0.3	152
10	6	0.3	435
8	8	0.3	459
8	7	0.2	407
10	7	0.2	500
4	2	0.1	78
8	5	0.1	302
10	8	0.1	564
8	6	0.1	354
10	9	0.0	629
10	10	0.0	693

2.2.3 Wegstrepen triviale oplossingen

We zijn op zoek naar optimale nauwkeurigheid bij zo min mogelijk rekenwerk. Het aantal DOF's in een doorsnede is representatief voor de hoeveelheid rekenwerk. Dit houdt in dat een 10 x 10 combinatie met een nauwkeurigheid van 0.0% met 693 DOF's dus minder interessant is als een 10 x 9 combinatie met slechts 629 DOF's. Of dat een 10 x 8 combinatie met een nauwkeurigheid van 0.1% en 564 DOF's minder aantrekkelijk is als een 8 x 6 combinatie, die op zijn beurt weer minder aantrekkelijk is als een 4 x 2 combinatie van slechts 78 DOF's.
In het algemeen geldt dus dat alle combinaties die met méér DOF's even nauwkeurig of onnauwkeuriger zijn, voor deze toepassing triviaal zijn en kunnen worden weggestreept.
Het resultaat hiervan staat in Tabel 2.2.3.1.

Letop!
In het geval van h/b=1 is er duidelijk sprake van een „toevalstreffer". Bij een 4 x 2 combinatie wordt reeds met 78 DOF's een relatief nauwkeurige benadering van 0.1% bereikt. Hoewel deze nauwkeurigheid representatief is voor alle h/b=1 combinaties, is het gevaarlijk om bij het wegstrepen direct van deze optimale elementcombinatie uit te gaan.
Als uitgangspunt voor dit verslag is genomen dat het mesh benodigd voor dwarskrachtbelasting maatgevend is; de doorsnede moet voor dwarskracht-belasting het "fijnst" worden verdeeld. Dat houdt in dat men nuttig gebruik zou kunnen maken van dit mesh, hoewel de balk wordt belast door een ander zuiver belastingtype. Maar als dit mesh door een toevalstreffer zeer grof is, geldt dit natuurlijk niet meer. Het mesh moet dan worden aangepast op een ander maatgevend belastingtype.
Om te voorkomen dat overige efficiente elementcombinaties worden weggestreept, wordt deze toevalstreffer dus niet meegenomen.

Tabel 2.2.3.1) Optimale elementcombinaties in de doorsnede bij h/b=1, doorgerekend met Solid186 elementen t.o.v. referentiewaarde

EY	EZ	%	DOF's
2	2	12.8	45
3	2	6.5	62
3	3	4.7	84
4	3	1.9	107
6	3	0.3	152
4	2	0.1	78
8	5	0.1	302
10	9	0.0	629

2.2.4 Selectie 1,3,10%

Om een antwoord te kunnen geven op deelvraag 1 dient er slechts nog een selectie gemaakt te worden uit de optimale elementcombinaties, die voldoen aan een nauwkeurigheid van respectievelijk 1, 3 of 10%. Dit is voor beide hoogte breedte verhoudingen gedaan in Tabel 2.2.4.1.

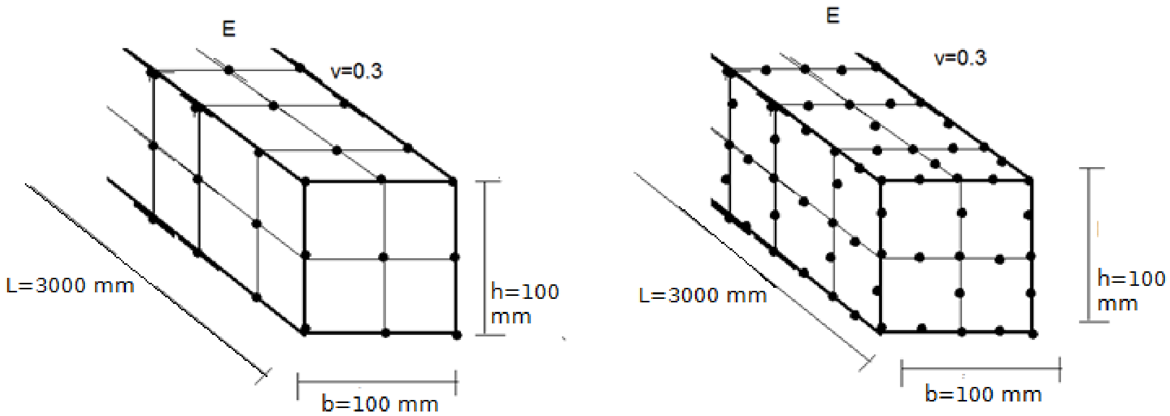
Tabel 2.2.4.1) Nauwkeurigheidstabel voor constructeurs voor h/b=1 (links) en h/b=5 (rechts), doorgerekend met Solid186 elementen t.o.v. referentiewaarde.

h/b=1	EY	EZ	DOF's
10 %	3	2	62
3 %	4	3	107
1 %	6	3	152

h/b=5	EY	EZ	DOF's
10%	3	2	62
3%	5	2	95
1%	8	2	144

Als uitgangspunt van dit verslag is genomen dat het mesh dat voldoende nauwkeurig is voor de dwarskracht ook voldoende nauwkeurig is voor de overige zuivere belastingtypen.
De meshes gevonden in bovenstaande tabel zijn inderdaad voldoende nauwkeurig voor normaal- en momentbelasting (zie resp. [1] Tabel 6 en Tabel 14). Dit geldt echter niet voor wringbelasting, dat voor een vergelijkbare nauwkeurigheid soms meer elementen in de doorsnede vergt (zie [1] Tabel 24).

3. Vergelijking van 8-knoops elementen met 20-knoops elementen



Afbeelding 3.1) Identieke balk ingevuld met 8-knoops Solid185 elementen (links) en 20-knoops Solid186 elementen

Bij het modelleren in volume- elementen zijn er verschillende soorten elementen waaruit men kan kiezen. De elementtypen verschillen onder andere in hun vervormingsgedrag en het aantal bijbehorende knooppunten. Het verschil tussen de elementen komt tot uiting in de precisie van de uiteindelijke spanningsberekening.

Om de berekening te optimaliseren is het dus van belang om naast het juiste aantal, ook het juiste soort elementen toe te passen. Twee veel toegepaste elementtypen zijn het 8-knoopse element (Solid185 in Ansys) en het hogere orde 20-knoops element (Solid186 in Ansys). Beide elementen bezitten de juiste eigenschappen om lineair elastisch gedrag te modelleren. Om te weten welke van de elementtypen het meest geschikt is om een balk mee te modelleren worden de twee elementtypen met elkaar vergeleken.

<u>Deelvraag 2</u>
Welke van de elementtypen Solid185 en Solid186 is het meest geschikt om een balk belast op dwarskracht mee te modelleren?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden moet er eerst duidelijk zijn hoe de elementtypen met elkaar vergeleken dienen te worden. Als gevolg daarvan wordt onderzocht wat voor beide elementtypen kwalitatief en kwantitatief de invloed van de elementlengte is op de nauwkeurigheid van de berekening is.

Hoe worden de elementtypen met elkaar vergeleken?	(§3.1.2, §3.2.1)
Wat is de invloed van de elementlengte op de nauwkeurigheid van de berekening?	(§3.1.3, §3.2.3)

In §3.2.3 wordt gebruik gemaakt van de theorie uit hoofdstuk 2 om de optimale elementcombinaties in de doorsnede voor beide elementtypen af te leiden.
In §3.2.4 het antwoord op Deelvraag 2 gegeven.

3.1 Theorie

3.1.1 Vrijheidsgraden
Op afbeelding 3.1 is te zien dat het Solid185 element 8 hoekknooppunten heeft. Deze knooppunten kunnen zowel in x,y en z richting bewegen. In totaal zijn er dus 8 x 3 = 24 DOF's in het element.
Het Solid186 element heeft naast de 8 hoekknooppunten ook nog 12 "midsidenodes". Deze midsidenodes hebben ook ieder 3 vrijheidsgraden. Het element heeft in totaal dus 60 vrijheidsgraden.

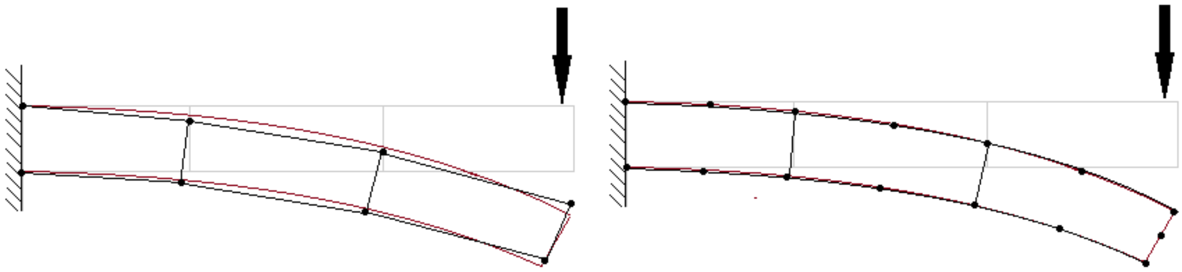
3.1.2 Vergelijkingscriteria
Uit de Element Reference van Ansys [3] blijkt dat het 20-knoops element van een hogere orde is dan het 8-knoops element. Intuïtief zou men dus snel zeggen dat het hogere orde element per definitie te prefereren is. Helaas kan deze conclusie niet zonder meer getrokken worden.

Moment benaderen
Een balk belast op zuivere buiging bereikt reeds met één 8-knoops element in de doorsnede en een "oneindig" aantal knooppunten in de lengte analytische nauwkeurigheid [1]. Dit geldt ook voor het 20-knoops element. In totaal zijn er dus evenveel elementen van beide typen in de balk aanwezig. Echter beschikt het 20-knoops element over meer vrijheidsgraden, waardoor de berekening langer zou duren. Zonder meer informatie is in deze gesimplificeerde situatie het 8-knoops element dus te prefereren boven het 20-knoops element.

1. Om de twee elementtypen eerlijk met elkaar te vergelijken, moet niet alleen worden gekeken naar het benodigde aantal elementen *in de doorsnede* van de balk, maar ook naar het benodigde aantal elementen *in de lengte* van de balk.
2. Om de twee elementen met elkaar te vergelijken moet niet worden gekeken naar het aantal elementen in de balk, maar naar de totale *rekentijd*, dus het aantal vrijheidsgraden in de balk.

3.1.3 Invloed elementlengte
Om het totale aantal vrijheidsgraden in de balk te kunnen bepalen is kennis over het aantal elementen in de lengte vereist. Al snel blijkt dat de nauwkeurigheid bij het 8-knoopse element zeer gevoelig is voor de elementlengte. Voor het 20-knoopse element geldt dit amper. Waarom de elementlengte wel/geen rol speelt in de nauwkeurigheid word hieronder duidelijk.

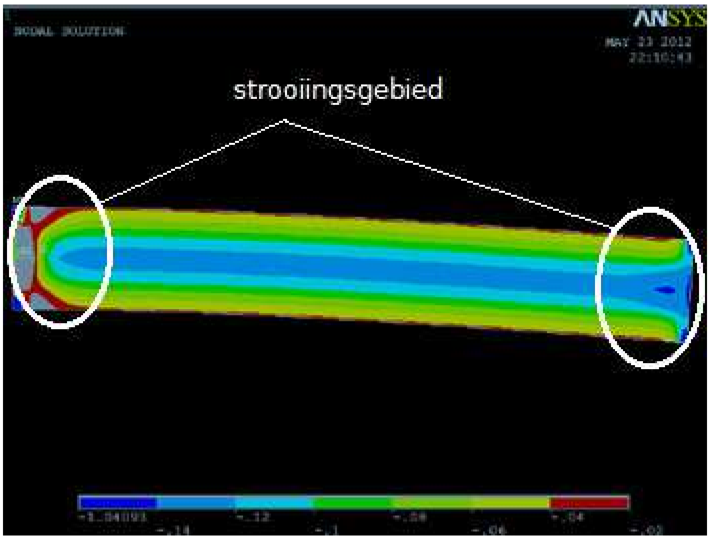
Vervorming van de balk
Spanningen en rekken worden berekend uit de verplaatsingen van de integratiepunten. Hoe beter de verplaatsingen in de integratiepunten benaderd zijn, hoe nauwkeuriger de rekken en spanningen berekend kunnen worden.
Een balk vervormt ten gevolge van belasting. Deze vervormingen zijn volgens een derdegraadspolynoom omdat de dwarskracht constant is. Voor het Solid185 element, dat zich lineair tussen de knooppunten gedraagt, is het onmogelijk om deze golvende beweging te benaderen. Voor dit elementtype geldt dus: Hoe meer elementen in de lengte hoe meer het verplaatsingenveld de golfbeweging benadert. Op onderstaande afbeelding is te zien dat de verplaatsingen op bepaalde plekken veel afwijken van de werkelijkheid.



Afbeelding 3.1.3.1) Schets van het verplaatsingenveld benaderd met Soldi185 (links) en Solid186 (rechts) als gevolg van buig- en dwarskrachtvervormingen.

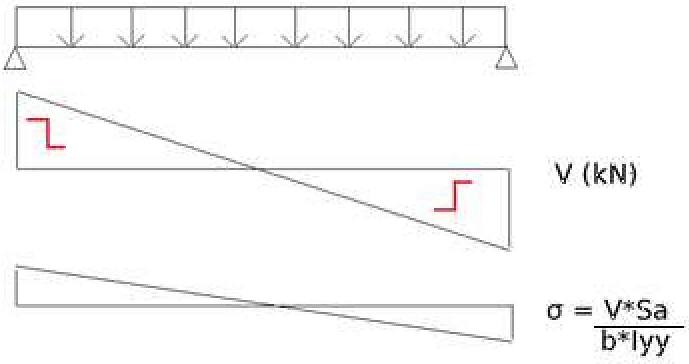
Door de aanwezigheid van de midsidenodes is het Solid186 element minder stijf. Het beschikt van nature over de mogelijkheid elk een golvend verplaatsingenveld te benaderen. Het aantal elementen benodigd in de lengte zal dus ook aanzienlijk lager zijn dan bij een Solid185 element.
Hierbij moet nog worden opgemerkt dat de midsidenodes er voor dienen om het verplaatsingenveld nauwkeurig te kunnen benaderen. In de postprocessing fase worden er geen spannings- rek- of verplaatsingwaarden aan deze knooppunten toebedeeld.

Lastinleiding
Ten tweede is er sprake van de lastinleiding. Omdat de opgebrachte kracht niet geheel gelijkmatig verdeeld is, maar er sprake is van puntlasten, is er een stooiingsgebied. Dit is te zien op Afbeelding 3.1.3.2. Binnen dat strooiingsgebied gedraagt de spanning in de balk zich anders dan wanneer de dwarskrachtbelasting aan het uiteinde van de balk uniform over de doorsnede verdeeld zou zijn. Hoe langer de elementen gekozen worden, hoe langer de invloed van deze lastinleiding is.



Afbeelding 3.1.3.2) Verstoord gebied nabij puntlastinleiding (rechts) [1]

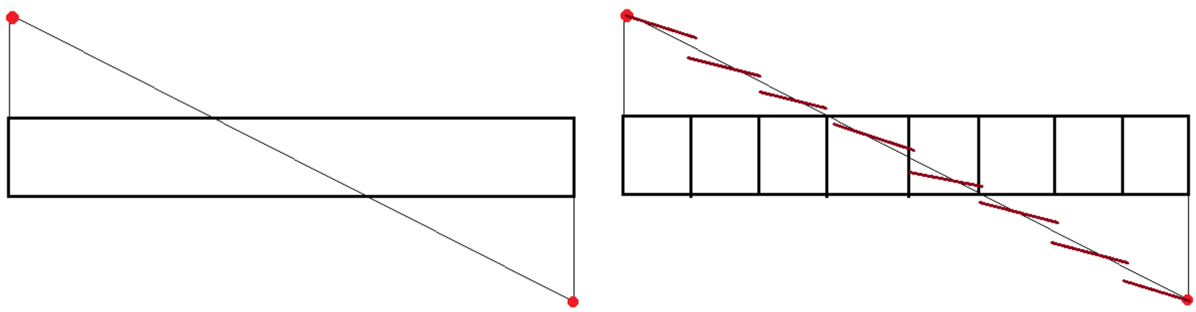
Belastingvorm
Bij de belasting van een balk op een q-last is er sprake van een dwarskrachtgradient. Dit betekent ook dat de maximale spanning, die lineair afhangt van de dwarskracht, lineair over de lengte van de balk verloopt (zie Afbeelding 3.1.3.3). Deze gradient wordt benaderd in de lengterichting van de elementen.



Afbeelding 3.1.3.3) Dwarskrachtgradient / schuifspanninggradient

Zowel het Solid185 als het Solid186 element beschikken over 2x2x2 integratiepunten en dus over de mogelijkheid een spanningsverloop lineair te benaderen.

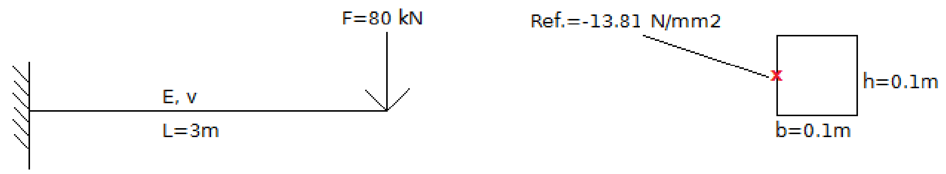
Evenals bij het buigspanningsverloop in de doorsnede, waarbij er sprake is van een spanningsgradient in de hoogte van de balk, zou dit spanningsverloop met slechts één Solid185 element benaderd kunnen worden (zie [1] pagina 24). Dit komt door de Selective Reduced Integration Method. Wordt er meer dan één element gebruikt, dan krijgt het programma de kans om verschillende waarden aan de elementen toe te bedelen (Afbeelding 3.1.3.4); oftewel een lineair verloop in een (schuine)trapvorm te benaderen. Dan geldt wederom dat er zo veel mogelijk elementen nodig zijn om de spanning goed te benaderen.



Afbeelding 3.1.3.4) Schuifspanningsgradient in de lengte benaderd met één Solid185 element (links) en meerdere Solid185 elementen (rechts)

Uit [1] bijkt dat het 20-knoops element element een lineaire spanningsgradient reeds met de minimale hoeveelheid van 2 elementen kan benaderen met analytische nauwkeurigheid.

3.2 Toepassing



Afbeelding 3.2.1) Uitgangspunt §3.2

3.2.1 Vergelijkingsmethode

Als basis voor de vergelijking geldt, net als in hoofdstuk 2, een balk met h/b-verhouding 1.
In Tabel 2.2.1.1 uit het vorige hoofdstuk zijn de bijbehorende nauwkeurigheidspercentages weergegeven indien de balk wordt doorgerekend met 20-knoops elementen.
De eenvoudigste manier om beide elementtypen met elkaar te vergelijken is om een vergelijkbare tabel voor het 8-knoops element te maken, vervolgens voor alle combinaties het aantal DOF's te berekenen en de resultaten uit te zetten in een grafiek.
Om het totale aantal DOF's te bepalen is ook het benodigde aantal elementen in de lengte nodig. Dat zou inhouden dat er voor álle combinaties een optimale elementlengte moet worden gevonden. De resultaten in de genoemde tabellen slaan immers op een oneindig aantal elementen in de lengte.
In het tijdsbestek van dit project is dat helaas niet mogelijk en er moet dus worden gezocht naar een efficientere vergelijkingsmethode; namelijk via doorsnede optimalisatie.

In hoofdstuk 3 is er gezocht naar de meest efficiente EY*EZ verhoudingen van het Solid186 element bij een balk belast op dwarskracht. Als we nu voor het Solid185 element ook de optimale doorsnedecombinaties vinden, hebben we voor beide elementen in een vergelijkbare situatie de beste combinaties gevonden. Dit is een beperkte hoeveelheid combinaties, waarbij het vinden van de optimale elementlengte nog te overzien is.

3.2.2 Doorsnede optimalisatie 8-knoops en 20-knoops elementen

Volgens de stappen uit §2.2 worden de optimale doorsnedecombinaties van het Solid185 element afgeleid, behorend bij een h/b=1 balk belast op dwarskracht (Bijlage III). De resultaten zijn weergegeven in onderstaande tabel.

Tabel 3.2.2.1) Optimale elementcombinaties in de doorsnede belast op dwarskracht voor Solid185 h/b=1

EY	EZ
1	1
2	1
3	1
2	2
4	1
6	1
4	2
4	3
6	2
8	2
6	3

EY	EZ
6	4
8	3
10	3
8	4
8	5
10	4
10	5
10	6
10	7
10	9

Omdat er sprake is van *doorsnede optimalisatie* gelden bovenstaande optimale elementcombinaties voor elke elementlengte. Daar de procentuele afwijking afhangt van de elementlengte, is deze niet genoemd. Er is immers nog niet bekend wat de optimale elementlengte en dus procentuele afwijking is.

Hoewel het aantal DOF's in de doorsnede is gebruikt voor de afleiding van de tabel zijn die hier niet meer genoemd. Voor de uiteindelijke vergelijking is slechts het *totale aantal* DOF's in de balk van belang en ook dit is afhankelijk van de gebruikte elementlengte.
De optimale elementcombinaties van het 20-knoops element Solid186 zijn reeds in het vorige hoofdstuk afgeleid en te vinden in Tabel 2.2.3.1.

3.2.3 Elementlengte optimalisatie voor 8-knoops en 20-knoops elementen

Het is nu de taak om bij de optimale elementcombinaties in de doorsnede het optimale aantal elementen in de lengte te vinden, om van daaruit het totale aantal vrijheidsgraden in de balk te bepalen.

Solid185
Uit §3.1.3 is bekend dat de elementlengte bij het Solid185 element een grote invloed heeft. Naarmate het aantal elementen in x-richting (EX) toeneemt, convergeert de nauwkeurigheid naar een bepaalde waarde. Echter is de convergentie in de buurt van deze „basiswaarde" een zeer traag proces. Het toevoegen van meer DOF's levert wellicht een iets grotere nauwkeurigheid op, maar het zorgt ook voor een veel grotere rekentijd. De vraag kan dan gesteld worden of het verhogen van EX op een gegeven moment nog wel efficient is.
In Tabel 3.2.3.1 zijn de nauwkeurigheidspercentages voor verschillende elementlengten weergegeven, behorend bij de optimale elementcombinaties in de doorsnede.

Tabel 3.2.3.1) Nauwkeurigheidspercentages in de grootste schuifspanning (h/b=1) voor optimale elementcombinaties in de doorsnede en verschillende elementlengtes bij toepassing van het Solid185 element.

		Le=1		Le=5		Le=10		Le=20		Le=39,5	
EY	EZ	%	DOF's (E4)	%	DOF's (E4)	%	DOF's (E4)	%	DOF's (E4)	%	DOF's (E4)
1	1	42.1	3.60	42.5	0.72	43.6	0.36	47.9	0.18	62.9	0.09
2	1	35.4	5.40	35.6	1.08	36.2	0.54	38.4	0.27	46.4	0.14
3	1	32.6	7.20	32.8	1.44	33.3	0.72	35.5	0.36	43.2	0.18
2	2	30.6	8.10	30.8	1.62	31.3	0.81	33.6	0.41	41.9	0.21
4	1	18.4	9.00	18.6	1.80	19.1	0.90	21.4	0.45	29.5	0.23
6	1	15.5	12.60	15.7	2.52	16.3	1.26	18.5	0.63	26.7	0.32
4	2	10.0	13.50	10.2	2.70	10.8	1.35	13.2	0.68	21.8	0.35
4	3	8.2	18.01	8.4	3.61	9.0	1.81	11.4	0.91	20.1	0.46
6	2	6.9	18.91	7.1	3.79	7.7	1.90	10.0	0.95	18.7	0.48
8	2	5.8	24.31	6.0	4.87	6.6	2.44	8.9	1.22	17.6	0.62
6	3	4.9	25.21	5.1	5.05	5.7	2.53	8.1	1.27	16.9	0.65
6	4	4.1	31.51	4.3	6.31	4.9	3.16	7.3	1.59	16.1	0.81
8	3	3.7	32.41	3.9	6.49	4.6	3.25	7.0	1.63	15.7	0.83
10	3	3.2	39.61	3.4	7.93	4.0	3.97	6.4	1.99	15.2	1.02
8	4	3.0	40.51	3.2	8.11	3.8	4.06	6.2	2.04	15.0	1.04
8	5	2.6	48.62	2.8	9.74	3.4	4.88	5.8	2.45	14.7	1.25
10	4	2.4	49.52	2.6	9.92	3.2	4.97	5.7	2.49	14.5	1.27
10	5	2.1	59.42	2.3	11.90	2.9	5.96	5.3	2.99	14.2	1.52
10	6	1.9	69.32	2.1	13.88	2.7	6.95	5.1	3.49	14.0	1.78
10	7	1.7	79.23	1.9	15.87	2.6	7.95	5.0	3.99	13.9	2.03
10	9	1.6	99.03	1.8	19.83	2.4	9.93	4.9	4.98	13.7	2.54

Optimale elementlengte Solid186

In §2.2.2 worden de optimale doorsnedcombinaties voor het 20-knoops element afgeleid. In Tabel 3.2.3.2 zijn de nauwkeurigheden weergegeven per combinatie als functie van de elementlengte. De optimale lengte is gedefinieerd als díe lengte waarbij het nauwkeurigheidspercentage niet afwijkt (afgerond op 1 decimaal) van de waarde gevonden bij een oneindig aantal elementen in de lengte; zijnde 5 mm. Vervolgens is het aantal elementen EX bij deze elementlengte berekend.

Tabel 3.2.3.2) Optimale doorsnedecombinaties Solid186 voor V-belasting h/b=1 plus het nauwkeurigheidspercentage bij verschillende elementlengtes. Gearceerde percentages wijken niet af van het nauwkeurigheidspercentage met "oneindige elementlengte" .

EY	EZ	dEX												EX
		5.0	25	50	75	100	107.1	115.4	125	136.4	150	166.7	187.5	
2	2	12.8	12.8	12.8	12.8	12.8	12.8	12.8	12.9	12.9	13.0	13.4	14.2	26
3	2	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.4	6.3	6.0	5.5	24
3	3	4.7	4.7	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6	4.6	4.6	4.4	4.1	3.4	28
4	3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.6	2.3	30
6	3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	0.4	26
4	2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.2	0.9	24
8	5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.4	0.1	30
10	9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3	26

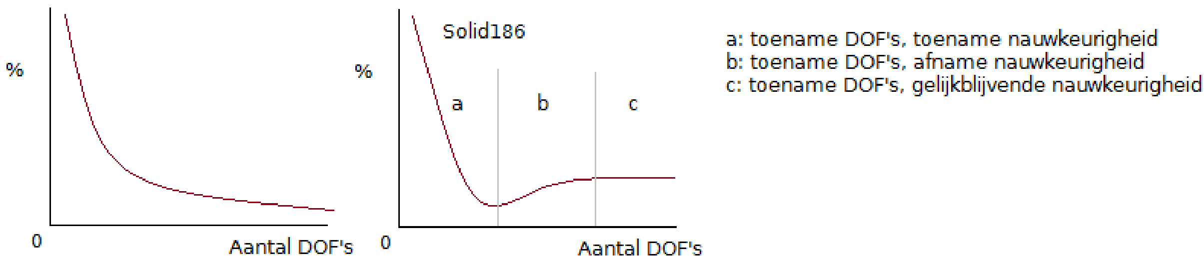
Nu het aantal elementen in de hoogte (EY), breedte (EZ) en lengte (EX) bekend zijn, kan het totale aantal vrijheidsgraden in de balk worden bepaald. Deze zijn weergegeven in onderstaande tabel.

Tabel 3.2.3.3) Nauwkeurigheidspercentages behorend bij optimale EY*EZ*EX-combinaties met het bijbehorende aantal DOF's in de balk

EY	EZ	EX	%	DOF's
2	2	26	12.8	2403
3	2	24	6.5	3039
3	3	28	4.7	4826
4	3	30	1.9	6543
6	3	26	0.3	8096
4	2	24	0.1	3855
8	5	30	0.1	18531
10	9	26	0.0	33605

Opmerking

Indien men goed naar de Tabel 3.2.3.2 kijkt valt er iets op. Bij enkele EY*EZ combinaties neemt de nauwkeurigheid van de numerieke benadering bij het toepassen van *minder* elementen in de lengte toe. Er is sprake van een dal. Dit gaat in tegen de principes in van een FEM analyse, waarbij in het algemeen geldt hoe meer elementen/vrijheidsgraden hoe nauwkeuriger de berekening. Het verschil is weergeven in onderstaande afbeeldingen.



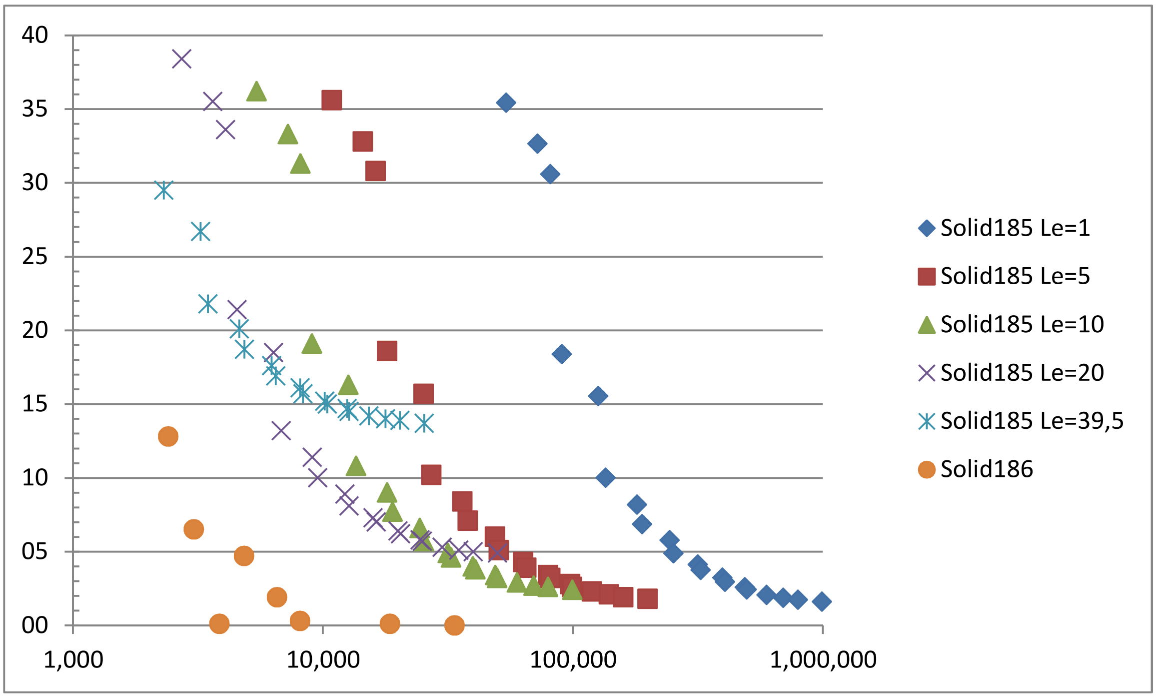
Afbeelding 3.2.3.1) Procentuele nauwkeurigheid t.o.v het aantal DOF's verwacht verloop (links), verloop Solid186 (rechts)

Hoewel bijvoorbeeld voor een 3*2 combinatie de elementlengte 187,5mm voor een hogere nauwkeurigheid zorgt dan elementlengte 125mm, wordt toch voor optimale elementlengte van 125mm gekozen (zie Tabel 3.2.3.2). De reden is simpel; De optimale elementcombinaties in de doorsnede zijn afgeleid met bij een oneindige elementlengte. Dat betekent dat deze zijn afgeleid voor gebied c uit Afbeelding 3.2.3.1 rechts.

In het beperkte aantal proefresultaten is er in eerste instantie geen trend te ontdekken in de elementlengte die voor de hoogste nauwkeurigheid zorgt. Het is dan dus ook ongegrond om aan te nemen dat de gevonden optimale elementcombinaties in de doorsnede nog steeds hetzelfde zouden zijn indien deze worden afgeleid voor gebied a.
Bovendien zal bovenstaande geen invloed hebben op de uiteindelijke conclusie van dit hoofdstuk.Dit wordt duidelijk in de volgende paragraaf.

3.2.4 Resultaten

Om de twee elementtypen met elkaar te vergelijken worden de verschillende EY*EZ*EX combinaties in een grafiek uitgezet (Figuur 3.2.4.1).



Figuur 3.2.4.1) Nauwkeurigheidspercentage (y-as) t.o.v aantal DOF's (logaritmisch) in balk (x-as)

Interpreteren resultaten

Ten eerste dient te worden opgemerkt dat de grafieken van het 8-knoops element Solid185 een duidelijkere trend volgen dan die van het 20-knoops element. De verklaring hiervoor is het voorspelbare gedrag van Solid185, wat in §4.2 verder wordt toegelicht.
Ten tweede is te zien dat de optimale elementlengte voor het Solid185 element rond de 10 mm zit. Bij nog grotere elementlengtes neemt de nauwkeurigheid af, de grafiek verplaatst zich naar boven toe. Bij kleinere elementlengtes neemt slechts het aantal DOF's toe.

Tot slot kan deelvraag 2 worden beantwoord. In de grafiek is te zien dat het Solid186 element in het uiteindelijke toepassinggebied (nauwkeurigheidspercentages van onder de 15%) duidelijk te prefereren is boven welke Solid186 combinatie dan ook. Deze is namelijk met minder DOF's vele procenten nauwkeuriger.

4. Benaderingsfout

In numerieke benaderingen staat de grootte van de fout centraal. Vooralsnog is de fout slechts beschouwd als een *gevolg* van het elementtype en de discretisatie van de balk in de hoogte, breedte en lengte. Omdat de fout een dusdanig belangrijke rol speelt in numerieke benaderingen, is het verhelderend om de fout ook eens als *uitgangspunt* van de benadering te nemen, om vervolgens van daaruit conclusies te trekken over het gewenste elementtype of het benodigde aantal elementen in de hoogte, breedte of lengte.
Als de constructeur meer inzicht en invloed heeft in (het onstaan van) de fout, zou hij deze kennis namelijk kunnen gebruiken tijdens het modelleren en opdelen in elementen van de balk, waarbij hij al van tevoren weet dat het zorgt voor een optimaal resultaat. Deelvraag 3 en de bijbehorende subdeelvragen worden beantwoord aan de hand van een op zuivere dwarskracht belaste balk. De ideologie kan natuurlijk ook worden toegepast op andere belastingtypen.

Deelvraag 3
In hoeverre kan de constructeur invloed uitoefenen op de uiteindelijke fout in de numerieke benadering?

Om in staat te zijn invloed te hebben op de numerieke fout, moet de constructeur eerst op de fout kunnen anticiperen. Hij moet weten in welke richting (hoogte, breedte, lengte) de discretisatie kwalitatief het meeste efficient is, oftewel de fout het snelst convergeert. De constructeur kan dan in die betreffende richting de meeste elementen toevoegen. Op die manier heeft de constructeur al van tevoren enige *controle* over de uiteindelijke fout.

In welke richting van de doorsnede is de convergentie van de fout het grootst? (§4.1)

Nog beter zou het zijn als de constructeur vervolgens ook kwantitatief de grootte van de fout zou kunnen afleiden, alvorens hij de berekening in het eindige elementenprogramma uitvoert. Op deze manier weet hij zeker of het uitvoeren van de berekening de moeite waard zal zijn.

Hoe ontstaat de fout als gevolg van hoogte, breedte en lengte discretisatie van een 8-knoops element? (§4.2)

Tot slot zou het ideaal zijn als de constructeur de verkregen resultaten achteraf eenvoudig zou kunnen bewerken om tot nauwkeurigere resultaten te komen. Dan zou er met het toepassen van evenveel elementen een nauwkeuriger resultaat verkregen kunnen worden.

In hoeverre kunnen de verkregen resultaten achteraf gemanipuleerd worden om tot een nauwkeurigere benadering van de grootste schuifspanning te komen? (§4.3)

4.1 Richardson foutschatting

Bij het analyseren van numerieke methoden is het onderzoeken van de fout belangrijk. Hierbij is een indicatie van de orde van grootte belangrijker dan een nauwkeurige uitdrukking voor de fout.
Uit de element reference van Ansys weten we dat de orde van het Solid186 element hoger is dan die van Solid185. De orde slaat in eerste instantie op de orde van het verplaatsingenveld dat het element kan benaderen zonder restterm (fout) over te laten. Dit zegt dus niet direct iets over de orde van nauwkeurigheid waarmee de spanning wordt benaderd.
Omdat in dit verslag de nadruk ligt op het benaderen van de *spanningen* in een balk, is de orde van de fout ook interessant indien de spanning wordt benaderd. Als namelijk de orde én de vorm van de fout bekend zijn, kan er eenvoudig een schatting gemaakt worden van de gemaakte fout. Door deze foutschatting te combineren met de reeds gevonden waarde voor de spanning zou er een nauwkeurigere waarde gevonden kunnen worden zonder toepassing van een hogere orde element. Dat scheelt uiteraard in de kosten.
Om de vorm en orde van de fout kwalitatief te onderzoeken wordt er ingezoomd op de balken uit afbeelding 3.1 met h/b=1 en h/b=5.

4.1.1 Vorm van de fout

Op Figuur 3.2.3.1 (links) is te zien dat in het algemeen geldt dat naarmate het totale aantal elementen in de balk toeneemt, de fout kleiner wordt. Of anders gezegd; hoe kleiner de stapgrootte hoe kleiner de fout. In de numerieke wiskunde wordt de vorm van een dergelijke fout benaderd met formule 4.1. Formule 4.2 geeft de procentuele afwijking ε.

$$M - N(h) = Kh^{\alpha} \qquad (4.1)$$

$$\frac{100(M-N(h))}{M} = \varepsilon(h) = \frac{100Kh^{\alpha}}{M} \qquad (4.2)$$

Waarbij α de mate van convergentie is en K een constante.
M is de referentiewaarde en N(h) de numerieke benadering bij stapgrootte h.
Een stapgrootte h van kleiner dan 1 houdt dat in dat de convergentie groter is naarmate K en α groter zijn. De discretisatie van een balk in de doorsnede is in feite niets anders dan het verdelen van de balk in verschillende stapgroottes. De stapgrootte is een functie van het aantal elementen dat wordt toegepast.

4.1.2 Richardson Extrapolatie

Om de orde van de fout α te bepalen is er in het begin van de 20e eeuw een methode afgeleid waarmee de orde van de fout geschat kan worden; de Richardson Extrapolatie [4](Bijlage IV). Zonder afleiding wordt de methode beschreven met de formules 4.3 t/m 4.4. Hiermee kan zowel α als K bepaald worden.
De methode is eenvoudig en behoeft slechts de input van drie resultaten; de procentuele afwijking bij stapgrootte h, stapgrootte 2h en stapgrootte 4h.

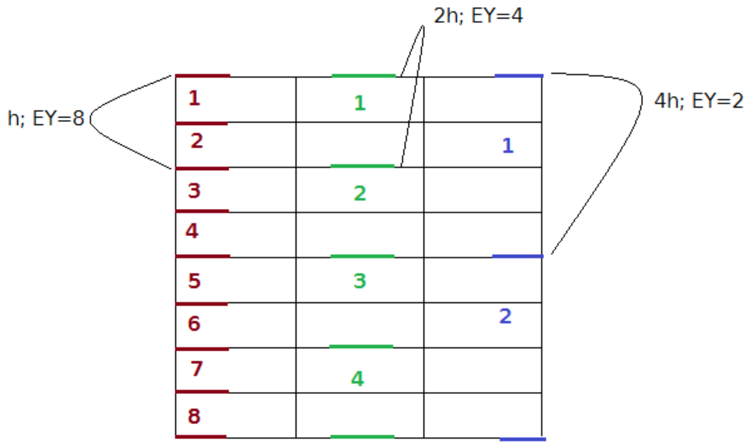
$$\frac{\varepsilon(4h) - \varepsilon(2h)}{\varepsilon(2h) - \varepsilon(h)} = 2^{\alpha} \qquad (4.3)$$

$$K = \frac{(\varepsilon(2h) - \varepsilon(h))M}{100(2h)^{\alpha}(1-0.5^{\alpha})} \qquad (4.4)$$

Als de procentuele afwijkingen bij de verschillende stapgroottes bekend zijn is het dus een kwestie van invullen.

4.1.3 Resultaten

Om de orde van de fout *in de hoogte* bij stapgrootte h te onderzoeken zijn dus de procentuele afwijkingen nodig bij 8 elementen in de hoogte (h), 4 elementen in de hoogte (2h) en 2 elementen in de hoogte (4h). Indien de invloed van het aantal elementen in de breedte onderzocht moet worden geldt hetzelfde, hetzij in de breedte.



Afbeelding 4.1.3.1) Relatie stapgrootte / aantal elementen met zoveel elementen in de breedte voor h/b=1.

De gevonden waarden worden vervolgens ingevuld in de formules 4.3 en 4.4 (zie Bijlage V). De resultaten zijn samengevat in Tabel 4.1.3.1.

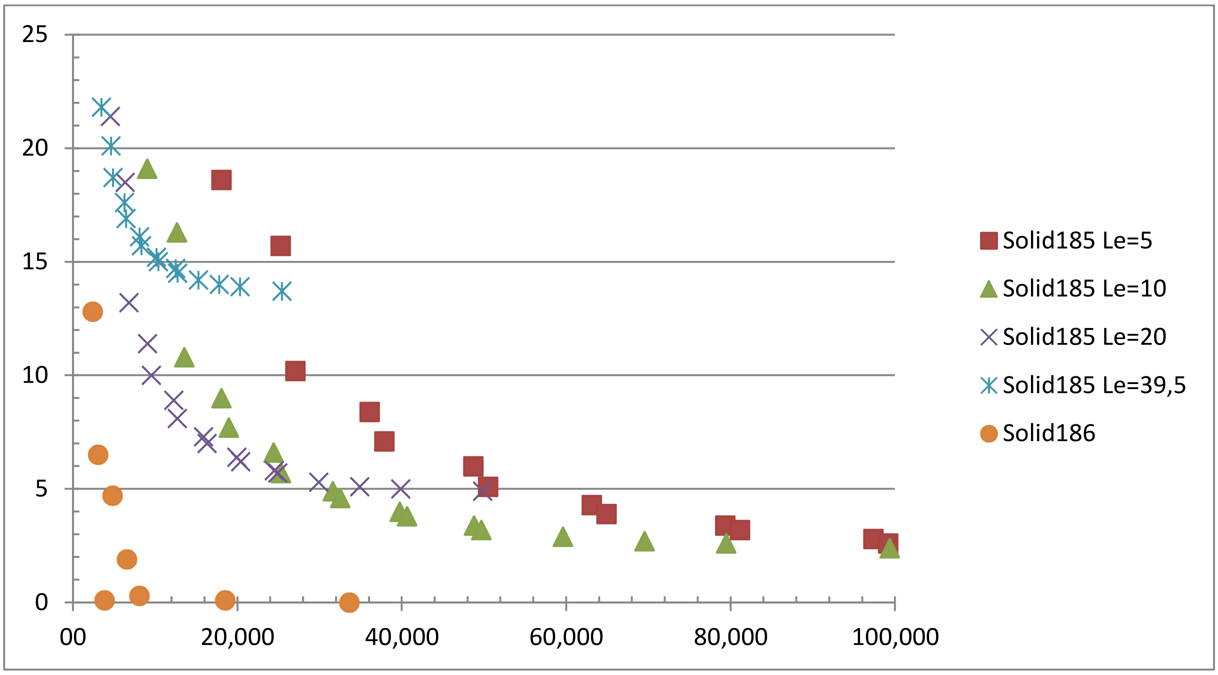
Tabel 4.1.3.1) gemiddelde α (in 1 decimaal en afgerond) en K bij verschillende h/b-verhoudingen en elementtypen

		α		K	
		h	b	H	b
h/b=1	Solid185	2.3/2	1.8/2	-3.42E+03	-1.19E+02
	Solid186	2.1/2	1.8/2	1.35E+03	-9.51E+01
h/b=5	Solid185	2.1/2	2.0/2	-1.23E+01	-1.49E+00
	Solid186	2.0/2	2.0/2	6.34E+00	-1.67E+00

Ten eerste valt op in de tabel dat zowel het Solid185 als het Solid186 element in van ongeveer gelijke orde 2 zijn. De α's in de hoogte zijn ietwat hoger dan die in de breedte.
De constante K is afhankelijk van de specifieke situatie waarvoor hij dient. De K's kunnen dus slechts binnen een bepaalde h/b-verhouding met elkaar vergeleken worden.
Zoals verwacht zijn de K's in geval van breedte-discretisatie grofweg een orde kleiner dan die van hoogte-discretisatie. Dit houdt in dat het verschil in de fout door het verkleinen van de stapgrootte in de breedte kleiner is dan het verschil in de fout door het verkleinen van de stapgrootte in de hoogte.
De convergentie is, zoals verwacht, in in de hoogte een factor 5-10 groter dan in de breedte.

Opvallend
Indien men de resultaten van het 20-knoops element met die van het 8-knoops element vergelijkt, valt er nog iets op. De verschillen in zowel de ordes α als in de constantes K tussen de twee elementen zijn marginaal. Het toont in ieder geval zeker niet het overtuigende resultaat wat eerdere tabellen en grafieken hebben aangetoond, namelijk dat het Solid186 element een stuk sneller convergeert.

De verklaring zou kunnen liggen in Figuur 4.1.3.1, welke is afgeleid in hoofdstuk 2. Nu is de x-as echter niet logaritmisch en is er ingezoomd.



Figuur 4.1.3.1) Nauwkeurigheidspercentage (y-as) t.o.v aantal DOF's in balk (x-as) (ingezoomd)

Als men de curve van het Solid185 element met elementlengte L_e=39,5 vergelijkt met de curve van Solid186 (met „oneindige" elementlengte), is inderdaad te zien dat de vorm van de twee grafieken elkaar zeer na liggen. Hieruit zou men kunnen concluderen dat de α, welke representatief is voor de mate van convergentie, inderdaad ongeveer gelijk zou kunnen zijn.
Echter geldt dit slechts indien er sprake is van één specifieke elementlengte. Neemt immers de elementlengte bij het Solid185 element toe of af, dan geldt de curve niet meer. Dit in tegenstelling het Solid186 element dat een hele range van elementlengten beslaat waarbij de nauwkeurigheid hetzelfde blijft (gebied c in Afbeelding 3.2.3.1)
Om dus de beide elementen qua convergentie met elkaar te kunnen vergelijken moet de kromme van het Solid186 element dus vergeleken worden met de omhullende kromme van alle Solid185-L_e combinaties. Deze geldt namelijk wel voor verschillende elementlengtes.
Dan is duidelijk te zien dat de convergentie van het 20-knoops element inderdaad een stuk hoger is dan die van het 8-knoopse element.

Conclusie
Daar de convergentiefactor α in respectievelijk de hoogte en in de breedte voor de beide elementen ongeveer gelijk is, maar we in bovenstaande figuur zien dat de uiteindelijke convergentie van het 20-knoops element groter is, kan men concluderen dat de discretisatie in de lengte de doorslaggevende rol speelt bij het bepalen van de daadwerkelijke orde van de fout voor een numerieke benadering van de spanningen.

4.1.4 Een alternatieve blik op het voorgaande

Omdat het op het eerste gezicht moeilijk te geloven is dat het 20-knoops in de doorsnede met de zelfde orde convergeert als het lagere orde 8-knoops element, wordt hetzelfde op een aternatieve manier afgeleid.

Onderstaande tabellen hebben betrekking op de balk met h/b=1 uit afbeelding 3.1. Weergegeven zijn de procentuele afwijkingen ten opzichte van de referentiewaarde. Voor het Solid185 element is gekozen voor optimale elementlengte 10.

Tabel 4.1.4.1) Procentuele fout in de grootste schuifspanning voor Solid185 (links) en Solid186 (rechts) [1]

$h/b=$	1,0	EZ				
		2	4	6	8	10
EY	2	31,3	29,4	29,0	28,9	28,8
	4	10,8	8,2	7,6	7,4	7,3
	6	7,7	4,9	4,4	4,2	4,1
	8	6,6	3,8	3,2	3,0	2,9
	10	6,1	3,2	2,7	2,5	2,4

$h/b=$	1,0	EZ				
		2	4	6	8	10
	2	-12,8	-15,6	-16,0	-16,2	-16,2
	4	-0,1	-2,5	-3,0	-3,2	-3,3
	6	2,0	-0,3	-0,8	-1,0	-1,1
	8	2,8	0,4	-0,1	-0,3	-0,3
	10	3,1	0,8	0,3	0,1	0,0

Stel men kijkt naar de afname van de fout als gevolg van hoogte discretisatie (EY).

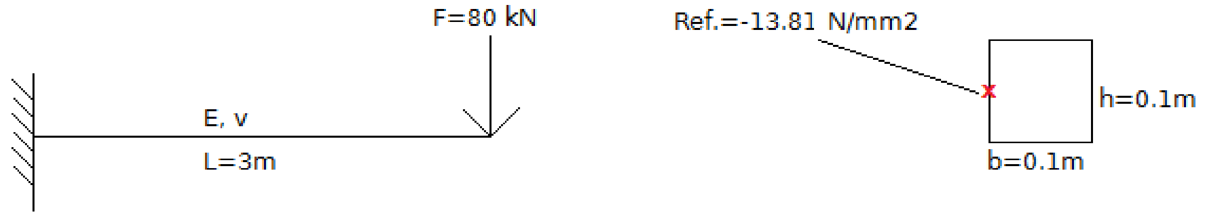
Solid185, EZ=2) De afname van 31.3% (EY=2) naar 6.1% (EY=10) betekent een afname van de fout van ongeveer 80%.

Solid186, EZ=2) De afname van -12.8% (EY=2) naar 3.1% (EY=10) betekent een afname van de fout van ongeveer 120%.

Als men ook de afname van percentages bij een ander aantal elementen in de breedte onderzoekt, blijkt dat deze telkens in dezelfde orde van grootte liggen.

Dit houdt dus inderdaad in dat in de doorsnedediscretisatie er slechts een klein verschil zit in de convergentie tussen het Solid185 en het Solid186 element. De elementlengte zal dan dus inderdaad de doorslaggevende rol moéten spelen in het verschil van totale convergentie van de twee elementtypen.

4.2 Afleiding procentuele van fout 8-knoops elementen



Afbeelding 4.2.1) Uitgangspunt berekeningen in §4.2

Uit de voorgaande hoofdstukken blijkt al dat de fout afhankelijk is van het aantal elementen in de hoogte, breedte en lengte. Tevens blijkt uit Figuur 3.2.3.1 dat er iets speciaals aan de hand is met het 8-knoops element Solid185. De optimale doorsnedecombinaties zijn doorgerekend met verschillende elementlengten. Ongeacht deze elementlengte blijft de curve zijn vorm behouden; hij verschuift slechts naar links (minder DOF's) en naar boven (onnauwkeuriger) naarmate de elementlengte groter wordt. Om meer te begrijpen over de grootte van de procentuele fout ten gevolge van hoogte, breedte en lengte discretisatie voor 8-knoops elementen wordt de balk uit figuur 3.1 met h/b=1 doorgerekend met verschillende doorsnede- elementlengte combinaties. De resultaten zijn te zien in tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5.

Uit dezelfde Figuur 3.2.3.1 blijkt ook dat het Solid186 element een minder gladde curve heeft als die van het 8-knoops element. Tevens blijkt uit §3.2.3 dat de nauwkeurigheid ten gevolge van de elementlengte vooralsnog onvoorspelbaar is. De theorie die wordt afgeleid in dit hoofdstuk heeft dus geen betrekking op het Solid186 element.

Tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v. Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, voor Solid185 elementen met verschillende elementlengten.

	EZ									
Le=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	42.1									
2	35.4	30.6								
3	32.6	26.1	24.4							
4	18.4	10.0	8.2	7.3						
5	20.0	11.8	9.8	9.0	8.6					
6	15.5	6.9	4.9	4.1	3.7	3.5				
7	16.7	8.1	6.1	5.3	4.9	4.7	4.6			
8	14.6	5.8	3.7	3.0	2.6	2.4	2.3	2.2		
9	15.4	6.6	4.6	3.8	3.4	3.2	3.1	3.0	3.0	
10	14.1	5.3	3.2	2.4	2.1	1.9	1.7	1.7	1.6	1.6

Le=5	EZ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	42.5									
2	35.6	30.8								
3	32.8	26.2	24.6							
4	18.6	10.2	8.4	7.5						
5	20.2	11.9	10.0	9.2	8.8					
6	15.7	7.1	5.1	4.3	3.9	3.7				
7	16.9	8.3	6.3	5.5	5.1	4.9	4.8			
8	14.7	6.0	3.9	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4		
9	15.5	6.8	4.8	4.0	3.6	3.6	3.3	3.2	3.2	
10	14.3	5.5	3.4	2.6	2.3	2.1	1.9	1.9	1.8	1.8

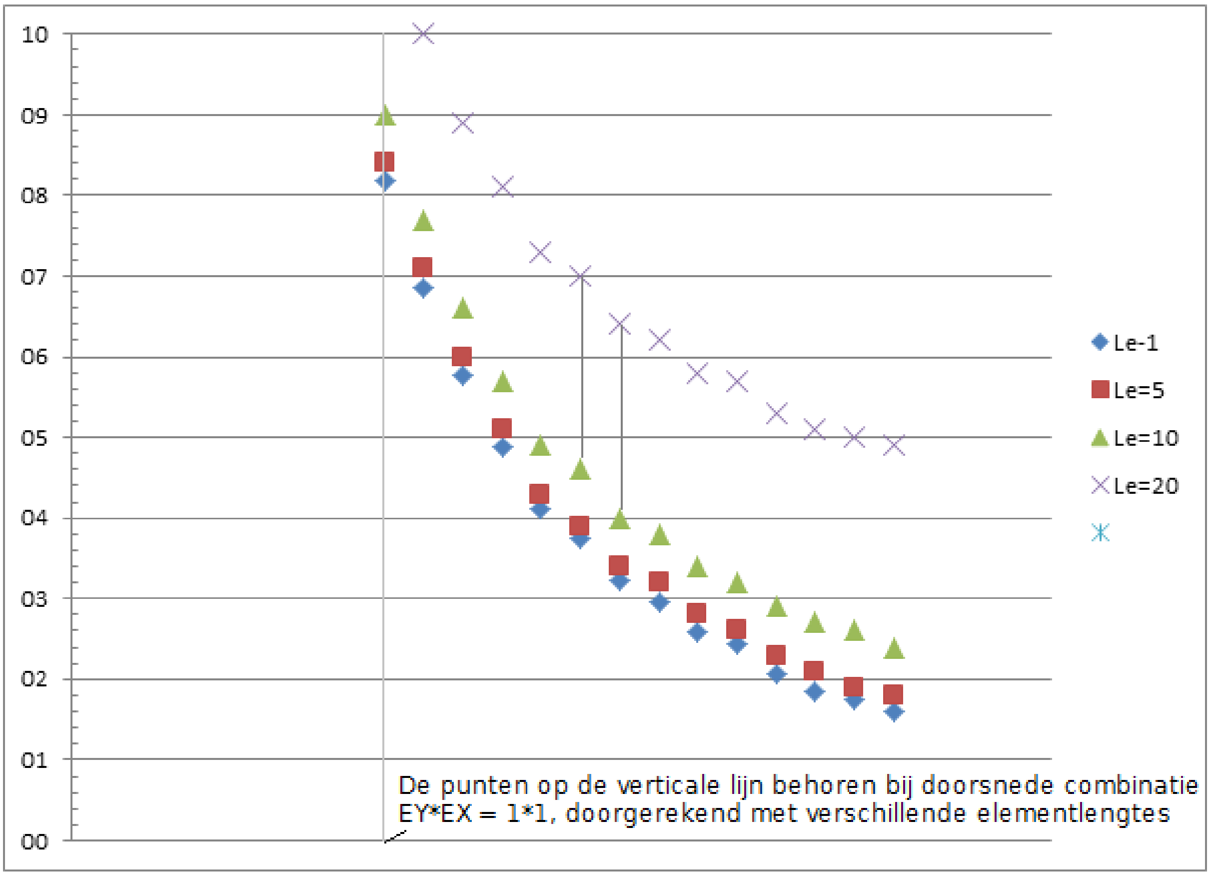
Le=10	EZ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	43.6									
2	36.2	31.3								
3	33.3	26.8	25.2							
4	19.1	10.8	9.0	8.2						
5	20.8	12.5	10.6	9.8	9.4					
6	16.3	7.7	5.7	4.9	4.6	4.4				
7	17.5	8.9	6.9	6.1	5.7	5.5	5.4			
8	15.3	6.6	4.6	3.8	3.4	3.2	3.1	3.0		
9	16.1	7.4	5.4	4.6	4.2	4.0	3.9	3.8	3.8	
10	14.9	6.1	4.0	3.2	2.9	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4

Le=20	EZ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	47.9									
2	38.4	33.6								
3	35.5	29.0	27.4							
4	21.4	13.2	11.4	10.6						
5	23.0	14.9	13.0	12.2	11.8					
6	18.5	10.0	8.1	7.3	7.0	6.8				
7	19.7	11.2	9.3	8.5	8.1	7.9	7.8			
8	17.6	8.9	7.0	6.2	5.8	5.6	5.5	5.4		
9	18.3	9.8	7.8	7.0	6.6	6.4	6.3	6.2	6.2	
10	17.1	8.4	6.4	5.7	5.3	5.1	5.0	4.9	4.9	4.8

	EZ									
Le=39,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	62.9									
2	46.4	41.9								
3	43.2	37.1	35.6							
4	29.5	21.8	20.1	19.3						
5	31.0	23.3	21.6	20.8	20.5					
6	26.7	18.7	16.9	16.1	15.8	15.6				
7	27.8	19.8	18.0	17.2	16.9	16.7	16.6			
8	25.8	17.6	15.7	15.0	14.7	14.5	14.4	14.3		
9	26.5	18.4	16.5	15.8	15.4	15.3	15.1	15.1	15.0	
10	25.3	17.1	15.2	14.5	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7

4.2.1 Invloed van de elementlengte

Om de invloed van de elementlengte te analyseren wordt er in Grafiek 4.2.1.1 voor elke optimale elementcombinatie (x-as) de procentuele nauwkeurigheid (y-as) als functie van de elementlengte uitgezet. Het aantal DOF's wordt hierbij niet meegenomen. De x-as heeft dus slechts een kwalitatieve betekenis.



Grafiek 4.2.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v referentiewaarde, doorgerekend met Solid185 elementen (y-as). Op de x-as staan de verschillende optimale elementcombinaties (niet genoemd), zoals die zijn afgeleid in Tabel 3.2.2.1, beginnend bij EY*EZ = 1*1 (links) eindigend bij EY*EZ=10*9 (rechts).

In de grafiek is te zien dat de afstand tussen de waarden gevonden met elementlengte L_e=10 en de waarden gevonden met elementlengte L_e=20 voor elke elementcombinatie in de doorsnede gelijk is. Dit geldt ook voor de andere elementlengtes. Dit betekent dat de totale fout in de numerieke benadering de som is van de fout als gevolg van doorsnede-discretisatie plus de fout als gevolg van elementlengte-discretisatie.
Om deze invloed van de elementlengte te kwantificeren worden de tabellen uit de vorige paragraaf herordend (zie Tabel 4.2.1.1).

Tabel 4.2.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, voor Solid185 elementen. Herschikking van de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5.

EY	EZ	Le=1	Le=5	Le=10	Le=20	Le=39.5	EY	EZ	Le=1	Le=5	Le=10	Le=20	Le=39.5
1	1	42.1	42.5	43.6	47.9	62.9	8	1	14.6	14.7	15.3	17.6	25.8
2	1	35.4	35.6	36.2	38.4	46.4	8	2	5.8	6.0	6.6	8.9	17.6
2	2	30.6	30.8	31.3	33.6	41.9	8	3	3.7	3.9	4.6	7.0	15.7
3	1	32.6	32.8	33.3	35.5	43.2	8	4	3.0	3.2	3.8	6.2	15.0
3	2	26.1	26.2	26.8	29.0	37.1	8	5	2.6	2.8	3.4	5.8	14.7
3	3	24.4	24.6	25.2	27.4	35.6	8	6	2.4	2.6	3.2	5.6	14.5
4	1	18.4	18.6	19.1	21.4	29.5	8	7	2.3	2.5	3.1	5.5	14.4
4	2	10.0	10.2	10.8	13.2	21.8	8	8	2.2	2.4	3.0	5.4	14.3
4	3	8.2	8.4	9.0	11.4	20.1	9	1	15.4	15.5	16.1	18.3	26.5
4	4	7.3	7.5	8.2	10.6	19.3	9	2	6.6	6.8	7.4	9.8	18.4
5	1	20.0	20.2	20.8	23.0	31.0	9	3	4.6	4.8	5.4	7.8	16.5
5	2	11.8	11.9	12.5	14.9	23.3	9	4	3.8	4.0	4.6	7.0	15.8
5	3	9.8	10.0	10.6	13.0	21.6	9	5	3.4	3.6	4.2	6.6	15.4
5	4	9.0	9.2	9.8	12.2	20.8	9	6	3.2	3.6	4.0	6.4	15.3
5	5	8.6	8.8	9.4	11.8	20.5	9	7	3.1	3.3	3.9	6.3	15.1
6	1	15.5	15.7	16.3	18.5	26.7	9	8	3.0	3.2	3.8	6.2	15.1
6	2	6.9	7.1	7.7	10.0	18.7	9	9	3.0	3.2	3.8	6.2	15.0
6	3	4.9	5.1	5.7	8.1	16.9	10	1	14.1	14.3	14.9	17.1	25.3
6	4	4.1	4.3	4.9	7.3	16.1	10	2	5.3	5.5	6.1	8.4	17.1
6	5	3.7	3.9	4.6	7.0	15.8	10	3	3.2	3.4	4.0	6.4	15.2
6	6	3.5	3.7	4.4	6.8	15.6	10	4	2.4	2.6	3.2	5.7	14.5
7	1	16.7	16.9	17.5	19.7	27.8	10	5	2.1	2.3	2.9	5.3	14.2
7	2	8.1	8.3	8.9	11.2	19.8	10	6	1.9	2.1	2.7	5.1	14.0
7	3	6.1	6.3	6.9	9.3	18.0	10	7	1.7	1.9	2.6	5.0	13.9
7	4	5.3	5.5	6.1	8.5	17.2	10	8	1.7	1.9	2.5	4.9	13.8
7	5	4.9	5.1	5.7	8.1	16.9	10	9	1.6	1.8	2.4	4.9	13.7
7	6	4.7	4.9	5.5	7.9	16.7	10	10	1.6	1.8	2.4	4.8	13.7
7	7	4.6	4.8	5.4	7.8	16.6							

Ten eerste weerspiegelt de tabel het uitgangspunt van een eindige elementenmethode; hoe groter de toegepaste elementlengte hoe groter de procentuele afwijking.
Op het eerste gezicht is er verder weinig te zien in de herschikking van de resultaten. Wordt er echter gekeken naar het *verschil* in nauwkeurigheid tussen eenbepaalde EY*EZ*Le=x combinatie met de basis EY*EZ*Le=1 combinatie, wordt de tabel een stuk interessanter (Tabel 4.2.1.2).

Tabel 4.2.1.2) Verschil in procentuele afwijking van de grootste schuifspanning voor EY*EZ*Le=x met basiswaarde EY*EZ*Le=1.

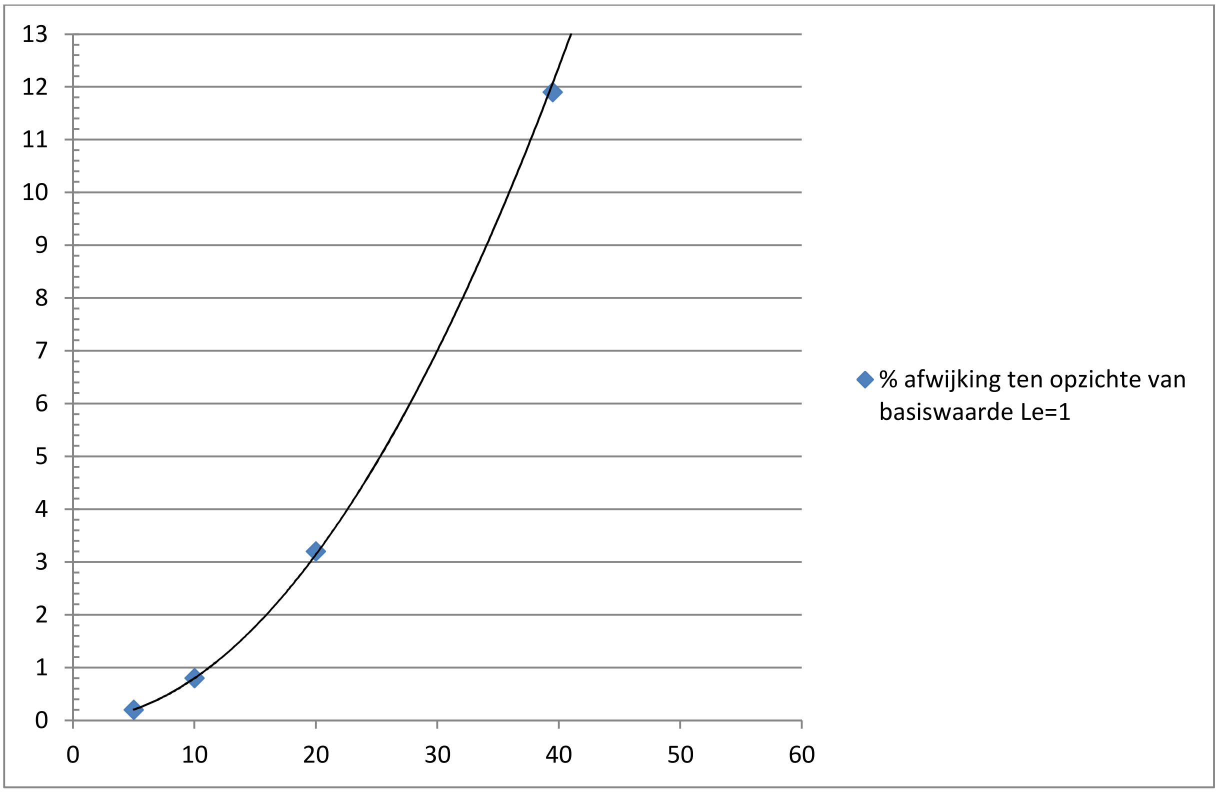
EY	EZ	Le=5 - Le=1	Le=10 - Le=1	Le=20 - Le=1	Le=39,5 - Le=1
1	1	0.4	1.5	5.8	20.8
2	1	0.2	0.8	3.0	11.0
2	2	0.2	0.7	3.0	11.3
3	1	0.2	0.7	2.9	10.6
3	2	0.1	0.7	2.9	11.0
3	3	0.2	0.8	3.0	11.2
4	1	0.2	0.7	3.0	11.1
4	2	0.2	0.8	3.2	11.8
4	3	0.2	0.8	3.2	11.9
4	4	0.2	0.9	3.3	12.0
5	1	0.2	0.8	3.0	11.0
5	2	0.1	0.7	3.1	11.5
5	3	0.2	0.8	3.2	11.8
5	4	0.2	0.8	3.2	11.8
5	5	0.2	0.8	3.2	11.9
6	1	0.2	0.8	3.0	11.2
6	2	0.2	0.8	3.1	11.8
6	3	0.2	0.8	3.2	12.0
6	4	0.2	0.8	3.2	12.0
6	5	0.2	0.9	3.3	12.1
6	6	0.2	0.9	3.3	12.1
7	1	0.2	0.8	3.0	11.1
7	2	0.2	0.8	3.1	11.7
7	3	0.2	0.8	3.2	11.9
7	4	0.2	0.8	3.2	11.9
7	5	0.2	0.8	3.2	12.0
7	6	0.2	0.8	3.2	12.0
7	7	0.2	0.8	3.2	12.0

EY	EZ	Le=5 - Le=1	Le=10 - Le=1	Le=20 - Le=1	Le=39,5 - Le=1
8	1	0.1	0.7	3.0	11.2
8	2	0.2	0.8	3.1	11.8
8	3	0.2	0.9	3.3	12.0
8	4	0.2	0.8	3.2	12.0
8	5	0.2	0.8	3.2	12.1
8	6	0.2	0.8	3.2	12.1
8	7	0.2	0.8	3.2	12.1
8	8	0.2	0.8	3.2	12.1
9	1	0.1	0.7	2.9	11.1
9	2	0.2	0.8	3.2	11.8
9	3	0.2	0.8	3.2	11.9
9	4	0.2	0.8	3.2	12.0
9	5	0.2	0.8	3.2	12.0
9	6	0.4	0.8	3.2	12.1
9	7	0.2	0.8	3.2	12.0
9	8	0.2	0.8	3.2	12.1
9	9	0.2	0.8	3.2	12.0
10	1	0.2	0.8	3.0	11.2
10	2	0.2	0.8	3.1	11.8
10	3	0.2	0.8	3.2	12.0
10	4	0.2	0.8	3.3	12.1
10	5	0.2	0.8	3.2	12.1
10	6	0.2	0.8	3.2	12.1
10	7	0.2	0.9	3.3	12.2
10	8	0.2	0.8	3.2	12.1
10	9	0.2	0.8	3.3	12.1
10	10	0.2	0.8	3.2	12.1

Zoals Figuur 4.2.1.1 ook al aantoont blijkt het verschil tussen een specifieke EY*EZ*Le=x combinatie met een EY*EZ*Le=1 combinatie inderdaad nagenoeg constant te zijn.
Hieruit kunnen we concluderen dat als de *basiswaarde* EY*EZ*Le=1 bekend is, we de nauwkeurigheid bij gebruik van een andere elementlengte eenvoudig kunnen afleiden; namelijk door er een constante bij op te tellen. De basiswaarde is gedefinieerd als díe combinatie waarbij de variabele, in dit geval dus het aantal elementen in de lengte, maximaal is en waarnaar de oplossing, gebruikmakend van een EY aantal elementen in de hoogte en een EZ aantal elementen in de breedte naartoe convergeert.
De constanten worden bepaald door het gemiddelde te nemen uit de gevonden waarden uit Tabel 4.2.1.2. Omdat de resultaten bij discretisatie van slechts 1 element in de doorsnede (zowel in de hoogte als in de breedte) regelmatig afwijken van het gemiddelde, worden deze niet meegenomen.
Vervolgens worden de resultaten uitgezet in een grafiek.

Tabel 4.2.1.3) Gemiddelde verschil in % tussen procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor elementlengte Le=x en de basiswaarde Le=1 voor alle EY*EZ combinaties.

Le			
5	10	20	39.5
0.2	0.8	3.2	11.9



Figuur 4.2.1.1) Verschil in procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor elementlengte Le=x en de basiswaarde Le=1 (y-as) tegenover elementlengte Le (x-as).

In Figuur 4.2.1.1 is te zien dat de afwijkingen ten opzichte van basiswaarde Le=1 op een mooie curve liggen. Via deze curve kan dus ook bepaald worden wat de procentuele afwijking zou zijn voor bijvoorbeeld de tussenliggende elementlengte 30 mm.
Later in het hoofdstuk worden enkele voorbeelden gegeven.

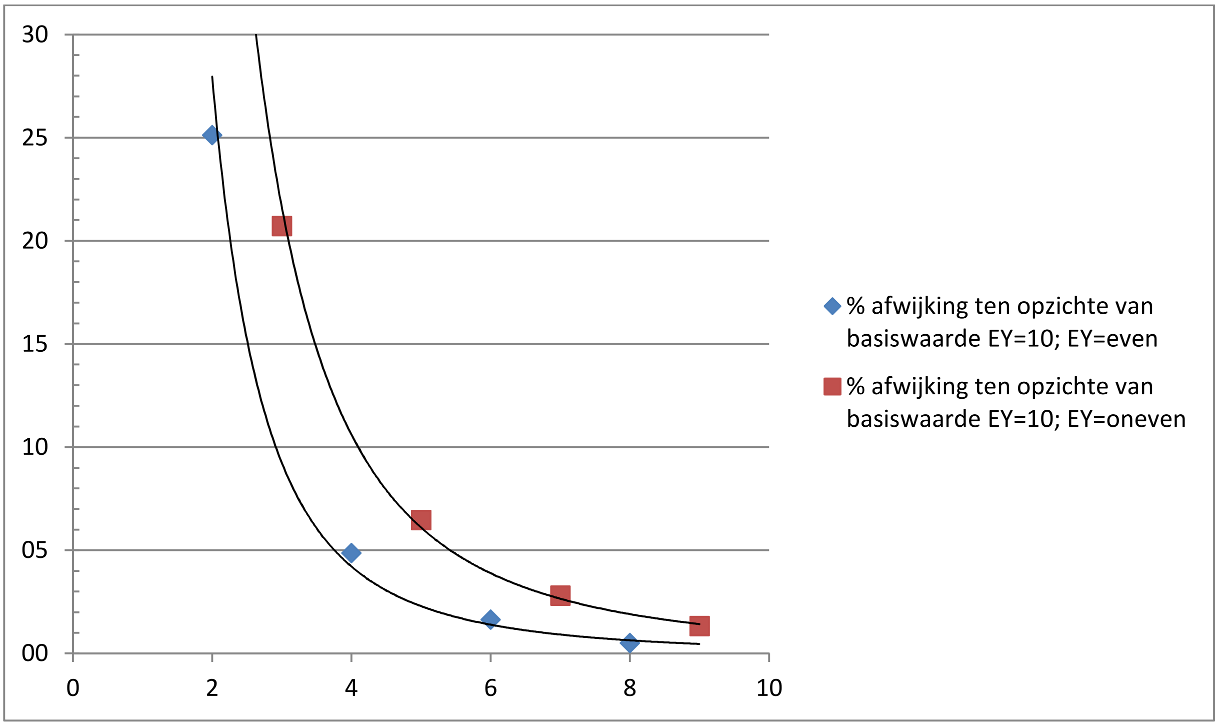
4.2.2 Invloed van de elementhoogte
Om de invloed van de elementhoogte te onderzoeken worden de resultaten uit de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5 wederom opnieuw geordend (zie Bijlage VI). Ditmaal zodat het aantal elementen in de hoogte de variabele is. Ook nu wordt vervolgens gekeken naar het verschil in nauwkeurigheid tussen een bepaalde Le*EZ*EY=x combinatie met de zogenaamde basiswaarde. Omdat de elementhoogte variabel is, is de basiswaarde díe combinatie waarbij het aantal elementen in de hoogte maximaal is, dus de waarde van Le*EZ*EY=10. Naar deze waarde zal de fout convergeren indien gebruik wordt gemaakt van elementlengte Le en EZ aantal elementen in de breedte.

Uit deze analyse blijkt ook dat het verschil tussen een specifieke Le*EZ*EY=x combinatie met de basiswaarde wederom nagenoeg constant te zijn.
Hieruit kunnen we concluderen dat als de *basiswaarde* EY*EZ*Le=1 bekend is, we de nauwkeurigheid bij toepassing van een andere elementlengte eenvoudig kunnen afleiden, namelijk door er een constante bij op te tellen. De waarden van de constanten zijn gegeven in Tabel 4.2.2.1.

Tabel 4.2.2.1) Gemiddelde verschil in % tussen procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EY=x aantal elementen in de hoogte en de basiswaarde EY=10 elementen in de hoogte voor alle EZ*Le combinaties.

EY							
9	8	7	6	5	4	3	2
1.3	0.5	2.8	1.7	6.5	4.9	20.7	25.1

Om de trend van bovenstaande waarden te onderzoeken worden ook deze Figuur 4.2.2.1 gezet. Ook nu is het verschil tussen de basiswaarde en een met afwijkende elementhoogte te beschrijven is met een gladde curve. In de figuur is direct te zien dat indien er met een oneven aantal elementen in de hoogte gewerkt wordt, er per definitie een groter percentage bij de basiswaarde opgeteld dient te worden. De verklaring hiervoor is gegeven in hoofdstuk 3.



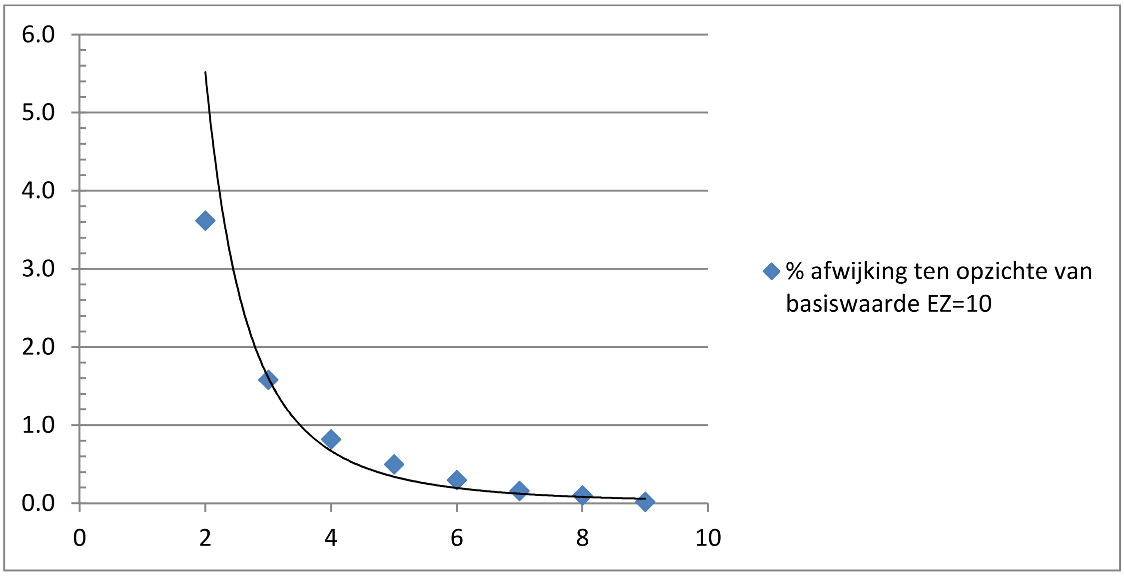
Figuur 4.2.2.1) Verschil in procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EZ*Le*EY=x en de basiswaarde EZ*Le*EY=10 (y-as) tegenover het aantal elementenin de hoogte EY (x-as).

4.2.3 Invloed van de elementbreedte

Volgens exact dezelfde theorie als in de voorgaande paragrafen wordt ook voor de breedte gekeken naar het verschil tussen Le*EY*EZ=x en de basiswaarde Le*EY*EZ=10.
De resultaten zijn zichtbaar in Tabel 4.2.1.3 en Figuur 4.2.3.1.

Tabel 4.2.3.1) Gemiddelde verschil in % tussen procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EZ=x aantal elementen in de breedte en de basiswaarde EZ=10 elementen in de breedte voor alle EY*Le combinaties.

EZ							
9	8	7	6	5	4	3	2
0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.6	3.6



Figuur 4.2.3.1) Verschil in procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EY*Le*EZ=x en de basiswaarde EY*Le*EZ=10 (y-as) tegenover het aantal elementenin de breedte EZ (x-as).

Merk op!
Zoals uit de kwalitatieve analyse van §4.1 is gebleken , is in geval van zuivere dwarskrachtbelasting de invloed van het aantal elementen in de breedte kleiner dan de invloed van het aantal elementen in de hoogte. Dit uit zich kwantitatief in de range van waarden die de constanten aannemen in de tabellen 4.2.2.1 en 4.2.3.1. In het geval van een discretisatie in de hoogte loopt het percentage dat moet worden opgeteld bij de basiswaarde van 0.5% tot 25%.
In het geval van discretisatie in de breedte loopt het percentage dat moet worden opgeteld bij de basiswaarde van 0% tot grofweg 4%. Dit is bijna verwaarloosbaar klein ten opzichte van de variaties in de hoogte.

4.2.4 Benadering van de totale fout
Uit voorgaande is gebleken dat de procentuele afwijking telkens een functie is van een bepaalde basiswaarde en de discretisatie ten opzichte van deze basiswaarde.
Stel we nemen als basiswaarde EY=10*EZ=10*Le=1. Uit Tabel 4.2.5 blijkt dat de procentuele afwijking ten opzichte van de referentiewaarde dan 1.6% is. Uiteraard is deze procentuele afwijking ook een gevolg van hoogte-, breedte- en lengtediscretisatie.
Om nu de procentuele fout te benaderen voor een willekeurige andere doorsnede*elementlengte combinatie is het slechts een kwestie van optellen van fouten.

Voorbeeld 1
We willen de spanning in een eenzijdig ingeklemde balk belast op dwarskracht met h/b=1 numeriek benaderen. Hiervoor nemen we 6 elementen in de hoogte, 5 in de breedte en kiezen als elementlengte L_e=20.
In de basis is er altijd een procentuele afwijking van 1.6%.
Door de hoogte discretisatie komt er een afwijking bij van 1.7 % (Tabel 4.2.2.1)
Door breedte discretisatie komt er een afwijking bij van 0.5 % (Tabel 4.2.3.1)
Door lengte discretisatie komt er een afwijking bij van 3.2 % (Tabel4.2.1.3)
De totale fout wordt dus geschat op 1.6% + 1.7 % + 0.5% + 3.2% = 7.0%
De werkelijke afwijking is toevalligerwijs ook 7.0%

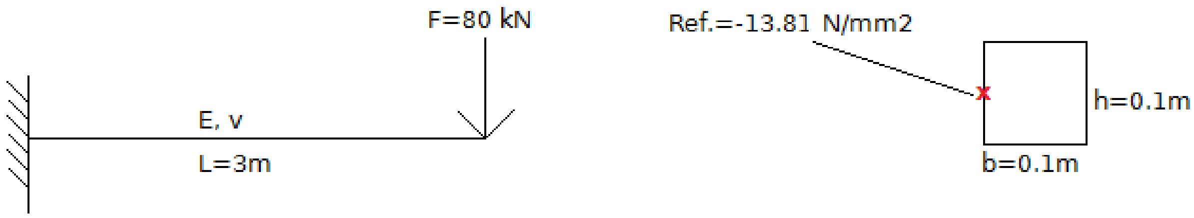
Voorbeeld 2
We willen wederom de spanning in een eenzijdig ingeklemde balk belast op dwarskracht met h/b=1 numeriek benaderen. Hiervoor nemen we 4 elementen in de hoogte, 2 in de breedte en kiezen ditmaal als elementlengte L_e=30. Dezelfde stappen worden genomen;
Procentuele afwijking in de basis: 1.6%
Afwijking door hoogte-discretisatie: 4.9%
Afwijking door breedte-discretisatie: 3.6%
De afwijking door lengte-discretisatie moet worden afgelezen in Figuur 4.2.1.1. De afwijking ligt bij Le=30 rond de 7.1%.
De totale fout wordt dus geschat op 17.2%
De werkelijke afwijking is 16.9%

Voorbeeld 3
We willen wederom de spanning in een eenzijdig ingeklemde balk belast op dwarskracht met h/b=1 numeriek benaderen binnen een nauwkeurigheid van ongeveer 10%.
Wat is het benodigde aantal elementen in de drie richtingen?

1. De totale afwijking van de discretisatie in de drie richtingen mag niet groter zijn dan 10%-1.6% = 8.4%
2. Kies een elementlengte, bijvoorbeeld L_e=20. Deze zorgt voor een afwijking van 3.2%. De totale afwijking van de discretisatie in de doorsnede mag dus niet groter zijn dan 8.4% - 3.2% = 5.2%
3. EY=7 levert een afwijking op van 2.8%. Dit houdt in dat de afwijking ten gevolge van discretisatie in de breedte niet méér mag zijn dan 2.4%.
4. Een goede optie voor EZ zou dan dus zijn EZ=3 (afwijking van 1.6%)
5. De totale afwijking ten opzichte van de referentiewaarde bij een EY=7*EZ=3* L_e=20 discretisatie zal dus ongeveer 9.2% zijn.

Volgens Tabel 4.2.4 is deze afwijking 9.3%.

4.3 Foutvermindering door Lagrange Interpolatie



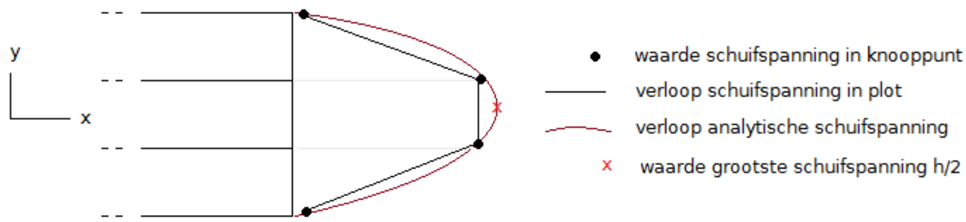
4.3.1) Uitgangspunt berekeningen §4.3

In het voorgaande is onder andere gekeken naar de *grootte* van de procentuele fout(Hoofdstuk 2), zijn de procentuele fouten van twee elementtypen met elkaar *vergeleken* (Hoofdstuk 3), is de *convergentie* van de fout afgeleid (Hoofdstuk 4.1) en is voor het Solid185 elementtype afgeleid hoe de fout is *opgebouwd* (Hoofdstuk 4.2).
De in eerdere hoofdstukken genoemde opties om de fout te verminderen vinden hun basis in het juist modelleren van de balk, het kiezen van het juiste elementtype en het kiezen van het juiste aantal elementen.
Men zou ook kunnen denken aan een andere manier van foutvermindering; door de voorkennis van de constructeur te combineren met de output van een eindige elementen programma zoals Ansys. Dit wordt verhelderd in het volgende:

Eerder is aangenomen dat de constructeur het spanningsveld zal plotten met de knooppuntswaarden. In de plot verloopt de spanning zowel voor het 8- als 20-knoops element lineair tussen de knooppunten. Dit is eigenlijk jammer, omdat men wéét dat de analytische spanningsverdeling kwadratisch over de hoogte verloopt. In feite is er dus extra informatie aanwezig, waar vooralsnog niets mee gedaan wordt.
Om aan te tonen hoe deze extra kennis gecombineerd zou kunnen worden met de output van een eindige elementen programma, wordt in deze paragraaf, net zoals in hoofdstuk 1, de optimale elementcombinaties in de doorsnede gezocht voor een op dwarskracht belaste balk met h/b=1, doorgerekend met Solid186 elementen (zie Afbeelding 4.3.1). Nu worden de resultaten echter bewerkt.

4.3.1 Situatie

In Tabel 2.2.1.1 is de balk al eens doorgerekend voor verschillende EY*EZ combinaties. De afwijking in de grootste schuifspanning is bij een oneven aantal elementen in de hoogte groter dan bij een even aantal elementen in de hoogte. Dit heeft te maken met het feit dat de (spannings)waarden slechts in de knooppunten kunnen worden afgelezen (zie Afbeelding 4.3.1.1). In verband met symmetrie over de x-as en een lineair verloop tussen de knooppunten, beeldt Ansys ook deze waarde af in de plot.



4.3.1.1) Fout in de grootste schuifspanning bij oneven aantal elemenen in de hoogte

4.3.2 Lagrange Interpolatie

Om de schuifspanning halverwege de balk beter te benaderen wordt er gebruik gemaakt van de Lagrange Interpolatie [4]. Interpoleren is niets anders dan een uitspraak doen over een onbekende situatie (schuifspanning halverwege de balk) op basis van een serie bekende situaties (schuifspanningen op omliggende knooppunten), door aan te nemen dat er een verband tussen die situaties bestaat (kwadratisch verloop ertussen).
Er moet een functie van orde 2 benaderd worden. Er zijn dus 2+1 =3 interpolatiepunten nodig. Het gebruik van méér interpolatiepunten is niet gewenst in verband met het risico op hogere orde curven tussen de interpolatiepunten door. S(y) is een uitdrukking voor de schuifspanning op afstand y van de top van de balk.

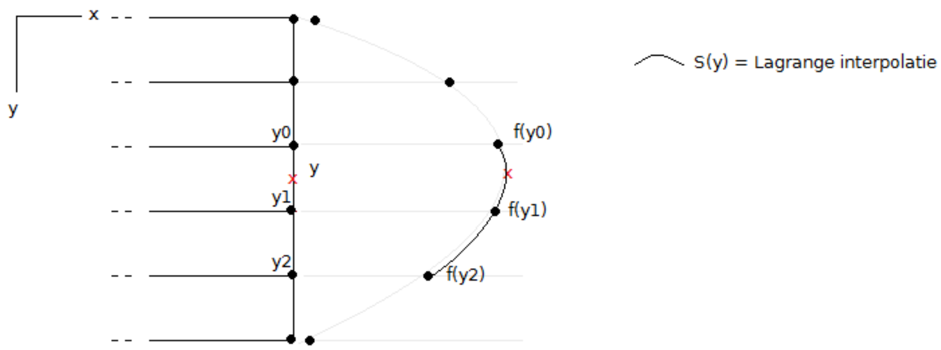
$$S(y) = \frac{(y-y1)(y-y2)}{(y0-y1)(y0-y2)} f(y0) + \frac{(y-y0)(y-y2)}{(y1-y0)(y1-y2)} f(y1) + \frac{(y-y0)(y-y1)}{(y2-y0)(y2-y1)} f(y2) \tag{4.5}$$

$$y = \frac{h}{2} \tag{4.6}$$

$$y0 = \frac{h}{EY}\frac{(EY-1)}{2} \tag{4.7}$$

$$y1 = \frac{h}{EY}\frac{(EY+1)}{2} \tag{4.8}$$

$$y2 = \frac{h}{EY}\frac{(EY+3)}{2} \tag{4.9}$$



Afbeelding 4.3.2.1) Locatie van de Lagrange Interpolatiepunten

4.3.3 Nauwkeurigheidstabel na Lagrange Interpolatie

Net als in §2.2.1 wordt de procentuele afwijking ten opzichte van de referentiewaarde bepaald voor de verschillende doorsnedecombinaties. Voor de combinaties met een even aantal elementen in de hoogte verandert er niets. Voor de combinaties met een oneven aantal elementen in de hoogte wordt de spanning halverwege de balk bepaald met formules 4.5 t/m 4.9. Hiervoor zijn de waarden van de spanning in knooppunt y0, y1 en y2 gebruikt zoals aangegeven op afbeelding 4.3.2.1. De afleiding van onderstaande tabel is te vinden in Bijlage VII.

Tabel 4.3.3.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, na toepassing van Lagrange Interpolatie

	EZ								
EY	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	-12.8								
3	-4.2	-6.2							
4	-0.1	-1.9	-2.5						
5	1.2	-0.5	-1.1	-1.4					
6	2.0	0.3	-0.3	-0.6	-0.8				
7	2.5	0.8	0.1	-0.2	-0.4	-0.5			
8	2.8	1.1	0.4	0.1	-0.1	-0.2	-0.3		
9	3.0	1.3	0.6	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.1	
10	3.1	1.4	0.8	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0

Als men de tabel vergelijkt met Tabel 2.2.1.1 uit hoofdstuk 2, is direct te zien dat de fout door toepassing van Lagrange Interpolatie aanzienlijk is afgenomen. Om te onderzoeken in hoeverre deze interpolatie effect heeft op de optimale elementcombinaties in de doorsnede en de uiteindelijke nauwkeurigheidstabel voor constructeurs, wordt deze voor de hernieuwde resultaten nogmaals afgeleid (Bijlage VII). Vervolgens wordt de nauwkeurigheidstabel voor constructeurs die is verkregen met behulp van Lagrange Interpolatie vergeleken met de oorspronkelijke nauwkeurigheidstabel voor constructeurs, die reeds is afgeleid in §2.2.4.

Tabel 4.3.3.4) Nauwkeurigheidstabel voor constructeurs voor h/b=1 zonder Lagrange Interpolatie (links) en mét Lagrange Interpolatie(rechts)

mét Interpolatie			
	EY	EZ	DOF's
10%	3	2	62
3%	5	2	95
1%	5	3	129

zonder Interpolatie (zie §2.2.4)			
h/b=1	EY	EZ	DOF's
10 %	3	2	62
3 %	4	3	107
1 %	6	3	152

Interpretatie van de resultaten

In bovenstaande tabellen is duidelijk te zien dat door een simpele interpolatie tussen de knooppunten al met mínder vrijheidsgraden een vergelijkbare nauwkeurigheid verkregen wordt als zonder toepassing van een interpolatie.

Een dergelijke interpolatie kan eenvoudig in een script verwerkt worden, die in de postprocessingfase door het FEM-programma gerund kan worden. Een kleine aanpassing door de constructeur kan dus een aanzienlijk snellere berekening opleveren.

Bovenstaande theorie kan ook gebruikt worden om voor andere elementtypen de spanning op een gewenst punt beter te benaderen, of voor andere spanningsverdelingen.

Randwaarde-effecten, waarbij spanningen aan de rand van een doorsnede slechter benaderd worden dan rond het midden van de doorsnede, kunnen worden verminderd.

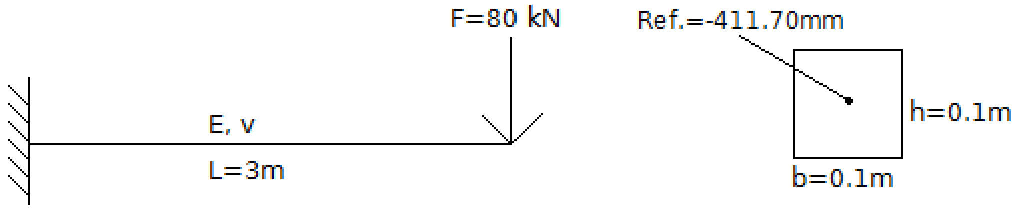
Tevens zouden andere methoden gebruikt kunnen worden om de spanningsverdeling beter te plotten. Bijvoorbeeld door een kleinste kwadraten methode, waar bij een gegeven verzameling puntenparen in het vlak uit een verzameling curven de “best passende” gekozen wordt [Wikipedia]

Men zou zich kunnen afvragen waarom een dergelijke bewerking als een interpolatie, of kleinste kwadraten methode niet als extra optie in de plotter van Ansys is geprogrammeerd.

Letop!

Bijtoepassing van bovenstaande theorie is het van zeer groot belang dat er een correct spanningsveld aangenomen wordt. Wordt een zuivere buigspanningsverdeling over de hoogte van de balk benaderd met een kwadratische interpolatie, zorgt dit uiteraard voor grote fouten.

5. Verplaatsingen



Afbeelding 5.1) Uitgangspunt hoofdstuk 5

Bij het ontwerp van een civieltechnisch (kunst) werk wordt er in eerste instantie gekeken naar de benodigde sterkte-eigenschappen van de constructieonderdelen. Om te kunnen controleren of de constructieonderdelen aan de juiste eisen voldoen is een indruk nodig van de spanningsverdeling binnen dat constructieonderdeel. In de voorgaande hoofdstukken is daarom onderzocht in hoeveel en welke elementen een constructie moet worden opgedeeld om deze spanningen voldoende nauwkeurig te kunnen bepalen.
Hoewel de sterkte-eisen in hoge mate de constructieve veiligheid van een gebouw bepalen, zijn deze vaak niet doorslaggevend bij de dimensionering ervan. Doorbuigingseisen waaraan een vloer of balk in de bruikbaarheidsgrenstoestand aan moet voldoen, zijn daarentegen vaak wél doorslaggevend voor de dimensionering. Stel we nemen wederom bovenstaande balk als uitgangspunt.

Deelvraag 4
In hoeveel elementen in de hoogte, breedte en lengte moet een dwarskracht belaste balk worden opgedeeld om de maximale vervormingen van de balk binnen een nauwkeurigheid van 1,3 of 10% te benaderen?

5.1 Theorie

De zakkingen worden bepaald exact in het midden van de balk. Omdat de verplaatsingen slechts op knooppunten opgevraagd kunnen worden, is er slechts met een even aantal elementen in de hoogte en breedte gewerkt. Op deze manier bevindt zich altijd een knooppunt exact in het midden van de balk. De analytische zakking dient als referentiewaarde en wordt bepaald volgens formule:

$$u = \frac{FL^3}{3EI}(1 + 0.5\eta\frac{h^2}{L^2})$$

$$\eta = \frac{6}{5}$$

5.2 Toepassing

5.2.1 Solid186 (20-knoops element)

Reeds in §3.1.3 is voorspeld dat de 20-knoops elementen door de aanwezigheid van de midsidenodes van nature over de mogelijkheid beschikken een golvend verplaatsingenveld te benaderen; dus ook een verplaatsing volgens een derde graads polynoom. Om dit te onderzoeken wordt de balk uit Afbeelding 5.1 in elementen verdeeld en doorgerekend met het eindige elementenprogramma. De numeriek gevonden verplaatsing wordt vergeleken met de analytisch berekende verplaatsing. Zie onderstaand resultaat.

Tabel 5.2.1.1) Procentuele afwijking in de grooste zakking t.o.v. analytische waarde voor h/b=1, voor Solid186 elementen met verschillende elementlengtes.

Le=1500mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	-0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0
4	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
6	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
8	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
10	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
Le=1000mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	-0.2	-0.1	0.0	0.0	0.0
4	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
6	-0.1	0.0	0.0	0.1	0.1
8	-0.1	0.0	0.1	0.1	0.1
10	-0.1	0.0	0.1	0.1	0.1
Le=500mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	-0.3	-0.1	-0.1	0.0	0.0
4	-0.2	0.0	0.1	0.1	0.1
6	-0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
8	-0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
10	-0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

5.2.1 Solid185 (8-knoops element)

In §3.1.3 is ook voorspeld dat de 8-knoops elementen, waarbij het vervormingsgedrag zich lineair tussen de knooppunten gedraagt, meer moeite zal hebben met het juist benaderen van het golvende verplaatsingenveld. Dit komt mede door het stijve gedrag van de elementen. Voorspeld was dat naarmate er meer elementen in de lengte worden toegevoegd, het verplaatsingenveld beter wordt benaderd.

Tabel 5.2.2.2) Procentuele afwijking in de grooste zakking t.o.v. analytische waarde voor h/b=1, voor Solid186 elementen met verschillende elementlengtes.

Le=1500mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	99.1	99.1	99.1	99.1	99.1
4	99.1	99.1	99.1	99.1	99.1
6	99.1	99.1	99.1	99.1	99.1
8	99.1	99.1	99.1	99.1	99.1
10	99.1	99.1	99.1	99.1	99.1
Le=10mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	-9.3	-9.3	-9.3	-9.4	-9.4
4	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7	-1.7
6	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Le=5mm	EZ				
EY	2	4	6	8	10
2	-9.7	-9.8	-9.8	-9.8	-9.8
4	-2.0	-2.1	-2.1	-2.1	-2.1
6	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8
8	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4
10	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2

5.2.3 Resultaten

Solid186
Voor het 20-knoops element geldt dat het de vervormingen beter benadert naarmate er minder elementen in de lengte worden toegepast. Dit heeft te maken met het effect uit Afbeelding 3.1.3.4 in het hoofdverslag; door het opdelen van meer elementen krijgt het programma de kans verschillende verplaatsingswaarden aan de elementen toe te bedelen waardoor er een “knik” in het verloop kan ontstaan. Een mesh van 2*2*2 (EX*EY*EZ) elementen bereikt al een nauwkeurigheid die minder dan 1% van de analytische benadering afwijkt.

Een lastige situatie zou kunnen ontstaan indien met hetzelfde mesh zowel de spanningen als de vervormingen benaderd moeten worden. Een mesh met 2 elementen in de lengte is namelijk niet voldoende fijn om de spanning met een vergelijkbare nauwkeurigheid te benaderen. Daarvoor zullen er dus méér elementen in de lengte gebruikt moeten worden. Echter uit bovenstaande blijkt dat de nauwkeurigheid van de benadering van de vervorming juist afneemt bij toepassing van méér elementen in de lengte. In hoeverre dit een hinderlijke situatie is zou verder moeten worden onderzocht, bijvoorbeeld door de nauwkeurigheid van de vervorming te berekenen met relatief veel elementjes in de lengte (bijvoorbeeld L_e=40)

Solid185
Voorspeld was dat naarmate er meer elementen in de lengte worden toegevoegd, het verplaatsingenveld beter wordt benaderd.
Deze voorspelling klopt in zekere zin. Bij het gebruik van 2 elementen in de lengte gedraagt de balk zich zéér stijf. De werkelijke doorbuiging wordt met zo’n 99% onderschat (zie formule 2.1).
Dit is uiteraard gevaarlijk.
Als er meer elementen in de lengte worden toegevoegd, bijvoorbeeld bij L_e=10, wordt de numerieke benadering voor de zakking realistischer. Deze elementlengte is toevalligerwijs (of niet?) ook de optimale elementlengte zoals die is gevonden in §3.2.3.
Tevens blijkt dat op een gegeven moment het toevoegen van elementen in de lengte geen zin meer heeft; de zakkingen worden er niet nauwkeuriger door benaderd.

Tabel 5.2.3.1) Elementlengte(mm) en aantal elementen in de doorsnede om een nauwkeurigheid van resp. 10, 3 of 1% te krijgen voor de numeriek berekende vervorming t.o.v de analytsche referentiewaarde, doorgerekend met Solid185 elementen.

	Le	EY	EZ
10%	10	2	2
3%	10	4	2
1%	10	6	2

6. Conclusies en aanbevelingen

6.1 Conclusies

In dit bacheloreindwerk is onderzoek gedaan naar de mogelijkheden in het optimaliseren van het aantal elementen in een slanke balk met rechthoekige doorsnede, die is belast met zuivere dwarskracht en waarbij de spanningen en vervormingen volgens de lineaire elasticiteitsleer numeriek worden benaderd met het eindige elementen programma Ansys.
Zowel 8-knoops elementen als 20-knoops elementen zijn in dit werk overwogen.

Aflezen resultaten
De resultaten van het eindige elementen programma kunnen worden afgelezen volgens de knooppuntswaarden of volgens de elementwaarden. De waarde op het knooppunt is de gemiddelde waarde van de knooppunten behorend bij de omliggende elementen. Een sprong in de spanning wordt hierdoor uitgemiddeld. In een knooppuntsplot wordt zowel bij het 8-knoops element als bij het 20-knoops element de spanning bi-lineair afgebeeld tussen de knooppuntswaarden, waardoor er een redelijk inzicht in het werkelijke spanningsverloop wordt gegeven (Afbeelding 2.1.6.1). Bij een oneven aantal elementen in de hoogte bevindt zich geen knooppunt halverwege de balk, waardoor de maximale schuifspanning onderschat wordt (Afbeelding 4.3.1.1).
De elementwaarden zijn constant binnen een element. Hierdoor geeft een elementenplot geen goed inzicht in het werkelijke spanningsverloop (Afbeelding 2.1.6.5). Halverwege het element zijn de elementwaarden nauwkeuriger dan de knooppuntswaarden (zie Tabel 2.1.6.1).

Optimalisatie door optimale elementcombinaties in de doorsnede
De efficientie van de verschillende elementcombinaties in de doorsnede wordt gevonden door de nauwkeurigheid te vergelijken met het aantal vrijheidsgraden in de doorsnede.
Voor de berekening van een op dwarskracht belaste balk met 20-knoops elementen wordt voor een nauwkeurigheid van respectievelijk 10%, 3% en 1% aangeraden volgens Tabel 6.1 EY aantal elementen in de hoogte toe te passen en EZ aantal elementen in de breedte.

Tabel 6.1) Optimale doorsnede combinaties voor een op dwarskracht belaste balk met hoogte breedte verhouding h/b=1 en h/b=5.

h/b=1	EY	EZ
10 %	3	2
3 %	4	3
1 %	6	3

h/b=5	EY	EZ
10%	3	2
3%	5	2
1%	8	2

Het mesh voor de dwarskracht is niet maatgevend, omdat wringbelasting voor een vergelijkbare nauwkeurigheid soms meer elementen in de doorsnede vergt (zie [1]).

Optimalisatie door de keuze van het juiste elementtype
Voor 8-knoops elementen geldt duidelijk het eindige elementenprincipe: Naarmate er méér elementen in de balk worden toegevoegd, neemt de nauwkeurigheid toe. De 20-knoops elementen volgen niet altijd dit patroon. Er zijn situaties waarbij méér elementen in de hoogte of breedte (Tabel 2.2.1.1) of méér elementen in de lengte (Tabel 4.2.3.2) voor een onnauwkeurigere situatie zorgt. Indien de nauwkeurigheid wordt uitgezet tegen het aantal vrijheidsgraden is er sprake van een “optimaal dal“ (Afbeelding 3.2.3.1).
Het 20-knoops element is met gebruik van minder vrijheidsgraden nauwkeuriger dan het 8-knoops element en dus te allen tijde te prefereren (zie Figuur 3.2.4.1).

Optimalisatie door het beïnvloeden van de fout
De fout ten opzichte van de gewenste waarde kan beschreven worden met de formule $\varepsilon = Kh^{\alpha}$
De convergentiefactor α is voor beide elementtypen ongeveer 2. De waarde van K is in de hoogte grofweg een factor 10 groter dan in de breedte, wat zich uit in een snellere convergentie door hoogte-discretisatie (zie Tabel 4.1.3.1).
Er zit een minimaal verschil tussen de convergentie in de doorsnede van het 20-knoops element en het lagere orde 8-knoops element. De convergentie door lengte discretisatie zal de doorslaggevende rol spelen in de uiteindelijk snellere convergentie van het 20-knoops element.

De procentuele afwijking in de spanning van het 8-knoops element is de som van de procentuele afwijking door lengte, hoogte en breedte discretisatie, wat impliceert dat de fouten in de drie richtingen onafhankelijk van elkaar zijn. De waarden van deze fouten als gevolg van het aantal toegepaste elementen zijn voor een op dwarskracht belaste balk met hoogte breedte verhouding van h/b=1 gekwantificeerd in de Tabellen 4.2.1.3, 4.2.2.1 en 4.2.3.1.

Door het combineren van de voorkennis van de constructeur met de output van een eindige elementenprogramma kan de nauwkeurigheid van de berekening verbeterd worden.
Indien een slanke balk belast op dwarskracht met hoogte breedte verhouding h/b=1 doorgerekend wordt met 20-knoops elementen en de benaderingen bij een oneven aantal elementen over de hoogte via een tweede orde Lagrange Interpolatie worden gemanipuleerd, worden aanzienlijk nauwkeurigere waarden voor de maximale schuifspanning gevonden (Tabel 4.3.3.1 t.o.v Tabel 2.2.1.1). Indien de balk met h/b=1 dus wordt doorgerekend met 20-knoops elementen en de resultaten achteraf bewerkt worden met een Lagrange Interpolatie, worden in plaats van de doorsnede combinaties uit Tabel 6.1 de doorsnedecombinaties uit Tabel 6.2 aangeraden.

Tabel 6.2) Optimale doorsnede combinaties voor het berekenen van de maximale schuifspanning van een op dwarskracht belaste balk met hoogte breedte verhouding h/b=1 en h/b=5, na toepassing van Lagrange Interpolatie

	EY	EZ
10%	3	2
3%	5	2
1%	5	3

Optimale elementcombinaties bij het benaderen van het verplaatsingenveld
Voor het 20-knoops element geldt dat het de vervormingen beter benadert naarmate er minder elementen in de lengte worden toegepast. Een mesh van 2*2*2 (EX*EY*EZ) elementen bereikt al een nauwkeurigheid die minder dan 1% van de analytische benadering afwijkt.

Voor het 8-knoops element zijn er aanzienlijk meer elementen in de lengte nodig om de zakking goed te benaderen. Er zit echter een limiet aan, op een gegeven moment wordt de zakking door het toevoegen van meer elementen in de lengte onnauwkeuriger benaderd.
Wordt de zakking van een op dwarskracht belaste balk met h/b=1 berekend met 8-knoops elementen, en is een nauwkeurigheid van respectievelijk 10%, 3%, en 1% vereist, worden de elementcombinaties uit Tabel 6.3 aangeraden.

Tabel 6.3) Optimale elementcombinaties voor het berekenen van de maximale vervorming van een op dwarskracht belaste balk met hoogte breedte verhouding h/b=1, doorgerekend met 8-knoops elementen.

	Le	EY	EZ
10%	10	2	2
3%	10	4	2
1%	10	6	2

6.2 Aanbevelingen

Gebeleken is dat het mesh dat voldoende nauwkeurig is voor dwarskrachtbelasting niet altijd voldoende nauwkeurig is voor wringbelasting en andersom. Dit houdt in dat er voor zowel dwarskrachtbelasting als wringbelasting een verschillend "optimaal mesh" is. Bij een combinatie van beide belastingen gaat dit mis. Er moet dus gezocht worden naar een mesh dat voldoende nauwkeurig is voor zowel dwarskrachtbelasting als wringbelasting en dus ongeacht het belastingtype (normaalkracht, momentbelasting, dwarskracht, wringing) kan worden toegepast op de ligger.

Indien de nauwkeurigheid van het 20-knoops element wordt uitgezet tegen het aantal vrijheidsgraden is er sprake van een "optimaal dal" (Afbeelding 3.2.3.1). Dit is uiteraard een waardevol dal voor de constructeur, omdat in dit dal én een hogere nauwkeurigheid bereikt wordt én met minder vrijheidsgraden. Aanbevolen wordt om verder onderzoek te doen naar dit optimale dal, opdat de constructeur in het vervolg de elementverdeling daarop kan aanpassen.

Als gevolg van (modellering van) de randvoorwaarden en de belasting is er sprake van een spanningsgradient in de verschillende richtingen van de balk. Hoe grover de elementen zijn die deze spanningsgradient moeten benaderen, hoe langer de invloed van deze lastinleiding over de balk is. Aanbevolen wordt om verder onderzoek te doen naar een manier om de invloed van deze spanningsgradient op het verdere spanningsverloop van de balk te minimaliseren.

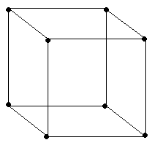
Voor het 20-knoops element geldt dat het de vervormingen beter benadert naarmate er mínder elementen in de lengte worden toegepast. Voor het benaderen van de spanning geldt in den beginne (gebied a in Afbeelding 3.2.3.1) dat deze beter benaderd wordt naarmate er méér elementen in de lengte worden toegepast. Omdat men in het algemeen met hetzelfde mesh zowel de vervormingen als de spanningen wil berekenen, wordt aangeraden om hier verder onderzoek naar te doen.

Bijlagen

I Bepalen aantal vrijheidsgraden

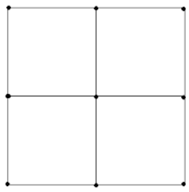
I.1 Solid185

I.1.1 Element



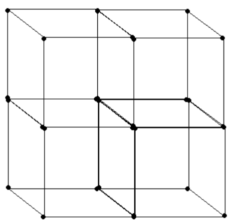
Het Solid185 element heeft 8 hoekknooppunten. Deze knooppunten kunnen zowel in x,y en z richting bewegen. In totaal zijn er dus 8 x 3 = 24 vrijheidsgraden (Degrees Of Freedom) in het element.

I.1.2 2D



Aantal knooppunten in de hoogte is EY+1. Aantal knooppunten in de breedte is EZ+1. Totale aantal knooppunten is (EY+1)*(EZ+1). Totaal aantal vrijheidsgraden in de doorsnede is (EY+1)*(EZ+1)*3.

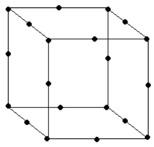
I.1.2 3D



Aantal vrijheidsgraden per doorsnede is (EY+1)*(EZ+1)*3. In totaal zijn er (EX+1) doorsnedes.
Totale aantal vrijheidsgraden in de balk is dus (EY+1)*(EZ+1)*(EX+1)*3.

I.1 Solid186

I.1.1 Element

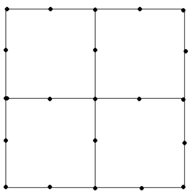


Het Solid186 element heeft 20 knooppunten. Deze knooppunten kunnen zowel in x,y en z richting bewegen. In totaal zijn er dus 20*3=60 vrijheidsgraden in het element.

I.1.2 2D

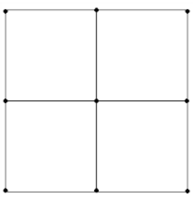
Er is bij het Solid186 element sprake van twee verschillende doorsneden. Het gemiddelde aantal vrijheidsgraden in de doorsnede is het gemiddelde van doorsnede 1 en doorsnede 2.

Doorsnede 1



Het aantal hoekknooppunten is (EY+1)*(EZ+1). Het aantal midsidenodes is EY*(EZ+1)+(EY+1)*EZ.
In totaal zijn er dus ((EY+1)*(EZ+1)+ EY*(EZ+1)+(EY+1)*EZ)*3 = (3EYEZ+2EY+2EZ+1)*3 vrijheidsgraden doorsnede 1.

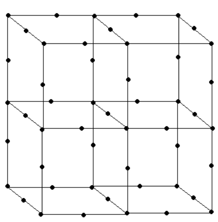
Doorsnede 2



Alle knooppunten in deze doorsnede zijn midsidenodes. In totaal zijn er (EY+1)*(EZ+1) midsidenodes.
Het totaal aantal vrijheidsgraden in doorsnede 2 is dus (EY+1)*(EZ+1)*3 = (EYEZ+EY+EZ+1)*3.

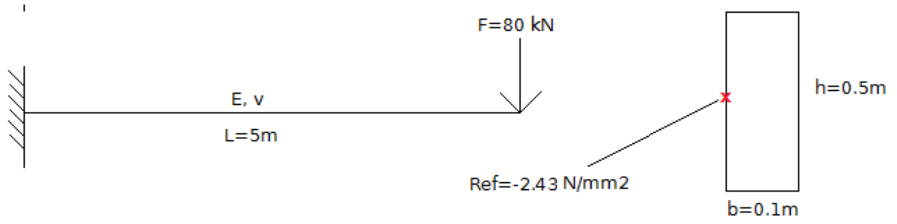
Het gemiddelde aantal vrijheidsgraden in de doorsnede is dus:
(4EYEZ+3EY+3EZ+2)*3/2

I.1.2 3D



In totaal is er (EX+1) keer doorsnede 1 en EX keer doorsnede 2 in de totale balk.
Totale aantal vrijheidsgraden in de balk is dus:
(EX+1)* (3EYEZ+2EY+2EZ+1)*3+EX*(EYEZ+EY+EZ+1)*3.

II Solid186: Optimale elementcombinaties in de doorsnede voor h/b=5



II.1 Ordenen resultaten (parallel aan §2.2.2)

II.1.1 Procentuele afwijking t.o.v Solid186 10 x x10 numerieke referentiewaarde voor h/b=5, gerangschikt van hoogste fout naar laagste fout (afgeleid van tabel 2.2.1.1 uit het hoofdrapport).

EY	EZ	%	DOF's
2	2	15.7	45
3	2	4.4	62
3	3	4.3	84
4	4	3.4	135
4	3	3.4	107
4	2	3.3	78
5	2	2.1	95
5	3	2.0	129
5	4	2.0	164
5	5	2.0	198
7	2	1.5	128
7	3	1.4	174
7	4	1.4	221
7	5	1.3	267
7	6	1.3	314

EY	EZ	%	DOF's
7	7	1.3	360
9	2	1.2	161
6	6	1.2	273
6	5	1.2	233
6	4	1.1	192
9	3	1.1	219
6	3	1.1	152
9	4	1.1	278
9	5	1.1	336
9	6	1.1	395
9	7	1.1	453
9	8	1.1	512
9	9	1.1	570
6	2	1.0	111
8	8	0.4	459

EY	EZ	%	DOF's
8	7	0.4	407
8	6	0.4	354
8	5	0.4	302
8	4	0.3	249
8	3	0.3	197
8	2	0.2	144
10	2	0.1	177
10	3	0.1	242
10	4	0.0	306
10	5	0.0	371
10	6	0.0	435
10	7	0.0	500
10	8	0.0	564
10	9	0.0	629
10	10	0.0	693

II.2 Wegstrepen triviale oplossingen (parallel aan §2.2.3)

II.2.1 Optimale elementcombinaties in de doorsnede bij h/b=5, doorgerekend met Solid186 elementen t.o.v referentiewaarde.

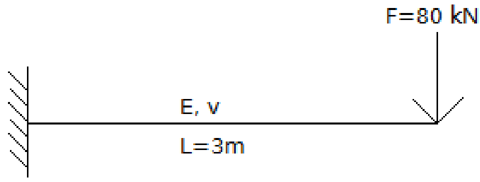
EY	EZ	%	DOF's
2	2	15.7	45
3	2	4.4	62
4	2	3.3	78
5	2	2.1	95
6	2	1.0	111
8	2	0.2	144
10	2	0.1	177
10	4	0.0	306

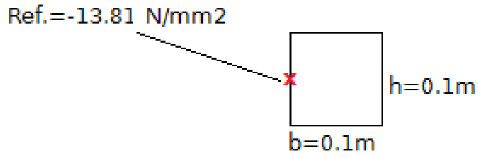
II.3 Selectie (parallel aan §2.2.4)

Nauwkeurigheidstabel voor constructeurs voor h/b=5, doorgerekend met Solid186 elementen

h/b=5	EY	EZ	DOF's
10%	3	2	62
3%	5	2	95
1%	8	2	144

III Solid185: Optimale elementcombinaties in de doorsnede voor h/b=1





III.1 Nauwkeurigheidstabel (parallel aan §2.2.1)

III.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 1mm.

Le=1	EZ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 1	42.1									
2	35.4	30.6								
3	32.6	26.1	24.4							
4	18.4	10.0	8.2	7.3						
5	20.0	11.8	9.8	9.0	8.6					
6	15.5	6.9	4.9	4.1	3.7	3.5				
7	16.7	8.1	6.1	5.3	4.9	4.7	4.6			
8	14.6	5.8	3.7	3.0	2.6	2.4	2.3	2.2		
9	15.4	6.6	4.6	3.8	3.4	3.2	3.1	3.0	3.0	
10	14.1	5.3	3.2	2.4	2.1	1.9	1.7	1.7	1.6	1.6

III.2 Ordenen resultaten (parallel aan §2.2.2)

III.2.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 1mm, gerangschikt van hoogste fout naar laagste fout.

EY	EZ	%	DOF's
1	1	42.1	12
2	1	35.4	18
3	1	32.6	24
2	2	30.6	27
3	2	26.1	36
3	3	24.4	48
5	1	20.0	36
4	1	18.4	30
7	1	16.7	48
6	1	15.5	42
9	1	15.4	60
8	1	14.6	54
10	1	14.1	66
5	2	11.8	54

EY	EZ	%	DOF's
4	2	10.0	45
5	3	9.8	72
5	4	9.0	90
5	5	8.6	108
4	3	8.2	60
7	2	8.1	72
4	4	7.3	75
6	2	6.9	63
9	2	6.6	90
7	3	6.1	96
8	2	5.8	81
7	4	5.3	120
10	2	5.3	99
7	5	4.9	144

EY	EZ	%	DOF's
6	3	4.9	84
7	6	4.7	168
7	7	4.6	192
9	3	4.6	120
6	4	4.1	105
9	4	3.8	150
8	3	3.7	108
6	5	3.7	126
6	6	3.5	147
9	5	3.4	180
10	3	3.2	132
9	6	3.2	210
9	7	3.1	240
9	8	3.0	270

EY	EZ	%	DOF's
9	9	3.0	300
8	4	3.0	135
8	5	2.6	162
10	4	2.4	165
8	6	2.4	189
8	7	2.3	216
8	8	2.2	243
10	5	2.1	198
10	6	1.9	231
10	7	1.7	264
10	8	1.7	297
10	9	1.6	330
10	10	1.6	363

III.3 Wegstrepen triviale oplossingen (parallel aan §2.2.3)

III.3.1) Optimale elementcombinaties in de doorsnede bij h/b=1 voor Solid185 elementen met elementlengte 1mm

EY	EZ	%	DOF's
1	1	42.1	12
2	1	35.4	18
3	1	32.6	24
2	2	30.6	27
4	1	18.4	30
6	1	15.5	42
4	2	10.0	45
4	3	8.2	60
6	2	6.9	63
8	2	5.8	81
6	3	4.9	84

EY	EZ	%	DOF's
6	4	4.1	105
8	3	3.7	108
10	3	3.2	132
8	4	3.0	135
8	5	2.6	162
10	4	2.4	165
10	5	2.1	198
10	6	1.9	231
10	7	1.7	264
10	9	1.6	330

III.3.2) Optimale elementcombinaties in de doorsnede bij h/b=1 voor Solid185 elementen

EY	EZ
1	1
2	1
3	1
2	2
4	1
6	1
4	2
4	3
6	2
8	2
6	3

EY	EZ
6	4
8	3
10	3
8	4
8	5
10	4
10	5
10	6
10	7
10	9

IV Richardson Foutschatting

M=Referentiewaarde
N(h)=Numerieke benadering bij stapgrootte h

De fout in de numerieke benadering neemt af naarmate de stapgrootte h afneemt. Stel de formule N(h) is bedoeld om de referentiewaarde M te benadering. De fout zal in de vorm zijn van:

$$M - N(h) = Kh^{\alpha}$$

Of, indien er gekeken wordt naar de procentuele fout:

$$\frac{100(M-N(h))}{M} = \varepsilon(h) = \frac{100Kh^{\alpha}}{M} \qquad (1)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{100Kh^{\alpha}}{M} \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon(2h) = \frac{100K(2h)^{\alpha}}{M} \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon(4h) = \frac{100K(4h)^{\alpha}}{M} \qquad (2.3)$$

Door de vergelijkingen van elkaar af te trekken houden we 2 onbekenden over:

$$\varepsilon(4h) - \varepsilon(2h) = \frac{100K(4h)^{\alpha}(1-0.5^{\alpha})}{M} \qquad (3.1)$$

$$\varepsilon(2h) - \varepsilon(h) = \frac{100K(2h)^{\alpha}(1-0.5^{\alpha})}{M} \qquad (3.2)$$

Het delen van de uitdrukking geeft:

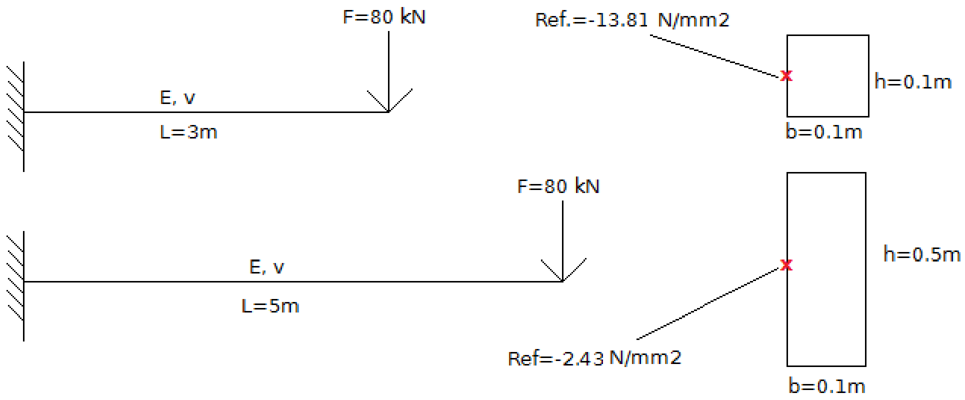
$$\frac{\varepsilon(4h) - \varepsilon(2h)}{\varepsilon(2h) - \varepsilon(h)} = 2^{\alpha} \qquad (4)$$

Hieruit kan α bepaald worden. Invullen van α in formule 3 geeft een benadering voor K.

$$K = \frac{(\varepsilon(2h) - \varepsilon(h))M}{100(2h)^{\alpha}(1-0.5^{\alpha})} \qquad (5)$$

Beide constanten invullen in formule 1 geeft een schatting voor de procentuele fout.

V Bepalen α en K



V.1 Solid185

Solid185: Invloed van de hoogte h/b=1
Om de orde van de fout *in de hoogte* bij stapgrootte h te onderzoeken zijn dus de procentuele afwijkingen nodig bij EY=8 elementen in de hoogte (h), EY=4 elementen in de hoogte (2h) en EY=2 elementen in de hoogte (4h). α en K worden vervolgens bepaald met de formules uit de vorige bijlage.

V.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 10mm.Bepaling α en K voor de hoogteinvloed.

Le=10	EY					
EZ	2	4	8	α	α	K
1	36.2	19.1	15.3	2.16	2	-1.95E+03
2	31.3	10.8	6.6	2.28	2	-3.35E+03
3	30.0	9.0	4.6	2.25	2	-3.10E+03
4	29.4	8.2	3.8	2.28	2	-3.44E+03
5	29.2	7.8	3.4	2.29	2	-3.59E+03
6	29.0	7.6	3.2	2.30	2	-3.67E+03
7	28.9	7.4	3.1	2.31	2	-3.72E+03
8	28.9	7.4	3.0	2.31	2	-3.76E+03
9	28.8	7.3	3.0	2.31	2	-3.78E+03
10	28.8	7.3	2.9	2.31	2	-3.79E+03

Solid185: Invloed van de breedte h/b=1

Om de orde van de fout *in de breedte* bij stapgrootte h te onderzoeken zijn de procentuele afwijkingen nodig bij EZ=8 elementen in de hoogte (h), EZ=4 elementen in de hoogte (2h) en EZ=2 elementen in de hoogte (4h). α en K worden vervolgens bepaald met de formules uit de vorige bijlage.

V.1.2) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 10mm.Bepaling α en K voor de invloed van de breedte.

Le=10	EZ					
EY	2	4	8	α	α	
1	71.3	85.7	90.5	1.59	2	3.54E+02
2	31.3	29.4	28.9	1.72	2	-6.50E+01
3	26.8	24.4	23.7	1.62	2	-6.25E+01
4	10.8	8.2	7.4	1.72	2	-9.16E+01
5	12.5	9.8	9.0	1.79	2	-1.13E+02
6	7.7	4.9	4.2	1.87	2	-1.40E+02
7	8.9	6.1	5.3	1.87	2	-1.43E+02
8	6.6	3.8	3.0	1.88	2	-1.50E+02
9	7.4	4.6	3.8	1.88	2	-1.52E+02
10	6.1	3.2	2.5	1.90	2	-1.57E+02

Solid185: Invloed van de hoogte h/b=5

V.1.3) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=5, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 10mm.Bepaling α en K voor de invloed van de hoogte.

Le=10	EY					
EZ	2	4	8	α	α	K
1	27.0	7.5	2.9	2.09	2	-1.13E+01
2	26.7	6.9	2.4	2.14	2	-1.21E+01
3	26.7	6.8	2.3	2.15	2	-1.23E+01
4	26.6	6.7	2.3	2.15	2	-1.23E+01
5	26.6	6.7	2.3	2.15	2	-1.24E+01
6	26.6	6.7	2.2	2.15	2	-1.24E+01
7	26.6	6.7	2.2	2.15	2	-1.24E+01
8	26.6	6.7	2.2	2.15	2	-1.24E+01
9	26.6	6.7	2.2	2.15	2	-1.24E+01
10	26.6	6.7	2.2	2.15	2	-1.24E+01

Solid185: Invloed van de breedte h/b=5

V.1.4) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=5, doorgerekend met Solid185 elementen met elementlengte 10mm.Bepaling α en K voor de invloed van de breedte.

Le=10	EZ					
EY	2	4	8	α	α	K
1	36.2	36.7	36.8	1.98	2	6.27E+00
2	26.7	26.6	26.6	1.99	2	-9.62E-01
3	23.1	23.0	23.0	2.00	2	-1.40E+00
4	6.9	6.7	6.7	2.01	2	-1.79E+00
5	8.7	8.6	8.6	2.02	2	-1.68E+00
6	3.6	3.5	3.5	2.07	2	-1.92E+00
7	4.9	4.8	4.7	2.01	2	-1.60E+00
8	2.4	2.3	2.2	1.92	2	-1.20E+00
9	3.3	3.2	3.1	1.97	2	-1.39E+00
10	1.8	1.7	1.7	1.99	2	-1.50E+00

V.2 Solid186

Solid186: Invloed van de hoogte h/b=1

V.2.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid186 elementen met elementlengte 40mm.Bepaling α en K voor de invloed van de hoogte.

Le=40	EY					
EZ	2	4	8	α	α	K
2	-12.8	-0.1	2.8	2.13	2	1.36E+03
3	-14.8	-1.9	1.1	2.14	2	1.41E+03
4	-15.6	-2.5	0.4	2.15	2	1.44E+03
5	-15.9	-2.9	0.1	2.14	2	1.42E+03
6	-16.0	-3.0	-0.1	2.13	2	1.37E+03
7	-16.1	-3.2	-0.2	2.12	2	1.33E+03
8	-16.2	-3.2	-0.3	2.11	2	1.30E+03
9	-16.2	-3.3	-0.3	2.11	2	1.28E+03
10	-16.2	-3.3	-0.3	2.10	2	1.26E+03

Solid186: Invloed van de breedte h/b=1

V.2.2) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, doorgerekend met Solid186 elementen met elementlengte 40mm.Bepaling α en K voor de invloed van de breedte.

Le=40	EZ					
EY	2	4	8	α	α	K
2	-12.8	-15.6	-16.2	2.17	2	-3.21E+02
3	6.5	3.9	3.1	1.73	2	-9.01E+01
4	-0.1	-2.5	-3.2	1.74	2	-8.57E+01
5	4.9	2.5	1.8	1.76	2	-9.01E+01
6	2.0	-0.3	-1.0	1.81	2	-1.04E+02
7	4.3	2.0	1.3	1.79	2	-9.71E+01
8	2.8	0.4	-0.3	1.80	2	-9.99E+01
9	4.1	1.7	1.1	1.79	2	-9.60E+01
10	3.1	0.8	0.1	1.79	2	-9.77E+01

Solid186: Invloed van de hoogte h/b=5

V.2.3) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=5, doorgerekend met Solid186 elementen met elementlengte 40mm.Bepaling α en K voor de invloed van de hoogte.

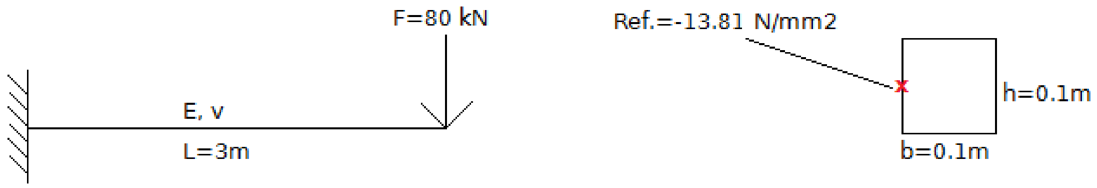
Le=40	EY					
EZ	2	4	8	α	α	K
2	-15.7	-3.3	-0.2	1.99	2	6.35E+00
3	-15.8	-3.4	-0.3	1.99	2	6.32E+00
4	-15.8	-3.4	-0.3	1.99	2	6.33E+00
5	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.33E+00
6	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.33E+00
7	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.34E+00
8	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.34E+00
9	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.34E+00
10	-15.8	-3.5	-0.4	1.99	2	6.34E+00

Solid186: Invloed van de breedte h/b=5

V.2.4) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v.Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=5, doorgerekend met Solid186 elementen met elementlengte 40mm.Bepaling α en K voor de invloed van de breedte.

Le=40	EZ					
EY	2	4	8	α	α	K
2	-15.7	-15.8	-15.8	2.03	2	-1.64E+00
3	4.4	4.3	4.3	2.15	2	-2.29E+00
4	-3.3	-3.4	-3.5	2.18	2	-2.54E+00
5	2.1	2.0	2.0	2.07	2	-1.84E+00
6	-1.0	-1.1	-1.2	1.95	2	-1.29E+00
7	1.5	1.4	1.3	1.95	2	-1.28E+00
8	-0.2	-0.3	-0.4	1.97	2	-1.35E+00
9	1.2	1.1	1.1	1.98	2	-1.39E+00
10	0.1	0.0	0.0	1.99	2	-1.43E+00

VI Invloed van de fout door hoogte en breedte discretisatie



VI.1 Invloed van de fout door hoogte discretisatie

Om de invloed van de elementhoogte te onderzoeken worden de resultaten uit de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5 uit het hoofdverslag opnieuw geordend, zodat het aantal elementen in de hoogte de variabele is.

Tabel VI.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, voor Solid185 elementen. Herschikking van de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5 in het hoofdverslag.

Le	EZ	EY=10	EY=9	EY=8	EY=7	EY=6	EY=5	EY=4	EY=3	EY=2	EY=1
1	1	14.1	15.4	14.6	16.7	15.5	20.0	18.4	32.6	35.4	42.1
5	1	14.3	15.5	14.7	16.9	15.7	20.2	18.6	32.8	35.6	42.5
10	1	14.9	16.1	15.3	17.5	16.3	20.8	19.1	33.3	36.2	43.6
20	1	17.1	18.3	17.6	19.7	18.5	23.0	21.4	35.5	38.4	47.9
40	1	25.3	26.5	25.8	27.8	26.7	31.0	29.5	43.2	46.4	62.9
1	2	5.3	6.6	5.8	8.1	6.9	11.8	10.0	26.1	30.6	
5	2	5.5	6.8	6.0	8.3	7.1	11.9	10.2	26.2	30.8	
10	2	6.1	7.4	6.6	8.9	7.7	12.5	10.8	26.8	31.3	
20	2	8.4	9.8	8.9	11.2	10.0	14.9	13.2	29.0	33.6	
40	2	17.1	18.4	17.6	19.8	18.7	23.3	21.8	37.1	41.9	
1	3	3.2	4.6	3.7	6.1	4.9	9.8	8.2	24.4		
5	3	3.4	4.8	3.9	6.3	5.1	10.0	8.4	24.6		
10	3	4.0	5.4	4.6	6.9	5.7	10.6	9.0	25.2		
20	3	6.4	7.8	7.0	9.3	8.1	13.0	11.4	27.4		
40	3	15.2	16.5	15.7	18.0	16.9	21.6	20.1	35.6		
1	4	2.4	3.8	3.0	5.3	4.1	9.0	7.3			
5	4	2.6	4.0	3.2	5.5	4.3	9.2	7.5			
10	4	3.2	4.6	3.8	6.1	4.9	9.8	8.2			
20	4	5.7	7.0	6.2	8.5	7.3	12.2	10.6			
40	4	14.5	15.8	15.0	17.2	16.1	20.8	19.3			
1	5	2.1	3.4	2.6	4.9	3.7	8.6				
5	5	2.3	3.6	2.8	5.1	3.9	8.8				
10	5	2.9	4.2	3.4	5.7	4.6	9.4				
20	5	5.3	6.6	5.8	8.1	7.0	11.8				
40	5	14.2	15.4	14.7	16.9	15.8	20.5				
1	6	1.9	3.2	2.4	4.7	3.5					
5	6	2.1	3.6	2.6	4.9	3.7					
10	6	2.7	4.0	3.2	5.5	4.4					
20	6	5.1	6.4	5.6	7.9	6.8					
40	6	14.0	15.3	14.5	16.7	15.6					
1	7	1.7	3.1	2.3	4.6						
5	7	1.9	3.3	2.5	4.8						
10	7	2.6	3.9	3.1	5.4						
20	7	5.0	6.3	5.5	7.8						
40	7	13.9	15.1	14.4	16.6						
1	8	1.7	3.0	2.2							
5	8	1.9	3.2	2.4							
10	8	2.5	3.8	3.0							
20	8	4.9	6.2	5.4							
40	8	13.8	15.1	14.3							
1	9	1.6	3.0								
5	9	1.8	3.2								
10	9	2.4	3.8								
20	9	4.9	6.2								
40	9	13.7	15.0								
1	10	1.6									
5	10	1.8									
10	10	2.4									
20	10	4.8									
40	10	13.7									

Vervolgens wordt er gekeken naar het verschil in nauwkeurigheid tussen een bepaalde EZ*Le*EY=x combinatie met de basiswaarde EZ*Le*EY=10.

Tabel VI.1.2) Verschil procentuele afwijking van de grootste schuifspanning voor EY=x aantal elementen in de hoogte en EY=10 elementen in de hoogte voor verschillende EZ*Le combinaties.

L	EZ	EY=9-EY=10	EY=8-EY=10	EY=7-EY=10	EY=6-EY=10	EY=5-EY=10	EY=4-EY=10	EY=3-EY=10	EY=2-EY=10	EY=1-EY=10
1	1	1.3	0.5	2.6	1.4	5.9	4.3	18.5	21.3	28.0
5	1	1.2	0.4	2.6	1.4	5.9	4.3	18.5	21.3	28.2
10	1	1.2	0.4	2.6	1.4	5.9	4.2	18.4	21.3	28.7
20	1	1.2	0.5	2.6	1.4	5.9	4.3	18.4	21.3	30.8
39.5	1	1.2	0.5	2.5	1.4	5.7	4.2	17.9	21.1	37.6
1	2	1.3	0.5	2.8	1.6	6.5	4.7	20.8	25.3	
5	2	1.3	0.5	2.8	1.6	6.4	4.7	20.7	25.3	
10	2	1.3	0.5	2.8	1.6	6.4	4.7	20.7	25.2	
20	2	1.4	0.5	2.8	1.6	6.5	4.8	20.6	25.2	
39.5	2	1.3	0.5	2.7	1.6	6.2	4.7	20.0	24.8	
1	3	1.4	0.5	2.9	1.7	6.6	5.0	21.2		
5	3	1.4	0.5	2.9	1.7	6.6	5.0	21.2		
10	3	1.4	0.6	2.9	1.7	6.6	5.0	21.2		
20	3	1.4	0.6	2.9	1.7	6.6	5.0	21.0		
39.5	3	1.3	0.5	2.8	1.7	6.4	4.9	20.4		
1	4	1.4	0.6	2.9	1.7	6.6	4.9			
5	4	1.4	0.6	2.9	1.7	6.6	4.9			
10	4	1.4	0.6	2.9	1.7	6.6	5.0			
20	4	1.3	0.5	2.8	1.6	6.5	4.9			
39.5	4	1.3	0.5	2.7	1.6	6.3	4.8			
1	5	1.3	0.5	2.8	1.6	6.5				
5	5	1.3	0.5	2.8	1.6	6.5				
10	5	1.3	0.5	2.8	1.7	6.5				
20	5	1.3	0.5	2.8	1.7	6.5				
39.5	5	1.2	0.5	2.7	1.6	6.3				
1	6	1.3	0.5	2.8	1.6					
5	6	1.5	0.5	2.8	1.6					
10	6	1.3	0.5	2.8	1.7					
20	6	1.3	0.5	2.8	1.7					
39.5	6	1.3	0.5	2.7	1.6					
1	7	1.4	0.6	2.9						
5	7	1.4	0.6	2.9						
10	7	1.3	0.5	2.8						
20	7	1.3	0.5	2.8						
39.5	7	1.2	0.5	2.7						
1	8	1.3	0.5							
5	8	1.3	0.5							
10	8	1.3	0.5							
20	8	1.3	0.5							
39.5	8	1.3	0.5							
1	9	1.4								
5	9	1.4								
10	9	1.4								
20	9	1.3								
39.5	9	1.3								
1	10									
5	10									
10	10									
20	10									
39.5	10									

Tabel VI.1.3) Gemiddelde verschil in % tussen procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EY=x aantal elementen in de hoogte en de basiswaarde EY=10 elementen in de hoogte voor alle EZ*Le combinaties.

EY							
9	8	7	6	5	4	3	2
1.3	0.5	2.8	1.7	6.5	4.9	20.7	25.1

VI.2 Invloed van de fout door breedte discretisatie

Om de invloed van de elementhoogte te onderzoeken worden de resultaten uit de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5 uit het hoofdverslag opnieuw geordend, zodat het aantal elementen in de breedte de variabele is.

Tabel VI.2.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, voor Solid185 elementen. Herschikking van de tabellen 4.2.1 t/m 4.2.5 in het hoofdverslag.

L	EY	EZ=10	EZ=9	EZ=8	EZ=7	EZ=6	EZ=5	EZ=4	EZ=3	EZ=2	EZ=1
1	1										42.1
5	1										42.5
10	1										43.6
20	1										47.9
40	1										62.9
1	2									30.6	35.4
5	2									30.8	35.6
10	2									31.3	36.2
20	2									33.6	38.4
40	2									41.9	46.4
1	3								24.4	26.1	32.6
5	3								24.6	26.2	32.8
10	3								25.2	26.8	33.3
20	3								27.4	29.0	35.5
40	3								35.6	37.1	43.2
1	4							7.3	8.2	10.0	18.4
5	4							7.5	8.4	10.2	18.6
10	4							8.2	9.0	10.8	19.1
20	4							10.6	11.4	13.2	21.4
40	4							19.3	20.1	21.8	29.5
1	5						8.6	9.0	9.8	11.8	20.0
5	5						8.8	9.2	10.0	11.9	20.2
10	5						9.4	9.8	10.6	12.5	20.8
20	5						11.8	12.2	13.0	14.9	23.0
40	5						20.5	20.8	21.6	23.3	31.0
1	6					3.5	3.7	4.1	4.9	6.9	15.5
5	6					3.7	3.9	4.3	5.1	7.1	15.7
10	6					4.4	4.6	4.9	5.7	7.7	16.3
20	6					6.8	7.0	7.3	8.1	10.0	18.5
40	6					15.6	15.8	16.1	16.9	18.7	26.7
1	7				4.6	4.7	4.9	5.3	6.1	8.1	16.7
5	7				4.8	4.9	5.1	5.5	6.3	8.3	16.9
10	7				5.4	5.5	5.7	6.1	6.9	8.9	17.5
20	7				7.8	7.9	8.1	8.5	9.3	11.2	19.7
40	7				16.6	16.7	16.9	17.2	18.0	19.8	27.8
1	8			2.2	2.3	2.4	2.6	3.0	3.7	5.8	14.6
5	8			2.4	2.5	2.6	2.8	3.2	3.9	6.0	14.7
10	8			3.0	3.1	3.2	3.4	3.8	4.6	6.6	15.3
20	8			5.4	5.5	5.6	5.8	6.2	7.0	8.9	17.6
40	8			14.3	14.4	14.5	14.7	15.0	15.7	17.6	25.8
1	9		3.0	3.0	3.1	3.2	3.4	3.8	4.6	6.6	15.4
5	9		3.2	3.2	3.3	3.6	3.6	4.0	4.8	6.8	15.5
10	9		3.8	3.8	3.9	4.0	4.2	4.6	5.4	7.4	16.1
20	9		6.2	6.2	6.3	6.4	6.6	7.0	7.8	9.8	18.3
40	9		15.0	15.1	15.1	15.3	15.4	15.8	16.5	18.4	26.5
1	10	1.6	1.6	1.7	1.7	1.9	2.1	2.4	3.2	5.3	14.1
5	10	1.8	1.8	1.9	1.9	2.1	2.3	2.6	3.4	5.5	14.3
10	10	2.4	2.4	2.5	2.6	2.7	2.9	3.2	4.0	6.1	14.9
20	10	4.8	4.9	4.9	5.0	5.1	5.3	5.7	6.4	8.4	17.1
40	10	13.7	13.7	13.8	13.9	14.0	14.2	14.5	15.2	17.1	25.3

Vervolgens wordt er gekeken naar het verschil in nauwkeurigheid tussen een bepaalde EY*Le*EZ=x combinatie met de basiswaarde EY*Le*EZ=10. Echter zijn de basiswaarden (met EZ=10) slechts doorgerekend voor de combinaties met EY=10.

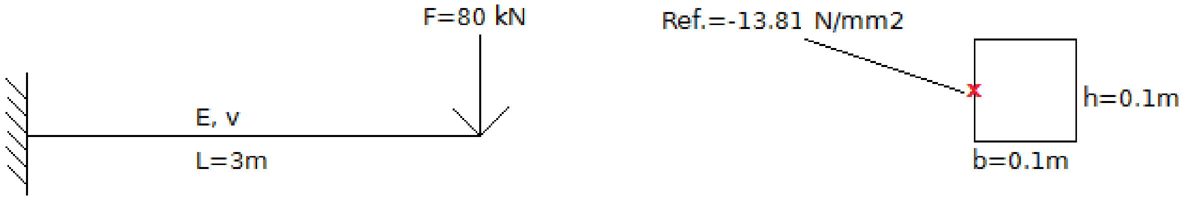
Tabel VI.2.2) Verschil procentuele afwijking van de grootste schuifspanning voor EZ=x aantal elementen in de breedte en EZ=10 elementen in de breedte voor verschillende EY*Le combinaties.

L	EY	EZ									
		10.0	9.0	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0
1	10	1.6	1.6	1.7	1.7	1.9	2.1	2.4	3.2	5.3	14.1
5	10	1.8	1.8	1.9	1.9	2.1	2.3	2.6	3.4	5.5	14.3
10	10	2.4	2.4	2.5	2.6	2.7	2.9	3.2	4.0	6.1	14.9
20	10	4.8	4.9	4.9	5.0	5.1	5.3	5.7	6.4	8.4	17.1
39.5	10	13.7	13.7	13.8	13.9	14.0	14.2	14.5	15.2	17.1	25.3

Tabel VI.1.3) Gemiddelde verschil in % tussen procentuele afwijking in de grootste schuifspanning voor EZ=x aantal elementen in de hoogte en de basiswaarde EZ=10 elementen in de hoogte voor alle EY*Le combinaties.

EZ							
9	8	7	6	5	4	3	2
0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.6	3.6

VII Solid186: Lagrange Interpolatie



VII.1 Lagrange Interpolatie (parallel aan §4.3.2)

Voor de combinaties EY*EZ met een oneven aantal elementen in de hoogte wordt de spanning halverwege de balk bepaald met formule 4.5 uit het hoofdverslag. Hiervoor worden de locaties van de knooppunten y, y0, y1 en y2 berekend volgens de formules 4.6 t/m 4.9. De spanningswaarde in respectievelijk de y0 (=f(y0)), y1 (=f(y1))en y2 (=f(y2))worden afgelezen. Dit alles is samengevat in onderstaande tabel.

Tabel VII.1.1) Locaties van en spanningen in de Lagrange Interpolatiepunten. S(y) is de berekende spanning halverwege de balk. % = de procentuele afwijking t.o.v de referentiewaarde

		(mm)				(N/mm2)				
EY	EZ	y	y0	y1	y2	f(y0)	f(y1)	f(y2)	S(y)	%
3	2	50	33	67	100	-12.91	-12.91	-1.13	-14.39	-4.2
3	3	50	33	67	100	-13.17	-13.17	-1.22	-14.66	-6.2
5	2	50	40	60	80	-13.14	-13.14	-9.11	-13.64	1.2
5	3	50	40	60	80	-13.37	-13.37	-9.33	-13.88	-0.5
5	4	50	40	60	80	-13.46	-13.46	-9.44	-13.97	-1.1
5	5	50	40	60	80	-13.51	-13.51	-9.49	-14.01	-1.4
7	2	50	43	57	71	-13.21	-13.21	-11.16	-13.47	2.5
7	3	50	43	57	71	-13.45	-13.45	-11.39	-13.71	0.8
7	4	50	43	57	71	-13.54	-13.54	-11.48	-13.80	0.1
7	5	50	43	57	71	-13.58	-13.58	-11.53	-13.84	-0.2
7	6	50	43	57	71	-13.61	-13.61	-11.55	-13.86	-0.4
7	7	50	43	57	71	-13.62	-13.62	-11.57	-13.88	-0.5
9	2	50	44	56	67	-13.25	-13.25	-12.01	-13.40	3.0
9	3	50	44	56	67	-13.48	-13.48	-12.24	-13.64	1.3
9	4	50	44	56	67	-13.57	-13.57	-12.33	-13.73	0.6
9	5	50	44	56	67	-13.61	-13.61	-12.37	-13.77	0.3
9	6	50	44	56	67	-13.64	-13.64	-12.40	-13.79	0.1
9	7	50	44	56	67	-13.65	-13.65	-12.41	-13.81	0.0
9	8	50	44	56	67	-13.66	-13.66	-12.42	-13.82	-0.1
9	9	50	44	56	67	-13.67	-13.67	-12.43	-13.83	-0.1

VII.2 Solid186: Optimale elementcombinaties in de doorsnede voor h/b=1 na Lagrange Interpolatie

VII.2.1 Nauwkeurigheidstabel (parallel aan §2.2.1)

Tabel VII.2.1.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v Solid186 10 x 10 numerieke referentiewaarde voor h/b=1, na toepassing van Lagrange Interpolatie

	EZ								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EY 2	-12.8								
3	-4.2	-6.2							
4	-0.1	-1.9	-2.5						
5	1.2	-0.5	-1.1	-1.4					
6	2.0	0.3	-0.3	-0.6	-0.8				
7	2.5	0.8	0.1	-0.2	-0.4	-0.5			
8	2.8	1.1	0.4	0.1	-0.1	-0.2	-0.3		
9	3.0	1.3	0.6	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.1	
10	3.1	1.4	0.8	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0

VII.2.2 Ordenen resultaten (parallel aan §2.2.2)

Tabel VII.2.2.1) Procentuele afwijking in de grootste schuifspanning t.o.v referentiewaarde voor h/b=1, na toepassing van lagrange interpolatie, gerangschikt van hoogste fout naar laagste fout

EY	EZ	%	DOF's
2	2	12.8	45
3	3	6.2	84
3	2	4.2	62
10	2	3.1	177
9	2	3.0	161
8	2	2.8	144
4	4	2.5	135
7	2	2.5	128
6	2	2.0	111
4	3	1.9	107
5	5	1.4	198
10	3	1.4	242
9	3	1.3	219
5	2	1.2	95
5	4	1.1	164

EY	EZ	%	DOF's
8	3	1.1	197
6	6	0.8	273
10	4	0.8	306
7	3	0.8	174
6	5	0.6	233
9	4	0.6	278
5	3	0.5	129
7	7	0.5	360
10	5	0.4	371
8	4	0.4	249
7	6	0.4	314
6	4	0.3	192
6	3	0.3	152
9	5	0.3	336
10	6	0.3	435

EY	EZ	%	DOF's
8	8	0.3	459
7	5	0.2	267
8	7	0.2	407
10	7	0.2	500
4	2	0.1	78
9	6	0.1	395
9	9	0.1	570
7	4	0.1	221
8	5	0.1	302
10	8	0.1	564
8	6	0.1	354
9	8	0.1	512
10	9	0.0	629
9	7	0.0	453
10	10	0.0	693

VII.2.3 Wegstrepen triviale oplossingen (parallel aan §2.2.3)

Tabel VII.2.3.1) Optimale elementcombinaties in de doorsnede bij h/b=1 voor Solid186, na toepassing van Lagrange interpolatie

EY	EZ	%	DOF's
2	2	12.8	45
3	2	4.2	62
5	2	1.2	95
5	3	0.5	129
6	3	0.3	152
4	2	0.1	78
7	4	0.1	221
8	6	0.1	354
9	7	0.0	453

VII.2.4 Selectie (parallel aan §2.2.4)

Tabel VII.2.4.1) Nauwkeurigheidstabel voor constructuers bij h/b=1, voor Solid186, na toepassing van Lagrange Interpolatie

	EY	EZ	DOF's
10%	3	2	62
3%	5	2	95
1%	5	3	129

Bronvermelding

[1] Steenstra, W (2012). Spanningen berekenen met volume elementen. Delft: Technische Universiteit, Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen.

[2] De Vree, J.H.P. (2002). Eindige Elementen Methode: Syllabus over het gebruik in de lineair elastische vaste stof mechanica. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Werktuigbouwkunde.

[3] Ansys Inc. (2005) “Ansys Element Reference“

[4] Vuik,C & Van Beek, P, & Vermolen, F & Kann, J (2006). Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen. Delft: VSSD.

[5] Blaauwendraad, J (1988). Elasticiteitstheorie Deel II. Delft: Technische Universiteit Delft, Faculteit Civiele Techniek.

[6] Hendriks, M.A.N (2012). Colleges van het vak Computational Modelling of Structures.

[7] Hartsuijker, C (2001). Toegepaste Mechanica Deel 2. Delft: Technische Universiteit Delft.