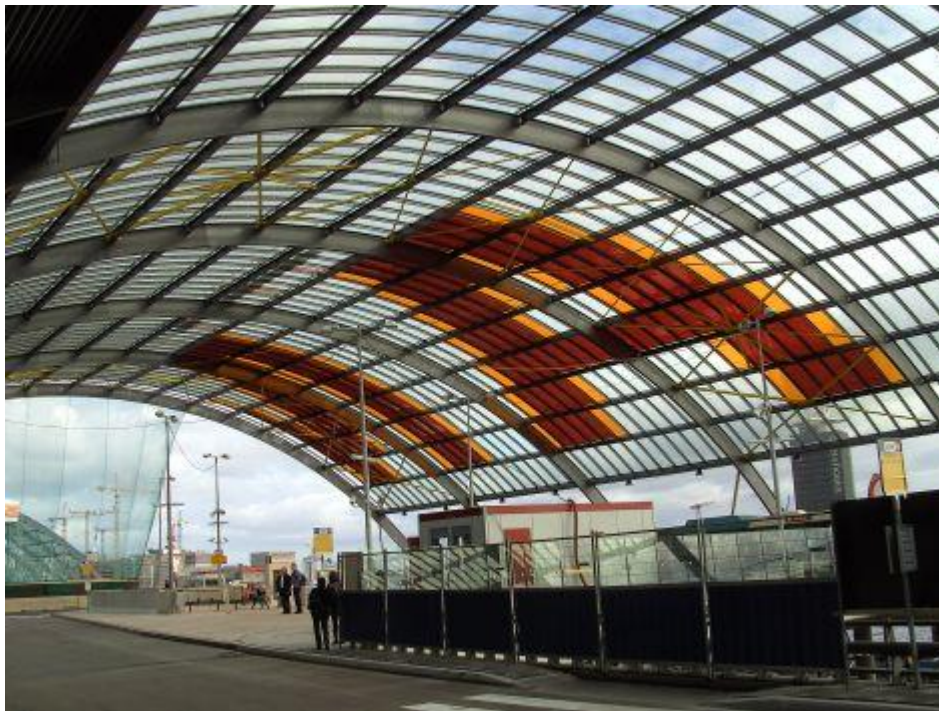


EEN ONTWERPFORMULE VOOR DE LAAGSTE EIGENFREQUENTIE VAN GEKROMDE PANELEN



Overkapping IJzijde Stationseiland, Amsterdam [1]

Naam	L. Metselaar
Studentnummer	4078187
Datum	05-06-2013
Universiteit	Technische Universiteit Delft
Faculteit	Civiele Techniek en Geowetenschappen
Afdeling	Structural Engineering
Eerste begeleider	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider	Ir. R. Abspoel

VOORWOORD

In dit bachelor-eindwerk voor de bacheloropleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft wordt onderzoek gedaan naar de eigenfrequenties van gekromde panelen. Er is een ontwerpformule opgesteld voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen met verschillende afmetingen, materiaaleigenschappen, kromtestralen in twee richtingen en opleggingen.

In het rapport wordt in hoofdstuk 2 en 3 eerst aandacht besteed aan de analytische beschrijving van de beweging van gekromde panelen. In hoofdstuk 4 en 5 worden de resultaten van de modellering met Ansys gepresenteerd en toegelicht, waarna in hoofdstuk 6 en 7 de ontwerpformule wordt opgesteld en gecontroleerd. Als laatste volgt dan nog een conclusie en discussie, met aanbevelingen voor eventueel vervolgonderzoek.

Hierbij wil ik mijn begeleiders dr. ir. Hoogenboom en ir. Abspoel graag bedanken voor hun hulp en advies.

Delft, juni 2013
Luuk Metselaar

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord	2
Samenvatting.....	5
Symbolenlijst	6
1. Probleemdefinitie	7
1.1 Doelstelling	8
1.2 Methode	8
2. Probleemanalyse	9
3. Limietgevallen.....	16
3.1 Vlak Paneel	16
3.2 Cilinder.....	19
3.3 Tweezijdig gekromd paneel.....	20
4. Schaalconstructie en modelvorming	26
4.1 Introductie assenstelsel en parameters	26
4.2 Keuze elementgrootte	26
5. Invloeden van parameters.....	28
5.1 Dikte.....	28
5.2 Afmetingen	32
5.3 Materiaaleigenschappen	36
5.3.1 Elasticiteitsmodulus	36
5.3.2 Dichtheid	38
5.3.3 Poisson-ratio	40
5.4 Verhouding kromtestralen	43
5.5 Kleinste kromtestraal.....	48
6. Opstellen ontwerpformule	49
7. Controle ontwerpformule en vaststellen nauwkeurigheid	54

7.1	Dikte.....	55
7.2	Afmetingen	56
7.3	Materiaaleigenschappen	57
7.3.1	Elasticiteitsmodulus	57
7.3.2	Dichtheid	58
7.3.3	Poisson-ratio	58
7.4	Verhouding kromtestralen	59
7.5	Kleinste kromtestraal.....	61
8.	Discussie en conclusie.....	62
	Referenties	66
	Wetenschappelijke Referenties	66
	Overige Referenties	66
	Bijlage 1: Ansys-script.....	67
	Bijlage 2: Maple-code cilinder	69
	Bijlage 3: Maple-code tweezijdig gekromd paneel	70

SAMENVATTING

Vanwege de gunstige mechanische eigenschappen wordt veel gebruik gemaakt van in twee richtingen gekromde panelen. Omdat de differentiaalvergelijkingen die de mechanica van deze panelen beschrijven gestoeld zijn op aannames en zeer lastig analytisch op te lossen zijn, is er behoefte aan een ontwerpformule waarmee snel en redelijk accuraat de laagste eigenfrequentie van zulke gekromde panelen bepaald kan worden. Hierbij is gezocht naar een formule waarvoor geen kennis van de trillingsvorm nodig is, deze trillingsvorm kan immers alleen zeker bepaald worden door het paneel in een elementenmodel in te voeren. Door een grote hoeveelheid modelberekeningen te doen met een eindige elementen model (Ansys) zijn de variabelen geïdentificeerd die invloed hebben op de eigenfrequentie van een gekromd paneel. Dit zijn de kleinste kromtestraal, de verhouding tussen de kromtestralen, de dikte, de afmetingen en de materiaaleigenschappen. Voor een vierkant, in twee richtingen gekromd paneel is uiteindelijk de volgende ontwerpformule opgesteld:

$$f_n = \max(f_{vlak}, f_{cilinder}, f_{gekromd})$$

$$f_{vlak} = \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}}$$

$$f_{cilinder} = \begin{cases} 0,0815 r_y^{-0,52} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,429h + 2,612)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } \frac{r_y}{h} > 230 \\ 0,0815 r_y^{-0,52} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,201h + 4,441)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } \frac{r_y}{h} < 230 \end{cases}$$

$$f_{gekromd}$$

$$= \begin{cases} 3,7226 r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,142h + 4,153)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 3,7226 r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,111h + 4,223)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} < 230 \\ 1,5348 r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,429h + 2,612)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 1,5348 r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,201h + 4,441)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} < 230 \end{cases}$$

Deze formule is enkel geldig voor afmetingen van 600 tot 2000 mm in het vierkant, daarbuiten wordt de vereiste accuraatheid van 5% niet gehaald. Deze beperking kan verklaard worden doordat beneden de 600 mm de trillingsvorm blijft bestaan uit 2 knopen in beide richtingen, en boven de 2000 mm neemt het aantal knopen juist relatief snel toe. Om te zorgen dat de ontwerpformule voor meer lengteschalen geldig is, is het dus raadzaam om te onderzoeken hoe de trillingsvorm van een gekromd paneel eruit ziet bij een bepaalde geometrie. Vanuit die basis kan bovenstaande formule dan worden verfijnd.

SYMBOLENLIJST

a,b	afmetingen paneel	[mm]
A,B	coëfficiënten eerste kwadratische vorm	
α, β, γ	kromlijng assenstelsel	
C	constante	
c_1, c_2, c_3	differentiaalparameters	
E	elasticiteitsmodulus	[N/mm ²]
ϵ	rek	[-]
f	frequentie	[Hz]
g	gravitatieversnelling	9,81 m/s ²
G	torderend moment	[Nmm]
h	dikte paneel	[mm]
H	buigend moment	[Nmm]
k	kromming	[1/mm]
N	normaalkracht op plaat	[N/mm ²]
ν	Poisson-factor	[-]
p	druk	[N/mm ²]
r	kromtestraal	[mm]
ρ	dichtheid	[kg/mm ³]
S	schuifkracht	[N/mm]
σ	normaalspanning	[N/mm ²]
T	kinetische energie	[J]
T_1, T_2	normaalkracht	[N/mm]
τ	schuifspanning	[N/mm ²]
u,v,w	tangentiële verplaatsingen	[mm]
U	potentiële energie	[J]
ϕ	(Airy) spanningsfunctie	
χ	buigvervorming	[-]
ω	hoekfrequentie	[rad/s]
x,y,z	cartesisch coördinatenstelsel	
X,Y,Z	resultante krachten op plaat	[N/mm]

1. PROBLEEMDEFINITIE

Vanwege de gunstige constructieve eigenschappen van gekromde panelen (schalen) wordt hier in bijvoorbeeld de bouw, de scheepsbouw en de auto-industrie regelmatig gebruik van gemaakt. Voorbeelden uit de bouw zijn de nieuwe stationshal van Arnhem Centraal, het welbekende Sydney Opera House en El Palau de les Arts Reine Sofia (zie Figuur 1-1).



Figuur 1-1 El Palau de les Arts Reine Sofia [2]

De eigenfrequentie van zulke gekromde panelen kan bepaald worden met behulp van eindige elementen modellen, zoals Ansys. Het is echter relatief veel werk om zo'n constructie in een model in te voeren, en voor de voorontwerpfase is er dus behoefte aan een methode waarmee de resonantiefrequentie van gekromde panelen snel bepaald kan worden. Momenteel is dit op analytische wijze nog niet goed mogelijk vanwege de zeer lastig op te lossen differentiaalvergelijkingen die achter het mechanische gedrag van gekromde panelen schuil gaat.

Er zijn op dit moment alleen accurate oplossingen voor deze differentiaalvergelijkingen bekend voor zeer specifieke geometrieën, zoals panelen met zeer kleine krommingen. Om deze reden is er behoefte aan een ontwerpformule waarmee snel een redelijk betrouwbare schatting van de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen gemaakt kan worden. Een dergelijke ontwerpformule heeft als belangrijkste voordeel dat de berekening in de eerste ontwerpfase vele malen sneller kan worden uitgevoerd, wat in die fase belangrijker is dan een grote accuraatheid.

1.1 DOELSTELLING

Het doel van dit bachelor-eindwerk is dan ook om een ontwerpformule op te stellen waarmee de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen kan worden vastgesteld met een afwijking van minder dan 5%. Het gaat hierbij om vierkante gekromde panelen, met een kromming in twee richtingen, een bepaalde dikte, bepaalde afmetingen en een bepaald materiaal. Deze eigenschappen van het paneel moeten allemaal, voor zover van invloed op de laagste eigenfrequentie, terugkomen in de ontwerpformule. Verder moet de ontwerpformule voldoen aan de wel bekende limietgevallen, dus een volledig vlakke plaat en een deel van een cilinder.

1.2 METHODE

Zoals gezegd, kan met eindige elementen modellen zoals Ansys de eigenfrequentie van constructies of constructiedelen bepaald worden. Om de ontwerpformule op te stellen zal met behulp van Ansys een groot aantal panelen met verschillende afmetingen, kromtestralen in twee richtingen, materiaaleigenschappen en diktes gegenereerd worden, waarna een verband gezocht zal worden tussen deze eigenschappen van het paneel en de eigenfrequentie. De verwachting hierbij is dat de hoekfrequentie van de gekromde panelen een als volgt gegeven vorm zal hebben

$$\omega_{ij,curved\ panel} = [\omega_{ij,flat\ panel}^2 + C_x + C_y + C_{xy}]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Dit is analoog aan de door Sewall (1967) gevonden formule voor een in één richting gekromde plaat, die door Blevins (1981) in een iets handzamer vorm is gegoten, en in welk geval C_y en C_{xy} gelijk zijn aan nul en C_x is gegeven door

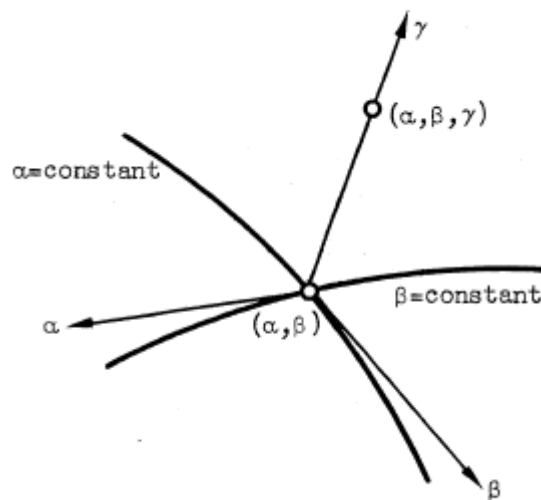
$$C_x = \frac{\alpha_{ij} E}{r_x^2 \rho (1 - \nu^2)} \quad (1.2)$$

Hierin is α een dimensieloze parameter is afhankelijk van de manier van opleggen, de afmetingen en de Poisson-factor ν . Te zien is dat de eigenfrequentie van een gekromd paneel bij een zeer grote kromtestraal r vrijwel gelijk wordt aan de eigenfrequentie van een vlakke plaat, wat natuurlijk ook het geval moet zijn. De verwachting is dat de eigenfrequentie van een in twee richtingen gekromd paneel in zo'n zelfde soort formule te vatten is, en hier is dus ook initieel naar gezocht.

2. PROBLEEMANALYSE

De mechanica achter gekromde panelen kan, zoals veel fysische problemen, uitgedrukt worden in een differentiaalvergelijking. Voor de verdere aanpak van dit probleem en een duidelijk beeld van de achtergrond is het nuttig om de schaaltheorie uitgebreid te introduceren. Er zijn immers verschillende limietgevallen te bedenken, zoals een deel van een cilinder en een vlakke plaat, waarvoor de laagste eigenfrequentie analytisch bepaald kan worden.

Een zeer uitgebreide beschrijving van de schaaltheorie, ontwikkeld door Kirchhoff en Love voor dunne platen en door Mindlin en Reissner voor dikke platen, is gegeven door Vlasov (1951). Voor de volledige afleiding van de differentiaalvergelijkingen en de benaderingen die daarbij gedaan moeten worden wordt naar zijn artikel verwezen, hier zullen wel enkele relevante zaken uit zijn artikel aangehaald worden. Het assenstelsel dat door Vlasov gebruikt wordt (zie ook Figuur 2-1 Kromlijinig assenstelsel (Vlasov, 1951)) bestaat uit twee kromlijnige orthogonale assen α en β , met normaal op de oorsprong een as γ . Elk punt op een gekromde plaat kan dan dus uitgedrukt worden in de coördinaten (α, β, γ) .



Figuur 2-1 Kromlijinig assenstelsel (Vlasov, 1951)

Verder worden er via de lengte van een lijnelement op het oppervlak nog enkele parameters gedefinieerd:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{c_1^2} + \frac{d\beta^2}{c_2^2} + \frac{d\gamma^2}{c_3^2} \quad (2.1)$$

$$c_1 = \frac{1}{A(1 + k_1\gamma)} ; c_2 = \frac{1}{B(1 + k_2\gamma)} ; c_3 = 1 \quad (2.2)$$

Hierin zijn c_1 , c_2 en c_3 dus de differentiaalparameters en $A(\alpha, \beta)$ en $B(\alpha, \beta)$ de coëfficiënten van de eerste kwadratische vorm, noodzakelijk om vergelijking (2.1) op te kunnen lossen. k_1 en k_2 zijn de primaire krommingen langs de assen α en β .

Binnen een elastisch model voor de schaal wordt dan de aanname gedaan dat een element normaal op het middenoppervlak na vervorming normaal op dat oppervlak blijft en van dezelfde lengte blijft. In formulevorm betekent dit het volgende

$$\varepsilon_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\gamma} = 0 \quad (2.3)$$

Met deze aanname kunnen de volgende vergelijkingen opgesteld worden voor de verplaatsingen van een punt (α, β, γ)

$$u_\alpha = (1 + k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (2.4)$$

$$u_\beta = (1 + k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2.5)$$

$$u_\gamma = w \quad (2.6)$$

Hierbij zijn u en v gedefinieerd als de verplaatsingen in de richting van de raaklijn aan de lijnen $\beta = \text{constant}$ en $\alpha = \text{constant}$. w is de verplaatsing in de richting van de normaal van het oppervlak. Op basis van deze vergelijkingen en de componenten van de rektensor heeft Vlasov de vergelijkingen voor dikke schalen opgesteld. Voor dit onderzoek is het echter voldoende om het bij dunne schalen te houden, en dit maakt de analyse aanzienlijk makkelijker. Dunne schalen worden hierbij door Vlasov gedefinieerd op basis van het volgende criterium

$$hk_{max} = \frac{h}{r_{min}} < \frac{1}{30} \quad (2.7)$$

Hierdoor kunnen de onderdelen waar de volgende (tweede-orde) termen in voorkomen verwaarloosd worden

$$\frac{h^3}{12} k_1 \cong \frac{h^3}{12} k_2 \cong \frac{h^3}{12} \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \cong \frac{h^3}{12} \frac{\partial k_3}{\partial \alpha} \cong \frac{h^3}{12} \frac{\partial k_1}{\partial \beta} \cong \frac{h^3}{12} \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \cong 0 \quad (2.8)$$

Voor de interne krachten op een infinitesimaal stukje schaal met oppervlakte $Ad\alpha$ bij $Bd\beta$ en een dikte h (zie Figuur 2-2) kunnen dan de volgende relaties opgesteld worden

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (2.9)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (2.10)$$

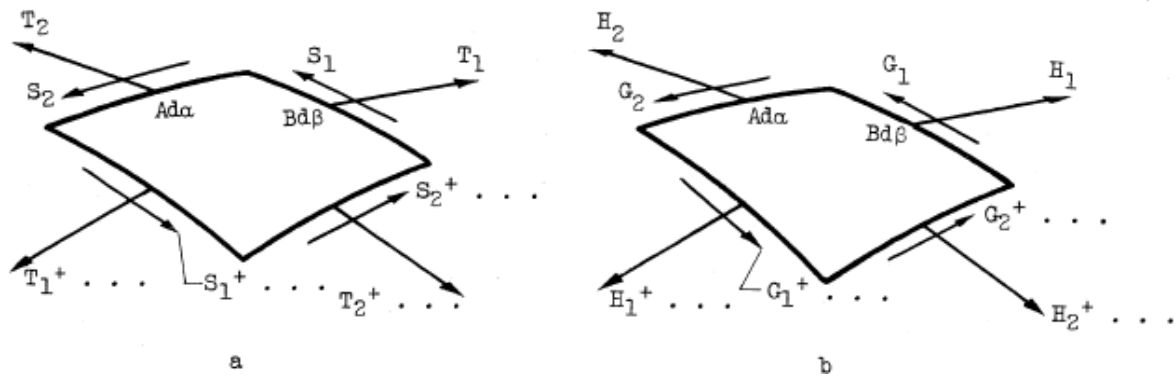
$$S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\delta \quad (2.11)$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\sigma \quad (2.12)$$

$$G_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_2) \quad (2.13)$$

$$G_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_2 + \nu\chi_1) \quad (2.14)$$

T is dus de normaalkracht op een zijde van het vlakje, S is de schuifkracht, G is het tordrend moment en H is het buigend moment. Deze uitdrukkingen zijn rechtstreeks af te leiden uit de elasticiteitstheorie van Timoshenko en de wet van Hooke.



Figuur 2-2 Interne krachten op stukje schaal (Vlasov, 1951)

In deze vergelijkingen voor de interne krachten in de plaat kunnen ε_1 , ε_2 , δ , σ , χ_1 en χ_2 als volgt uitgedrukt worden

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \quad (2.16)$$

$$\delta = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \quad (2.17)$$

$$\chi_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2.18)$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (2.19)$$

$$\sigma = -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \quad (2.20)$$

Als deze vergelijkingen nu in elkaar geschoven worden kan een differentiaalvergelijking in drie fundamentele verplaatsingen opgesteld worden. Het is echter ook mogelijk om T_1 , T_2 en S om te schrijven naar functies afhankelijk van een spanningsfunctie ϕ en de verplaatsing w , waardoor ook de differentiaalvergelijking slechts in twee variabelen gegeven wordt. Hiertoe worden T_1 , T_2 en S als volgt uitgedrukt, en worden vergelijkingen (2.12), (2.13) en (2.14) op de reeds gegeven manier gebruikt

$$T_1 = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad (2.21)$$

$$T_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \quad (2.22)$$

$$S_1 = -S_2 = -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) \quad (2.23)$$

De momenten G en H waren al enkel afhankelijk van de verplaatsing w , dus als de vergelijkingen nu samengevoegd worden ontstaat een gekoppelde (en vrij inzichtelijke) differentiaalvergelijking in ϕ en w , met Z een uitdrukking voor de spanning op de grensvlakken van een vlakje.

$$\frac{1}{Eh} \nabla_e^2 \nabla_e^2 \phi - (H \nabla_e^2 - L \nabla_h^2) w = 0 \quad (2.24)$$

$$-(H \nabla_e^2 - L \nabla_h^2) \phi - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla_e^2 \nabla_e^2 w + Z = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla_e^2 = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right) \quad (2.26)$$

$$H \nabla_e^2 - L \nabla_h^2 = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} k_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} k_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right) \quad (2.27)$$

Als laatste zijn dan nog de uitdrukkingen nodig waarin de externe krachten op het volume-element meegenomen worden, ten behoeve van het evenwicht van krachten. Dit zijn de krachten X, Y en Z, waarin de spanningen en de volumekrachten meegenomen worden, en de krachten die normaal op de schaal staan N_1 en N_2 . Met die krachten is dan het gehele model voor de plaat opgesteld.

$$X = \frac{1}{AB} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{p_\alpha}{c_1 c_2} d\gamma + \left| \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{c_1 c_2} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right) \quad (2.28)$$

$$Y = \frac{1}{AB} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{p_\beta}{c_1 c_2} d\gamma + \left| \frac{\tau_{\beta\gamma}}{c_1 c_2} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right) \quad (2.29)$$

$$Z = \frac{1}{AB} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{p_\gamma}{c_1 c_2} d\gamma + \left| \frac{\sigma_\gamma}{c_1 c_2} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right) \quad (2.30)$$

$$N_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla_e^2 w \quad (2.31)$$

$$N_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla_e^2 w \quad (2.32)$$

Met het voorgaande model kan in principe elke geometrie berekend worden, waarbij dan juiste waarden voor A en B moeten worden gekozen. Voor een cilinder, bijvoorbeeld, voldoet een keuze voor $A = B = 1$, wat ook direct in te zien is bij beschouwing van vergelijkingen (2.1) en (2.2). Voor een bol moet gekozen worden voor $k = 1/R$, $A = R$ en $B = R \sin(\alpha)$, wat dus betekent dat er gebruik gemaakt wordt van een coördinatenstelsel dat gezien kan worden als een lengte- en breedtegraad.

Deze schaaltheorie wordt in het algemeen beschreven met de Sanders-Koiter-vergelijkingen. Deze bestaan uit zes evenwichtsvergelijkingen, zes constitutieve vergelijkingen en negen kinematische vergelijkingen (zie Tabel 1 Sanders-Koiter-vergelijkingen). De constitutieve vergelijkingen (2.39) tot en met (2.44) zijn gelijk aan vergelijkingen (2.9) tot en met (2.14) van Vlasov, voor de overige vergelijkingen geldt dat in deze representatie van de Sanders-Koiter-vergelijkingen gekozen is voor een carthesisch assenstelsel in plaats van een kromlijnig.

Evenwichts- vergelijkingen	$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + \frac{m_{xx} - m_{yy}}{\alpha_x} + \frac{2m_{xy}}{\alpha_y} - q_x = 0$	2.33
	$\frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{m_{yy} - m_{xx}}{\alpha_y} + \frac{2m_{xy}}{\alpha_x} - q_y = 0$	2.34
	$k_{xy}(m_{xx} - m_{yy}) - (k_x - k_y)m_{xy} - 2n_z = 0$	2.35
	$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial n_z}{\partial y} + \frac{n_{xx} - n_{yy}}{\alpha_x} + \frac{2n_{xy}}{\alpha_y} - k_x q_x - k_{xy} q_y + p_x = 0$	2.36
	$\frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial n_z}{\partial x} + \frac{n_{yy} - n_{xx}}{\alpha_y} + \frac{2n_{xy}}{\alpha_x} - k_y q_y - k_{xy} q_x + p_y = 0$	2.37
	$k_x n_{xx} + 2k_{xy} n_{xy} + k_y n_{yy} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{q_x}{\alpha_x} + \frac{q_y}{\alpha_y} + p_z = 0$	2.38
Constitutieve vergelijkingen	$n_{xx} = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy})$	2.39
	$n_{yy} = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx})$	2.40
	$n_{xy} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$	2.41
	$m_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy})$	2.42
	$m_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_{yy} + \nu \kappa_{xx})$	2.43
	$m_{xy} = \frac{Eh^3}{24(1 + \nu)} \rho_{xy}$	2.44
Kinematische vergelijkingen	$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_x u_z + \frac{u_y}{\alpha_y}$	2.45
	$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} - k_y u_z + \frac{u_x}{\alpha_x}$	2.46
	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2k_{xy} u_z - \frac{u_x}{\alpha_y} - \frac{u_y}{\alpha_x}$	2.47
	$\varphi_x = -\frac{\partial u_z}{\partial x} - k_x u_x - k_{xy} u_y$	2.48
	$\varphi_y = -\frac{\partial u_z}{\partial y} - k_y u_y - k_{xy} u_x$	2.49
	$\varphi_z = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{u_x}{\alpha_y} + \frac{u_y}{\alpha_x} \right)$	2.50
	$\kappa_{xx} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - k_{xy} \varphi_z + \frac{\varphi_y}{\alpha_y}$	2.51
	$\kappa_{yy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + k_{xy} \varphi_z + \frac{\varphi_x}{\alpha_x}$	2.52
	$\rho_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + (k_x - k_y) \varphi_z - \frac{\varphi_x}{\alpha_y} - \frac{\varphi_y}{\alpha_x}$	2.53

Tabel 1 Sanders-Koiter-vergelijkingen (dictaat CT5143)

Als nu de vergelijkingen (2.45) tot en met (2.53) gecombineerd worden, met de aanname dat $\alpha_y \approx \alpha_x \approx 1$, volgt een enkele bewegingsvergelijking:

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = -k_y \kappa_{xx} + k_{xy} \rho_{xy} - k_x \kappa_{yy} \quad (2.54)$$

De differentiaalvergelijking voor schalen kan nu opgesteld worden door de Sanders-Koiter-vergelijkingen in elkaar te substitueren (met de aannames dat $\alpha_y \approx \alpha_x \approx 1$, $p_x = p_y = 0$ en $q_x \approx q_y \approx m_z \approx 0$). Hieruit volgt de volgende set vergelijkingen

$$-\Gamma \phi + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 u_z = p_z \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi + Eh \Gamma u_z = 0 \quad (2.56)$$

Hierin is

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.57)$$

$$\Gamma = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.58)$$

In vergelijkingen (2.55) en (2.56) is ϕ de Airy-spanningsfunctie, die verband houdt met de membraanspanningen

$$n_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} ; n_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} ; n_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.59)$$

Bij panelen die in één richting gekromd zijn, zijn de krommingen k_x , k_y en k_{xy} over het gehele oppervlak constant en dus kunnen de vergelijkingen (2.55) en (2.56) in elkaar geschoven worden zodat de volgende vergelijking overblijft

$$\begin{aligned} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 u_z + Eh \Gamma \Gamma u_z \\ & = \nabla^2 \nabla^2 \left(p_z + n_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + n_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \rho h \ddot{u}_z \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Voor panelen die in twee richtingen gekromd zijn, is dit in het algemeen niet het geval, zeker bij grotere hoeken tussen de beide zijden van een paneel kunnen de krommingen niet constant verondersteld worden.

3. LIMIETGEVALLEN

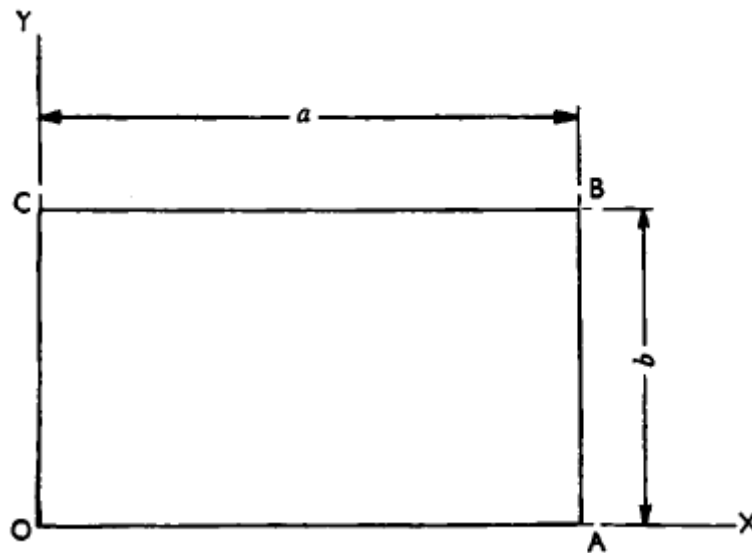
3.1 VLAK PANEEL

Een toepassing van deze vergelijkingen is een vlak rechthoekig paneel. Over een rechthoekig vlak paneel heeft Warburton (1954) een artikel gepubliceerd dat de trillingen voor verschillende randvoorwaarden beschrijft. Een rechthoekig paneel met een lengte a en een breedte b (zie Figuur 3-1 Rechthoekig paneel (Warburton, 1954)) moet voldoen aan de randvoorwaarden op de randen OA, AB, BC en CO, en de uitwijking wordt verder beschreven door de plaatvergelijking van Love (dit is dus analoog aan vergelijking (2.60), maar met $k_x = k_y = k_{xy} = 0$, normaalkrachten gelijk aan nul en geen druk in de z -richting)

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Egh^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Hierbij wordt de uitwijking u_z van elk punt gegeven door

$$u_z = W \sin(\omega t) = A\theta(x)\varphi(y) \sin(\omega t) \quad (3.2)$$



Figuur 3-1 Rechthoekig paneel (Warburton, 1954)

Er zijn verschillende manieren om uit de vergelijking voor de plaat bij de eigenfrequenties te komen. Het is bijvoorbeeld mogelijk om een oneindige serie aan te nemen voor W , waarbij elke component minimaal voldoet aan vergelijking (3.1) en een aantal van de randvoorwaarden; de rest van de randvoorwaarden wordt dan bereikt door de juiste waarden te kiezen voor A . In het algemeen leidt deze procedure tot een oneindige determinant die gelijkgesteld wordt aan nul, waarbij elke term in de determinant een andere

functie van de frequentie is. De waarden waarvoor de determinant nul is, geven dan de eigenfrequenties van de plaat.

Een andere methode om de eigenfrequenties te bepalen werkt via een energiebeschouwing. Deze methode geeft meer inzicht in de mechanische vergelijkingen die de trilling van de plaat beschrijven en is dus goed om in beschouwing te nemen. De potentiële en kinetische energie van een plaat kunnen als volgt uitgedrukt worden

$$U = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.3)$$

$$T = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} \frac{\rho g}{h} \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3.4)$$

Hierin is in de vergelijking (3.4) voor de kinetische energie duidelijk te herkennen dat dit een vorm van het bekende $\frac{1}{2} mv^2$ is, voor de potentiële energie is een dergelijke relatie wat minder makkelijk uit de vergelijking (3.3) af te lezen. De potentiële energie van een trillende vlakke plaat is afhankelijk van de gemiddelde kromming en de Gaussische kromming, waarbij de gemiddelde kromming gegeven is door de Laplaciaan van de uitwijking w . De Gaussische kromming wordt gegeven door de Monge-Ampère operator (zie vergelijking (3.5)). Voor deze methode wordt dus aangenomen dat hoe sterker de plaat gekromd is, en hoe meer plaatselijk vooral, hoe sterker de plaat terug naar zijn oorspronkelijke vorm zal willen bewegen. Dit is ook wel aan te voelen, de potentiële energie van een sterker gebogen liniaal is ook groter.

$$\text{Monge - Ampère operator over } u_z: \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (3.5)$$

De maximale waarden voor de potentiële energie en kinetische energie zijn dan als volgt gegeven

$$U_{max} = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.6)$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \frac{\rho g \omega^2}{h} \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy \quad (3.7)$$

In vergelijking (3.7) voor de maximale kinetische energie valt nu de hoekfrequentie ω buiten de integraal, er wordt immers tweemaal de afgeleide naar de tijd genomen over de functie u_z , waarbij de maximale waarde van u_z te vinden is op punten waar de sinus gelijk is aan één. Het is evident dat de maximale potentiële energie gelijk is aan de maximale kinetische energie, als de plaat de evenwichtsstand bereikt zal de potentiële energie immers nul zijn en de kinetische energie maximaal, terwijl de kinetische energie in de uiterste stand gelijk is aan nul en de potentiële energie maximaal. De eigenfrequentie van de plaat is dus als volgt gegeven

$$\omega^2 = \frac{U_{max}}{\frac{\rho h}{2g} \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy} \quad (3.8)$$

Hierbij is enkel de vorm van de functie W nog onbekend. Hiertoe heeft Ritz de Rayleigh-Ritz methode ontwikkelt, die voorbouwt op het Rayleigh-principe dat elke functie W die ongeveer aan de randvoorwaarden voldoet een bovengrens voor de eigenfrequentie oplevert. De resultaten van de Rayleigh-Ritz methode zijn nauwkeuriger, maar er moet nu weer een serie aangenomen worden voor W . Door deze serie aan te nemen kan nu een minimum gevonden worden voor de eigenfrequentie.

De serie kan als volgt beschreven worden

$$W = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \theta_{\alpha}(x) \psi_{\beta}(y) \quad (3.9)$$

Deze serie is in het algemeen geldig, voor alle randvoorwaarden. Voor dit onderzoek voert een volledige beschrijving te ver, maar met de beperking dat alle vier de randen scharnierend ondersteund zijn, zal zich een patroon over de plaat verspreiden met m keer n lijnen van knopen, met m knopen in de x -richting en n knopen in de y -richting. Het minimum aantal knopen in zowel x - als y -richting is gelijk aan twee, de twee uiteinden kunnen verticaal immers niet bewegen, verder is elk geheel getal mogelijk. Dit kan dus gezien worden als analoog aan de grondtonen en boventonen bij een snaar die aan beide uiteinden vastgehouden wordt. In dit geval kan er een eenheidsloze factor gevonden worden voor de frequentie, die afhankelijk is van het $m \times n$ patroon

$$\lambda^2 = \frac{\rho a^4 \omega^2 12(1 - \nu^2)}{\pi^4 E h^2} \quad (3.10)$$

$$\lambda^2 = D_x^4 + D_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} (\nu F_x F_y + (1 - \nu) J_x J_y) \quad (3.11)$$

$$\text{met } D_x = m - 1; F_x = (m - 1)^2; J_x = (m - 1)^2$$

$$D_y = n - 1; F_y = (n - 1)^2; J_y = (n - 1)^2$$

In dit geval wordt de laagste eigenfrequentie dus gevonden bij $m = n = 2$, maar hierbij moet opgemerkt worden dat dit niet altijd het patroon is dat optreedt bij de laagste eigenfrequentie. In dat geval is λ^2 gelijk aan $1 + (a/b)^4 + 2(a/b)^2$. Bij een vierkante plaat is dit dus gelijk aan 4, en voor de eigenfrequentie zal dan gelden

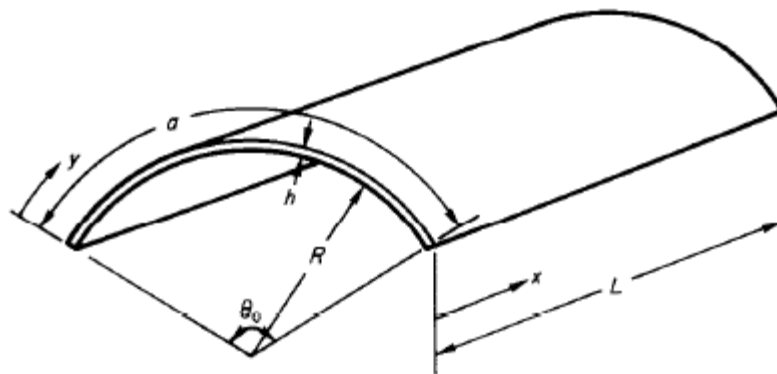
$$\omega^2 = \frac{4\pi^4 E h^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)} \quad (3.12)$$

3.2 CILINDER

Een tweede limietgeval is een cilindrisch gekromd paneel. Het paneel heeft dus een kromming in één richting en is in de andere richting vlak (zie Figuur 3-2 Cilindrisch gekromd paneel (Blevins, 1981)). Sewall (1967) heeft de eigenfrequenties van dit soort panelen analytisch bestudeerd, en Blevins (1981) heeft Sewall's bevindingen in handzamer vorm gegoten. De oplossing van de algemene vergelijkingen voor schaalconstructies is door Sewall gevonden door een aantal aannames te doen:

1. Alleen de traagheid van de beweging uit het vlak wordt meegenomen
2. De plaat is ondiep en dun
3. De uitwijking van de plaat is klein ten opzichte van de afmetingen
4. De beweging van de plaat kan uitgedrukt worden via het scheiden van variabelen

Hierna wordt de Rayleigh-Ritz methode toegepast, zoals in vergelijking (3.9).



Figuur 3-2 Cilindrisch gekromd paneel (Blevins, 1981)

Er zal wederom naar een vierkant paneel gekeken worden, waarbij a dus gelijk is aan L . Verder is het paneel aan alle kanten scharnierend opgelegd. In dat geval wordt de eigenfrequentie van het paneel als volgt gegeven

$$\omega_{ij,curved}^2 = \omega_{ij,flat}^2 + \frac{\alpha_{ij} E}{r^2 \rho (1 - \nu^2)} \quad i, j = 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\left(\frac{i-1}{a}\right)^4 (1-\nu^2)}{\left(\left(\frac{i-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{a}\right)^2\right)^2} \quad (3.14)$$

Dit resultaat is gelijk aan het resultaat van Webster (1968), die deze geometrie heeft aangepakt via de variatierekening. Voor het geval met vier scharnierend ondersteunde is de aanpak niet significant verschillend van de Rayleigh-Ritz methode die door Sewall gebruikt werd, maar voor andere randvoorwaarden is de aanpak via de kinetische en potentiële energie zeker wel de moeite waard, omdat met toepassing van Hamilton's principe een vrij simpel op te lossen vergelijking voor de eigenfrequenties ontstaat. Hier is dit dus minder van belang, maar voor andere randvoorwaarden zeker wel.

De eigenfrequentie van een vlakke plaat is natuurlijk gelijk aan de eigenfrequentie gevonden in vergelijking (3.12), en voor de laagste eigenfrequentie ($i = 2, j = 2$) van een cilindrisch gekromde vierkante plaat geldt dus

$$\omega_{cilinder}^2 = \frac{4\pi^4 E h^2}{\rho a^4 12(1-\nu^2)} + \frac{E}{4r^2 \rho} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{\pi^2 h^2}{a^4 3(1-\nu^2)} + \frac{1}{4r^2} \right) \quad (3.15)$$

Het is echter niet noodzakelijk dat dit ook de modus is waarin de cilindrisch gekromde plaat zich bevindt bij de laagste eigenfrequentie, in dat geval moet gebruik gemaakt worden van de combinatie van vergelijkingen (3.13) en (3.14), in plaats van (3.15).

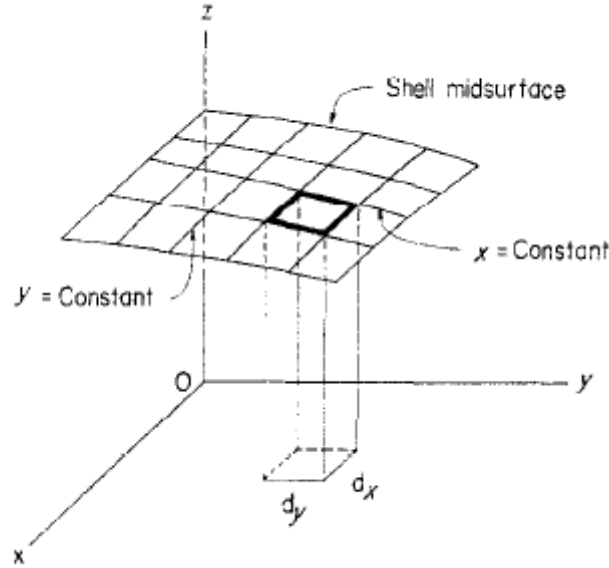
3.3 TWEEZIJDIG GEKROMD PANEEL

Leissa en Kadi hebben in 1971 een poging gedaan om met een analytische methode de effecten van de kromming van een paneel op de eigenfrequenties te vinden. Voor het opstellen van een ontwerpformule voor dit soort panelen is dit natuurlijk erg interessant, want hoewel hun resultaat niet direct kort is, kan het natuurlijk wel als basis gebruikt worden om een ontwerpformule op te stellen. Hieronder zal hun analytische beschouwing toegelicht worden, waarna ook een controle zal worden uitgevoerd met Ansys.

Anders dan Vlasov definiëren Leissa en Kadi een tweezijdig gekromd paneel met de volgende vergelijking (dit is het midden van het paneel, dus boven en onder zit nog $h/2$ aan materiaal)

$$z = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{r_x} + \frac{y^2}{r_y} \right) \quad (3.16)$$

Een belangrijk verschil met de definitie van Vlasov is dat het coördinatenstelsel hier gevormd wordt door de kruising van het midden van de plaat met oppervlakken evenwijdig aan het xz-vlak en het yz-vlak, in plaats van door de primaire krommingen. Het oppervlak dat aldus ontstaat is te zien in Figuur 3-3 op de volgende pagina.



Figuur 3-3 Schaalement en de projectie op het xy-vlak (Kadi en Leissa, 1971)

Met de aannamen dat de kwadraten en het product van de afgeleiden van z naar x en y verwaarloosbaar klein zijn, en dat de bijdrage van de verplaatsingen u en v in x - en y -richting op de verandering van de kromming en de draaiing van het paneel te verwaarlozen zijn, kunnen de bewegingsvergelijkingen van een dunne schaal als volgt geschreven worden (zie hoofdstuk 2 voor de afleiding, of Vlasov (1951))

$$L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = p_x \quad (3.17)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = p_y \quad (3.18)$$

$$L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = p_z \quad (3.19)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{33} = \frac{1}{r_x^2} + \frac{2\nu}{r_x r_y} + \frac{1}{r_y^2} + \frac{h^2}{12} \nabla^4 \quad (3.20)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{13} = L_{31} = \left(\frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \right) \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{23} = L_{32} = \left(\frac{\nu}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.21)$$

$$p_x = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad p_y = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad p_z = -\rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

Door Leissa en Kadi zijn de volgende randvoorwaarden verondersteld (voor een paneel met afmetingen a bij b), die overeenkomen met de randvoorwaarden die in het Ansys-model gebruikt worden.

$$w = v = N_x = M_x = 0 \text{ for } x = \pm \frac{a}{2} \quad (3.23)$$

$$w = u = N_y = M_y = 0 \text{ for } y = \pm \frac{b}{2} \quad (3.24)$$

Voor de krommingen, nodig om de momenten te bepalen, worden de volgende relaties gebruikt

$$k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; k_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.25)$$

Hieruit volgen de volgende randvoorwaarden voor de momenten

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (k_x + \nu k_y) = 0 \text{ for } x = \pm \frac{a}{2} \quad (3.26)$$

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (k_y + \nu k_x) = 0 \text{ for } y = \pm \frac{b}{2} \quad (3.27)$$

Voor kleine uitwijkingen kunnen u, v en w als volgt geschreven worden (voor de randvoorwaarden gedefinieerd in (3.25) en (3.26))

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \sin \omega t \quad (3.28)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b} \sin \omega t \quad (3.29)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \sin \omega t \quad (3.30)$$

Voor de laagste modus, is voor elke richting maar één vorm interessant, dit is echter niet noodzakelijk $N = M = 1$. Uit de modelleringen met behulp van Ansys blijkt dat de laagste modus van een paneel niet altijd slechts twee halve golven bevat, één in beide richtingen, maar uit wisselende aantallen halve golven. Aangezien vierkante panelen beschouwd worden, geldt ook dat $a = b$. Om de coëfficiënten A_{mn} , B_{mn} en C_{mn} te bepalen, kan de Rayleigh-Ritz methode gebruikt worden. Hierbij wordt de functionaal $L_{\max} = T_{\max} - U_{\max}$ geminimaliseerd. Deze aanpak is ook al aan bod gekomen bij de vlakke platen (zie vergelijkingen (3.3) tot en met (3.7)), alleen werd hier nog geen minimalisatie toegepast. In dit geval, met een gekromd oppervlak, wordt de uitdrukking voor de potentiële energie ook anders, omdat er behalve buigingsenergie ook rek-energie in de plaat optreedt. De uitdrukkingen voor de energieën zijn de volgende

$$U_r = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} \right) \right] dx dy \quad (3.31)$$

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[(K_x + K_y)^2 - 2(1-\nu)(K_x K_y - K_{xy}^2) \right] dx dy \quad (3.32)$$

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx dy \quad (3.32)$$

De rekken zijn gerelateerd aan de tangentiële verplaatsingen u en v en aan de zakking in combinatie met de boogstraal, terwijl de verandering van de kromming K uit te drukken is in de zakking w

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{r_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r_y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.33)$$

$$K_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad K_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad K_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.34)$$

Bij invullen van de vergelijkingen (3.28) tot en met (3.30) in (3.17) tot en met (3.19) volgt dan de volgende (niet-triviale) oplossing, die de frequentie geeft. De absolute uitwijking volgt uit de energiebeschouwing die hiervoor beschreven is, maar dit is voor de laagste eigenfrequentie niet van belang.

$$\Delta^3 - C_0 \Delta^2 + C_1 \Delta - C_2 = 0 \quad (3.35)$$

$$\Delta = \rho \frac{1-\nu^2}{E} r_x^2 \omega^2 \quad (3.36)$$

$$C_0 = \left(1 + \frac{2\nu r_x}{r_y} + \frac{r_x^2}{r_y^2} \right) + \frac{(3-\nu)}{2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2) + \frac{h^2}{12r_x^2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^2 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & - \left(1 + \frac{\nu r_x}{r_y} \right)^2 (\alpha r_x)^2 - \left(\nu + \frac{r_x}{r_y} \right)^2 (\beta r_x)^2 \\ & + \frac{(3-\nu)}{2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2) \left(1 + \frac{2\nu r_x}{r_y} + \frac{r_x^2}{r_y^2} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2) \\ & + \frac{(3-\nu)}{2} \frac{h^2}{12r_x^2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$C_2 = \frac{1-\nu}{2} \left((1-\nu^2) \left(\frac{r_x (\alpha r_x)^2}{r_y} + (\beta r_x)^2 \right)^2 + \frac{h^2}{12r_x^2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^4 \right) \quad (3.39)$$

$$\alpha = \frac{(2m-1)\pi}{a}; \quad \beta = \frac{(2n-1)\pi}{b}; \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

Hierbij zijn α en β dus de uitdrukkingen voor de modus waarin de plaat zich bevindt bij de laagste eigenfrequentie. Echt handzaam is deze uitdrukking natuurlijk nog niet, dit kan wel bereikt worden door de tangentiële traagheidstermen uit (3.17), (3.18) en (3.19) te verwaarlozen. In dat geval kunnen de bewegingsvergelijkingen geschreven worden als functie van de uitwijking w en de Airy-spanningsfunctie ϕ (zie vergelijking (2.59)). In dat geval zijn de bewegingsvergelijkingen als volgt te schrijven

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\nabla^4 w + \frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{r_y}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 \phi - \frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{r_y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.42)$$

Voor de randvoorwaarden kan voor w dan uiteraard uitdrukking (3.30) gebruikt worden, die zijn immers niet veranderd, en als voor de Airy-spanningsfunctie de volgende uitdrukking gekozen wordt, voldoet die ook aan de randvoorwaarden

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{b} \sin \omega t \quad (3.43)$$

Als deze uitdrukking voor w en ϕ dan ingevuld worden in (3.41) en (3.42), komt hier de volgende vergelijking uit voor frequentie

$$\omega^2 = \frac{\frac{E}{\rho r_x^2(1-\nu^2)} \left((1-\nu^2) \left(\left(\frac{r_x(\alpha r_x)^2}{r_y} + (\beta r_x)^2 \right)^2 + \frac{h^2}{12r_x^2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^4 \right) \right)}{((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^2} \quad (3.44)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{E}{\rho r_x^2(1-\nu^2)} \left((1-\nu^2) \left(\left(\frac{r_x(\alpha r_x)^2}{r_y} + (\beta r_x)^2 \right)^2 + \frac{h^2}{12r_x^2} ((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^4 \right) \right)}{((\alpha r_x)^2 + (\beta r_x)^2)^2}} \quad (3.45)$$

Deze laatste formule kan voor een vierkant paneel als volgt omgeschreven worden

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi^4 E h^2}{12 a^4 \rho (1-\nu^2)} ((2m-1)^2 + (2n-1)^2)^2 + \frac{E}{\rho r_x^2} \frac{\left(\frac{r_x^3}{r_y} (2m-1)^2 + r_x^2 (2n-1)^2 \right)^2}{(r_x^2 (2m-1)^2 + r_x^2 (2n-1)^2)^2}} \quad (3.46)$$

Hierbij is de eerste term onder de breuk gelijk aan de functie voor een vlakke plaat (ook de term voor de modus waarin de plaat verkeert is gelijk, alleen anders geschreven). De tweede term onder de wortel geeft dan de invloed van de kromming. Deze uitdrukking ziet er erg

onvriendelijk en weinig inzichtelijk uit, en de kans op kleine slordigheden is bij dit soort zaken dus altijd aanwezig. Nikkhah-Bahrami, Loghmani en Pooyanfar (2008) hebben dezelfde situatie bestudeerd op basis van de veronderstelling van trilling als golven. Het idee hierachter is dat golven propageren, reflecteren en doorgelaten worden binnen een structuur. De afleiding is erg goed te vergelijken met een geluidsgolf door water, waarbij uitgegaan wordt van behoud van massa en een bepaalde samendrukbaarheid. In vaste stoffen wordt hiervoor gebruik gemaakt van Timoshenko's elasticiteitsleer. Via deze methode wordt exact dezelfde oplossing gevonden als Leissa en Kadi in 1971 ook al vonden, en dit doet dus vermoeden dat de oplossing in ieder geval in wiskundig opzicht correct is.

4. SCHAAALCONSTRUCTIE EN MODELVORMING

De analytische aanpak uit het voorgaande hoofdstuk kan gecontroleerd worden met een eindige-elementen-methode. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van het programma Ansys Mechanical. Met behulp van een APDL-script (APDL is de programmeertaal van Ansys) is een grote variatie van geometrieën en materiaaleigenschappen doorgerekend. Het gebruikte script is te vinden in bijlage 1. Hieronder wordt eerst het assenstelsel geïntroduceerd en vervolgens wordt de keuze voor de grootte van de elementen beargumenteerd.

4.1 INTRODUCTIE ASSENSTELSEL EN PARAMETERS

Er is voor gekozen voor een carthesisch assenstelsel, met de x-as als normaal op het midden van het paneel. Dit is dus hetzelfde als het assenstelsel dat Leissa en Kadi gebruikten, maar dan een kwartslag gedraaid. Verder is de kleinste kromtestraal altijd de kromtestraal in de y-richting, r_y , en dus is de verhouding r_z/r_y altijd gelijk aan of groter dan één. De lengte van het paneel is de hoek tussen de uiteinden in z-richting maal de kromtestraal in z-richting, en aangezien enkel vierkante panelen beschouwd worden, is de breedte in y-richting hieraan gelijk. Verder heeft het paneel een dikte h , en wordt het materiaal beschreven met de dichtheid ρ , de elasticiteitsmodulus E en de dwarscontractiecoëfficiënt ν .

4.2 KEUZE ELEMENTGROOTTE

De keuze voor de grootte van een element in Ansys is een afweging tussen de nauwkeurigheid waarmee de eigenfrequenties bepaald worden en de tijd die nodig is om een schaal te genereren en een berekening te laten doen. Omdat dit onderzoek zich enkel richt op de eigenfrequenties, en niet op piekspanningen en extreme vervormingen, is de verwachting dat relatief grote elementen gebruikt kunnen worden. Hieronder is een aantal maal dezelfde schaalconstructie berekend, met verschillende aantallen elementen in y- en z-richting, met daarachter de gevonden laagste eigenfrequentie.

Aantal elementen in y- en z-richting	Laagste eigenfrequentie [Hz]	Vershil t.o.v. 250 elementen
10	133,68	6,4 %
50	125,96	0,25 %
75	125,79	0,11 %
100	125,73	0,064 %
125	125,70	0,040 %
150	125,68	0,024 %
250	125,65	0 %

Op basis hiervan is gekozen om de schalen met 125 elementen per richting te genereren. Elke vergroting van het aantal elementen zorgt voor een onevenredig grote toename van de rekentijd. Bij 500 elementen zijn er 1,5 miljoen vergelijkingen die opgelost moeten worden, terwijl het bij 250 elementen om 375000 vergelijkingen gaat en bij 125 elementen ‘slechts’

om 93756 vergelijkingen. De afwijking van 0,040 % is alleszins acceptabel, aangezien gezocht wordt naar een ontwerpformule met een maximale afwijking van 5 %. Bij grotere schalen is de verwachting dat de relatieve afwijking in de eigenfrequentie iets groter zal worden, maar niet dusdanig groot dat dit binnen de onzekerheid die al in de ontwerpformule zit een belangrijk verschil uit zal maken.

5. INVLOEDEN VAN PARAMETERS

Door van een groot aantal geometrieën de laagste eigenfrequentie te bepalen met behulp van Ansys kunnen verbanden gevonden worden tussen de variatie van één bepaalde parameter en de gevonden laagste eigenfrequentie. Op basis van de analytische afleiding in paragraaf 3.3 voor een in twee richtingen gekromde schaal, wordt aangenomen dat de volgende parameters invloed hebben op de laagste eigenfrequentie van een gekromd paneel: de kleinste kromtestraal, de verhouding tussen de kromtestralen, de afmetingen van de plaat, de dikte van de plaat en de materiaaleigenschappen. De trillingstoestand waarin de plaat zich in de laagste eigenfrequentie bevindt wordt nadrukkelijk niet meegenomen in de op te stellen ontwerpformule, het is immers niet mogelijk om deze toestand al te kennen in de fase van het ontwerpproces waarin de ontwerpformule toegepast moet worden.

5.1 DIKTE

Voor het bepalen van de relatie tussen de dikte van een schaal en de laagste eigenfrequentie zijn drie sets metingen beschouwd, waarbij de overige parameters op verschillende constante waarden zijn gehouden. In de drie tabellen hieronder zijn deze waarden te zien.

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	10000 mm
Kromtestraal r2	2000 mm
Hoek a	0,1 rad
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio v	0,3
Dichtheid ρ	7,8 · 10 ⁻⁹ kg/mm ³

Tabel 2 Overige parameters t.b.v verband dikte en laagste eigenfrequentie (dataset 5.1.1)

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	4000 mm
Kromtestraal r2	3000 mm
Hoek a	0,2 rad
Elasticiteitsmodulus E	150000 N/mm ²
Poisson-ratio v	0,2
Dichtheid ρ	5 · 10 ⁻⁸ kg/mm ³

Tabel 3 Overige parameters t.b.v verband dikte en laagste eigenfrequentie (dataset 5.1.2)

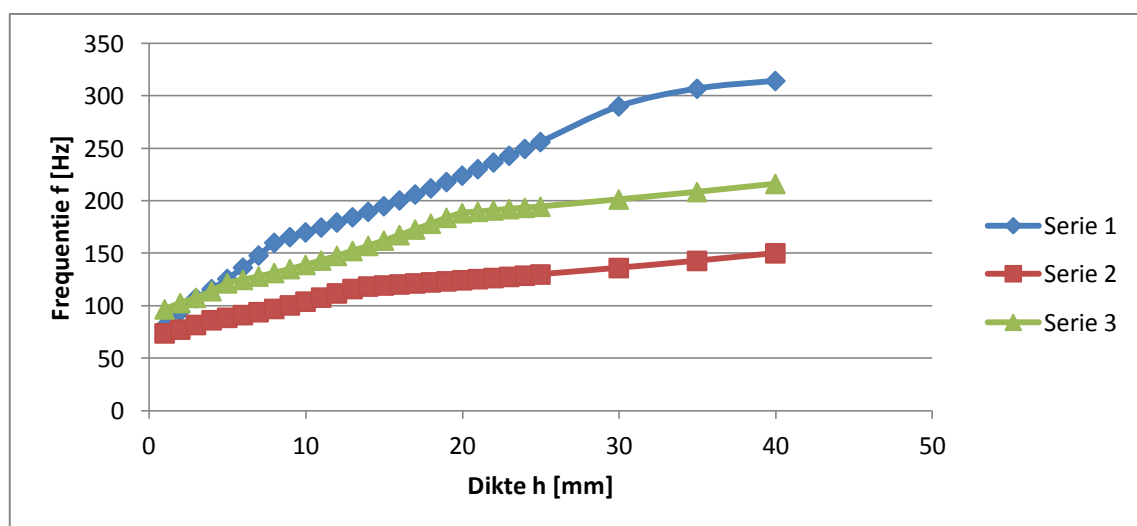
Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	8000 mm
Kromtestraal r2	5000 mm
Hoek a	0,15 rad
Elasticiteitsmodulus E	200000 N/mm ²
Poisson-ratio v	0,35
Dichtheid ρ	1 · 10 ⁻⁸ kg/mm ³

Tabel 4 Overige parameters t.b.v verband dikte en laagste eigenfrequentie (dataset 5.1.3)

Deze waarden zijn enigszins willekeurig gekozen, omdat het verband tussen de dikte van de plaat en de laagste eigenfrequentie zo algemeen mogelijk moet zijn. Vandaar ook dat alle overige parameters bij iedere nieuwe set berekeningen gewijzigd zijn. De frequenties die gevonden zijn bij verschillende diktes voor deze drie sets metingen zijn te zien in de tabel en figuur op de volgende pagina.

Dikte h [mm]	Serie 1 f_e [Hz]	Serie 2 f_e [Hz]	Serie 3 f_e [Hz]
1	80,538	73,794	96,682
2	94,599	75,715	102,68
3	102,6	77,405	107,67
4	107,29	79,434	114,01
5	125,7	88,651	121,49
6	136,47	91,195	124,73
7	148,02	94,01	127,93
8	160,12	97,101	131,35
9	165,52	100,45	135,04
10	170,05	104,05	139
11	174,68	107,87	143,2
12	179,48	111,88	147,65
13	184,46	116,07	152,31
14	189,63	118,45	157,17
15	194,98	119,44	162,22
16	200,5	120,42	167,43
17	206,18	121,39	172,8
18	212,01	122,38	178,3
19	217,98	123,39	183,93
20	224,08	124,41	188,37
21	230,3	125,46	189,66
22	236,63	126,53	190,93
23	243,05	127,63	192,2
24	249,56	128,76	193,47
25	256,16	129,91	194,47
30	290,1	136,07	201,36
35	306,92	142,84	208,5
40	314,33	150,11	216,23

Tabel 5 Laagste eigenfrequenties bij verschillende diktes



Figuur 5-1 Verband laagste eigenfrequentie en dikte

Er is dus in alle drie de grafieken een eerste vrijwel lineair deel waar te nemen, waarna een trendbreuk optreedt en de grafiek een andere helling krijgt (maar wel vrijwel lineair blijft). Het punt waar de helling verandert, is ongeveer gegeven door de volgende relatie:

$$\frac{r_{min}}{h} \cong 230 \quad (5.1)$$

Voor de eerste (blauwe) reeks is de verhouding tussen de hellingen ongeveer gelijk aan elf over 5,6, de helling wordt dus de helft kleiner. Voor de tweede (rode) reeks is deze verhouding ongeveer gelijk aan 3,3 over één, voor de derde (groene) reeks viereenhalf over 1,4.

Reeksnummer	Helling voor knik [Hz/mm]	Helling na knik [Hz/mm]	Verhouding hellingen
1 (blauw)	11	5,6	1,96:1
2 (rood)	3,3	1	3,3:1
3 (groen)	4,5	1,4	3,2:1

Tabel 6 Verhouding hellingen voor en na knik in grafiek

De overgangen tussen deze hellingen worden veroorzaakt doordat de platen hier in een andere trillingsmodus terecht komen, waardoor de invloed van het ‘vlakke deel’ van vergelijking 3.46 verandert ten opzichte van de invloed van de kromming.

5.2 AFMETINGEN

De schalen die voor dit bacheloreindwerk beschouwd worden zijn vierkant, de afmetingen in y- en z-richting zijn dus gelijk. Bij een bepaalde vaste kromtestraal kunnen de afmetingen gevarieerd worden door de hoek tussen de twee uiteinden van een plaat te veranderen. Bij de eerste modelberekening worden de overige parameters op de volgende waarden gezet:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	10000 mm
Kromtestraal r2	2000 mm
Dikte h	5 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio v	0,3
Dichtheid ρ	7,8 · 10 ⁻⁹ kg/mm ³

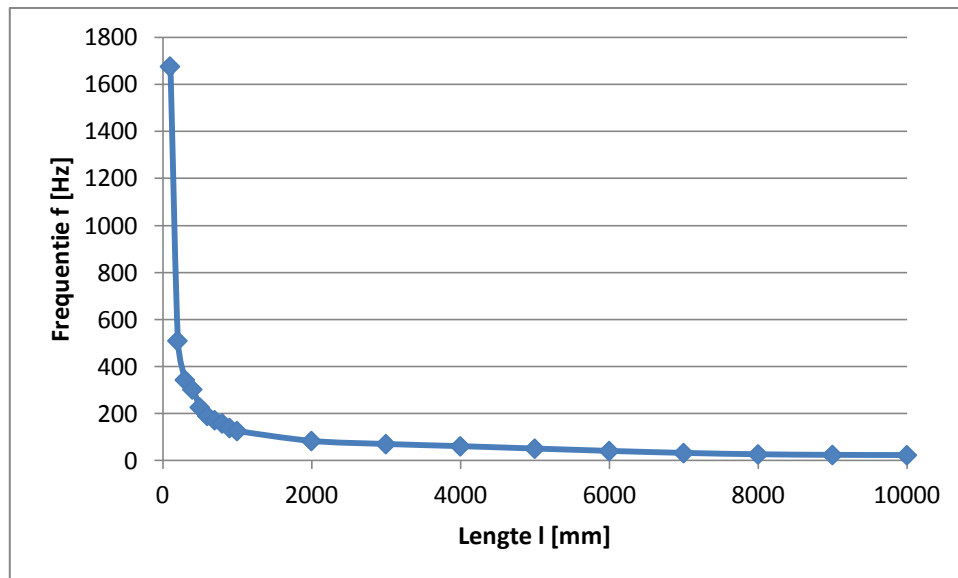
Tabel 7 Overige parameters t.b.v. verband afmetingen en laagste eigenfrequentie (dataset 5.2.1)

Als de afmetingen van de plaat dan gevarieerd worden van 100 mm bij 100 mm tot 10000 mm bij 10000 mm, worden met de modelberekening in Ansys de volgende laagste eigenfrequenties gevonden:

Lengte l [mm]	Frequentie f _e [Hz]	Knopen in y	Knopen in z
100	1676,3	2	2
200	509,51	2	2
300	343,1	2	2
400	302,6	2	2
500	226,5	2	3
600	190,4	2	3
700	171,82	2	3
800	158,19	2	4
900	138,58	2	4
1000	125,7	2	4
2000	83,315	2	5
3000	70,137	2	7
4000	60,872	2	8

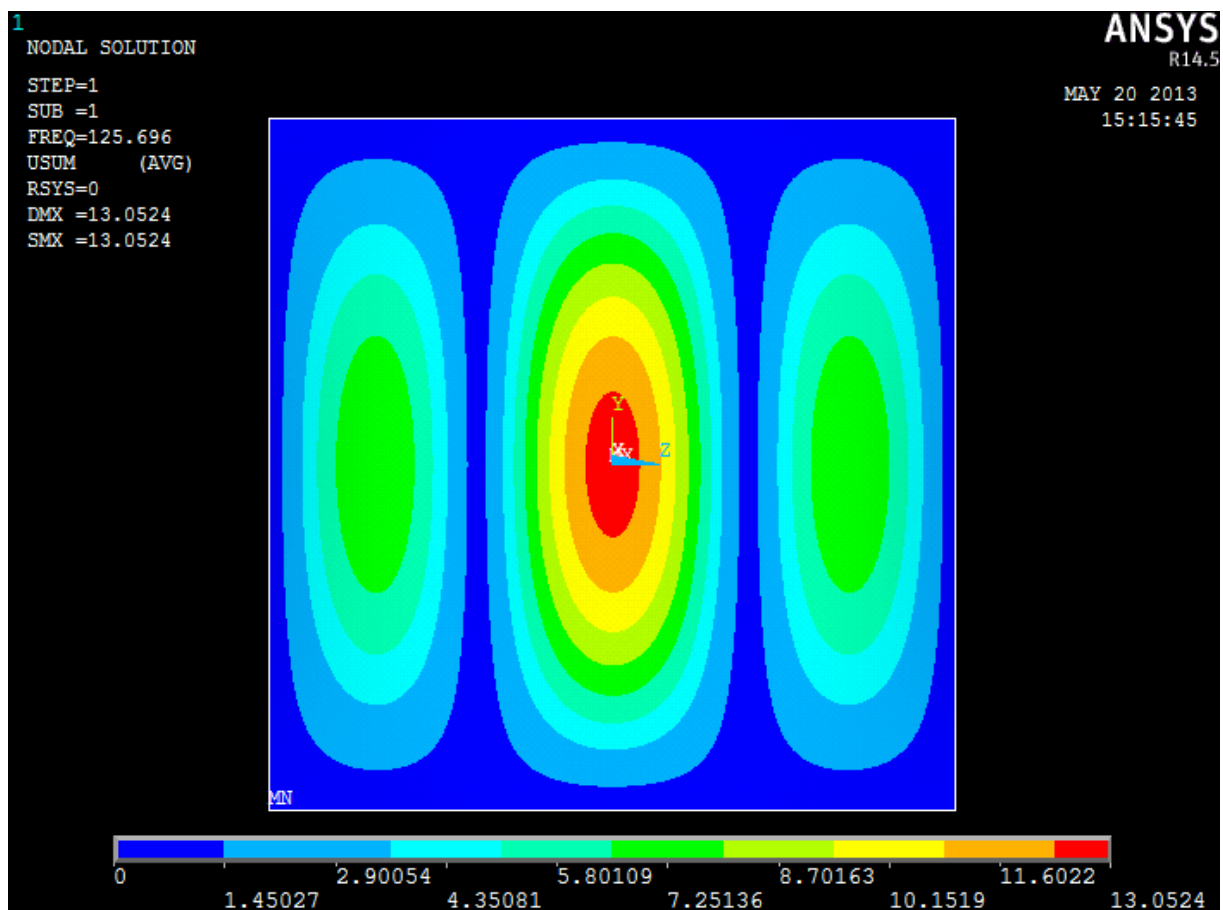
Tabel 8 Laagste eigenfrequentie bij verschillende afmetingen (dataset 5.2.1)

Te zien is dat de laagste eigenfrequentie bij groter wordende schalen steeds lager wordt, wat ook is wat je gevoelsmatig zou verwachten. Een kortere snaar brengt immers ook een hogere toon voort, dat wil zeggen, trilt sneller. Ook is te zien dat zich in het algemeen meer knopen in de richting bevinden met de sterkste kromming. Ook dit is gevoelsmatig correct, een schaal is in de sterkst gekromde richting naar verwachting stijver, en met meer knopen zal de uitwijking en dus de verandering in kromming (zie vergelijking (3.34)) minder groot zijn.



Figuur 5-2 Verband tussen lengte en laagste eigenfrequentie (dataset 5.2.1)

De vectorsom van de laagste modus van een schaal met afmetingen van duizend bij duizend millimeter is hieronder weergegeven. Te zien is dat er in de sterkst gekromde richting, de z-richting, vier knopen aanwezig zijn, en in de y-richting slechts twee.



Figuur 5-3 Laagste modus schaal 1000mm bij 1000mm (dataset 5.2.1)

In dit geval kan het verband tussen de afmetingen en de laagste eigenfrequentie als volgt weergegeven worden

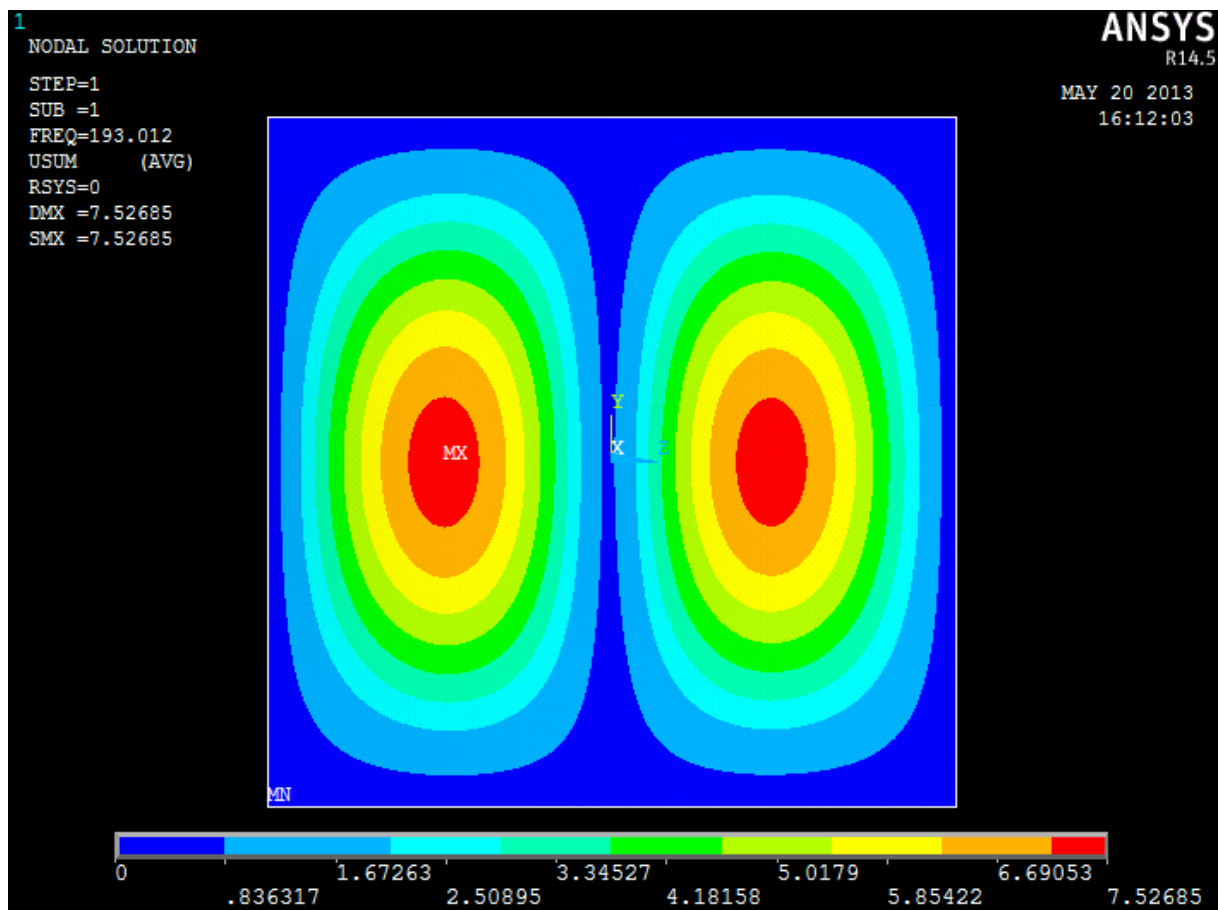
$$f_e \sim \frac{1}{\sqrt[5]{l^4}} \quad (5.2)$$

Om dit verband te controleren is nog een tweede modelberekening gedaan, met andere waarden voor de overige parameters:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	4000 mm
Kromtestraal r2	3000 mm
Dikte h	10 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio v	0,3
Dichtheid ρ	7,8 · 10 ⁻⁹ kg/mm ³

Tabel 9 Overige parameters t.b.v. verband afmetingen en laagste eigenfrequentie (dataset 5.2.2)

In dit geval ziet de vectorsom van de laagste modus van een schaal van duizend bij duizend millimeter eruit als in onderstaande figuur. In dit geval bevinden zich drie knopen in de sterkste gekromde richting, en twee in de andere richting.

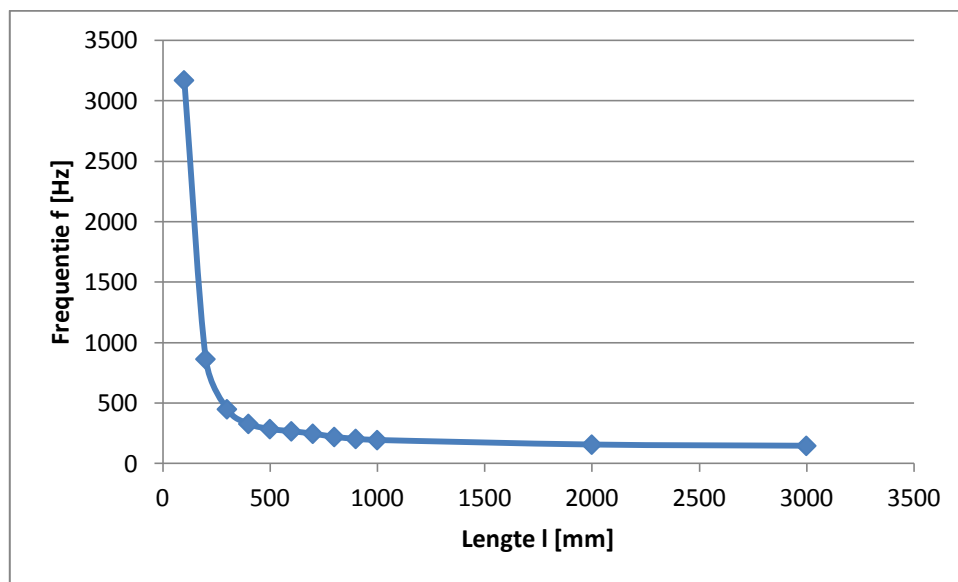


Figuur 5-4 Laagste modus schaal 1000mm bij 1000mm (dataset 5.2.2)

Met deze waarden worden de volgende laagste eigenfrequenties gevonden bij verschillende afmetingen van de platen:

Lengte l [mm]	Frequentie f_e [Hz]	Knopen in y	Knopen in z
100	3169,1	2	2
200	862,98	2	2
300	448,36	2	2
400	327,21	2	2
500	284,13	2	2
600	265,59	2	2
700	245,55	2	3
800	218,84	2	3
900	202,95	2	3
1000	193,01	2	3
2000	155,67	2	4
3000	145,7	2	5

Tabel 10 Laagste eigenfrequentie bij verschillende afmetingen (dataset 5.2.2)



Figuur 5-5 Verband tussen lengte en laagste eigenfrequentie (dataset 5.2.2)

In deze tweede set berekeningen wordt hetzelfde verband gevonden tussen de afmetingen van een schaal en de laagste eigenfrequentie. Voor de verhouding tussen de afmetingen van een plaat, en dus de kromtestraal in y-richting samen met de hoek tussen de uiteinden van de plaat, bestaat het volgende verband:

$$f_e \sim \frac{1}{\sqrt[5]{l^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(r_y \theta_y)^4}} \quad (5.3)$$

5.3 MATERIAALEIGENSCHAPPEN

De schalen zijn van een isotroop en uniform materiaal, en de materiaaleigenschappen kunnen dus uitgedrukt worden in de elasticiteitsmodulus E , de Poisson-ratio ν en de massa per volume-eenheid ρ . Hieronder zullen de invloeden van deze drie parameters besproken worden.

5.3.1 ELASTICITEITSMODULUS

Bij de modelberekeningen voor de invloed van de elasticiteitsmodulus zijn de overige parameters op de volgende waarden gehouden:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r_1	10000 mm
Kromtestraal r_2	2000 mm
Dikte h	5 mm
Hoek α	0,1 rad
Poisson-ratio ν	0,3
Dichtheid ρ	$7,8 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$

Tabel 11 Overige parameters t.b.v. verband elasticiteitsmodulus en laagste eigenfrequentie

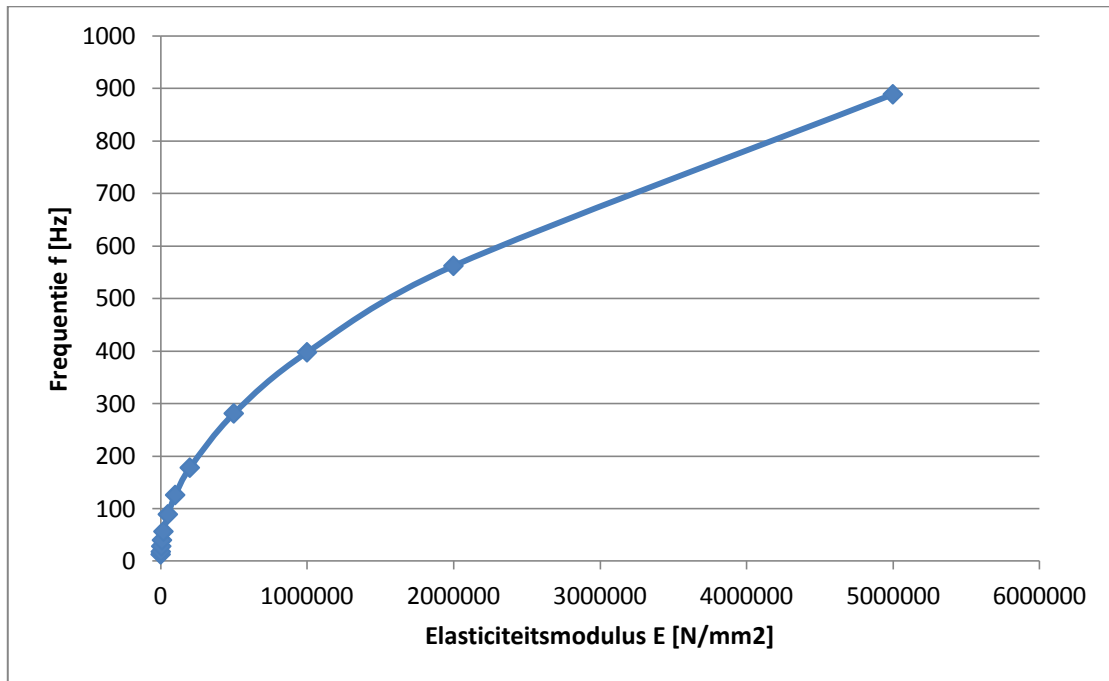
Voor een variatie van elasticiteitsmoduli worden dan de volgende laagste eigenfrequenties gevonden:

Elasticiteitsmodulus $E \text{ [N/mm}^2\text{]}$	Frequentie $f_e \text{ [Hz]}$
1000	12,57
2000	17,776
5000	28,106
10000	39,748
20000	56,213
50000	88,88
100000	125,7
200000	177,76
500000	281,06
1000000	397,48
2000000	562,13
5000000	888,8

Tabel 12 Laagste eigenfrequentie bij verschillende elasticiteitsmoduli

Het verband tussen de elasticiteitsmodulus en de laagste eigenfrequentie is uit de tabel al af te lezen, en wordt in een grafiek nog duidelijker: bij een verhonderdvoudiging van de elasticiteitsmodulus wordt de laagste eigenfrequentie tienmaal zo groot. Tussen de laagste eigenfrequentie en de elasticiteitsmodulus is dus het volgende verband te vinden:

$$f_e \sim \sqrt{E} \quad (5.4)$$



Figuur 5-6 Verband tussen de elasticiteitsmodulus en de laagste eigenfrequentie

5.3.2 DICHTHEID

Bij de modelberekeningen voor het verband tussen de dichtheid van de schaal en de laagste eigenfrequentie zijn de overige parameters op de volgende waarden gehouden:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	10000 mm
Kromtestraal r2	2000 mm
Dikte h	5 mm
Hoek a	0,1 rad
Poisson-ratio v	0,3
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²

Tabel 4 Overige parameters t.b.v. verband dichtheid en laagste eigenfrequentie

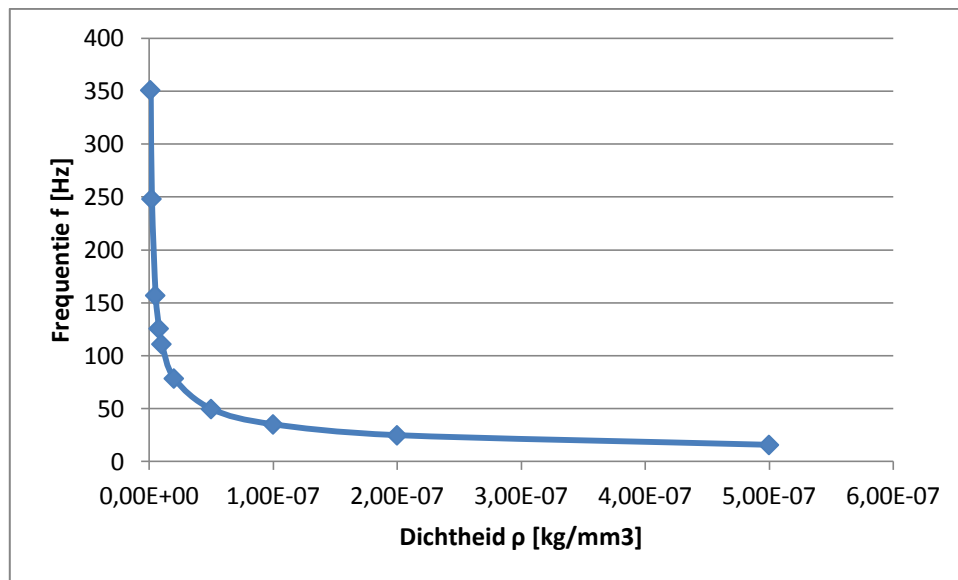
Voor een variatie van dichtheden worden dan de volgende laagste eigenfrequenties gevonden:

Dichtheid ρ [kg/mm ³]	Frequentie f_e [Hz]
1,0 · 10⁻⁹	351,05
2,0 · 10⁻⁹	248,23
5,0 · 10⁻⁹	156,99
7,8 · 10⁻⁹	125,7
1,0 · 10⁻⁸	111,01
2,0 · 10⁻⁸	78,497
5,0 · 10⁻⁸	49,646
1,0 · 10⁻⁷	35,105
2,0 · 10⁻⁷	24,823
5,0 · 10⁻⁷	15,699

Tabel 5 Laagste eigenfrequentie bij verschillende dichtheden

Wederom is uit tabel 5 al af te lezen dat bij een verhonderdvoudiging van de dichtheid de laagste eigenfrequentie tienmaal zo klein wordt. Dit is in een grafiek ook weer duidelijk zichtbaar. Voor de dichtheid van de schaal en de laagste eigenfrequentie is dus het volgende verband te vinden:

$$f_e \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (5.5)$$



Figuur 5-7 Verband tussen de dichtheid en de laagste eigenfrequentie

5.3.3 POISSON-RATIO

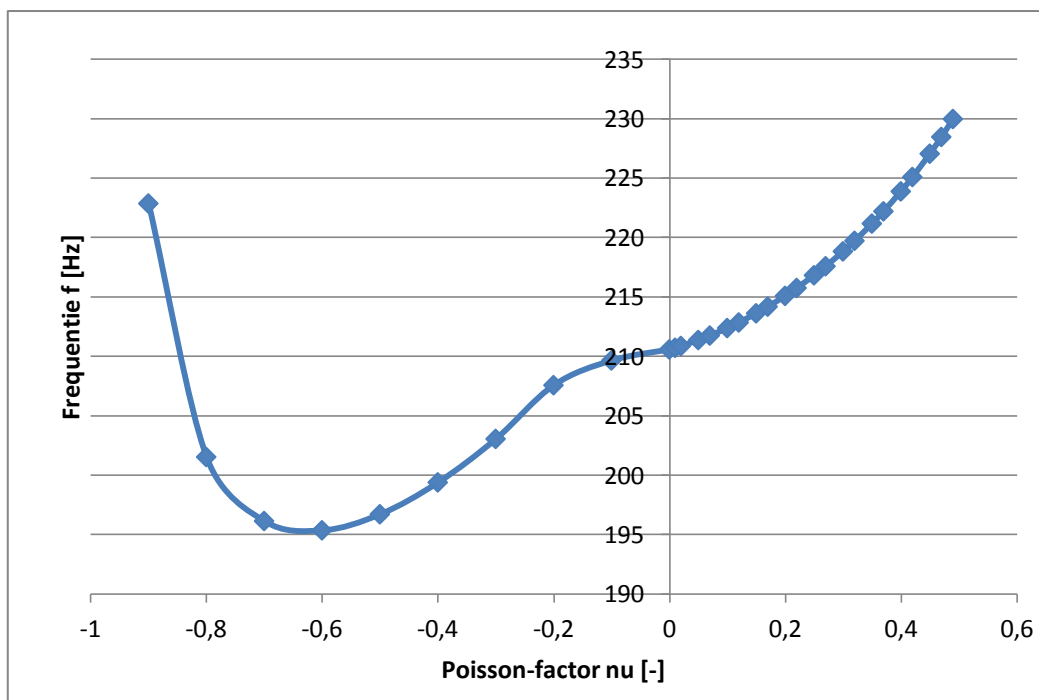
De Poisson-ratio (of dwarscontractiecoëfficiënt) is een maat voor de reactie van een materiaal op trek- of drukbelasting. De Poisson-ratio geeft aan welke rek er loodrecht op de belastingsrichting optreedt, in verhouding tot de rek in de richting van de belasting. De Poisson-ratio is dus als volgt gedefinieerd

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \quad (5.6)$$

Hierbij staat de belasting dus in de x-richting. In theorie kan de Poisson-ratio tussen de -1 en +0,5 liggen. Negatieve waarden voor de Poisson-ratio komen echter maar zeer zelden voor, dit betekent namelijk dat een materiaal bij rek in de ene hoofdrichting ook in de andere hoofdrichting zal rekken, wat zeer onnatuurlijk overkomt. Gebruikelijke waarden voor bouwmaterialen (beton, staal, aluminium) liggen omstreeks 0,20 tot 0,35. Over het volledige bereik ziet de afhankelijkheid van de laagste eigenfrequentie van de Poisson-ratio er uit als in onderstaande grafiek, met de overige parameters als weergegeven in onderstaande tabel

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	4000 mm
Kromtestraal r2	3000 mm
Dikte h	10 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Hoek a	0,2 rad
Dichtheid ρ	7,8 · 10 ⁻⁹ kg/mm ³

Tabel 13 Overige parameters t.b.v. verband Poisson-ratio en laagste eigenfrequentie (dataset 5.31)



Figuur 5-8 Verband tussen de Poisson-ratio en de laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.1)

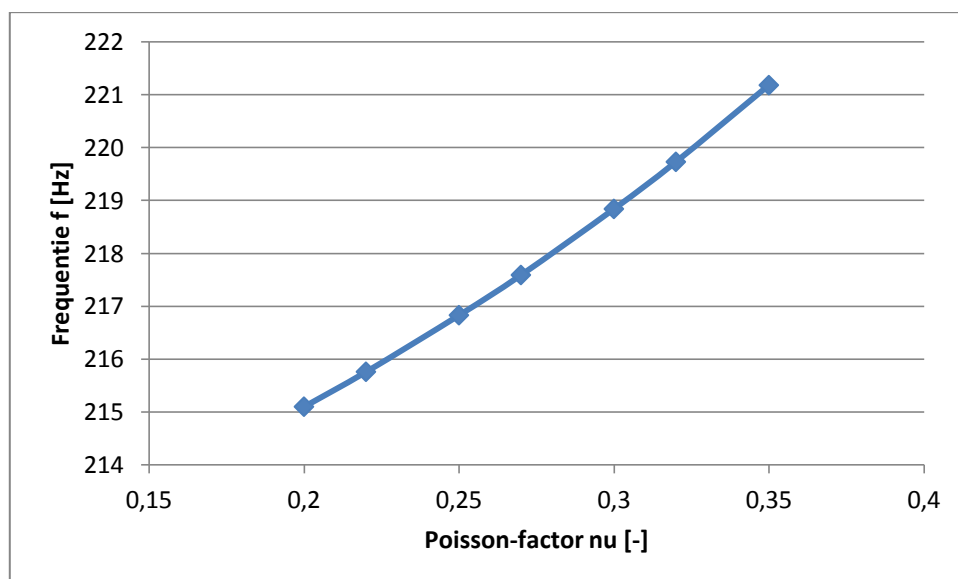
Te zien is dat de verhouding tussen de Poisson-ratio en de laagste eigenfrequentie voor positieve waarden voor de dwarscontractiecoëfficiënt te beschrijven is met een tweedegraads polynoom. Voor het deel dat interessant is met betrekking tot bouwmaterialen zou zelfs een lineaire functie kunnen voldoen, aangezien de invloed van de Poisson-factor in dit deel beperkt is en het verband op dit kleine interval ook vrij goed te lineariseren is. Dit is goed te zien in de onderstaande grafieken, waarvoor naast de parameters uit de tabel op de vorige pagina ook de parameters uit onderstaande tabellen gebruikt zijn.

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	10000 mm
Kromtestraal r2	2000 mm
Dikte h	5 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Hoek a	0,1 rad
Dichtheid ρ	$7,8 \cdot 10^{-9}$ kg/mm ³

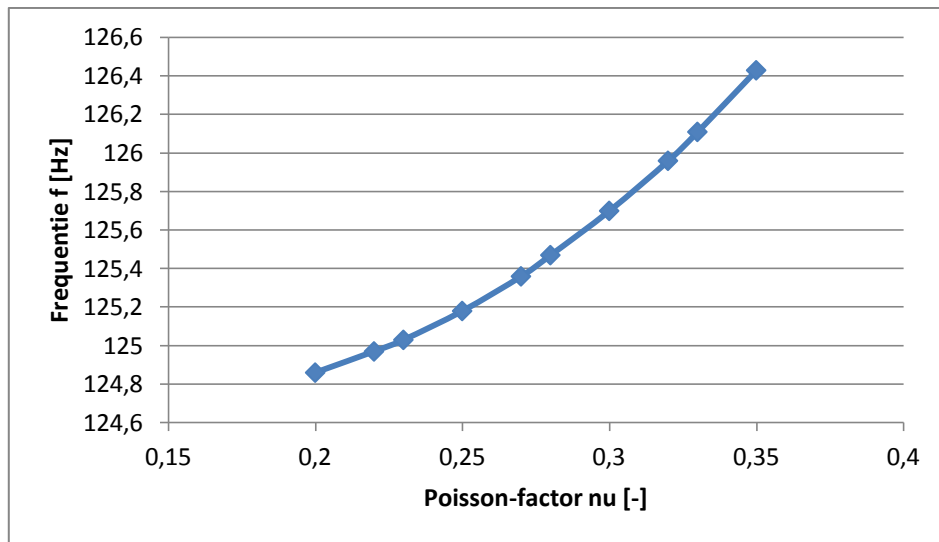
Tabel 14 Overige parameters t.b.v. verband Poisson-ratio en laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.2)

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r1	5000 mm
Kromtestraal r2	5000 mm
Dikte h	8 mm
Elasticiteitsmodulus E	200000 N/mm ²
Hoek a	0,2 rad
Dichtheid ρ	$2 \cdot 10^{-8}$ kg/mm ³

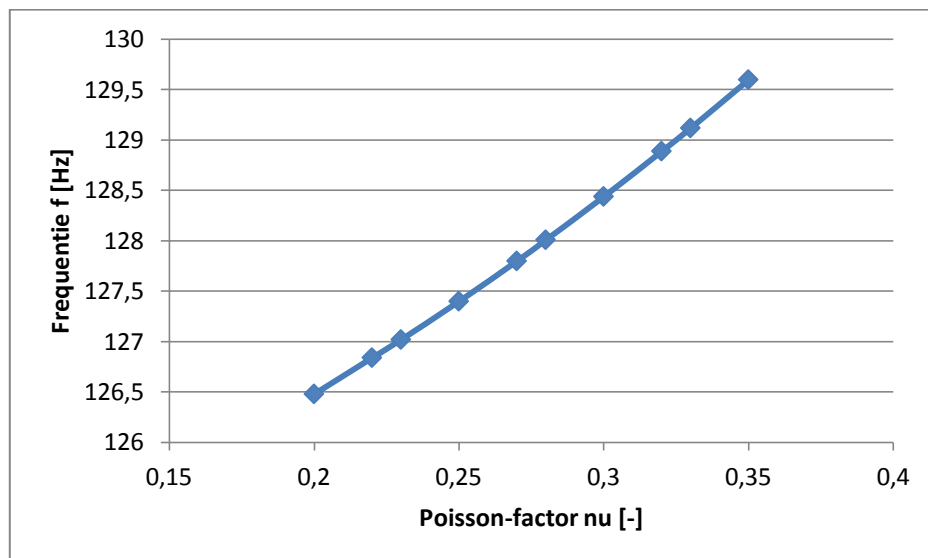
Tabel 15 Overige parameters t.b.v. verband Poisson-ratio en laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.3)



Figuur 5-9 Verband tussen Poisson-ratio (0,2-0,35) en laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.1)



Figuur 5-10 Verband tussen Poisson-ratio (0,2-0,35) en laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.2)



Figuur 5-11 Verband tussen Poisson-ratio (0,2-0,35) en laagste eigenfrequentie (dataset 5.3.3)

Als dus de beperking opgelegd wordt dat de ontwerpformule enkel geldig is binnen het regime van 0,2 tot 0,35, kan de invloed van de Poisson-factor beschreven worden met een simpel lineair verband. De invloed van de Poisson-factor voor de eigenfrequentie van gekromde panelen gemaakt van gangbare bouwmaterialen kan dus als volgt beschreven worden

$$f_e \sim c_1 \nu + c_2 \quad (5.7)$$

Dit komt vrij goed overeen met de factor die in de analytische formule gevonden wordt voor de Poisson-ratio, namelijk het onderstaande in het 'vlakke' deel

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)}} \quad (5.8)$$

5.4 VERHOUDING KROMTESTRALEN

Voor de verhouding van de kromtestralen wordt als uitgangspunt genomen dat dit altijd een getal is dat gelijk is aan of groter is dan één. Vanwege de keuze voor een vierkant paneel en een isotroop materiaal, is het onbelangrijk welke richting als y- en z-richting gekozen worden. Als de kromtestralen r_1 en r_2 genoemd worden, is r_1 dus altijd groter dan of gelijk aan r_2 . Verder is er bij deze berekeningen voor gekozen om de lengte en breedte van het paneel constant te houden, dus de hoek α tussen beide kanten van het paneel is omgekeerd evenredig met de verandering in de verhouding van de kromtestralen gevarieerd. Voor de berekeningen met Ansys zijn de overige parameters op de volgende waarden gehouden:

Grootheid	Waarde
Lengte l	1000 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio ν	0,3
Dichtheid ρ	$7,8 \cdot 10^{-9}$ kg/mm ³
Dikte h	5 mm

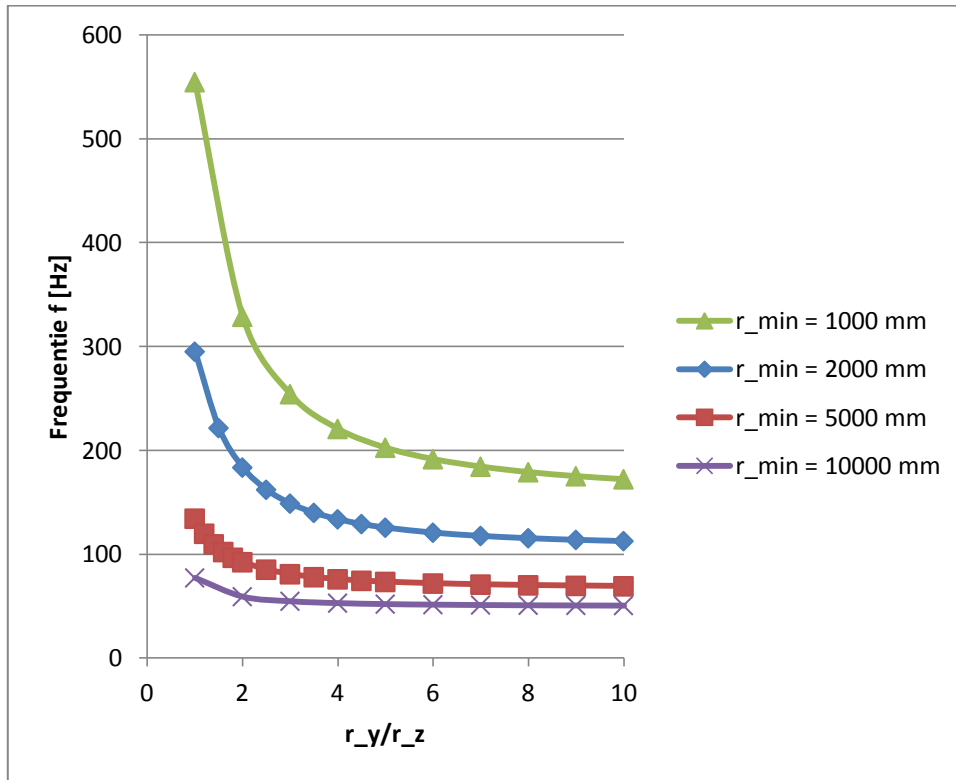
Tabel 16 Parameters t.b.v. verband verhouding kromtestralen en laagste eigenfrequentie (dataset 5.4.1)

Vervolgens is voor een viertal kleinste kromtestralen de modelberekening uitgevoerd, waarbij de verhouding tussen de kromtestralen gevarieerd is van één tot tien. Dit levert de resultaten op in onderstaande tabel:

r_1/r_2	f in [Hz] bij $r_{\min} = 1000$ mm	f in [Hz] bij $r_{\min} = 2000$ mm	f in [Hz] bij $r_{\min} = 5000$ mm	f in [Hz] bij $r_{\min} = 10000$ mm
1	554,73	295,18	134,36	77,336
2	328,79	183,59	92,455	59,294
3	254,25	148,88	80,883	54,85
4	220,77	133,74	75,997	53,056
5	202,66	125,7	73,432	52,136
6	191,67	120,87	71,893	51,591
7	184,44	117,72	70,884	51,237
8	179,15	115,53	70,18	50,991
9	175,26	113,94	69,663	50,812
10	172,31	112,74	69,27	50,676

Tabel 17 Laagste eigenfrequentie bij variërende verhouding kromtestralen (dataset 5.4.1)

In een grafiek levert dit het volgende beeld op:



Figuur 5-12 Laagste eigenfrequentie bij variërende verhouding kromtestralen (dataset 5.4.1)

Dit is een zeer interessant resultaat, want buiten de verschillen veroorzaakt door de kleinste kromtestraal, is in elke serie hetzelfde beeld te zien: een vrijwel exponentieel dalende functie, die bij een zeer grote verhouding tussen de kromtestralen nadert tot een minimum behorend bij die minimale kromtestraal. Dit asymptotische gedrag is ook te verwachten, in paragraaf 3.2 is immers een analytische oplossing gevonden voor een deel van een cilinder, en bij een zeer grote verhouding tussen de kromtestralen is dit ook de geometrie die verkregen wordt.

Voor een cilinder waren in paragraaf 3.2 (en 3.1) de volgende vergelijkingen gevonden

$$\omega_{ij,curved}^2 = \omega_{ij,flat}^2 + \frac{\alpha_{ij}E}{r^2\rho(1-\nu^2)} \quad i,j = 2,3, \dots \quad (5.9)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\left(\frac{i-1}{a}\right)^4 (1-\nu^2)}{\left(\left(\frac{i-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{a}\right)^2\right)^2} \quad (5.10)$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho a^4 \omega_{ij,flat}^2 12(1-\nu^2)}{\pi^4 E h^2} \quad (5.11)$$

$$\lambda^2 = D_x^4 + D_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} (\nu F_x F_y + (1-\nu) J_x J_y) \quad (5.12)$$

$$\text{met } D_x = i - 1 ; F_x = (i - 1)^2 ; J_x = (i - 1)^2$$

$$D_y = j - 1 ; F_y = (j - 1)^2 ; J_y = (j - 1)^2$$

Uit de Ansys berekeningen blijkt dat de laagste eigenfrequenties niet noodzakelijkerwijs gevonden worden bij $i = 2$ en $j = 2$, dus een halve staande golf in beide richtingen. Er is daarom gekozen om steeds het aantal knopen uit Ansys over te nemen en in de analytische berekening in te vullen. De resultaten hiervan, met verder dezelfde parameters als de Ansys-metingen hierboven, zijn in de tabel hieronder weergegeven (in bijlage 2 is het gebruikte Maple-script te zien). In de meest rechtse kolom is de laagste eigenfrequentie weergegeven die met behulp van Ansys bevonden wordt als één van beide kromtestralen zeer groot gekozen wordt.

Kromtestraal cilinder [mm]	Laagste eigenfrequentie analytisch [Hz]	Laagste eigenfrequentie Ansys [Hz]	Vershil [%]
1000 ($i = 2, j = 4$)	102,42	153,27	- 33,2 %
2000 ($i = 2, j = 4$)	89,74	105,17	- 14,7 %
5000 ($i = 2, j = 3$)	48,27	66,60	- 27,5 %
10000 ($i = 2, j = 3$)	44,05	49,76	- 11,5 %
20000 ($i = 2, j = 2$)	22,20	31,76	- 30,1 %
50000 ($i = 2, j = 2$)	17,95	20,13	- 10,8 %
100000 ($i = 2, j = 2$)	17,26	17,83	- 3,20 %
200000 ($i = 2, j = 2$)	17,08	17,21	- 0,755 %
500000 ($i = 2, j = 2$)	17,03	17,03	0,000 %

Tabel 18 Laagste eigenfrequenties van cilinderschillen met verschillende stralen (dataset 5.4.1)

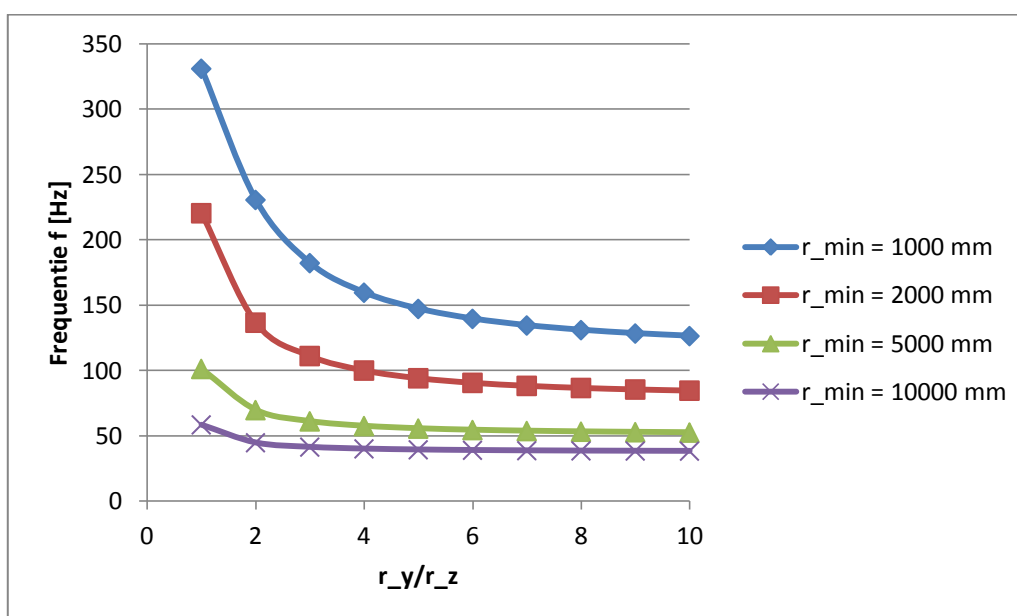
Hieraan is te zien dat de analytische aanpak consequent tot te hoge waarden voor de laagste eigenfrequentie leidt. Slechts als de kromming vrijwel volledig uit de plaat verdwenen is, is de analytische aanpak een goede indicatie voor de werkelijke laagste eigenfrequentie.

De bovenstaande procedure is herhaald met andere vaste waarden voor de overige parameters, om te zien of de conclusies die aan de hand van het bovenstaande getrokken kunnen worden correct zijn. Hiervoor zijn de volgende parameters gebruikt:

Grootheid	Waarde
Lengte l	2000 mm
Elasticiteitsmodulus E	150000 N/mm ²
Poisson-ratio ν	0,25
Dichtheid ρ	$2 \cdot 10^{-8}$ kg/mm ³
Dikte h	20 mm

Tabel 19 Parameters t.b.v. verband verhouding kromtestralen en laagste eigenfrequentie (dataset 5.4.2)

In een grafiek levert dit bij vier minimale kromtestralen het volgende beeld op:



Figuur 5-13 Laagste eigenfrequentie bij variërende verhouding kromtestralen (dataset 5.4.2)

Hier is dus wederom te zien dat de laagste eigenfrequenties bij een zeer grote verhouding tussen de kromtestralen een zekere limiet naderen. Er kan dus weer gekeken worden hoe precies de formule van Blevins is bij bepaalde stralen van een cilinder:

Kromtestraal cilinder [mm]	Laagste eigenfrequentie analytisch [Hz]	Laagste eigenfrequentie Ansys [Hz]	Vershil [%]
1000 (i = 2, j = 4)	77,54	113,66	- 31,8 %
2000 (i = 2, j = 4)	67,73	79,14	- 14,4 %
5000 (i = 2, j = 3)	36,50	50,65	- 27,9 %
10000 (i = 2, j = 3)	33,23	37,63	- 11,7 %
20000 (i = 2, j = 2)	16,83	23,95	- 29,7 %
50000 (i = 2, j = 2)	13,55	15,15	- 10,6 %
100000 (i = 2, j = 2)	13,01	13,41	- 2,98 %
200000 (i = 2, j = 2)	12,87	12,93	- 0,464 %
500000 (i = 2, j = 2)	12,83	12,80	+ 0,234 %

Tabel 20 Laagste eigenfrequenties van cilinderschillen met verschillende stralen (dataset 5.4.2)

Opvallend is dat de afwijking van de analytische formule steeds na de overstap naar een andere modus vrij groot is, waarna de analytische formule weer preciezer wordt bij grotere stralen binnen dezelfde modus.

De meetresultaten die gebruikt zijn voor figuur 5-12 kunnen ook vergeleken worden met de formule die op analytische wijze gevonden is voor schalen die in beide richtingen gekromd zijn. De resultaten hiervan staan in de tabellen op de volgende pagina. Het gebruikte script in Maple is in bijlage 3 te vinden.

Kromtestraal r_y [mm]	Kromtestraal r_z [mm]	Laagste eigen- frequentie analytisch [Hz]	Laagste eigen- frequentie Ansys [Hz]	Vershil [%]
1000 (i = 4, j = 4)	1000	590,09	554,73	+ 6,52 %
2000 (i = 2, j = 5)	1000	324,65	328,79	- 1,26 %
3000 (i = 2, j = 5)	1000	244,86	254,25	- 3,69 %
4000 (i = 2, j = 5)	1000	209,13	220,77	- 5,27 %
5000 (i = 2, j = 5)	1000	189,95	202,66	- 6,27 %
6000 (i = 2, j = 5)	1000	178,45	191,67	- 6,90 %
7000 (i = 2, j = 4)	1000	131,46	184,44	- 28,7 %
8000 (i = 2, j = 4)	1000	124,16	179,15	- 30,7 %
9000 (i = 2, j = 4)	1000	118,74	175,26	- 32,2 %
10000 (i = 2, j = 4)	1000	114,57	172,31	- 33,5%

Tabel 21 Vergelijking Ansys met analytische formule r_min = 1000 mm (dataset 5.4.1)

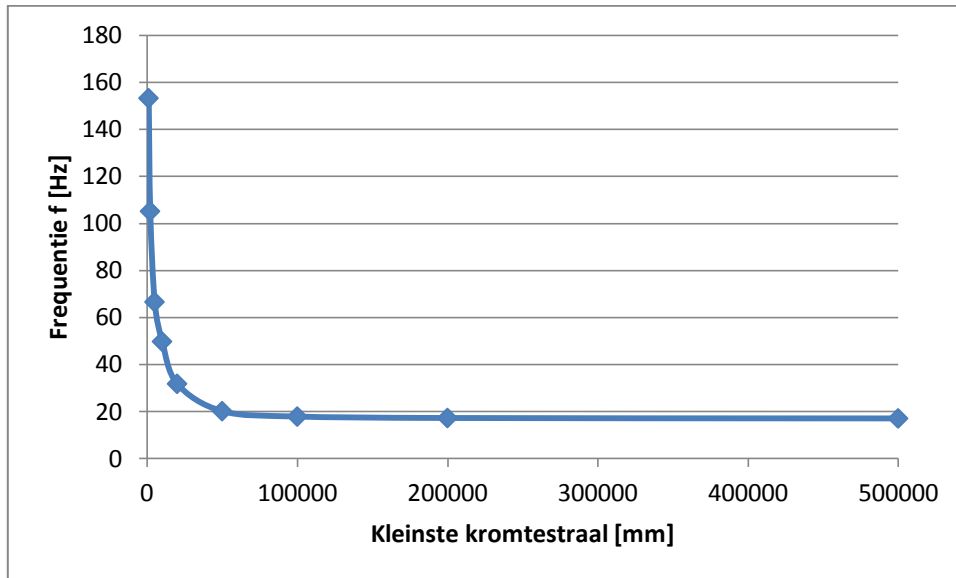
Kromtestraal r_y [mm]	Kromtestraal r_z [mm]	Laagste eigen- frequentie analytisch [Hz]	Laagste eigen- frequentie Ansys [Hz]	Vershil [%]
5000 (i = 2, j = 3)	5000	121,66	134,36	- 9,45 %
10000 (i = 2, j = 3)	5000	75,76	92,455	- 18,1 %
15000 (i = 2, j = 3)	5000	62,36	80,883	- 22,9 %
20000 (i = 2, j = 3)	5000	56,41	75,997	- 25,8 %
25000 (i = 2, j = 3)	5000	53,19	73,432	- 27,6 %
30000 (i = 2, j = 3)	5000	51,21	71,893	- 28,8 %
35000 (i = 2, j = 3)	5000	49,89	70,884	- 29,6 %
40000 (i = 2, j = 3)	5000	48,96	70,18	- 30,2 %
45000 (i = 2, j = 3)	5000	48,27	69,663	- 30,7 %
50000 (i = 2, j = 3)	5000	47,74	69,27	- 31,1 %

Tabel 22 Vergelijking Ansys met analytische formule r_min = 5000 mm (dataset 5.4.1)

Vooraf bij grotere verhoudingen tussen de kromtestralen is deze formule dus bepaald niet nauwkeurig, en deze formule van Leissa en Kadi is helaas dus niet goed bruikbaar als benadering voor de laagste eigenfrequentie van een gekromd paneel.

5.5 KLEINSTE KROMTESTRAAL

Voor de beschouwing van het effect van de kleinste kromtestraal kan gebruik gemaakt worden van de resultaten in tabel 4. De verhouding tussen de kromtestralen is hier weliswaar niet constant gehouden, maar deze verhouding varieert van 200:1 tot 100.000:1 en bevindt zich dus geheel in het asymptotische gebied dat in figuur 5-1 waargenomen is. De variatie van de verhouding tussen de kromtestralen is hier dus te verwaarlozen. In een grafiek ziet deze relatie er als volgt uit:



Figuur 5-14 Verband kleinste kromtestraal en laagste eigenfrequentie

Het is dus duidelijk dat de eigenfrequentie van een gekromd paneel bij een steeds groter wordende kromtestraal nadert richting een asymptoot, die gegeven is door de eigenfrequentie van een vlakke plaat. Vanuit het analytische werk in hoofdstuk 3 was dit natuurlijk al te voorspellen, maar het is zeer prettig dat de modelberekeningen in Ansys deze aanname bevestigen.

6. OPSTELLEN ONTWERPFORMULE

Voor het opstellen van de ontwerpformule is de beste keuze om te werken vanuit bekende gegevens. In dit geval is dat de formule voor de vlakke plaat van Warburton (1954), die in paragraaf 3.1 besproken is. Uit de metingen met Ansys blijkt dat deze formule correct is, en dus is gekozen om deze als uitgangspunt te nemen. Uit de metingen met Ansys is ook gebleken dat de trillingsvorm bij een vlakke plaat in de laagste eigenfrequentie altijd bestaat uit twee knopen en één buik in beide richtingen. De formule voor de vlakke plaat wordt dan dus

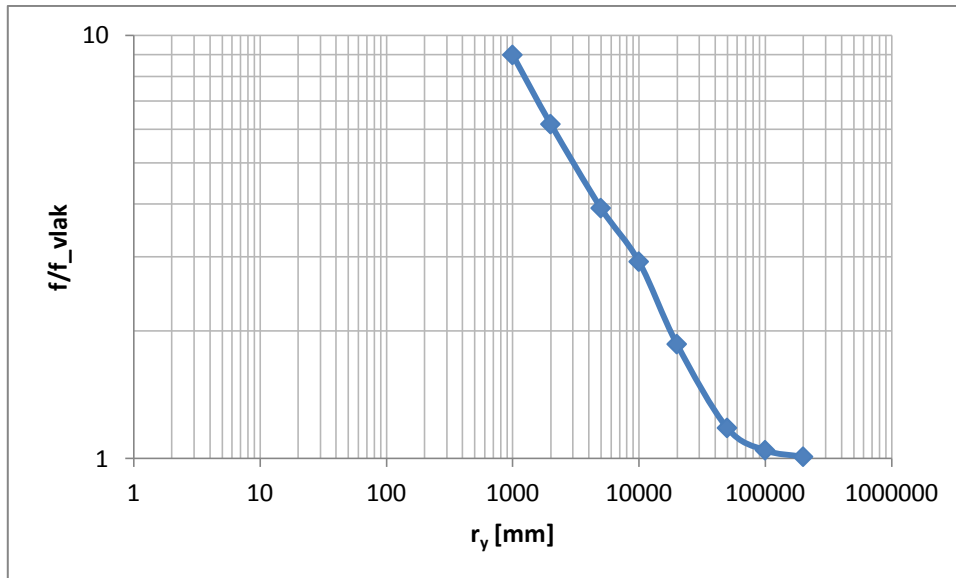
$$f_{vlak} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi^4 E h^2}{\rho a^4 12(1-\nu^2)}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12(1-\nu^2)}} \quad (6.1)$$

Op basis van de vorm die in paragraaf 5.5 gevonden is voor de laagste eigenfrequentie als functie van de kleinste kromtestraal, is de verwachting dat de formule voor een cilinder er als volgt uit zal zien

$$f_{cilinder} = f_{vlak} * c_1 * r^m \quad (6.2)$$

Tot een kromtestraal van 50000 mm geeft deze functie een zeer goed resultaat, zoals in de logaritmische grafiek op de volgende pagina te zien is. Er is een vrijwel rechte lijn te zien, dat wil dus zeggen dat de verhouding tussen de laagste eigenfrequentie van een cilinder en een vlakke plaat goed kan worden beschreven met een machtsfunctie. De coëfficiënten die hier dan bij horen zijn simpel te bepalen door twee van de punten in de grafiek te kiezen en dan de twee ontstane vergelijkingen met c_1 en m als onbekenden op te lossen. Dit geeft

$$c_1 = 324,32 ; m = -0,52 \quad (6.3)$$

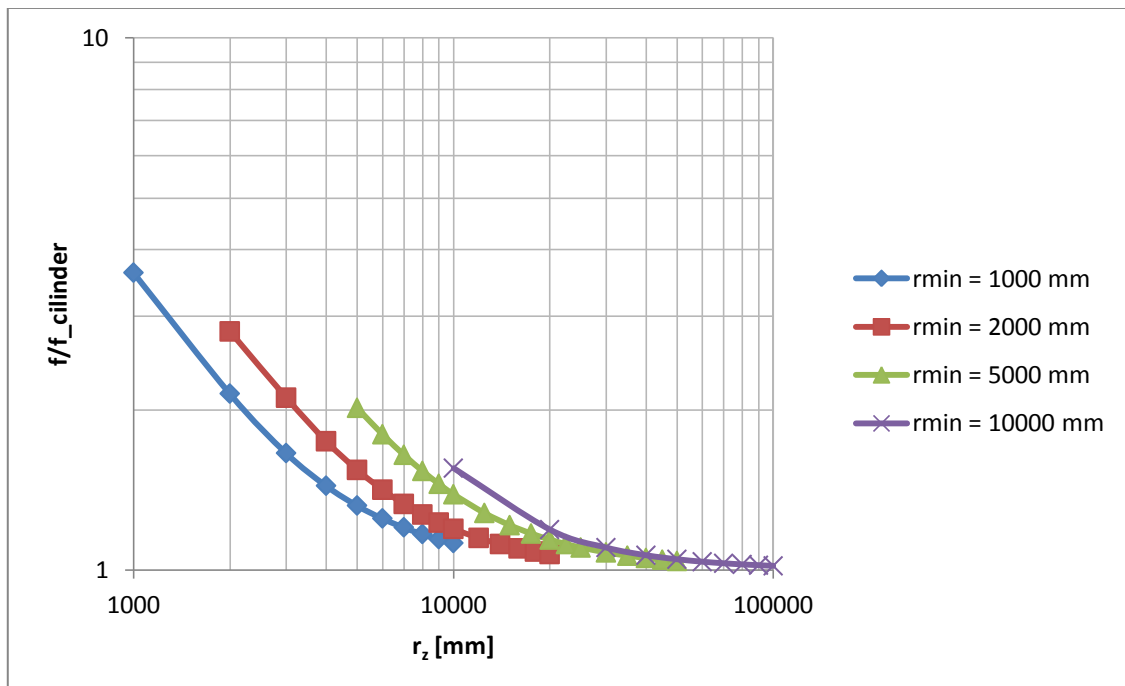


Figuur 6-1 Verband tussen laagste eigenfrequentie cilinder t.o.v. een vlakke plaat en de straal in y-richting op logaritmische schaal

Voor de formule voor de cilinder geeft dit het volgende

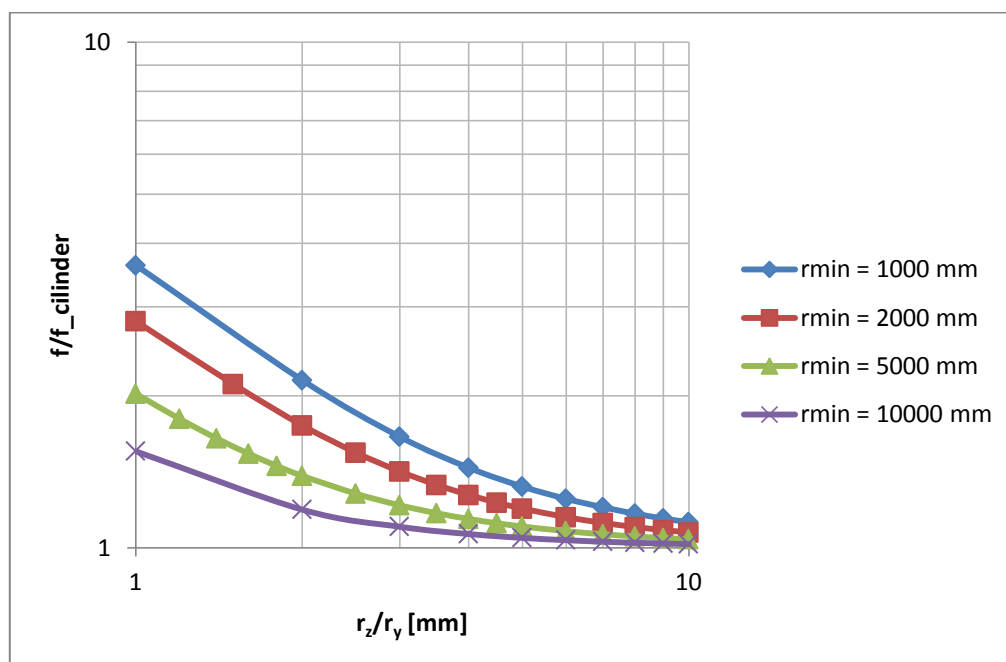
$$f_{cilinder} = 324,32 * r_y^{-0,52} \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} \quad (6.4)$$

Deze zelfde methode kan natuurlijk toegepast worden voor de tweede kromtestraal, die in z-richting. Op logaritmische schaal levert dat onderstaande grafiek op



Figuur 6-2 Verband tussen laagste eigenfrequentie gekromd paneel t.o.v. cilinder en de straal in z-richting op logaritmische schaal

De overeenkomst tussen deze vier reeksen is evident, maar voor het opstellen van de ontwerpformule is het handiger om r_z/r_y te gebruiken op de horizontale as



Figuur 6-3 Verband tussen laagste eigenfrequentie gekromd paneel t.o.v. cilinder en de verhouding van de stralen op logaritmische schaal

Hier kunnen steeds twee rechte lijnen doorheen getrokken worden, één van r_z/r_y is één tot ongeveer drie en een rechte lijn vanaf r_z/r_y is drie tot tien. Wederom kan de frequentie van een gekromd paneel dus uitgedrukt worden in een machtsfunctie, de coëfficiënten zijn nu echter verschillend binnen twee regimes. De frequentie wordt als volgt uitgedrukt

$$f_{\text{gekromd}} = f_{\text{cilinder}} * c_2 * \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^l \quad (6.5)$$

De coëfficiënten die dan bij de verschillende kleinste kromtestralen en verschillende regimes horen zijn de volgende

r_y [mm]	$1 \leq r_z/r_y \leq 3$		$3 \leq r_z/r_y$	
	c_2	l	c_2	l
1000	3,6193	- 0,7101	2,3658	- 0,3231
2000	2,8067	- 0,6230	1,8245	- 0,2309
5000	2,0174	- 0,4620	1,4000	- 0,1287
10000	1,5542	- 0,3127	1,1848	- 0,0657

Tabel 23 Coëfficiënten bij verhouding kromtestralen voor verschillende kleinste kromtestralen

Deze coëfficiënten kunnen weer beschreven worden als functies van de kleinste kromtestraal r_y . De volgende beschrijvingen worden dan gevonden

$$\begin{cases} c_2 = 45,71 * r_y^{-0,367}; l = -0,778 * e^{-9,1*10^{-5}*r_y} = -0,778 * 0,99990^{r_y} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3 \\ c_2 = 18,84 * r_y^{-0,3}; l = -0,386 * e^{-1,77*10^{-4}*r_y} = -0,386 * 0,99982^{r_y} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y} \end{cases} \quad (6.6)$$

Met deze coëfficiënten is de ontwerpformule voor gekromde panelen met afmetingen 1000 x 1000 mm² en dikte 5 mm dan in principe bekend, en ook de materiaalfactoren zitten er al in voldoende mate in verwerkt. Dit geeft de volgende ontwerpformule

$$f_{\text{gekromd}} = \begin{cases} 14,82 * 10^3 * r_y^{-0,887} * \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990^{r_y}} * \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3 \\ 6,11 * 10^3 * r_y^{-0,82} * \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982^{r_y}} * \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y} \end{cases} \quad (6.7)$$

Nu moet de invloed van de dikte en de lengte van het paneel er nog in verwerkt worden. Deze factoren zitten natuurlijk al wel in de formule voor de vlakke plaat, maar door de kromming worden bij andere afmetingen en diktes ook andere trillingsvormen gevonden en is de relatie dus anders dan hierboven beschreven. Hiervoor moet wederom naar beide regimes gekeken worden. Uit analyse van de gegevens besproken in paragraaf 5.1 blijkt dat h in bovenstaande formules vervangen moet worden door respectievelijk

$$\begin{cases} 0,142 * h + 4,153 & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3 \\ 0,429 * h + 2,612 & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y} \end{cases} \quad (6.8)$$

Dit geldt voor het deel waar $r_y/h < 230$. Daarboven zijn de hellingen anders en moeten dus ook andere functies voor h gebruikt worden

$$\begin{cases} 0,111 * h + 4,223 & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} < 230 \\ 0,201 * h + 4,441 & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} > 230 \end{cases} \quad (6.9)$$

Hiermee zijn is de invloed van de dikte van het paneel bekend, nu moet enkel nog de invloed van de afmetingen van het paneel in de formule gebracht worden. In de formule zoals die hierboven staat, valt de frequentie af met $1/a^2$, terwijl uit de resultaten van paragraaf 5.2 blijkt dat dit $1/a^{4/5}$ moet zijn, en omdat de vergelijkingen hierboven bij $a = 1000$ mm afgeleid zijn, moet de extra factor die hiervoor ingebracht wordt gelijk zijn aan één bij $a = 1000$ mm. Het makkelijkst is het dus om de formules hierboven simpelweg met de volgende factor te vermenigvuldigen

$$\frac{1}{1000^{6/5}} a^{6/5} = \left(\frac{a}{1000}\right)^{6/5} \quad (6.10)$$

Hiermee wordt precies aan de hiervoor gevraagde voorwaarden voldaan. Met deze laatste factor is dus de gehele ontwerpformule bekend, waarbij natuurlijk wel de opmerking moet worden geplaatst dat op basis van de geometrie een keuze gemaakt moet worden uit vier varianten. De voorwaarden hierbij zijn gelukkig erg simpel. De ontwerpformule wordt dus gegeven door de volgende set vergelijkingen

$$f_n = \begin{cases} 3,7226r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990^{r_y}} \sqrt{\frac{\pi^2 E(0,142h + 4,153)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{6/5} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 3,7226r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990^{r_y}} \sqrt{\frac{\pi^2 E(0,111h + 4,223)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{6/5} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} < 230 \\ 1,5348r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982^{r_y}} \sqrt{\frac{\pi^2 E(0,429h + 2,612)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{6/5} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 1,5348r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982^{r_y}} \sqrt{\frac{\pi^2 E(0,201h + 4,441)^2}{\rho a^4 12(1 - \nu^2)}} a^{6/5} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} < 230 \end{cases} \quad (6.11)$$

7. CONTROLE ONTWERPFORMULE EN VASTSTELLEN NAUWKEURIGHEID

De ontwerpformule die in het voorgaande hoofdstuk afgeleid is kan nu getoetst worden aan de hand van de metingen die gedaan zijn voor hoofdstuk 5. Hiermee kan bepaald worden op welke intervallen de ontwerpformule voldoende nauwkeurig is en kunnen indien noodzakelijk nog kleine aanpassingen gedaan worden. De uitgangspunten bij de controle van de ontwerpformule zijn dat het paneel aan alle kanten scharnierend is opgelegd en dat de variabelen de volgende waarden hebben als ze niet gevarieerd worden:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r_z	10000 mm
Kromtestraal r_y	2000 mm
Lengte a	1000 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio ν	0,3
Dichtheid ρ	$7,8 \cdot 10^{-9}$ kg/mm ³
Dikte h	5 mm

Tabel 24 Waarden parameters bij geen variatie t.b.v. controle ontwerpformule

7.1 DIKTE

In onderstaande tabel wordt de waarde die met Ansys gevonden wordt bij variatie van de dikte van een gekromd paneel vergeleken met de waarde die de ontwerpformule geeft. In de laatste kolom is het verschil ten opzichte van de waarde die Ansys geeft gegeven. Het verschil blijft overal binnen de 5% die als doel gesteld was.

Dikte paneel [mm]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1	80,535	80,538	-0,0037%
2	91,90	94,599	-2,8531%
3	103,26	107,29	-3,7562%
4	114,62	115,93	-1,1300%
5	125,98	125,7	0,2228%
6	137,34	136,47	0,6375%
7	148,70	148,02	0,4594%
8	160,06	160,12	-0,0375%
9	165,52	165,52	0,0000%
10	170,84	170,05	0,4646%
11	176,16	174,68	0,8473%
12	181,49	179,48	1,1199%
13	186,81	184,46	1,2740%
14	192,13	189,63	1,3184%
15	197,46	194,98	1,2719%
20	224,07	224,08	-0,0045%
25	250,69	256,16	-2,1354%
30	277,13	290,10	-4,4709%
35	303,92	306,92	-0,9775%

Tabel 25 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequenties uit Ansys bij variërende dikte

7.2 AFMETINGEN

In de onderstaande tabel zijn de resultaten van de berekeningen met Ansys en de uitkomsten van de ontwerpformule voor wisselende afmetingen van het paneel weergegeven. Te zien is dat de formule van 300 mm tot ongeveer 2000 mm vrij goede resultaten geeft, en dat de absolute afwijking bij grotere afmetingen ook steeds kleiner wordt. Tussen de 3000 en 7000 mm zijn de resultaten echter niet erg accuraat.

Lengte paneel [mm]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
100	794,88	1676,3	-52,5813%
200	456,51	509,51	-10,4022%
300	330,07	343,1	-3,7977%
400	262,21	302,6	-13,3477%
500	219,34	226,5	-3,1611%
600	189,57	190,4	-0,4359%
700	167,58	171,82	-2,4677%
800	150,60	158,19	-4,7980%
900	137,06	138,58	-1,0968%
1000	125,98	125,7	0,2228%
2000	72,357	83,315	-13,1525%
3000	52,313	70,137	-25,4131%
4000	41,558	60,872	-31,7289%
5000	34,764	50,73	-31,4725%
6000	30,046	40,737	-26,2440%
7000	26,560	32,165	-17,4258%
8000	23,869	26,427	-9,6795%
9000	21,722	23,888	-9,0673%
10000	19,967	22,981	-13,1152%

Tabel 26 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende afmetingen (dataset 7.2.1)

Om te onderzoeken waar de grote afwijkingen aan kunnen liggen, is een tweede dataset gebruikt. De overige parameters zijn hierbij op de volgende waarden gesteld:

Grootheid	Waarde
Kromtestraal r_z	4000 mm
Kromtestraal r_y	3000 mm
Elasticiteitsmodulus E	100000 N/mm ²
Poisson-ratio ν	0,3
Dichtheid ρ	7,8 · 10 ⁻⁹ kg/mm ³
Dikte h	10 mm

Tabel 27 Waarden parameters bij geen variatie t.b.v. controle ontwerpformule (dataset 7.2.2)

Lengte paneel [mm]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
100	1184,7	3169,1	-62,6171%
200	680,41	862,98	-21,1558%
300	491,92	448,36	9,7154%
400	390,79	327,21	19,4309%
500	326,90	284,13	15,0530%
600	282,54	265,59	6,3820%
700	249,76	245,55	1,7145%
800	224,45	218,84	2,5635%
900	204,27	202,95	0,6504%
1000	187,76	193,01	-2,7201%

Tabel 28 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende afmetingen (dataset 7.2.2)

Hier is wederom te zien dat de formule rond 1000 mm goed accuraat is, bij veel lagere en hogere waarden voor de lengte en breedte van het paneel is dit veel minder. Dit is te verklaren doordat de verschillende trillingsvormen bij variatie van de afmetingen een zeer belangrijke rol gaan spelen, en er is bewust voor gekozen deze buiten de ontwerpformule te laten, omdat het moeilijk is de trillingsvorm te bepalen zonder direct een model te laten draaien. Hier zal dus een beperking op gezet moeten worden voor het gebied waar de ontwerpformule goede resultaten oplevert.

7.3 MATERIAALEIGENSCHAPPEN

De materiaaleigenschappen worden uitgedrukt in de dichtheid, de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoëfficiënt. Deze worden hieronder elk apart besproken.

7.3.1 ELASTICITEITSMODULUS

In de tabel hieronder worden de resultaten van de modelberekeningen met Ansys en de uitkomsten van de ontwerpformule vergeleken. Te zien is dat de resultaten ruimschoots binnen de gestelde grens van 5% vallen. Dit was ook te verwachten, de elasticiteitsmodulus zit gewoon onder een wortel in de ontwerpformule.

E-modulus [N/mm ²]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1000	12,598	12,57	0,2228%
2000	17,816	17,776	0,2250%
5000	28,170	28,106	0,2277%
10000	39,838	39,748	0,2264%
20000	56,340	56,213	0,2259%
50000	89,082	88,88	0,2273%
100000	125,98	125,7	0,2228%
200000	178,16	177,76	0,2250%

Tabel 29 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende E-modulus

7.3.2 DICHTHEID

Voor de dichtheid geldt eigenlijk hetzelfde als voor de elasticiteitsmodulus, behalve dat het hier gaat om één gedeeld door de wortel van de dichtheid. Wederom komen de waarden zeer goed overeen, en vanwege de manier waarop de dichtheid in de ontwerpformule zit en de manier waarop de Ansys-code opgebouwd is, is de relatieve afwijking bij elke dichtheid gelijk.

Dichtheid [kg/mm ³]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1,00E-09	351,84	351,05	0,2250%
2,00E-09	248,79	248,23	0,2256%
5,00E-09	157,35	156,99	0,2293%
7,80E-09	125,98	125,7	0,2228%
1,00E-08	111,26	111,01	0,2252%
2,00E-08	78,675	78,497	0,2268%
5,00E-08	49,758	49,646	0,2256%
1,00E-07	35,184	35,105	0,2250%

Tabel 30 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende dichtheid

7.3.3 POISSON-RATIO

Voor de Poisson-ratio (dwarscontractiecoëfficiënt) wordt alleen naar het deel tussen 0,20 en 0,35 gekeken, omdat alle bouwmaterialen zich in dit deel bevinden. De accuraatheid van de ontwerpformule is het best rond een Poisson-factor van 0,3, en wordt richting de beide grenzen iets minder goed. De ontwerpformule blijft echter ruimschoots voldoen aan de gestelde eisen.

Poisson-ratio [-]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
0,2	122,66	124,86	-1,7620%
0,22	123,20	124,97	-1,4163%
0,23	123,49	125,03	-1,2317%
0,25	124,12	125,18	-0,8468%
0,27	124,81	125,36	-0,4387%
0,28	125,19	125,47	-0,2232%
0,3	125,98	125,7	0,2228%
0,32	126,85	125,96	0,7066%
0,33	127,31	126,11	0,9516%
0,35	128,29	126,43	1,4712%

Tabel 31 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende Poisson-ratio

7.4 VERHOUDING KROMTESTRALEN

Voor de verhouding tussen de kromtestralen wordt hier ter controle een viertal datasets gebruikt. De eerste twee gebruiken de standaard parameters die in het begin van dit hoofdstuk neergezet zijn, met r_y vast op 2000 mm en 10000 mm, en waarbij r_z gevarieerd wordt. Dit levert de volgende resultaten op

r_z/r_y [-]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1	289,55	295,18	-1,9073%
2	186,20	183,59	1,4216%
3	143,82	148,88	-3,3987%
4	133,78	133,74	0,0299%
5	125,98	125,70	0,2228%
6	119,94	120,87	-0,7694%
7	115,07	117,72	-2,2511%
8	111,00	115,53	-3,9211%
9	107,54	113,94	-5,6170%
10	104,53	112,74	-7,2822%

Tabel 32 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende verhouding tussen de kromtestralen, met $r_y = 2000$ mm (dataset 7.4.1)

r_z/r_y [-]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1	69,461	77,336	-10,1828%
2	56,962	59,294	-3,9329%
3	50,721	54,85	-7,5278%
4	47,530	53,056	-10,4154%
5	46,858	52,136	-10,1235%
6	46,316	51,591	-10,2247%
7	45,863	51,237	-10,4885%
8	45,474	50,991	-10,8196%
9	45,134	50,812	-11,1745%
10	44,831	50,676	-11,5341%

Tabel 33 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende verhouding tussen de kromtestralen, waarbij $r_y = 10000$ mm (dataset 7.4.1)

Voor de tweede dataset zijn de volgende vaste parameters gebruikt

Grootheid	Waarde
Lengte a	2000 mm
Elasticiteitsmodulus E	150000 N/mm ²
Poisson-ratio ν	0,25
Dichtheid ρ	$2 \cdot 10^{-8}$ kg/mm ³
Dikte h	20 mm

Tabel 34 Vaste parameters t.b.v. verhouding kromtestralen (dataset 7.4.2)

Met deze vaste parameters worden de volgende resultaten gevonden

r_z/r_y [-]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1	307,05	331,15	-7,2777%
2	211,20	230,7	-8,4525%
3	185,32	182,3	1,6566%
4	168,91	159,68	5,7803%
5	157,18	147,24	6,7509%
6	148,21	139,61	6,1600%
7	141,02	134,55	4,8086%
8	135,08	131	3,1145%
9	130,05	128,4	1,2850%
10	125,70	126,43	-0,5774%

Tabel 35 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende verhouding tussen de kromtestralen, met $r_y = 1000$ mm (dataset 7.4.2)

r_z/r_y [-]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
1	93,344	101,29	-7,8448%
2	63,294	69,786	-9,3027%
3	59,391	61,15	-2,8765%
4	56,770	57,524	-1,3108%
5	54,817	55,628	-1,4579%
6	53,271	54,496	-2,2479%
7	51,998	53,755	-3,2685%
8	50,919	53,239	-4,3577%
9	49,987	52,862	-5,4387%
10	49,167	52,576	-6,4839%

Tabel 36 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende verhouding tussen de kromtestralen, waarbij $r_y = 5000$ mm (dataset 7.4.2)

De overeenkomst tussen de ontwerpformule en de werkelijke resultaten is in het algemeen vrij goed. De 5% die als norm gesteld was wordt niet overal gehaald, vooral bij de kleinste kromtestraal van 10000 mm is de afwijking met circa 10% eigenlijk te groot. Bij aanpassingen aan de formule wordt deze echter minder accuraat voor de overige kromtestralen, daarom is ervoor gekozen dit te accepteren.

7.5 KLEINSTE KROMTESTRAAL

Voor het effect van de kleinste kromtestraal wordt de verhouding tussen de kromtestralen op 1:2 gehouden, dus r_z is tweemaal zo groot als r_y . Dit levert de volgende resultaten op

r_y [mm]	Formule frequentie [Hz]	Ansys frequentie [Hz]	Vershil [%]
500	582,53	554,38	5,0777%
1000	322,98	328,79	-1,7671%
2000	186,20	183,59	1,4216%
4000	109,08	110,56	-1,3386%
8000	66,446	66,858	-0,6162%
10000	56,962	59,294	-3,9329%
20000	34,917	37,091	-5,8613%
50000	16,603	21,558	-22,9845%

Tabel 37 Verschil tussen ontwerpformule en eigenfrequentie uit Ansys bij variërende kleinste kromtestraal

Hierin is te zien dat de formule bij een zeer grote kromtestraal (de plaat is bij een straal van 50000 mm bij een lengte van 1000 mm vrijwel vlak) iets meer uit de pas gaat lopen. Bij deze zeer grote stralen kan beter de formule voor een cilinder gebruikt worden (vergelijking (6.4), met de aanpassingen voor de dikte die ook in de ontwerpformule verwerkt zitten) of de formule voor een vlakke plaat (vergelijking (6.1)). Bij kromtestralen rond de 5000 mm blijft de ontwerpformule wel ruimschoots binnen de grenzen.

8. DISCUSSIE EN CONCLUSIE

De belangrijkste opmerking die bij de ontwerpformule geplaatst kan worden die opgesteld is voor gekromde panelen, is dat die formule niet voldoet aan de limietgevallen. Bij een zeer grote verhouding tussen de kromtestralen loopt de formule niet automatisch over in een formule voor een cilinder, en bij een zeer grote kleinste kromtestraal verwordt de formule niet tot de functie voor een vlakke plaat. In eerste instantie is wel geprobeerd om een formule van onderstaande vorm te vinden, maar vanwege de overgangen tussen verschillende trillingsvormen bleek het niet mogelijk om op die manier redelijk accurate resultaten te verkrijgen.

$$\omega_{ij,curved\ panel} = [\omega_{ij,flat\ panel}^2 + C_x + C_y + C_{xy}]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1)$$

Dit is dus een bewuste keuze geweest, en het is ook vrij makkelijk om te zorgen dat de ongewenste effecten hiervan geen rol meer spelen. De laagste eigenfrequentie van een cilinder zal altijd lager zijn dan de laagste eigenfrequentie van een in twee richtingen gekromd paneel, en zo zal de laagste eigenfrequentie van een vlakke plaat altijd lager zijn dan de laagste eigenfrequentie van een cilinder. Een goede oplossing is dus om altijd de hoogste van deze drie te kiezen, zodat het geen probleem meer is dat de ontwerpformule naar nul nadert bij zeer grote kromtestralen.

Ten tweede blijkt uit de ontwerpformule maar gedeeltelijk welke invloeden de verschillende parameters op de uiteindelijke eigenfrequentie hebben. Voor de materiaaleigenschappen, de dikte en de afmetingen is dit nog vrij inzichtelijk, maar voor de kleinste kromtestraal en de verhouding tussen de kromtestraal is dit minder duidelijk. Vooral dat de kleinste kromtestraal nog eens terug komt in de macht bij de verhouding tussen de kromtestralen is onduidelijk en vanuit de theorie die in hoofdstuk 2 en 3 besproken is ook niet te verklaren. Wat dat betreft doet de analytische oplossing die in hoofdstuk 3.3 afgeleid is het een stuk beter, maar buiten het feit dat hier de trillingsvorm expliciet ingevoerd moet worden, geeft deze oplossing ook nog eens niet de gewenste resultaten. De matige inzichtelijkheid is in dat geval natuurlijk te verkiezen boven een formule die verkeerde resultaten geeft.

Het is overigens niet gezegd dat het niet mogelijk is om een ontwerpformule op te stellen die wel duidelijk laat zien hoe de invloeden van de verschillende parameters de eigenfrequenties beïnvloeden. Het zal daarbij naar verwachting de grootste uitdaging zijn om een uitdrukking te vinden voor de trillingsvorm die een paneel aan zal nemen bij een bepaalde geometrie. Enkel de materiaaleigenschappen beïnvloeden de trillingsvorm niet, de overige parameters hebben hier alle een zekere invloed op, en hierdoor is het erg lastig om te voorspellen welk aantal knopen een geometrie zal hebben in de laagste eigenfrequentie. Voor rechthoekige panelen in het algemeen zal dit nog moeilijker zijn. Het is wellicht interessant om hier een onderzoek aan te wijden (bijv. in het kader van een bachelor-eindwerk), omdat dit de eerste stap is naar een betere, algemenere ontwerpformule. Het

onderzoek van Leissa en Narita (1984) is in dit kader bijzonder interessant, vooral omdat daarin ook de verschillende oplegmethodes een plaats krijgen. Dit betreft wederom een vrij analytische aanpak, waarbij dus zeker nog gecontroleerd moet worden of de resultaten hiervan kloppen en hoe makkelijk dit toepasbaar is.

Het is hiervoor al even genoemd, maar het is opvallend dat de analytische resultaten van Sewall (1967) voor de cilinder en van Leissa en Kadi (1971) niet overeenkomen met de resultaten die gevonden worden met Ansys. Het resultaat van Warburton (1954) voor een vlakke plaat komt wel overeen met de resultaten gevonden met Ansys. Er moet dus wel een verkeerde aanname gedaan zijn om de kromming in de differentiaalvergelijkingen te verwerken. Dit zou bijvoorbeeld de verwaarlozing van de tweede-orde-effecten kunnen zijn, die bij een gekromd paneel een groter dan verwachte invloed uit gaan oefenen. Het is echter lastig om op basis van de afleiding van de analytische oplossingen aan te wijzen waar de afwijking precies in zit, hiervoor zal verder onderzoek nodig zijn, op een meer wiskundig vlak dan dit onderzoek.

Als ontwerpformule voor de eigenfrequentie van gekromde panelen is dus het onderstaande gevonden

$$f_n = \max(f_{vlak}, f_{cilinder}, f_{gekromd}) \quad (8.2)$$

$$f_{vlak} = \sqrt{\frac{\pi^2 E h^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} \quad (8.3)$$

$$f_{cilinder} = \begin{cases} 0,0815 r_y^{-0,52} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,429h + 2,612)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } \frac{r_y}{h} > 230 \\ 0,0815 r_y^{-0,52} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,201h + 4,441)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } \frac{r_y}{h} < 230 \end{cases} \quad (8.4)$$

$$f_{gekromd} = \begin{cases} 3,7226 r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,142h + 4,153)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 3,7226 r_y^{-0,887} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,778*0,99990 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,111h + 4,223)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 1 \leq \frac{r_z}{r_y} \leq 3; \frac{r_y}{h} < 230 \\ 1,5348 r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,429h + 2,612)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} > 230 \\ 1,5348 r_y^{-0,82} \left(\frac{r_z}{r_y}\right)^{-0,386*0,99982 r_y} \sqrt{\frac{\pi^2 E (0,201h + 4,441)^2}{\rho a^4 12 (1 - \nu^2)}} a^{\frac{6}{5}} & \text{voor } 3 < \frac{r_z}{r_y}; \frac{r_y}{h} < 230 \end{cases} \quad (8.5)$$

Het belangrijkste punt waarop de formule nog verbeterd kan worden is de manier waarop de afmetingen erin verwerkt zijn, panelen van circa een meter in het vierkant kunnen hiermee erg goed worden beschreven, maar rond de halve meter en vanaf drie meter wordt de relatieve afwijking vrij groot. Dit heeft te maken met het feit dat de trillingsvorm rond die punten vrij snel verandert, met boven de 3000 mm een snelle toename van het aantal knopen, en beneden de 400 mm kan het aantal knopen niet meer afnemen, omdat het minimum van twee dan al bereikt is. Dit is eigenlijk niet in een formule te vatten zonder de trillingsvorm hierin expliciet mee te nemen, en daarmee komt het probleem weer terug dat het inschatten van de trillingsvorm zonder model te gebruiken erg onbetrouwbaar is. In dit onderzoek is het uiteindelijk niet gelukt een betere beschrijving van de invloed van de afmetingen te vinden, vandaar de volgende beperking bij het gebruik van de formule

$$600 < a < 2000 \quad (8.6)$$

Het probleem dat gevonden werd bij een kleinste kromtestraal van 10000 mm in paragraaf 7.4 is opgelost door het maximum te kiezen van de eigenfrequentie van de vlakke plaat, de

cilinder en het in twee richtingen gekromde paneel. De formule voor de cilinder geeft in dit geval namelijk een betere beschrijving van de laagste eigenfrequentie en blijft wel binnen de eisen. Deze aanvullende voorwaarde maakt de ontwerpformule iets lastiger in gebruik, omdat vrijwel altijd drie functies ingevuld moeten worden, maar de extra accuraatheid die hierdoor verkregen wordt is deze extra moeite zeker waard. De fout die gevonden werd bij $r_z = 100000$ mm en $r_y = 10000$ mm wordt hierdoor bijvoorbeeld terug gebracht van 11,5% naar 1,3%.

Hiermee is, binnen de hiervoor gestelde afmetingen, dus voldaan aan de doelstelling. De ontwerpformule geeft een afwijking van minder dan 5% en door het invoeren van het maximum van de drie functies voldoet de ontwerpformule ook aan de limietgevallen voor een cilinder en een vlakke plaat bij zeer grote kromtestralen.

REFERENTIES

WETENSCHAPPELIJKE REFERENTIES

- Blevins, R. D. (1981). Natural frequencies of shallow cylindrically curved panels. *Journal of Sound and Vibration*, 75(1), 145-149.
- Hoogenboom, P. C. J. (2013). Handout Shell Analysis, Theory and Application. *Handout 7a*. Delft, Nederland.
- Leissa, A. W. & Kadi, A. S. (1971). Curvature effects on shallow shell vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2), 173-187.
- Leissa, A. W. & Narita, Y. (1984). Vibrations of completely free shallow shells of rectangular planform. *Journal of Sound and Vibration*, 96(2), 207-218.
- Nikkhah-Bahrami, M., Loghmani, M. & Pooyanfar, M. (2008). Analytical solution for free vibration of rectangular Kirchhoff plate from wave approach. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 15, 221-223.
- Sewall, J. L. (1967). Vibration analysis of cylindrically curved panels with simply supported or clamped edges and comparison with other experiments. *NASA Technical Note D-3791*. Washington D.C., Verenigde Staten.
- Vlasov, V. S. (1951). Basic differential equations in general theory of elastic shells. *NACA Technical Memorandum 1241*. Washington D.C., Verenigde Staten.
- Warburton, G. B. (1954). The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 20(7), 623-630.
- Webster, J.J. (1968). Free vibrations of rectangular curved panels. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(7), 571-582.

OVERIGE REFERENTIES

1. Overkapping IJzijde Stationseiland, Amsterdam.
<http://www.brs.nl/product.php?prod=3&img=3>. Geraadpleegd op 3 juni 2013.
2. Foto van El Palau de les Arts Reina Sofia.
<http://mikebm.files.wordpress.com/2008/07/valencia01.jpg>. Geraadpleegd op 28 april 2013.

BIJLAGE 1: ANSYS-SCRIPT

```

! define variables
r1 = 2000                ! radius in y-direction mm
r2 = 1000                ! radius in z-direction mm
a = 0.5                  ! angle between endpoints in y-direction
b = a*r1/r2              ! angle between endpoints in z-direction (squared surface)
g = r1*a                 ! length
h = 5                    ! thickness mm
E = 1e5                  ! Young's modulus N/mm2
nu = 0.3                 ! Poisson's ratio -
n = 125                  ! number of elements in y and z
srt= 7.8e-9              ! material density kg/mm3

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,          ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181           ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h,,          ! element thickness

*DO,i,0,n                ! put nodes
*DO,j,0,n
  ai=a/n*i-a/2
  bj=b/n*j-b/2
  x=r2*(1-COS(bj))+r1*(1-COS(ai))
  y=r1*SIN(ai)
  z=r2*SIN(bj)
  N,,x,y,z,,
*ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,n                ! put elements
*DO,j,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO

```

```

*DO,i,1,n                ! put hinged edges
D,i      ,0,,,,UX,UY,UZ,,
D,i*(n+1)  ,0,,,,UX,UY,UZ,,
D,i+n*(n+1)+1,0,,,,UX,UY,UZ,,
D,i*(n+1)+1 ,0,,,,UX,UY,UZ,,
*ENDDO
FINISH

/SOLU                    ! solve
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 10,,,
MXPAND,10
SOLVE
FINISH

```

BIJLAGE 2: MAPLE-CODE CILINDER

```

> restart; lambda := sqrt( $Dx^4 + \frac{Dy^4 \cdot a^4}{b^4} + \frac{2 \cdot a^2}{b^2}(\text{nu} \cdot Fx \cdot Fy + (1$ 
     $- \text{nu}) \cdot Jx \cdot Jy)$ ):
> Dx := i - 1 ;; Dy := j - 1 ;; Fx := (i - 1)2 ;; Jx := Fx ;; Fy := (j
    - 1)2 ;; Jy := Fy:
> wflat := sqrt( $\frac{\lambda^2 \cdot \pi^4 \cdot E \cdot h^2}{\text{rho} \cdot a^4 \cdot 12 \cdot (1 - v^2)}$ ):
> alpha :=  $\frac{\left(\frac{(i - 1)}{a}\right)^4 \cdot (1 - v^2)}{\left(\left(\frac{(i - 1)}{a}\right)^2 + \left(\frac{(j - 1)}{a}\right)^2\right)^2}$ :
> wcurved := sqrt( $wflat^2 + \frac{\text{alpha} \cdot E}{r^2 \cdot \text{rho} \cdot (1 - v^2)}$ )
> i := ...;; j := ...;; b := a ;; a := ...;; nu := ...;; E := ...;; h := ...;; g := ...;; rho
    := ...;; r := ...;;
> f :=  $\frac{wcurved}{2 \cdot \text{Pi}}$ :
> evalf(f):

```

BIJLAGE 3: MAPLE-CODE TWEEZIJDIG GEKROMD PANEEL

```

> restart;
> lambda := sqrt( Dx^4 + (Dy^4*a^4)/b^4 + (2*a^2/(b^2)*(nu*Fx*Fy + (1-nu)*Jx
    ·Jy) )
> Dx := i - 1; Dy := j - 1; Fx := (i - 1)^2; Jx := Fx; Fy := (j - 1)^2;
    Jy := Fy
> wflat := ( (lambda^2 * pi^4 * E * h^2) / (rho * a^4 * 12 * (1 - nu^2)) )
> wcurve := ( E / (rho * rx^2) ) * ( ( (rx^3/ry) * (2*Dx - 1)^2 + rx^2 * (2*Dy - 1)^2 )^2 /
    ( rx^2 * (2*Dx - 1)^2 + rx^2 * (2*Dy - 1)^2 )^2 )
> w := sqrt(wflat + wcurve)
> f := w / (2 * Pi)

```