

De invloed van kromming op de eigenfrequentie van oppervlaktes



Kaufman Center for the Performing Arts, Missouri

Auteur	C.M. Moerbeek
Studentnummer	1504657
Datum	19-10-2012
Universiteit	TU Delft
Faculteit	Civiele Techniek en Geowetenschappen
Afdeling	Structural Engineering
Eerste begeleider	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider	Prof. Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder

Voorwoord

In dit bacheloreindwerk voor de TU Delft, wordt onderzoek gedaan naar de invloed van kromming op de eigenfrequenties van de oppervlakken.

Ik heb mede voor dit onderwerp gekozen, omdat ik op de middelbare school mijn profielwerkstuk over eigenfrequenties maakte. Het leek mij dus ook een mooie mogelijkheid om verder in te gaan op dit onderwerp voor deze specifieke vormen.

Hierbij wil ik mijn beide begeleiders Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en Prof. Ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder bedanken voor hun hulp en adviezen.

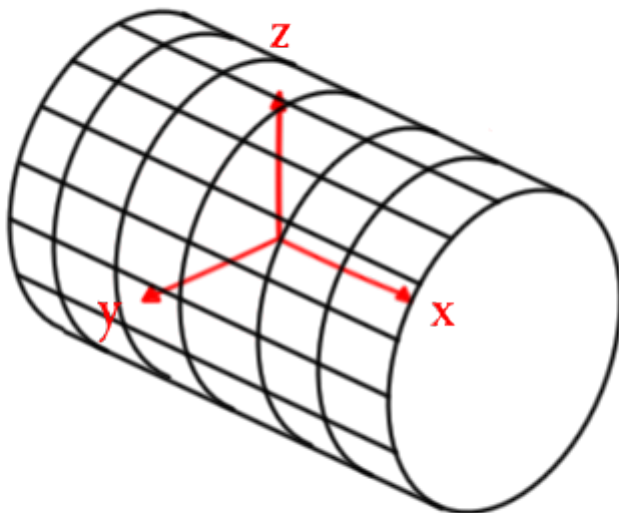
Inhoudsopgave

VOORWOORD	2
SYMBOLENLIJST	5
1. INLEIDING	6
1.1 ALGEMEEN	6
1.2 PROBLEEMSTELLING	6
1.3 DOELSTELLING	6
1.4 ONDERZOEKSVRAGEN	6
2. GEKROMDE OPPERVLAKTES	8
2.1 CILINDER	8
2.2 GESLOTEN VORMEN BOL EN ELLIPSOÏDE	8
2.3 OPEN VORMEN CATENOÏDE, PSEUDOBOL EN HALVE BOL	9
3 CILINDER	11
3.1 ELEMENT-GROOTTE	11
3.2 EIGENFREQUENTIES VOLGENS DE EINDIGE-ELEMENTENMETHODE	12
3.3 EIGENFREQUENTIES VOLGENS DE ANALYTISCHE BEREKENING	13
3.4 GRAFIEK VAN CALLADINE	16
4. CATENOÏDE	19
4.1 VARIANTIE VAN DE LENGTE EN DE DIKTE	19
4.2 VARIATIE VAN DE STRAAL	19
4.3 DE TRILLINGSVORMEN	21
5. PSEUDOBOL	23
5.1 VARIATIE VAN DE STRAAL	23
5.2 VARIATIE VAN DE DIKTE	24
5.3 DE TRILLINGSVORMEN	25
6. ELLIPSOÏDE	27
6.1 VARIATIE VAN DE DIKTE	27
6.2 VARIATIE VAN DE STRAAL	28
6.3 VARIATIE VAN DE LENGTE	29
6.4 DE TRILLINGSVORMEN	30
7. BOL	32
7.1 VRIJE BOL	32
7.2 INGEKLEMDE BOL, VARIATIE VAN DE DIKTE	33
7.3 VARIATIE VAN DE STRAAL	33
7.4 VARIATIE VAN DE LENGTE	35
7.5 DE TRILLINGSVORMEN	36
8. HALVE BOL	37
8.1 VARIATIE VAN DE DIKTE	37

8.2 VARIATIE VAN DE STRAAL	39
8.3 VARIATIE VAN DE DWARSCONTRACTIECOËFFICIËNT	40
9. FORMULE OPSTELLEN CATENOÏDE	42
9.1 ZEER KLEINE STRALEN	42
9.2 NABIJ HET MAXIMUM	43
9.3 GEDRAG VAN VARIABLE BIJ VERSCHILLENDE STRALEN	44
9.4 INVLOED VAN DE DICHTHEID EN ELASTICITEITSMODULUS	46
9.5 FORMULE	46
10. FORMULE CONTROLEREN EN NAUWKEURIGHEID BEPALEN	47
10.1 DIKTE	47
10.2 STRAAL	48
10.3 LENGTE	48
10.4 DWARSCONTRACTIECOËFFICIENT	49
10.5 ELASTICITEITSMODULUS EN DICHTHEID	49
10.6 VOORWAARDEN BETREFT DE NAUWKEURIGHEID	50
11. CONCLUSIES	51
11.1 CILINDER	51
11.2 CATENOÏDE	52
11.3 PSEUDOBOL	52
11.4 ELLIPSOÏDE	52
11.5 BOL	52
11.6 HALVE BOL	53
BRONNEN	54
LITERATUURLIJST	54
INTERNET	54
SOFTWARE	54
BIJLAGEN A	55

Symbolenlijst

A	Straal/Aslengte een ellipsoïde	(mm)
B	Aslengte twee ellipsoïde	(mm)
C	Aslengte drie ellipsoïde	(mm)
E	Elasticiteitsmodules	(N/mm ²)
f_n	Eigenfrequentie	(Hz)
F	Frequentie	(Hz)
H	Gemiddelde kromming	(1/m)
K	Gauss kromming	(1/m ²)
k_1	Hoofd kromming een	(1/m)
k_2	Hoofd kromming twee	(1/m)
l	Lengte	(mm)
q	Orde grootte	-
t	Dikte	(mm)
ν	Dwarscontractiecoëfficiënt	-
ρ	Dichtheid	(g/mm ³)



Figuur 1 Assenstelsel cilinder

1. Inleiding

1.1 Algemeen

Het berekenen van eigenfrequenties van een constructie is nodig om te voorkomen dat deze ontoelaatbaar zal trillen. Van een aantal constructie-elementen is al bekend hoe de eigenfrequentie te berekenen is. Het gaat hier dan voornamelijk over liggers en vlakke platen.

Wat de invloed is van de kromming van een oppervlakte op de eigenfrequentie van dit oppervlak, is nog relatief onduidelijk. Het is dus van belang dat hiernaar wordt gekeken. Zo kan een vergelijking worden opgesteld, die gebruikt kan worden om de eigenfrequentie uit te rekenen van gekromde oppervlaktes.

1.2 Probleemstelling

Steeds meer wordt in de huidige architectuur gebruik gemaakt van gekromde oppervlakken. Om voor deze oppervlakken de eigenfrequentie te berekenen moet gebruik gemaakt worden van eindige-elementenprogramma's. Dit zijn lastige programma's die niet erg gebruiksvriendelijk zijn en veel tijd kosten.

Om dit te vermijden zullen er handformules moeten worden opgesteld, zodat de hierboven genoemde programma's niet gebruikt hoeven te worden. Dit zal een aantal voordelen met zich meebrengen: in de ontwerpfase zal al een schatting gemaakt kunnen worden van de eigenfrequentie, ook zal de berekening een stuk sneller gaan en simpeler zijn.

1.3 Doelstelling

Het doel van dit Bacheloreindewerk is: is er een verband te leggen tussen eigenfrequentie en de kromming van dunne oppervlakken.

De volgende gekromde oppervlakten zijn onderzocht: een bol, een halve bol, ellipsoïde, cilinder, pseudobol en een catenoïde. Deze vormen hebben elk specifieke eigenschappen die van invloed zijn op de eigenfrequentie.

Om tot dit resultaat te komen is gebruik gemaakt van Ansys (een eindig-elementenprogramma). In Ansys zijn een aantal eigenfrequenties van de vormen berekend, waarbij de dikte, straal en lengte variabel zijn.

1.4 Onderzoeksvragen

Hoofdvraag

Wat is de invloed van de kromming van oppervlaktes op de eigenfrequentie en kan hier een handformule voor gemaakt worden?

Subvragen

Kloppen de berekende Ansys eigenfrequenties van de cilinder met de formule en grafiek?

Kloppen de berekende Ansys eigenfrequenties van de vrije bol met de formule?

Met welke formules kloppen de berekende Ansys eigenfrequenties van de halve bol met de formule van Blevis (1979) en/of Reyleigh (1881)?

Wat is het verschil tussen de eigenfrequenties van de oppervlakken?

Waardoor ontstaat het verschil in de eigenfrequenties?

Hoe hangen de eigenfrequenties samen met de eigenschappen van de oppervlakte?

Is er een mogelijkheid tot het opstellen van een algemene vergelijking aan de hand van de reeds bestaande vergelijking voor verschillende cilinders?

2. Gekromde oppervlaktes

Er bestaan meerdere gekromde oppervlaktes. Hieronder worden de gebruikte oppervlaktes toegelicht.

2.1 Cilinder

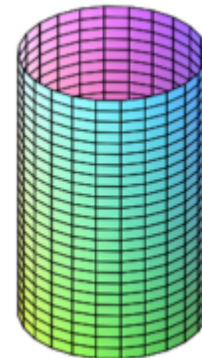
De cilinder is een gekromd oppervlak waarbij allebei de hoofdkrommingen constant zijn en een van die krommingen nul is. In vergelijking 2.1 staan de functievoorschriften voor de cilinder, zijn hoofdkrommingen staan in vergelijking 2.2 en een afbeelding van de cilinder staat in figuur 2. Hierin is 'u' een dimensieloze parameter, die de vorm van het oppervlak beschrijven. Parameter 'v' is de lengtecoördinaat.

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \cos(u) \\y(u, v) &= a \sin(u) \\z(u, v) &= v\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}k1 &= 1/a \\k2 &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Eigenschappen

De Gausskromming is altijd nul.



Figuur 2 Cilinder

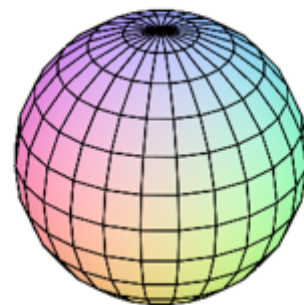
2.2 Gesloten vormen bol en ellipsoïde

Bol

De bol is een oppervlak waar alle krommingen gelijk zijn. In vergelijking 2.3 staan de functievoorschriften voor de bol, de hoofdkrommingen staan in vergelijking 2.4 en een afbeelding van de bol staat in figuur 3.

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \cos(u) \sin(v) \\y(u, v) &= a \sin(u) \sin(v) \\z(u, v) &= a \cos(v)\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}k1 &= 1/a \\k2 &= 1/a\end{aligned}\tag{2.4}$$



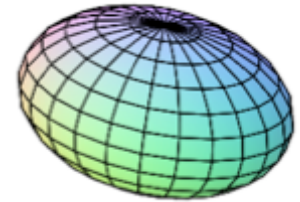
Figuur 3 Bol

Ellipsoïde

De ellipsoïde is een oppervlak waar alle krommingen verschillend zijn. In vergelijking 2.5 staan de functievoorschriften voor de ellipsoïde, Gausskromming K en gemiddelde kromming H staan in vergelijking 2.6 en een afbeelding van de ellipsoïde staat in figuur 4.

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \cos(u) \sin(v) \\y(u, v) &= b \sin(u) \sin(v) \\z(u, v) &= c \cos(v)\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}K &= \frac{(a^2 b^2 c^2)}{(c^2 \sin^2(v)(a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u)) + a^2 b^2 \cos^2(v))^2} \\H &= \frac{abc(\cos(2v)(a^2 + b^2 - 2c^2) + 2(b^2 - a^2)\cos(2u)\sin^2(v) + 3(a^2 + b^2) + 2c^2)}{8(c^2 \sin^2(v)(a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u)) + a^2 b^2 \cos^2(v))^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{2.6}$$



Figuur 4 Ellipsoïde

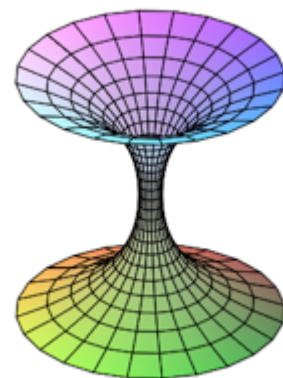
2.3 Open vormen catenoïde, pseudobol en halve bol

Catenoïde

De catenoïde is een oppervlak waarbij de twee hoofdkrommingen op elk punt gelijk zijn, alleen het teken is anders. In vergelijking 2.7 staan de functievoorschriften voor de catenoïde, zijn hoofdkrommingen staan in vergelijking 2.8 en een afbeelding van de catenoïde staat in figuur 5.

$$\begin{aligned}x(u, v) &= a \cos(u) \cosh(v/a) \\y(u, v) &= a \sin(u) \cosh(v/a) \\z(u, v) &= v\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\sec h^2(\frac{v}{a})}{a} \\k_2 &= -\frac{\sec h^2(\frac{v}{a})}{a}\end{aligned}\tag{2.8}$$



Figuur 5 Catenoïde

Eigenschappen

De gemiddelde kromming is altijd nul.

Pseudobol

De Pseudobol is een oppervlak waarbij er sprake is van een constante negatieve Gauss kromming. In vergelijking 2.9 staan de functievoorschriften voor de pseudobol, zijn hoofdkrommingen staan in vergelijking 2.10 en een afbeelding van de pseudobol staat in figuur 6.

$$\begin{aligned}x(u,v) &= a \operatorname{sech}(u) \cos(v) \\y(u,v) &= a \operatorname{sech}(u) \sin(v) \\z(u,v) &= a(u - \tanh(u))\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}k_1 &= \sinh(u) / a \\k_2 &= -\operatorname{csch}(u) / a\end{aligned}\tag{2.10}$$

Bijzonderheid

De Gausskromming is $\frac{-1}{a^2}$



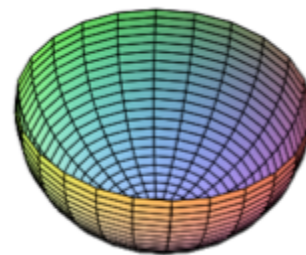
Figuur 6 Pseudobol

Halve Bol

De halve bol is een oppervlak waar alle krommingen gelijk zijn. De functievoorschriften voor de halve bol zijn gelijk als de voor hele bol alleen plot je maar tot de helft. In de vergelijking 2.3 staan de functievoorschriften voor de halve bol, zijn hoofdkrommingen staan in vergelijking 2.4 en een afbeelding van de halve bol staat in figuur 7. De halve bol zal aan de onderkant worden ingeklemd en de rand zal vrij blijven.

Bijzonderheid

De eigenfrequentie kan plaats vinden op de rand. Maar ook kan de hele vorm in trilling zijn.



Figuur 7 Halve bol

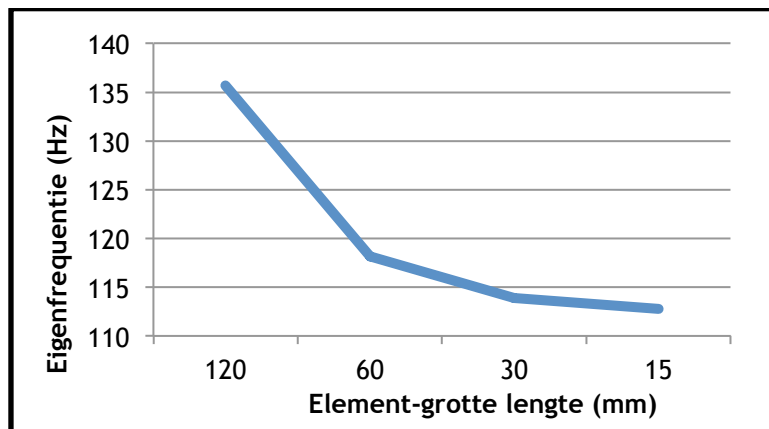
3 Cilinder

Cilinders kunnen op twee manieren trillen; als ligger en als schaal. Wilhelm Flügge (1943) heeft hiervoor een oplossing gevonden.

Chris Calladine (1983:9-651) heeft de door Flügge gevonden oplossingen geordend in een grafiek, met de daarbij behorende formules. Deze worden in dit hoofdstuk gebruikt om het Ansys script te controleren.

3.1 Element-grootte

Als eerste moet voor het Ansys script de element-grootte bepaald worden. Dit is gedaan door met verschillende element-grootte dezelfde berekening uit te voeren en te kijken naar de resultaten en de convergentie van de resultaten.



Figuur 8 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de element-grootte lengte (mm)

In figuur 8 en tabel 1 is te zien dat de laagste eigenfrequentie nauwkeuriger wordt wanneer er kleinere lengtes voor de elementen gebruikt worden. De rekentijd wordt groter wanneer kleinere elementen gebruikt worden. Vanwege de rekentijd is er gekozen om elementen een lengte van 30 mm te geven, het verschil in eigenfrequentie tussen de 30 mm en de 15 mm is 0.95%. Dit is voldoende nauwkeurig voor de meeste toepassingen.

Tabel 1 Eigenfrequentie als functie van de element-grootte

Element-grootte (mm)	120	60	30	15
Eigenfrequentie (Hz)	135,72	118,15	113,86	112,77

Elementen hebben een fout die afhangt van de element-grootte h . Dit wordt uitgedrukt in de orde-grootte $O(h^q)$. Met de frequenties behorende bij 60, 30 en 15 mm is de orde-grootte te berekenen (3.1).

$$q = 2 \log \frac{f_2 - f_1}{f_3 - f_2} \quad (3.1)$$

Dit geeft een waarde van $q = 1,98$ wat ongeveer 2 is. De nauwkeurigheid van eigenfrequenties berekend met de gebruikte elementen is dus $O(h^2)$.

3.2 Eigenfrequenties volgens de eindige-elementenmethode

De uitgangswaarden zijn hieronder vermeld. De cilinderranden zijn volledig ingeklemd.

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	3000	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

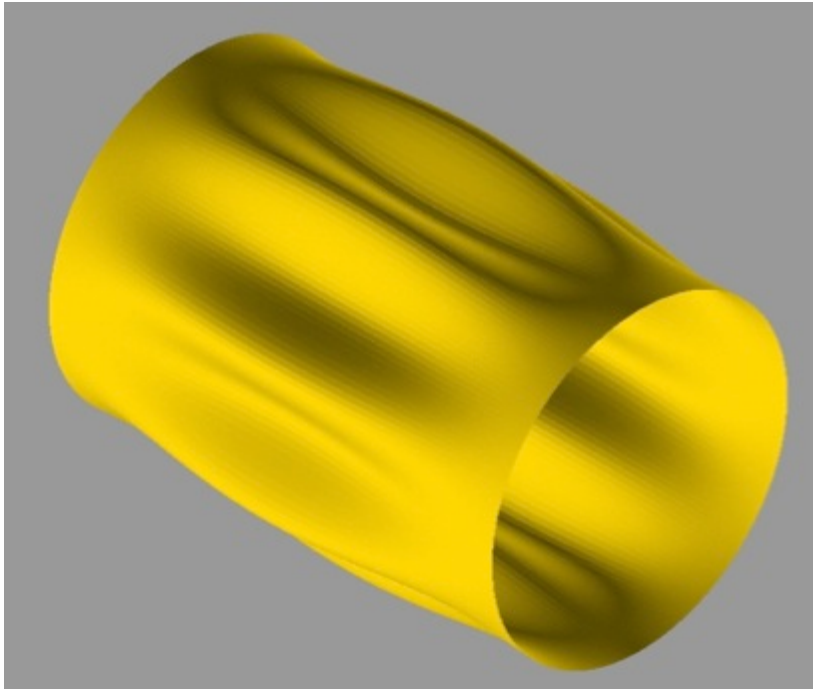
De drie variabelen zijn dikte, straal en lengte. Ansys berekent de eigenfrequentie waarbij de drie variabelen verschillende waarden aannemen. Het script waarmee dit gebeurt bevindt zich in bijlage A. Het resultaat is weergegeven in tabel 2. In de kolommen is slechts één variabele vergroot ten opzichte van de uitgangswaarden.

Tabel 2 Eigenfrequenties als functie van dikte, straal lengte gevonden met Ansys

dikte (mm)	freq. (Hz)	straal (m)	freq. (Hz)	lengte (m)	freq. (Hz)
1	28,589	0,5	56,461	1	113,86
2	39,871	0,6	51,216	2	58,933
3	47,955	0,7	47,182	3	39,871
4	55,308	0,8	45,038	4	29,996
5	60,628	0,9	41,77	5	23,845
6	66,545	1,0	39,871	6	20,313
7	72,075	1,1	37,889	7	17,006
8	75,428	1,2	36,262	8	14,858
9	79,047	1,3	34,863	9	13,538
10	82,899	1,4	33,504	10	12,024
11	86,953	1,5	32,409	11	10,673
12	91,18			12	9,7036
13	95,558				
14	98,775				
15	100,74				

Naarmate de dikte toeneemt, neemt de eerste eigenfrequentie ook toe. Bij de toename van de straal of de lengte wordt de eigenfrequentie kleiner.

In figuur 9 is de vervorming te zien die hoort bij de eerste eigenfrequentie van een cilinder met een dikte van 2 mm, een straal van 1 m en een lengte van 3 m.



Figuur 9 Vervorming behorende bij de laagste eigenfrequentie

3.3 Eigenfrequenties volgens de analytische berekening

De formule van Calladine(1983:9-651) voor de laagste eigenfrequentie van ingeklemde cilinders is:

$$f_n = \frac{3,6}{2\pi l} \sqrt{\frac{t}{a\sqrt{1-\nu^2}}} \frac{E}{\rho}. \quad (3.2)$$

De hiermee berekende frequenties zijn weergegeven in tabel 3. Vergelijking van tabel 2 en tabel 3 geeft, dat bij toenemende dikte het verschil stijgt van 3% tot 12%. Dit komt doordat bij afleiding van de formule uitgegaan is van dunwandigheid. Wanneer de straal varieert, is het verschil gemiddeld 5%. Dit verschil laat een schommeling zien waar geen patroon in zit. Wanneer de lengte varieert, is het verschil gemiddeld 5% met uitschieters van 9%.

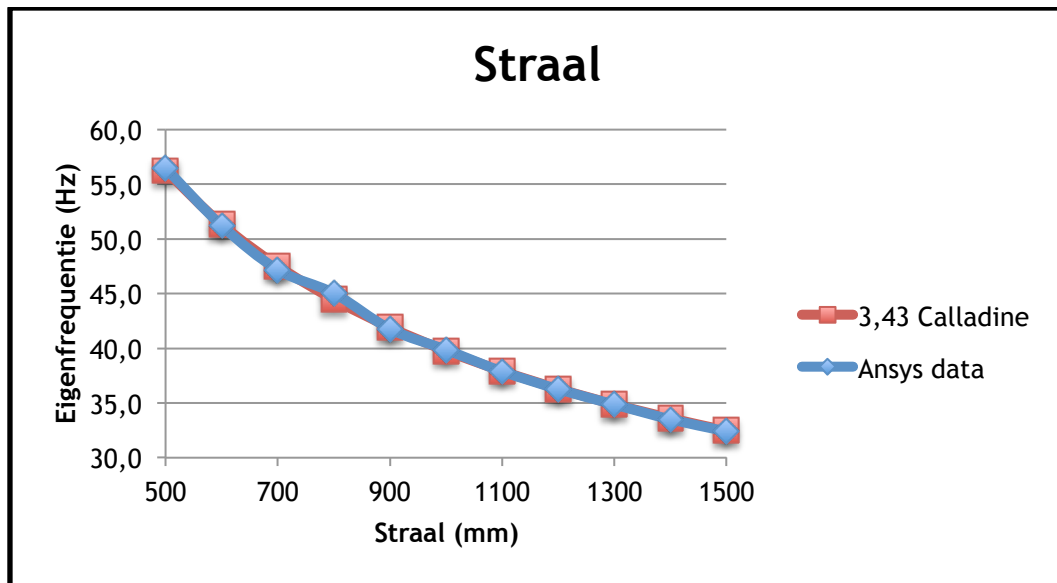
Tabel 3 Eigenfrequenties als functie van dikte, straal en lengte volgens Calladine (factor is 3.6)

dikte (mm)	freq. (Hz)	straal (m)	freq. (Hz)	lengte (m)	freq. (Hz)
1	29,517	0,5	59,035	1	125,231
2	41,744	0,6	53,891	2	62,616
3	51,125	0,7	49,893	3	41,744
4	59,035	0,8	46,671	4	31,308
5	66,003	0,9	44,002	5	25,046
6	72,302	1,0	41,744	6	20,872
7	78,095	1,1	39,801	7	17,890
8	83,488	1,2	38,107	8	15,654
9	88,552	1,3	36,612	9	13,915
10	93,342	1,4	35,280	10	12,523
11	97,898	1,5	34,084	11	11,385
12	102,251			12	10,436
13	106,426				
14	110,444				
15	114,320				

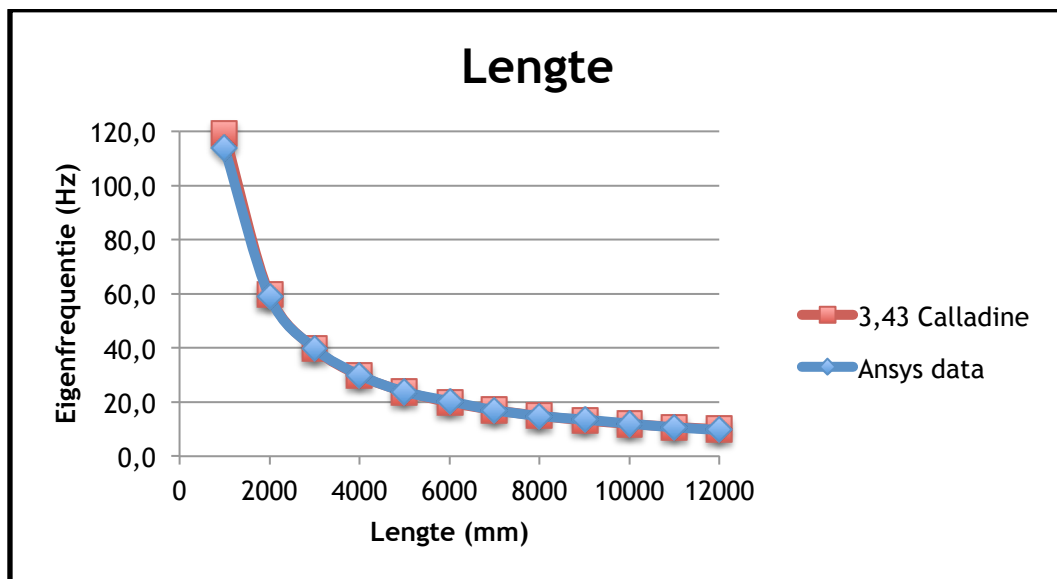
Het is mogelijk de verschillen te verminderen door de factor 3,6 aan te passen. Wanneer 3,43 genomen wordt in plaats van 3,6 wordt het verschil kleiner. Bij de dikte is het verschil dan 1,7% en stijgt die tot 7,5% naarmate de dikte toeneemt. Het verschil bij de straal zit gemiddeld op de 0,02%. Nog steeds is de schommeling aanwezig maar hier zit geen patroon in. Het verschil bij de lengte is gemiddeld 0.4% met een uitschieters van 4,5%.

$$f_n = \frac{3,43}{2l\pi} \sqrt{\frac{t}{a\sqrt{1-v^2}}} \frac{E}{\rho} \quad (3.3)$$

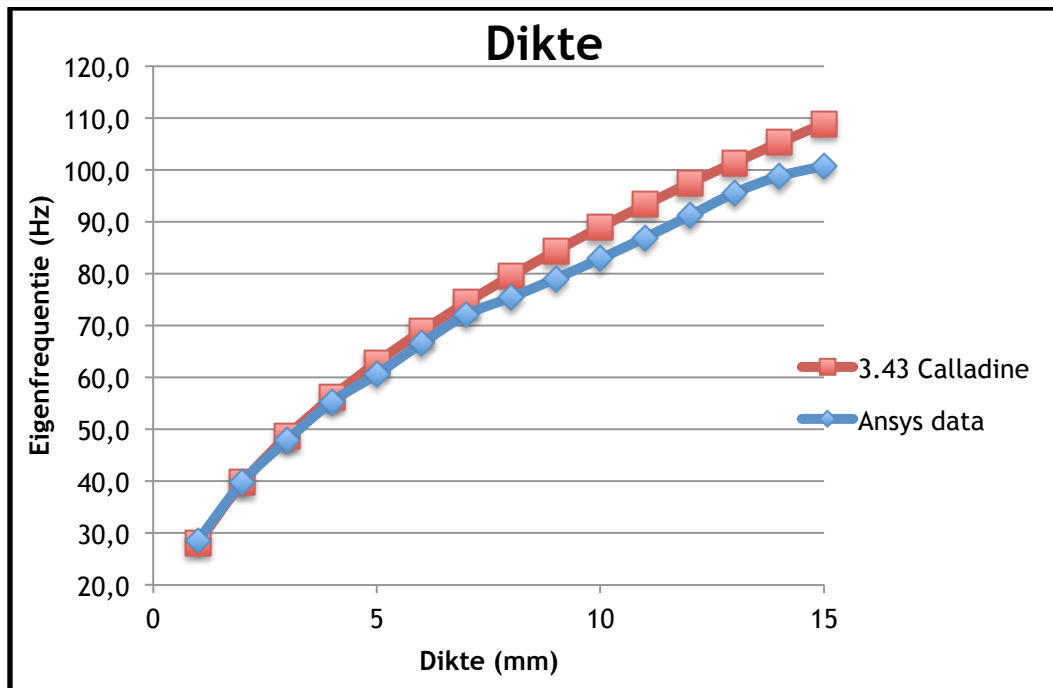
Zowel de originele formule 3.2 komt goed overeen met de data uit Ansys, net zoals de aangepaste vergelijking 3.3. De aangepaste vergelijking komt beter overeen. Wel moet worden opgelet bij de dikte, omdat deze erg foutgevoelig blijft, zeker naarmate de dikte groter wordt. In de drie figuren: 10, 11 en 12 is te zien hoe dicht de data uit Ansys en de data van Calladine bij elkaar liggen als de factor 3.43 is.



Figuur 10 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)



Figuur 11 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de lengte (mm)



Figuur 12 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dikte (mm)

3.4 Grafiek van Calladine

De boven beschreven formules zijn benaderingen van een door Calladine (1983:9-651) opgestelde grafiek voor trillingen van cilinders. Voor de controle is het dus ook mogelijk om de gevonden waarden van Ansys in deze grafiek in te vullen. De onderstaande vergelijkingen gelden voor de x en de y coördinaten 3.4 en 3.5.

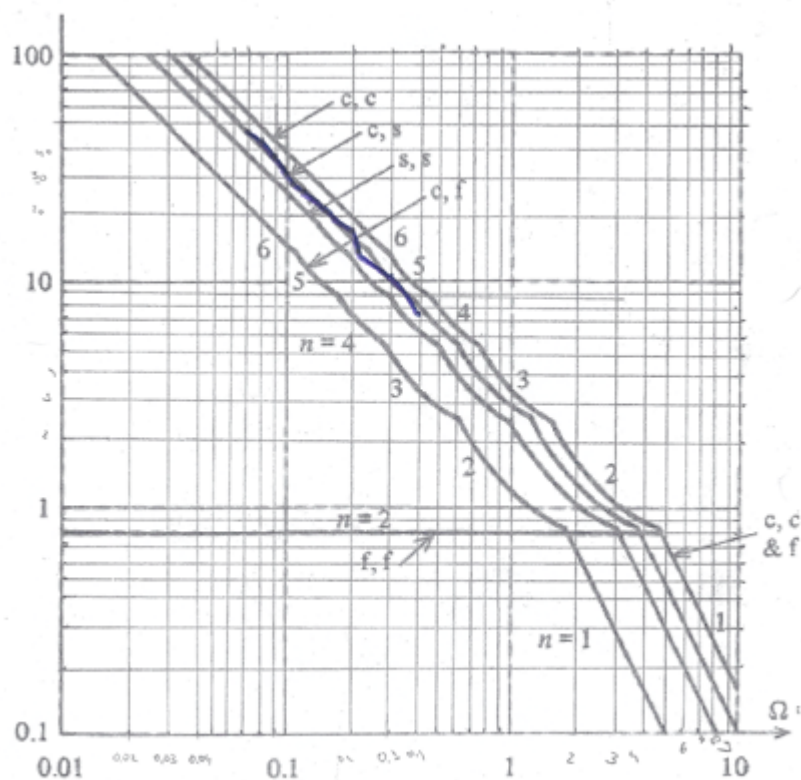
$$x = \frac{l}{\frac{a}{t} \sqrt{at(1-\nu^2)}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.4)$$

$$y = \frac{f_n}{\frac{t}{2\pi a^2 \sqrt{1-\nu^2}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (3.5)$$

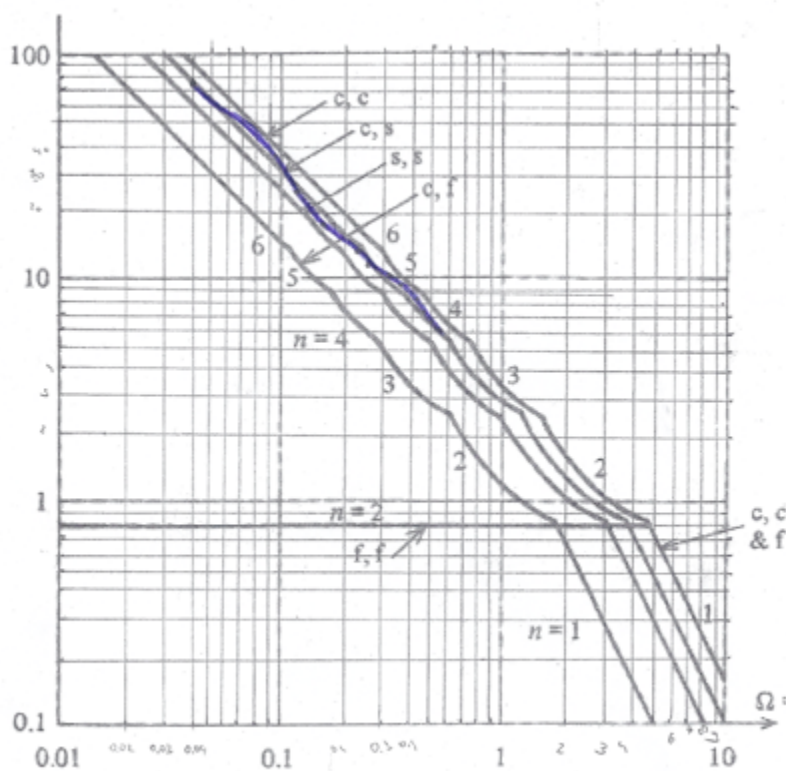
Op de hieronder afgebeelde figuren 13, 14 en 15 is te zien dat de waarden uit Ansys overeen komen, met die van een van de lijnen uit de grafiek.

Echter, is de lijn die het dichtst bij de blauwe gevonden lijn is, de lijn die overeenkomt met een aan een kant ingeklemde cilinder en aan de andere kant scharnierend opgelegde cilinder.

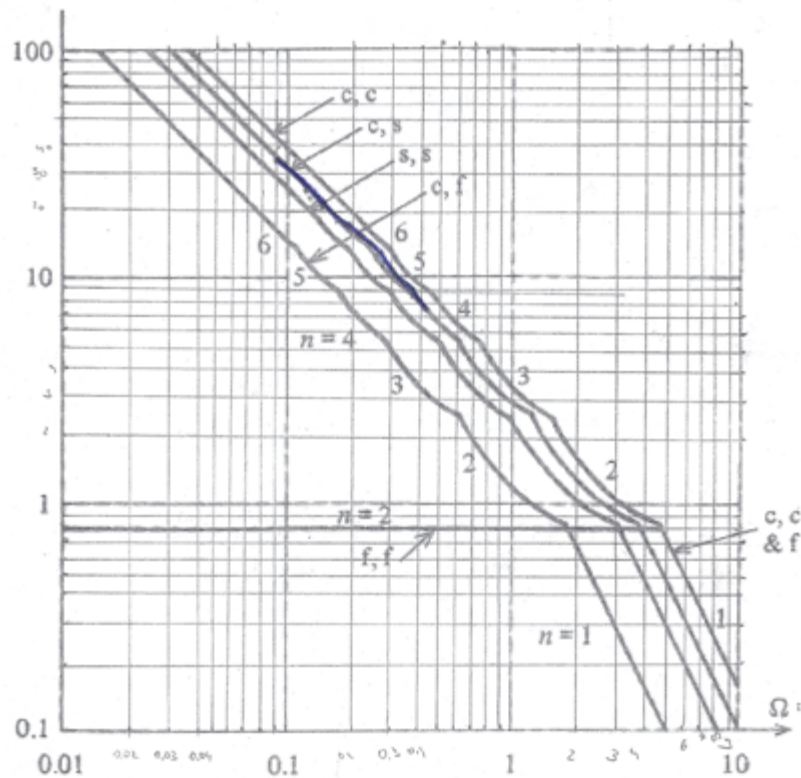
De formule die bij de dichtstbijzijnde lijn hoort heeft een factor 3 in plaats van 3,6. Aangezien de gevonden waarde het best overeenkomen met een factor 3,43 is het niet heel vreemd dat die lijn in een logaritmische schaal dicht op de andere lijn zit.



Figuur 13 3.5 als functie van 3.4 onder invloed van straal

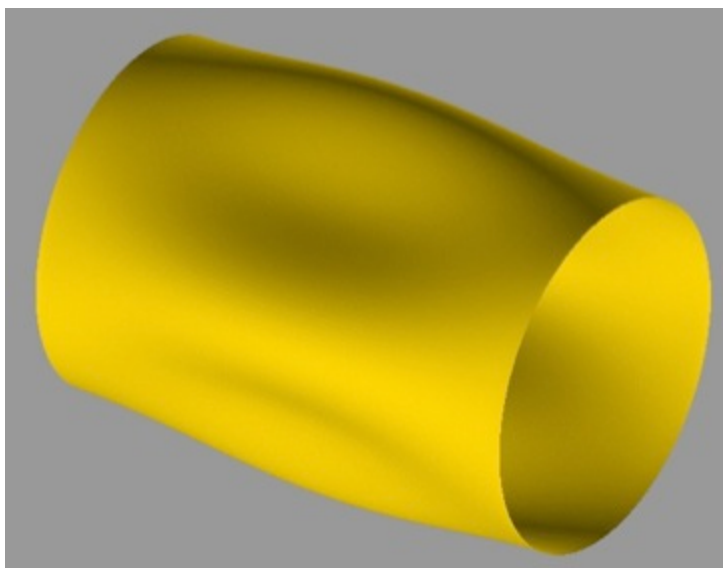


Figuur 14 3.5 als functie van 3.4 onder invloed van lengte



Figuur 15 3.5 als functie van 3.4 onder invloed van dikte

Wordt er gekeken naar de vervorming van een cilinder met een dikte van 15 mm, zoals in figuur 16, dan is goed te zien dat deze wel degelijk aan twee kanten is ingeklemd. Dit is ook de juiste vervorming en niet zoals de grafiek suggereert van de cilinder, die aan een kant scharnierend is opgelegd.



Figuur 16 15 mm dikke cilinder

4. Catenoïde

De uitgangswaarden zijn hieronder vermeld. De catanoïderanden zijn volledig ingeklemde. De lengte is van rand tot rand.

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	3000	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

4.1 Variatie van de lengte en de dikte

De drie variabelen zijn dikte, straal en lengte. Ansys berekent de eigenfrequentie waarbij de drie variabelen verschillende waarden aannemen. Het script waarmee dit gebeurt, bevindt zich in bijlage A. Het resultaat voor de lengte en dikte is weergegeven in tabel 4. In de kolommen is slechts één variabele vergroot ten opzichte van deze uitgangswaarden.

Tabel 4 Eigenfrequenties als functie voor de dikte en lengte

dikte (mm)	freq. (Hz)	lengte (m)	freq. (Hz)
1	56,147	1	234,49
2	70,122	2	127,12
3	79,952	3	70,122
4	87,355	4	31,81
5	94,46	5	12,587
6	99,241	6	4,728
7	104,4	7	1,7518
8	109,87	8	0,6405
9	113,04	9	0,23788
10	116,3	10	0,087535
11	119,74		
12	123,34		
13	127,08		
14	130,95		
15	133,79		

In tabel 4 is te zien dat hier dezelfde regels gelden, als bij de cilinder voor de dikte en de lengte. Wanneer de lengte toeneemt, neemt de eigenfrequentie af. Als de dikte toeneemt neemt de eigenfrequentie toe. De staal speelt hier een andere rol aangezien de straal de hoofdkrommingen beïnvloedt.

4.2 Variatie van de straal

De straal a in de oorsprong heeft invloed op de eigenschappen van de catenoïde zoals genoemd in de toelichting van de vormen. In tabel 5 staan de hoofdkrommingen, de Gausskrommen 4.2 bij de oorsprong en de gemiddelde krommingen 4.1, deze is nul dus

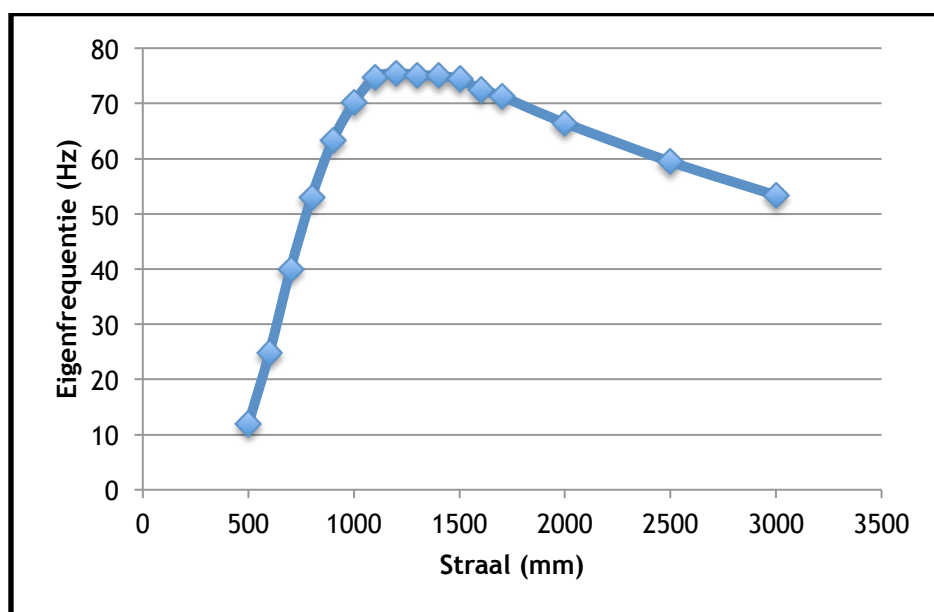
staat niet in tabel 5. Dit is gedaan omdat deze krommingen waarschijnlijk invloed hebben op de eigenfrequentie.

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.1)$$

$$K = k_1 * k_2 \quad (4.2)$$

Tabel 5 Eigenfrequenties als functie van de straal, krommingen bij de oorsprong

straal (m)	freq. (Hz)	hoofdkromming 1 (m ⁻¹)	hoofdkromming 2 (m ⁻¹)	Gausskromming (m ⁻²)
0,5	11,925	0,5	-0,5	-0,25
0,6	24,803	0,6	-0,6	-0,36
0,7	39,974	0,7	-0,7	-0,49
0,8	53,027	0,8	-0,8	-0,64
0,9	63,277	0,9	-0,9	-0,81
1,0	70,122	1,0	-1,0	-1,00
1,1	74,679	1,1	-1,1	-1,21
1,2	75,485	1,2	-1,2	-1,44
1,3	75,136	1,3	-1,3	-1,69
1,4	74,975	1,4	-1,4	-1,96
1,5	74,416	1,5	-1,5	-2,25
1,6	72,512	1,6	-1,6	-2,56
1,7	71,288	1,7	-1,7	-2,89
2,0	66,453	2,0	-2,0	-4,00
2,5	59,435	2,5	-2,5	-6,25
3,0	53,342	3,0	-3,0	-9,00

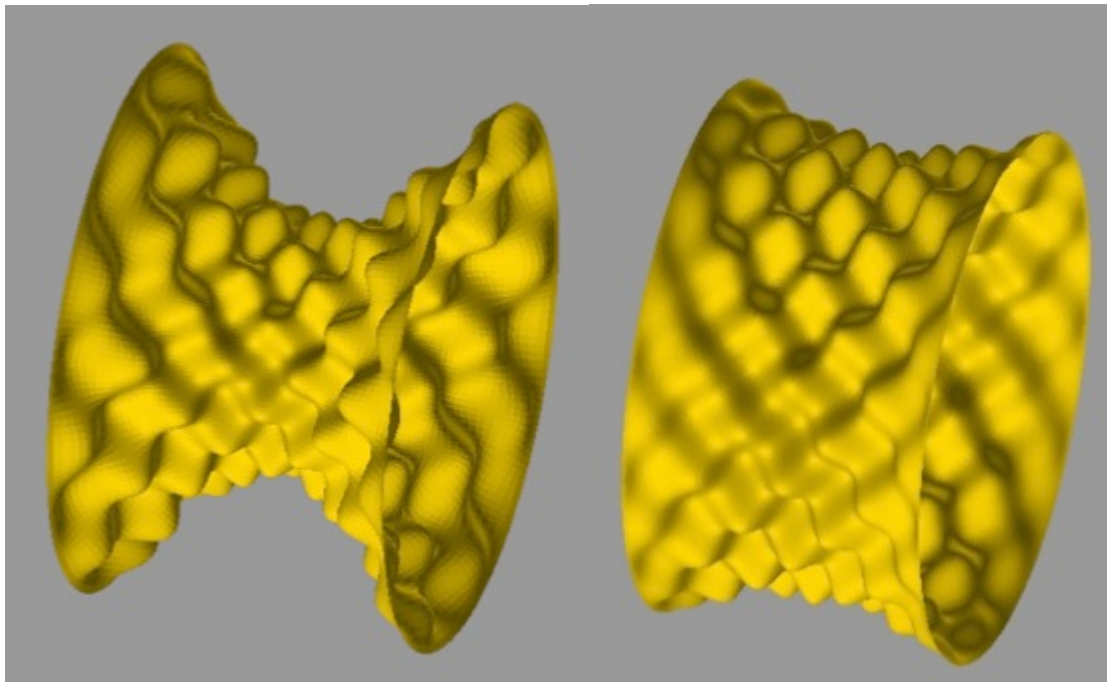


Figuur 17 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

In tabel 5 en figuur 17 valt op dat de eigenfrequentie toeneemt, onder invloed van de staal tot ongeveer 75 Hz en dan weer afneemt wanneer de straal blijft toenemen. In tabel 5 worden ook de eigenschappen van de catenoïde bevestigd, want de gemiddelde krommingen zijn 0. De Gausskromming is variabel, maar wel altijd negatief.

4.3 De trillingsvormen

De trillingsvorm is van belang om te kijken wat nu de eigenfrequentie beïnvloedt. Hiernaast willen we kijken, of het de juiste trilling is die is gevonden. In figuur 17 is te zien dat er een positieve en negatieve helling is in de grafiek.



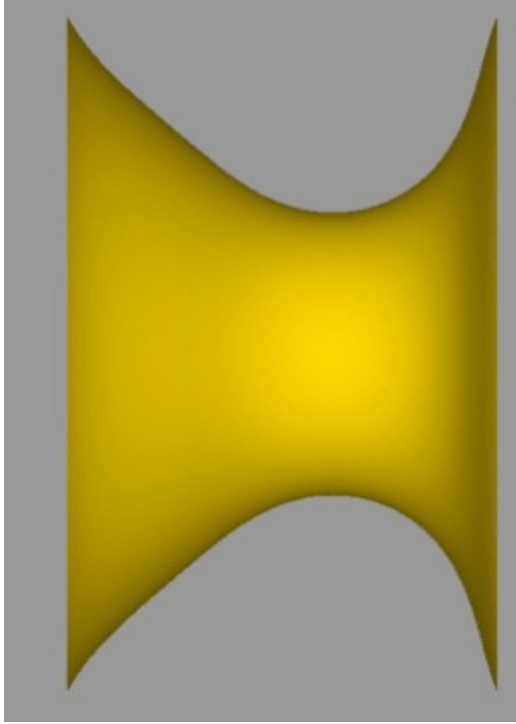
Figuur 18 Vervorming catenoïde straal 1 m

Figuur 19 Vervorming catenoïde straal 2 m

In figuur 18 is de vervorming van de catenoïde te zien, met een straal van 1 m. In figuur 19 is de vervorming te zien van de catenoïde met een straal van 2 m. Figuur 18 bevindt zich binnen het interval van de positieve helling. Figuur 19 bevindt zich binnen het interval van de negatieve helling.

Wat in bovenstaande figuren goed te zien is, zijn de trillingen die ontstaan op diagonale lijnen. Hiernaast is te zien dat die trillingen geen lokale verschijnselen zijn.

Wanneer de dikte zo ver toeneemt dat er geen sprake meer is van dunwandigheid, ziet de trillingsvorm eruit zoals in figuur 20 waarbij de figuur van links naar rechts beweegt.



Figuur 20 Vervorming catenoïde dikte 400 mm

5. Pseudobol

De uitgangswaarden zijn hier onder vermeld. De pseudobolranden zijn volledig ingeklemde. De lengte is van rand tot rand.

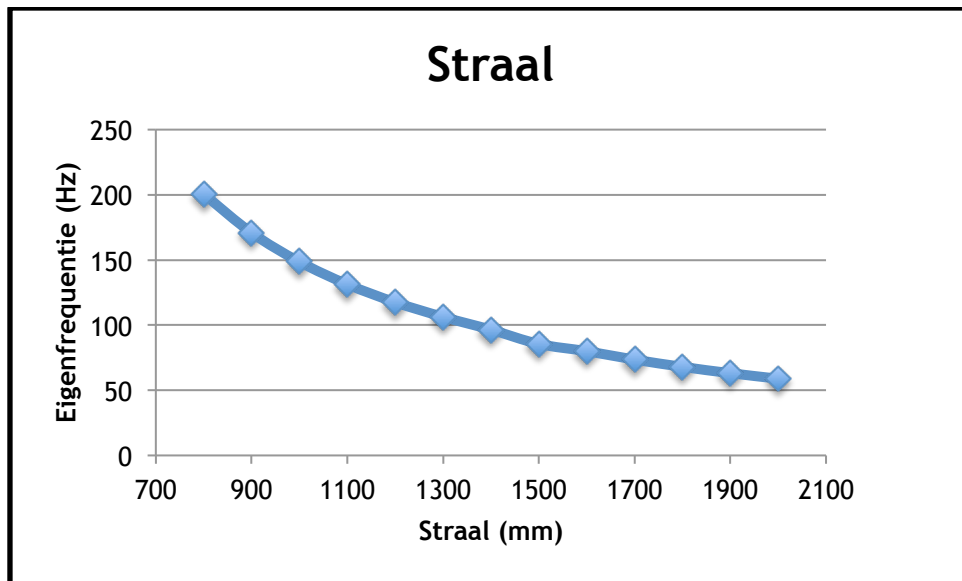
Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

5.1 Variatie van de straal

Er zit een fout in het script waardoor de lengte gekoppeld is aan de straal (zie bijlage A). Vandaar dat ook in tabel 6 de straal is weergegeven. In onderstaande tabel 6 en figuur 21 is te zien dat deze hyperbolisch afneemt, op het moment dat de straal en de lengte toenemen.

Tabel 6 Eigenfrequenties als functie van de straal en lengte

straal (m)	lengte (m)	freq. (Hz)	Gauss Kroming (1/m ²)
0,8	1,414	200,5	-0,8
0,9	1,591	170,8	-0,9
1,0	1,768	148,6	-1,0
1,1	1,945	131,3	-1,1
1,2	2,122	117,5	-1,2
1,3	2,298	106,3	-1,3
1,4	2,475	96,5	-1,4
1,5	2,652	85,5	-1,5
1,6	2,829	80,0	-1,6
1,7	3,006	73,5	-1,7
1,8	3,182	68,0	-1,8
1,9	3,359	63,1	-1,9
2,0	3,536	58,9	-2,0



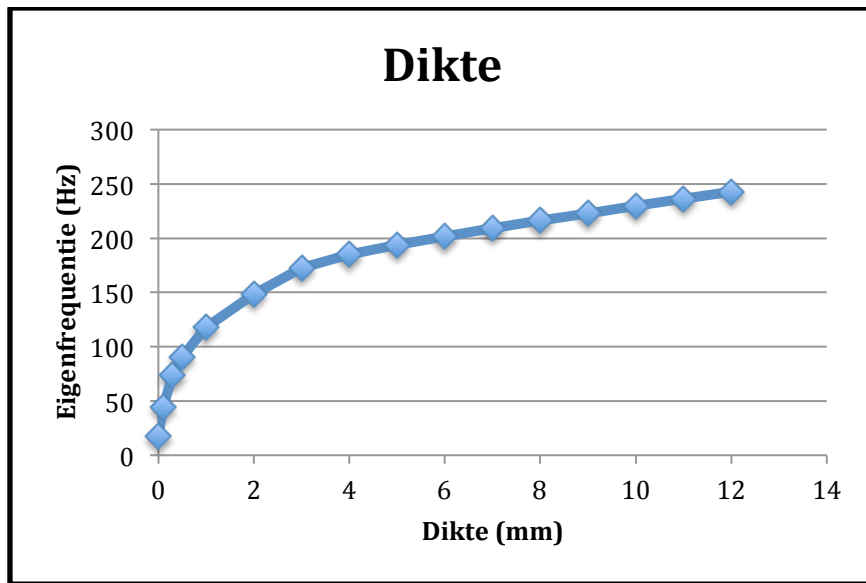
Figuur 21 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm) en lengte (niet afgebeeld in grafiek zie tabel 6)

5.2 Variatie van de dikte

ook de dikte is gevarieerd in tabel 7 en figuur 22. Hier zijn twee duidelijk stukken te zien, de kromme lijn van 0 mm tot 4 mm en de rechte lijn van 4 mm tot 12 mm. Wanneer de dikte naar 0 mm gaat, neemt de eigen frequentie ook af tot 0 Hz.

Tabel 7 Eigenfrequenties als functie van de dikte

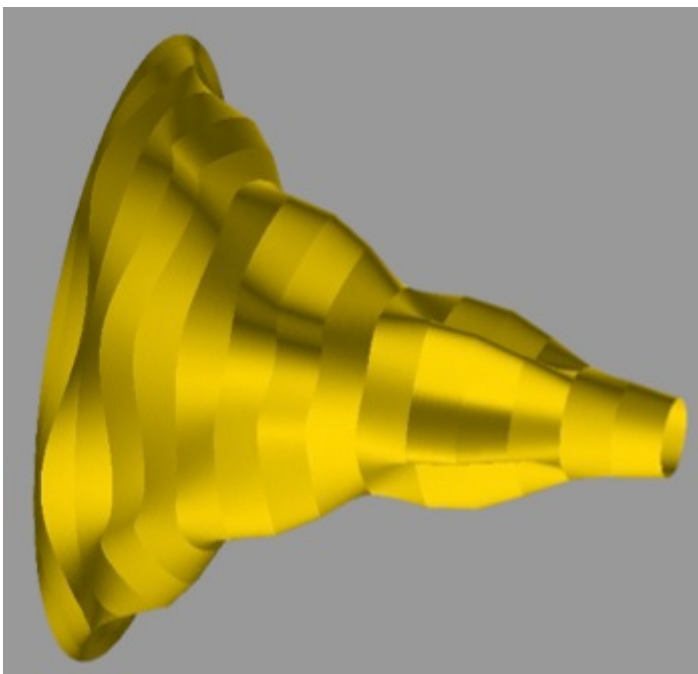
dikte (mm)	freq. (Hz)
0,009	17,371
0,1	43,734
0,3	73,664
0,5	90,495
1	117,97
2	148,57
3	172,42
4	185,23
5	193,93
6	201,78
7	209,11
8	216,14
9	222,97
10	229,69
11	236,36
12	242,99



Figuur 22 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dikte (mm)

5.3 De trillingsvormen

Zoals hierboven al genoemd is, zijn er twee situaties aan te wijzen die verschillend van elkaar zijn. Dit is ook te zien in de vervorming. In figuur 23 is de straal 2 meter en is er een vervorming te zien die erg veel lijkt op die van de catenoïde. In figuur 24 is de straal 1 meter, de dikte is dus relatief gezien wat groter, waardoor er minder trillingen aanwezig zijn.

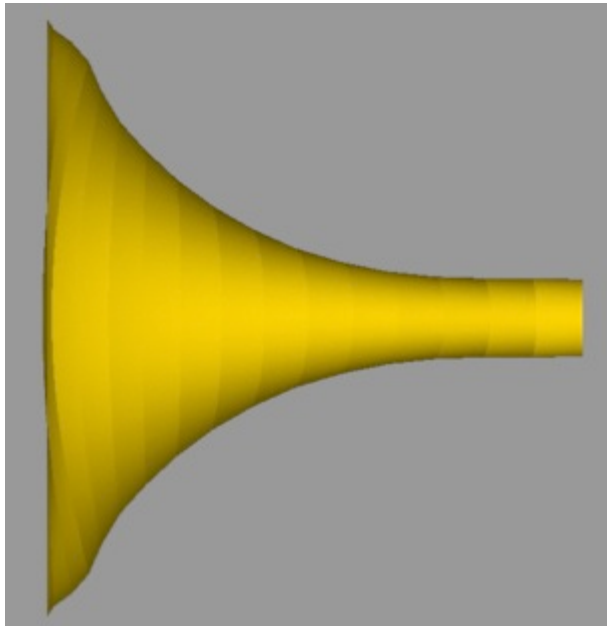


Figuur 23 trillingsvorm, straal 2 m, dikte 2 mm



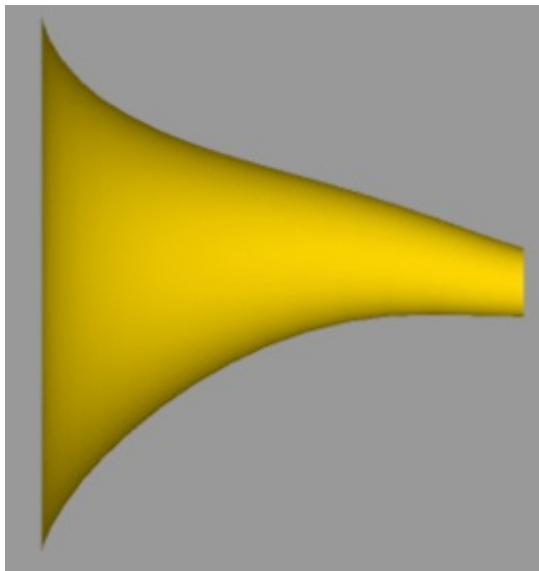
Figuur 24 trillingsvorm, straal 1 m, dikte 2 mm

In het stuk waar sprake is van een rechte lijn in de grafiek, is de vervorming volgens figuur 25. Dit is een enkele trilling in de hele vorm. Er is dus sprake van maar één trilling, terwijl in de bovenstaande figuren dat meerdere trillingen zijn.



Figuur 25 trillingsvorm, straal 1 m, dikte 5 mm

Als er gekeken wordt naar nog grotere diktes, dan gedraagt de pseudobol zich min of meer als een ligger. Een ligger die aan een kant is ingeklemd en aan de andere kant scharnierend is opgelegd. Dit is te zien in figuur 26.

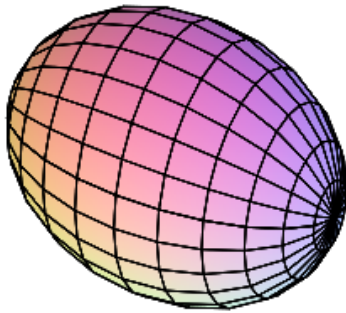


Figuur 26 trillingsvorm, straal 1 m, dikte 200 mm

6. Ellipsoïde

Referentiewaarden, volledig ingeklemde randen voor een prolate sferoïde. Het script bevindt zich in bijlage A.

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	1500	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³



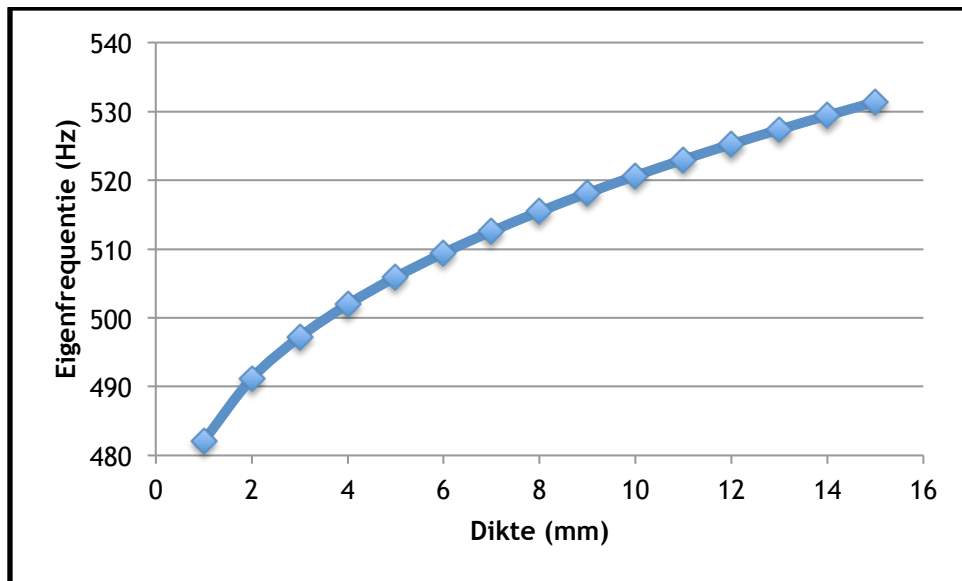
Figuur 27 Vorm van de gebruikte ellipsoïde

6.1 Variatie van de dikte

Als de dikte groter wordt, is te zien dat de eigenfrequentie enigszins toeneemt. Figuur 28 en tabel 8 tonen dit. Wanneer de dikte naar nul gaat, gaat ook de eigen frequentie naar nul. De vervorming die hoort bij deze eigenfrequenties is een rimpeling op de meest vlakke delen van de ellipsoïde.

Tabel 8 Eigenfrequenties als functie van de dikte

dikte (mm)	freq. (Hz)
1	482,09
2	491,18
3	497,21
4	501,93
5	505,92
6	509,42
7	512,57
8	515,45
9	518,13
10	520,64
11	523,00
12	525,24
13	527,37
14	529,41
15	531,36



Figuur 28 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dikte (mm)

6.2 Variatie van de straal

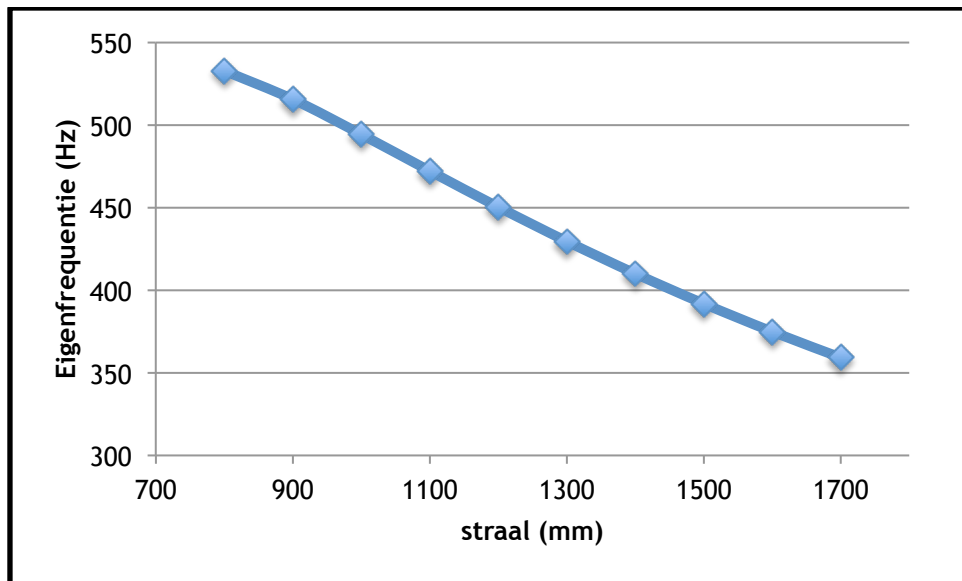
De straal a van de ellipsoïde wordt gevarieerd. In figuur 27 is de vorm te zien. Een eigenschap van de ellipsoïde is dat er verschillende stralen zijn $a=a$ $b=(a-200)$ $c=(a-400)$, deze zijn als volgt gevarieerd:

$$\begin{aligned} z(u,v) &= (a - 400) \cos(u) \sin(v) \\ y(u,v) &= (a - 200) \sin(u) \sin(v) \\ x(u,v) &= a \cos(v) \end{aligned} \quad (6.1)$$

In tabel 9 en figuur 29 is te zien dat dit een lineaire afname is, wanneer de straal toeneemt. De bijbehorende vervorming is hetzelfde als de vervorming bij de dikte. De rimpeling is te zien op het meest vlakke deel.

Tabel 9 Eigenfrequenties als functie van de straal

straal (m)	freq. (Hz)
0,8	532,91
0,9	515,7
1,0	494,46
1,1	472,27
1,2	450,46
1,3	429,67
1,4	410,13
1,5	391,91
1,6	374,97
1,7	359,26



Figuur 29 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

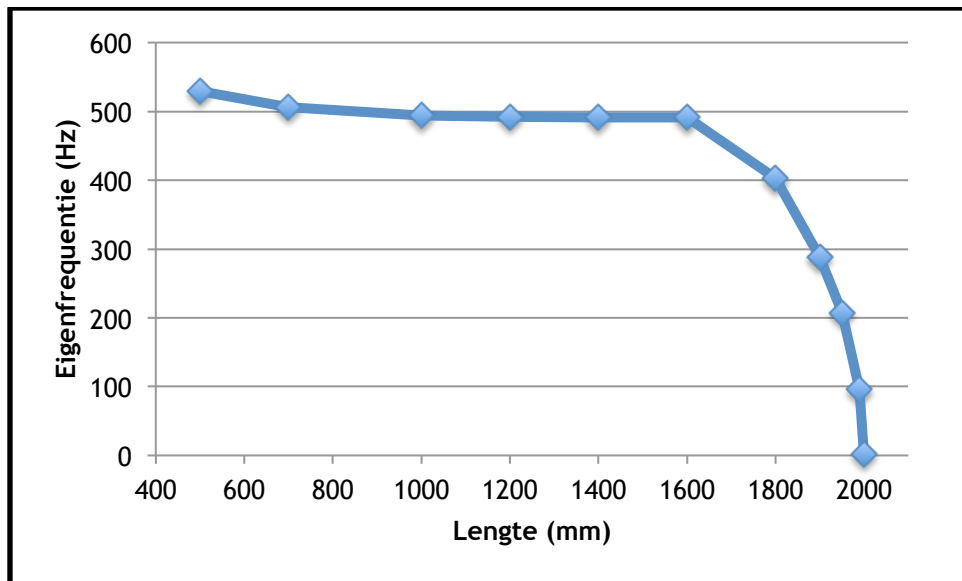
6.3 variatie van de lengte

De lengte bepaalt hier waar de ellipsoïde wordt opgelegd. Hoe groter de lengte hoe meer de ellipsoïde gesloten wordt. Hier is het maximum 2 meter.

In de tabel 10 en figuur 30 zijn twee duidelijk intervallen te zien. Als er naar de trillingsvorm wordt gekeken, is er nog een derde interval te onderscheiden. Dit interval is ook in de tabel en figuur te zien hieronder.

Tabel 10 Eigenfrequenties als functie van de lengte

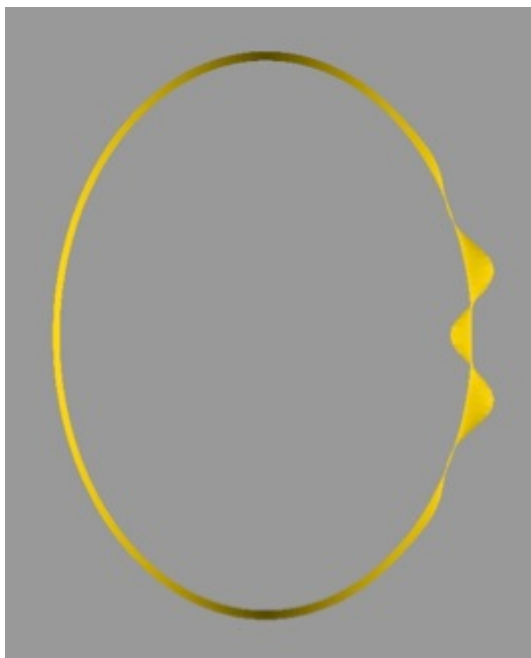
lengte (m)	freq. (Hz)
0,50	528,97
0,70	506,09
1,00	494,46
1,20	492,17
1,40	491,32
1,60	491,03
1,80	403,30
1,90	288,36
1,95	207,31
1,99	96,021
2,00	1,386



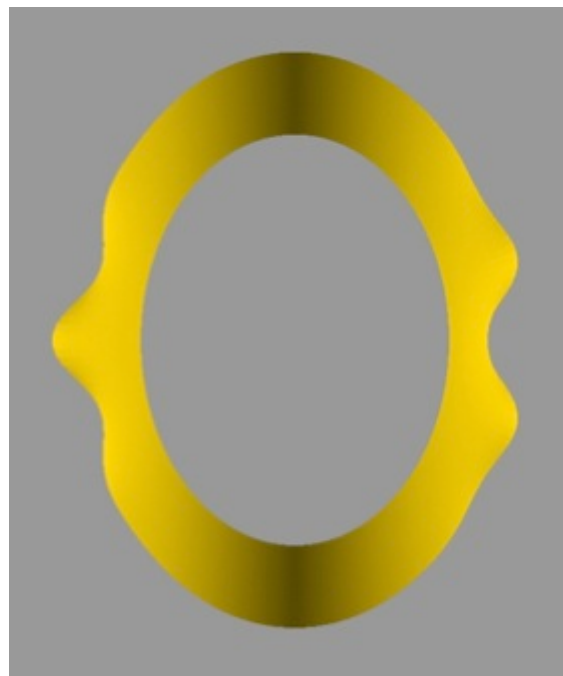
Figuur 30 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de lengte (mm)

6.4 De trillingsvormen

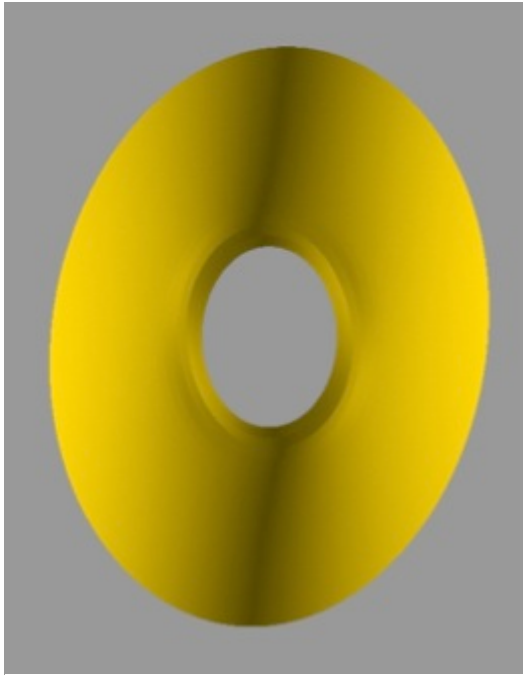
De frequenties die horen bij 0,5 m tot 1 m hebben een trillingsvorm met een rimpel in het meest vlakke deel in figuur 31. Deze rimpel zit aan een kant van de ellipsoïde. Van 1,2 m tot 1,6 m is er ook een rimpeling, op het meest vlakke gedeelte, maar nu aan beide kanten in figuur 32. Van 1,8 meter is de trillingsvorm een draaiing om de lengteas in figuur 33. Als de ellipsoïde helemaal dicht is, is de eigenfrequentie een draaiing. Dit is geen verrassing omdat de oplegging dan een scharnierde oplegging geworden is.



Figuur 31 Ellipsoïde lengte 0,5 m



Figuur 32 Ellipsoïde lengte 1,4 m



Figuur 33 Ellipsoïde lengte 1,9 m

7. Bol

7. Vrije bol

Eerst wordt er gekeken naar eigenfrequentie van een vrije bol. Het eindige elementenmodel wordt gecontroleerd met de formule opgesteld door W.E. Bakker (1961:1749-1758) .

$$f_n = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{7+3\nu - \sqrt{(7+3\nu)^2 - 16(1-\nu^2)}}{2(1-\nu^2)}} \quad (7.1)$$

Wanneer formule 7.1 gebruikt wordt met de waarden uit tabel 11 dan is het antwoord 558,23 Hz.

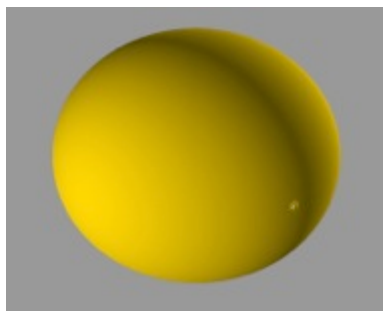
Tabel 11 Eigenschappen materiaal en vorm

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

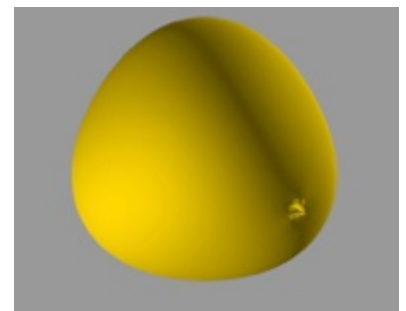
Wordt de 558,23 Hz vergeleken met de waarden uit Ansys in tabel 12 dan zit deze waarde erg dicht in de buurt van de berekende frequentie. Sommige van de frequenties in tabel 12 zijn niet bruikbaar en zullen niet moeten worden meegenomen. Bij frequentie 1 is de trillingsvorm geheel geconcentreerd op de gaten in het figuur. Aangezien die er niet zijn bij een dichte bol, kan deze frequentie verwaarloosd worden. Frequentie 2 tot en met 4 komen het best overeen met de berekende waarde. Wordt er gekeken naar de vervorming, dan is dit een soort lichte in- en uitdeuking van de bol in figuur 34. De frequenties 5 tot en met 8 hebben de vervorming van een zeepbel in figuur 35. Dit is een aannemelijke vervorming.

Tabel 12 Eigenfrequenties vrije bol

freq. nr.	freq. (Hz)
1	489,14
2	557,95
3	558,41
4	558,74
5	659,07
6	661,16
7	661,38
8	661,87



Figuur 34 Mode 2, 3 en 4



Figuur 35 mode 5 tot en met 8

7.2 Ingekleemde bol, variatie van de dikte

Referentiewaarden, aan de randen volledig ingeklemd. In bijlage A bevindt zich het script.

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	1500	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

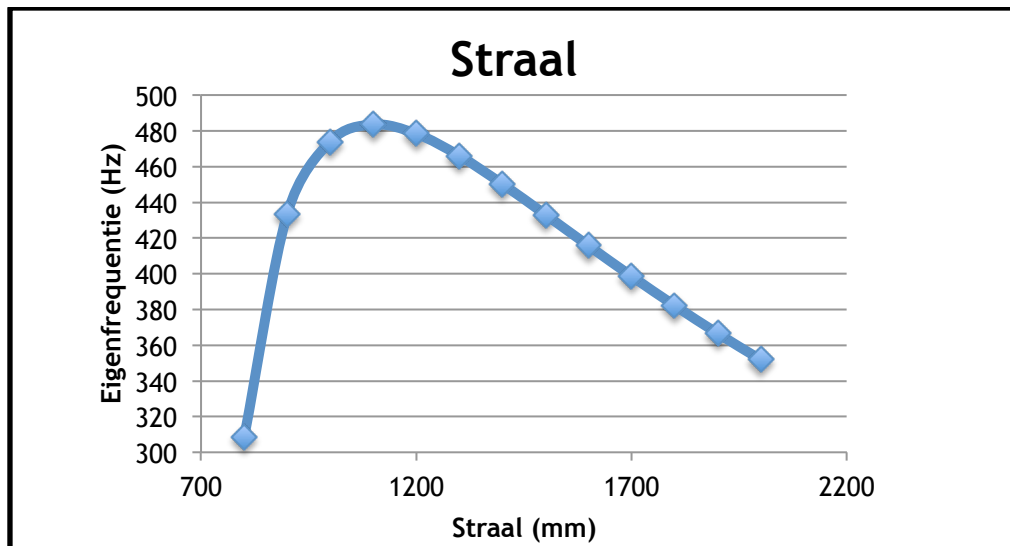
Nu wordt er weer gekeken naar een aan twee kanten ingekleemde bol. Net als bij de vorige vormen neemt de eigenfrequentie toe met de dikte, zoals te zien is in tabel 13. De enige trillingsvorm die wordt waargenomen is het schuiven van links naar rechts. Dit wordt verderop in dit hoofdstuk toegelicht.

Tabel 13 Eigenfrequentie als functie van de dikte

dikte (mm)	freq. (Hz)
1	468,64
2	474,1
3	478,31
4	481,88
5	485,05
6	487,94
7	490,61
8	493,13
9	495,5
10	497,77
11	499,94
12	502,03
13	504,05
14	506
15	507,9

7.3 Variatie van de straal

Wanneer de straal toeneemt wordt de eigenfrequentie hoger tot ongeveer 484 Hz, waarna de eigenfrequentie weer afneemt met de toenemende straal. Dit is goed te zien in figuur 36 en tabel 14.

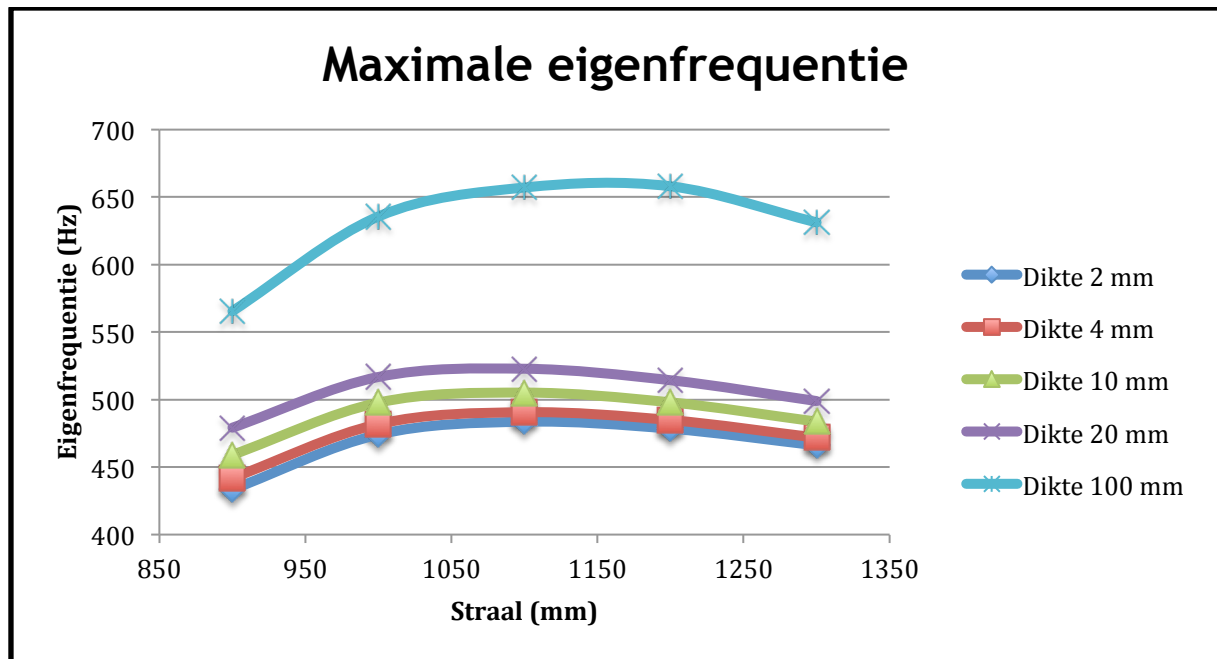


Figuur 36 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

Tabel 14 Eigenfrequentie als functie van de straal

straal (m)	freq. (Hz)	gemiddelde kromming (m^{-1})	Gauss kromming (m^{-2})
0,8	308,57	0,8	0,64
0,9	433,4	0,9	0,81
1,0	474,1	1	1
1,1	483,6	1,1	1,21
1,2	478,43	1,2	1,44
1,3	466,07	1,3	1,69
1,4	450,28	1,4	1,96
1,5	433,13	1,5	2,25
1,6	415,7	1,6	2,56
1,7	398,62	1,7	2,89
1,8	382,2	1,8	3,24
1,9	366,58	1,9	3,61
2,0	351,86	2	4

De vorm van deze grafiek toont veel gelijkenis met de grafiek van de catenoïde. Daarom is rond het maximum de dikte gevarieerd. Zo kan gekeken worden of dit invloed heeft op het maximum. Om zo te kijken of de maximale eigenfrequentie op hetzelfde punt valt van de straal. Dit is te zien in figuur 37.



Figuur 37 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

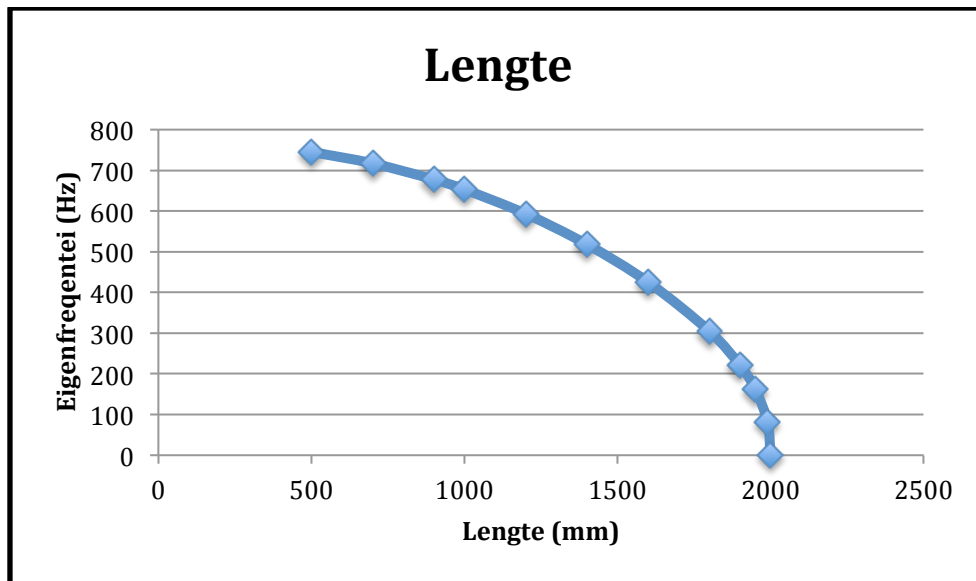
In figuur 37 is te zien dat wanneer de bol dunwandig blijft, de lijnen alleen verticaal verplaatsen. Dit betekent dat er een mogelijkheid is, een staal of kromming aan te wijzen, waarbij de eigenfrequentie maximaal is.

7.4 Variatie van de lengte

De lengte bepaalt waar de bol wordt ingeklemd. Bij een kleine lengte is er sprake van een soort cilindervorm met een constante kromming in de zijde. Bij een grote lengte is steeds beter de bolvorm te zien en worden de gaten aan beide kanten ook kleiner. De maximale lengte is dan ook tweemaal de straal.

Tabel 15 Eigenfrequentie als functie van lengte

Lengte (m)	freq. (Hz)
0,50	745,54
0,70	716,95
0,90	677,55
1,00	652,97
1,20	593,04
1,40	517,99
1,60	425,17
1,80	304,65
1,90	220,92
1,95	162,11
1,99	81,29
2,00	0,6885

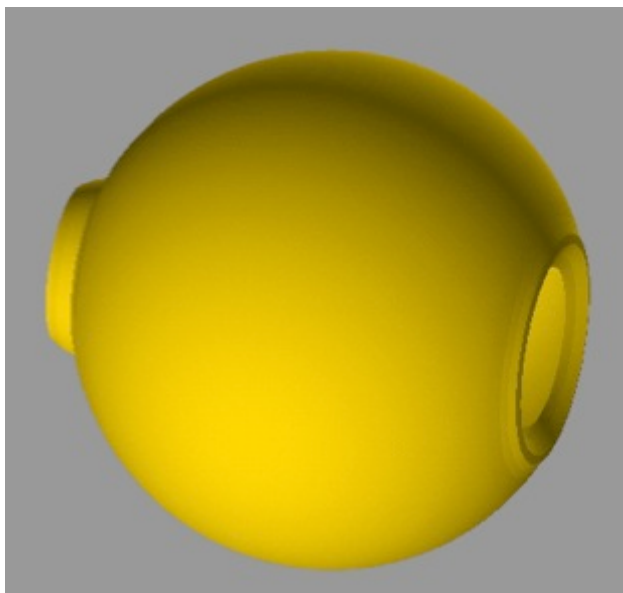


Figuur 38 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de lengte (mm)

In tabel 15 en figuur 38 is te zien hoe de eigenfrequentie afneemt, als de lengte toeneemt. Wat hierbij anders is, in vergelijking met de open vormen, is dat de bol steeds meer gesloten wordt. Dit brengt met zich mee, dat het oppervlak van de inklemming steeds kleiner wordt, zodat bij de lengte van 2000 mm eigenlijk sprake is van een scharnierende oplegging.

7.5 De trillingsvormen

De trillingsvormen van de bol zijn er in twee maten. Als eerste is de verplaatsing van links naar rechts te zien, zoals in figuur 39. De tweede vervorming is een draaiing om de lengte as. Deze vervorming komt voor als de lengte tweemaal de staal nadert en wanneer de dikte toeneemt. In alle ander gevallen vindt de vervorming plaats volgens figuur 39.



Figuur 39 Trillingsvorm van de bol met een lengte van 1950 mm

8. Halve bol

Voor de Halve bol zijn een tweetal formules Rayleigh (1881:4-10) en Blevins (1974). Hieronder is formule 8.1 van Rayleigh. Deze heeft nog een onbekende factor ψ . Er zal gekeken worden of het mogelijk is die factor te bepalen. Formule 8.2 is van Blevins.

$$f_n = \psi \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (8.1)$$

$$f_n = 0,2407 \frac{t}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)}} \quad (8.2)$$

Deze formules zijn opgesteld voor vrije halve bollen. In het gebruikte script zijn de halve bollen aan de onderkant ingeklemd. Het script bevindt zich in bijlage A. Voor de formules zal dus alleen gekeken worden naar de vervormingen aan de vrije rand. Wanneer er zich vervormingen voordoen onder invloed van de ingeklemde rand, zullen die niet moeten worden meegenomen.

Referentiewaarden, aan een kant volledig ingeklemd.

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	1995	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

8.1 Variatie van de dikte

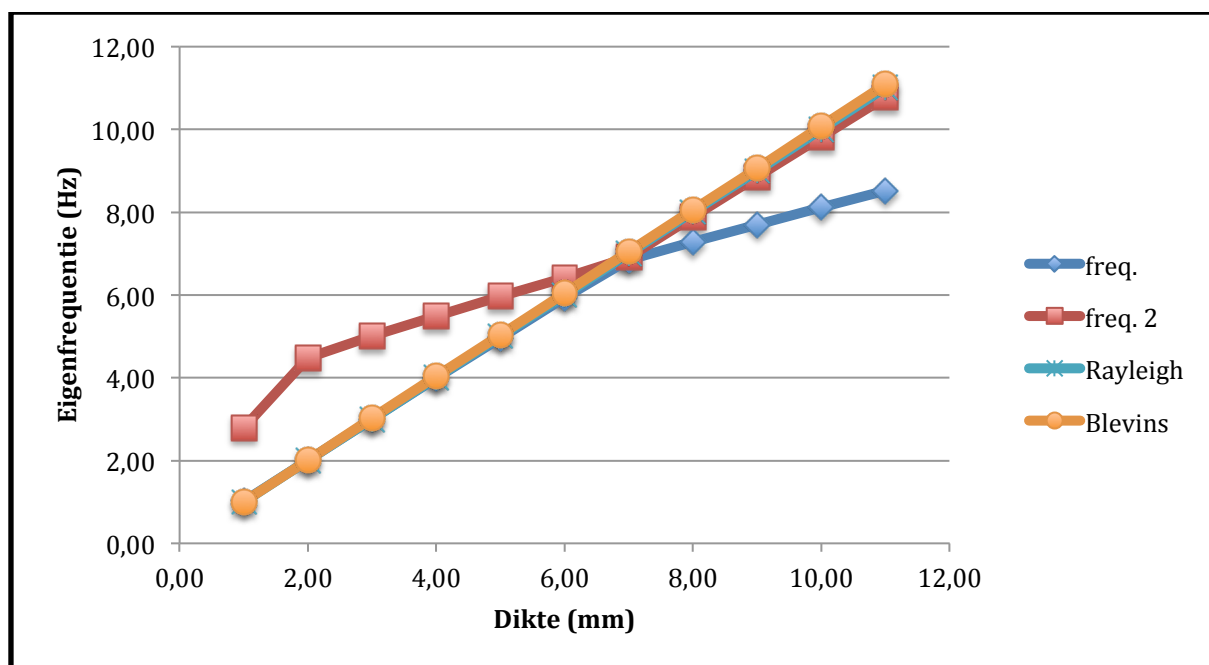
In tabel 16, in kolom 2 en 3 staan de eerste en tweede eigenfrequentie. De tweede eigenfrequentie is meegenomen omdat de eerste begint als trilling op de vrije rand zie figuur 40. Bij een dikte van 7 mm verandert de vervorming en wordt het een trilling onder invloed van de inkleming. De tweede eigenfrequentie begint als een trilling onder invloed van de inklemming. Op 7 mm dikte wordt dit de trilling op de vrije rand. Voor de formules moet dus gekeken worden naar de eerste frequentie voor diktes kleiner dan 7mm. Voor diktes groter dan 7 mm moet er gekeken worden naar de tweede eigenfrequentie.

In de vierde kolom staan de waarden van de formule van Rayleigh zonder factor. In de kolom daarnaast wordt deze factor berekend. Dit wordt gevonden door de gevonden eigenfrequentie te delen door de gevonden waarden met de formule van Rayleigh.

In de zesde kolom staat de waarden van de formule van Rayleigh met als ψ 1/5. In de zevende kolom staan de waarden van Blevins (8.2)

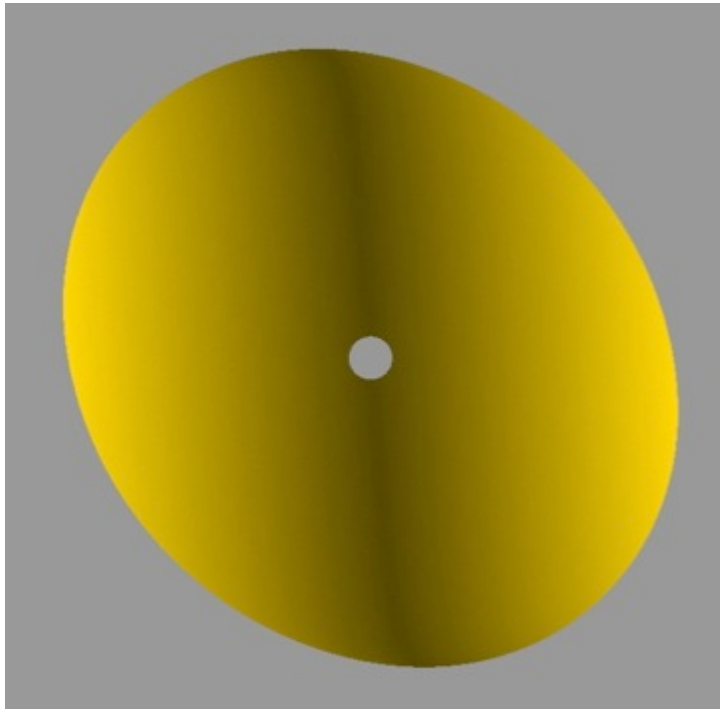
Tabel 16 Ansys waarden, benadering, controle van de formules 8.1 en 8.2 als functie van de dikte

dikte (mm)	freq. 1 (Hz)	freq. 2 (Hz)	Rayleigh (Hz)	Rayleigh factor ψ (-)	Rayleigh (Hz)	Blevins (Hz)
1	1,02	2,79	5,00	0,20	1,00	1,01
2	2,01	4,48	10,01	0,20	2,00	2,02
3	3,00	5,00	15,01	0,20	3,00	3,02
4	3,98	5,49	20,02	0,20	4,00	4,03
5	4,97	5,96	25,02	0,20	5,00	5,04
6	5,94	6,42	30,02	0,20	6,00	6,05
7	6,86	6,92	35,03	0,20	7,01	7,05
8	7,28	7,89	40,03	0,20	8,01	8,06
9	7,70	8,86	45,03	0,20	9,01	9,07
10	8,12	9,82	50,04	0,20	10,01	10,08
11	8,52	10,78	55,04	0,20	11,01	11,08



Figuur 40 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dikte (mm)

Wat in figuur 40 goed te zien is, is dat beide formules goed overeenkomen met de gevonden waarden. Verder is ook goed te zien hoe de eerste en de tweede eigenfrequentie met elkaar wisselen, waarbij beide van trillingsvorm wisselen.



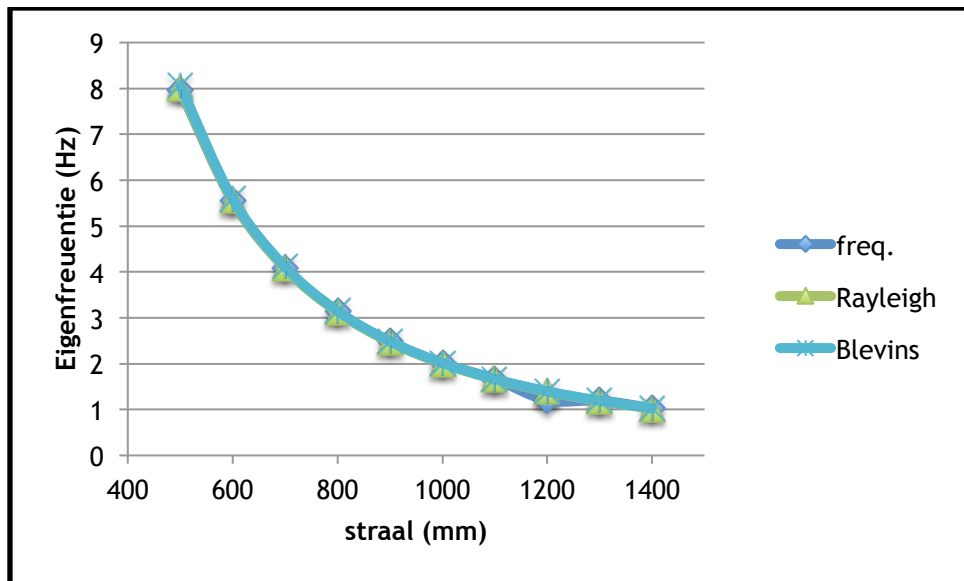
Figuur 41 vervorming bij dikte van 4 mm van de eerste eigenfrequentie bovenaanzicht

8.2 Variatie van de straal

Bij variëren van de straal is dezelfde methode gebruikt als bij de dikte. Hier was geen tweede eigenfrequentie nodig omdat de vervorming altijd op de rand is. Deze ontbreekt dus in tabel 17. Ook voor de straal was de factor ψ is gelijk aan $1/5$. Zoals in tabel 17 en figuur 42 te zien is, komen beide formules goed overeen.

Tabel 17 Ansys waarden en benadering en controle van de formules 8.1 en 8.2 als functie van de straal

straal (m)	freq. (Hz)	Rayleigh (Hz)	Rayleigh factor ψ (-)	Rayleigh (Hz)	Blevins (Hz)
0,5	7,97	40,03	0,20	8,01	8,06
0,6	5,55	27,80	0,20	5,56	5,60
0,7	4,08	20,42	0,20	4,08	4,11
0,8	3,13	15,64	0,20	3,13	3,15
0,9	2,48	12,36	0,20	2,47	2,49
1,0	2,01	10,01	0,20	2,00	2,02
1,1	1,66	8,27	0,20	1,65	1,67
1,2	1,20	6,95	0,17	1,39	1,40
1,3	1,20	5,92	0,20	1,18	1,19
1,4	1,03	5,11	0,20	1,02	1,03



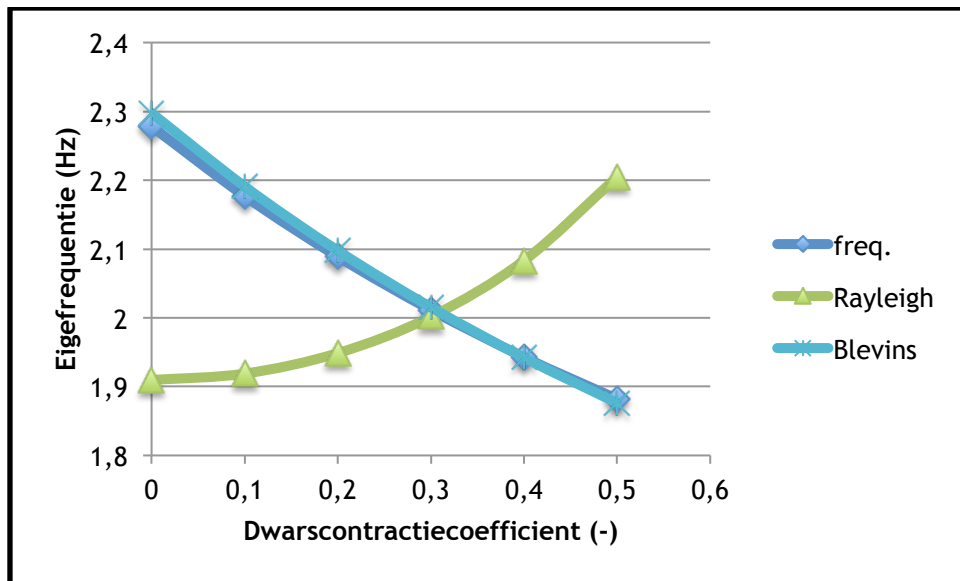
Figuur 42 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

8.3 variatie van de dwarscontractiecoëfficiënt

Als er gekeken wordt naar de formules 8.1 en 8.2 dan is te zien dat de dwarscontractiecoëfficiënt in de beide formules een ander rol speelt. Hier wordt voor de ψ is gelijk aan $1/5$ gebruikt, die gevonden was in de twee bovenstaande paragrafen.

Tabel 18 Ansys waarden en de waarde van de formules 8.1 en 8.2 als functie de dwarscontractiecoëfficiënt

dwarsc. (-)	freq. (Hz)	Rayleigh (Hz)	Blevins (Hz)
0,00	2,28	1,91	2,30
0,10	2,18	1,92	2,19
0,20	2,09	1,95	2,10
0,30	2,01	2,00	2,02
0,40	1,94	2,08	1,94
0,50	1,88	2,20	1,88



Figuur 43 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dwarscontractiecoëfficiënt (-)

In tabel 18 en figuur 43 is goed te zien dat de formule van Rayleigh niet klopt met de gevonden waarden. De eigenfrequentie stijgt terwijl de dwarscontractiecoëfficiënt stijgt. Dit is het tegenovergestelde van de gevonden waarden in tabel 18 en uit de waarden van de formule van Blevins. Hier is ook geen waarde voor ψ te vinden, die wel zou voldoet. Waarom het bij de dikte en de straal wel goed ging, is te zien in figuur 43 doordat de lijnen elkaar snijden op het punt 0,3. Dit betekent dat het daar dus niet uitmaakt welke van de twee formules wordt gebruikt.

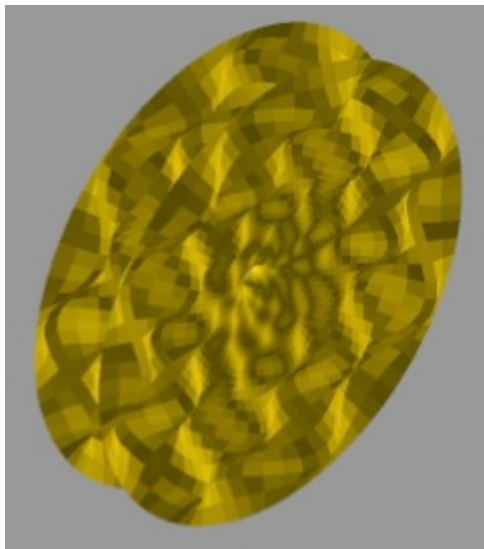
De formule van Blevins komt in alle drie de gevallen zeer goed overeen met de gevonden waarden.

9. Formule opstellen catenoïde

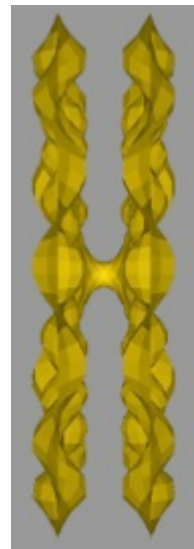
Voordat er een formule opgesteld wordt voor de laagste eigenfrequentie van catenoïden wordt er eerst beter gekeken naar deze vorm. Dit gaat om een aantal gebieden. Een gebied is het stuk met een zeer kleine staal. Een ander gebied is waar de positieve helling overgaat naar een negatieve helling, wanneer de eigenfrequentie afhankelijk is van de lengte. Ook is het van belang te onderzoeken of de helling van de negatieve of positief helling nog invloed heeft op andere variabelen.

9.1 Zeer kleine stralen

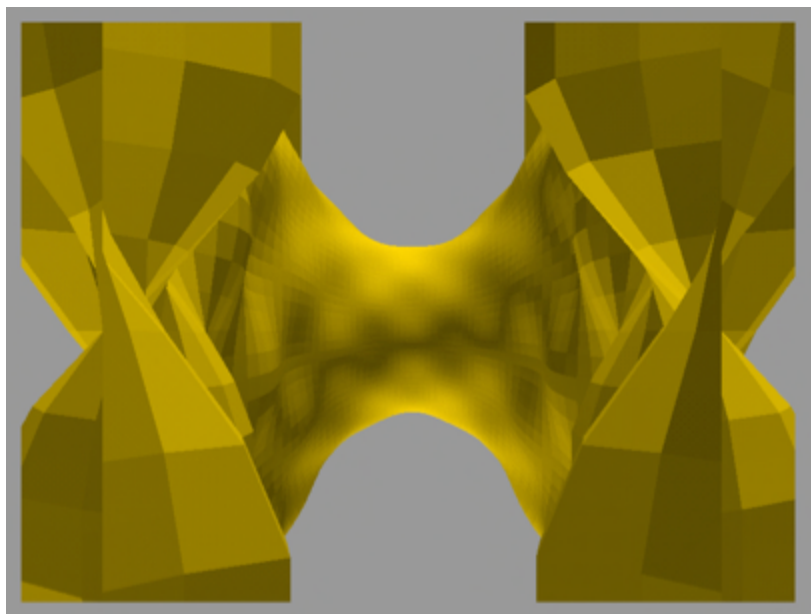
Vanaf 400 mm gaat de eigenfrequentie hyperbolisch naar nul. De vervormingen die hier bij horen zijn te zien in figuur 44, 45 en 46. In figuur 44 en 45 is te zien dat de trillingen in de buiten randen zitten. In figuur 46 is een uitvergroting te zien van het tussenstuk. Hier zie je dat de amplitude van de trillingen minimaal zijn. Hier is duidelijk te zien dat de trillingen zich voordoen op de meest vlakke plaatsen van de catenoïde. Hoe vlakker het is, hoe groter ook de amplitude op dit gebied is.



Figuur 44 Vervorming bij straal van 400 mm



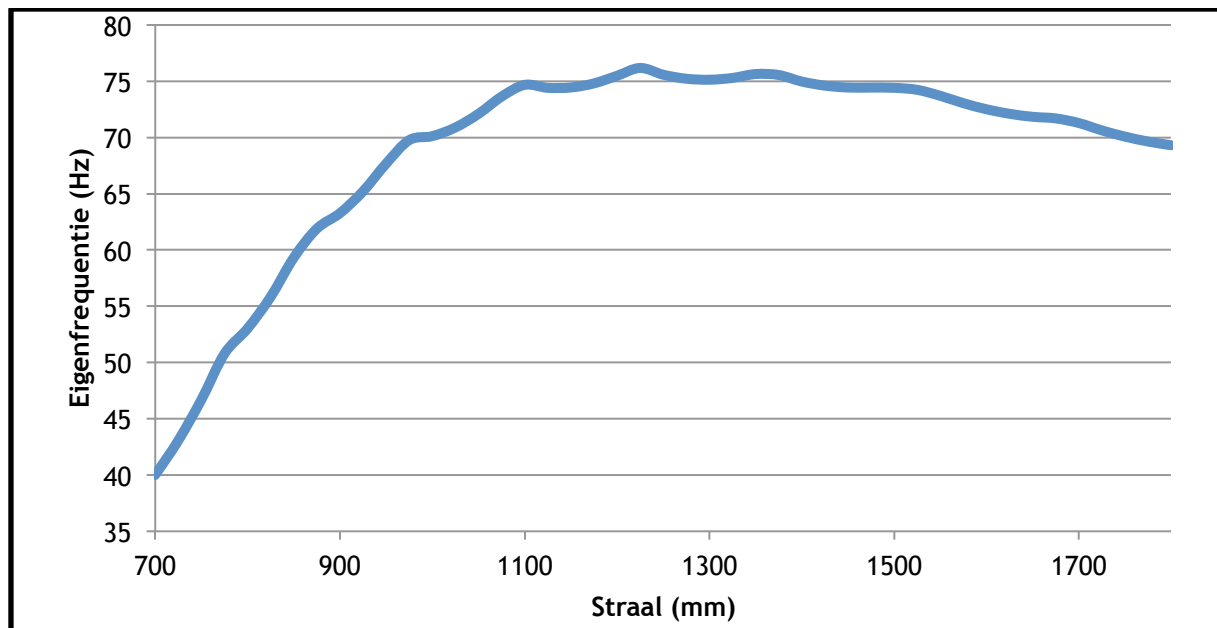
Figuur 45 Vervorming bij straal van 400 mm



Figuur 46 Vervorming bij straal van 400 mm

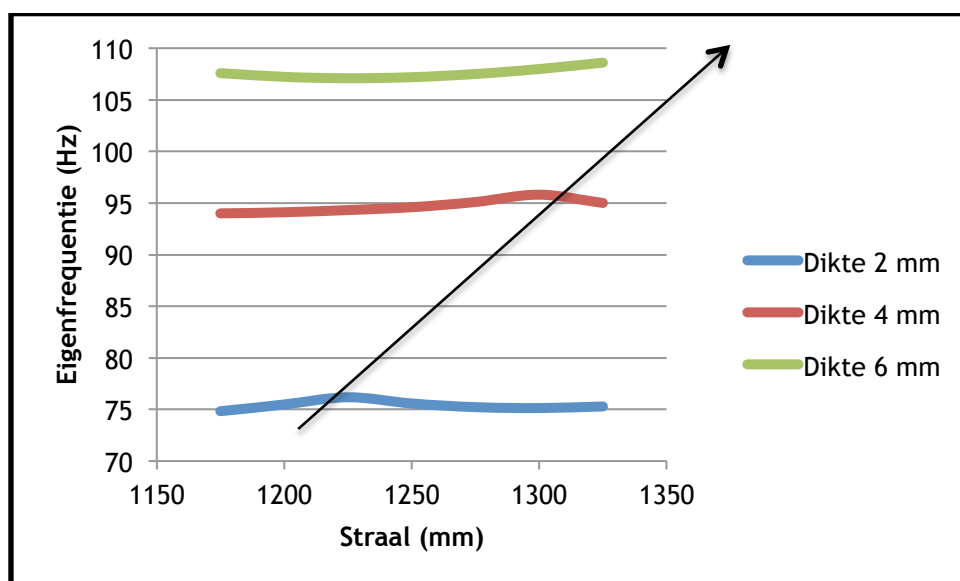
9.2 Nabij het maximum

Om te zien hoe de overgang is van de positieve helling naar de negatieve helling, is er gefocust op het punt waar de positieve in de negatieve helling overgaat. In figuur 47 is te zien hoe deze overgang eruit ziet. Wat het meest opvalt op dit niveau is dat er golven aanwezig zijn in de grafiek. Dit is te verklaren doordat er een straal is met een bijbehorende lengte, waar een precies aantal trillingen in past. Als dit precies past zit je in een dal in de eigenfrequentie-grafiek, past dit minder goed dan zal de eigenfrequentie hoger zijn.



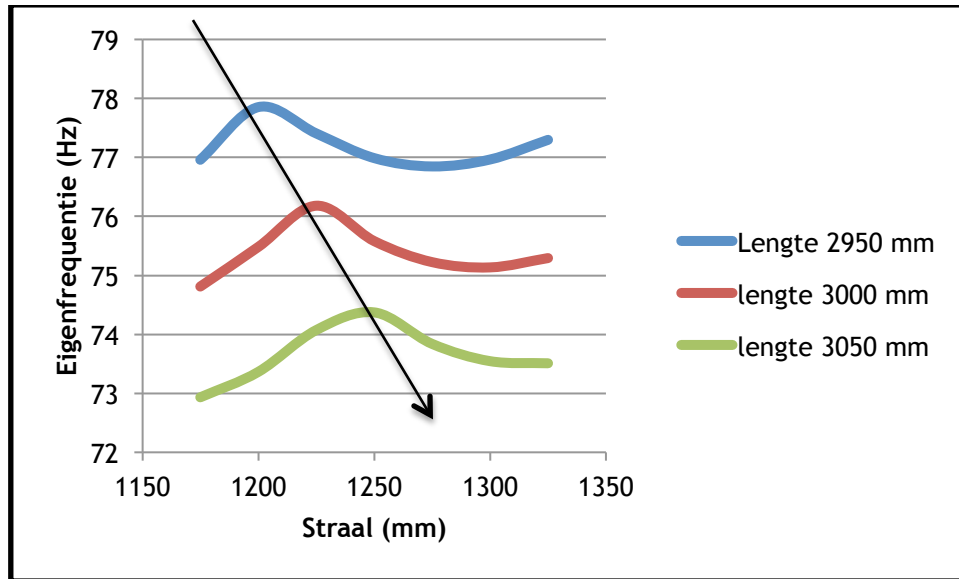
Figuur 47 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm)

Om de invloed van de dikte en de lengte te vinden, wordt er gekeken naar de verplaatsing van het maximum van de eigenfrequentie, door deze twee te variëren. In figuur 48 is te zien wat de invloed van de dikte is. In figuur 49 is te zien wat de invloed is van de lengte.



Figuur 48 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm) voor verschillende diktes

In figuur 48 is te zien dat de dikte zorgt voor een verplaatsing van het maximum naar rechts als de dikte toeneemt. Ook zorgt een toenemende dikte voor het toenemen van de eigenfrequentie. In deze figuur is ook te zien dat deze toename niet lineair gaat.



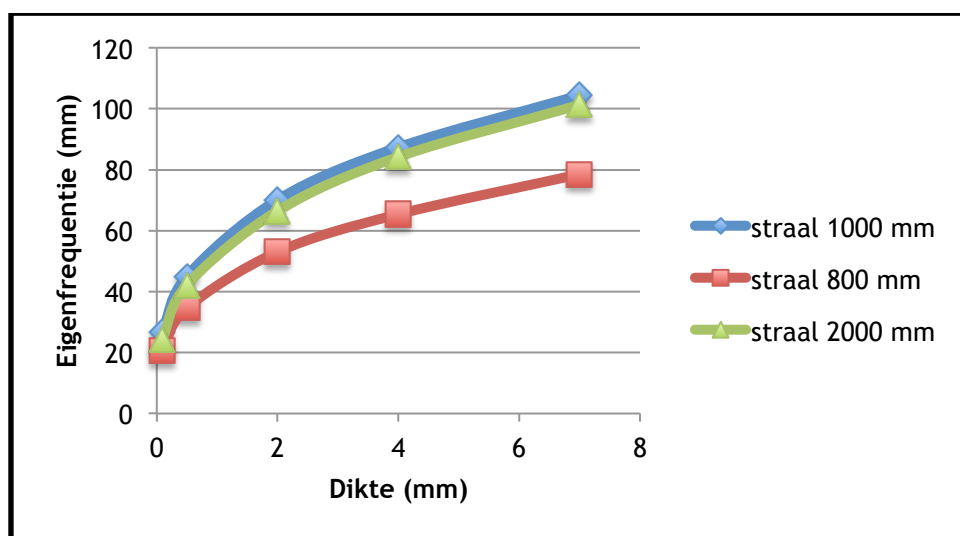
Figuur 49 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de straal (mm) voor verschillende lengtes

Figuur 49 laat de eigenfrequentie zien voor verschillende lengtes. Wordt de catenoïde langer dan is te zien dat de eigenfrequentie afneemt en het maximum naar rechts verplaatst.

De verplaatsingen door de dikte en lengte staan loodrecht op elkaar, dit betekent dat de lengte en de dikte ontkoppelt zijn en niet van elkaar afhangen.

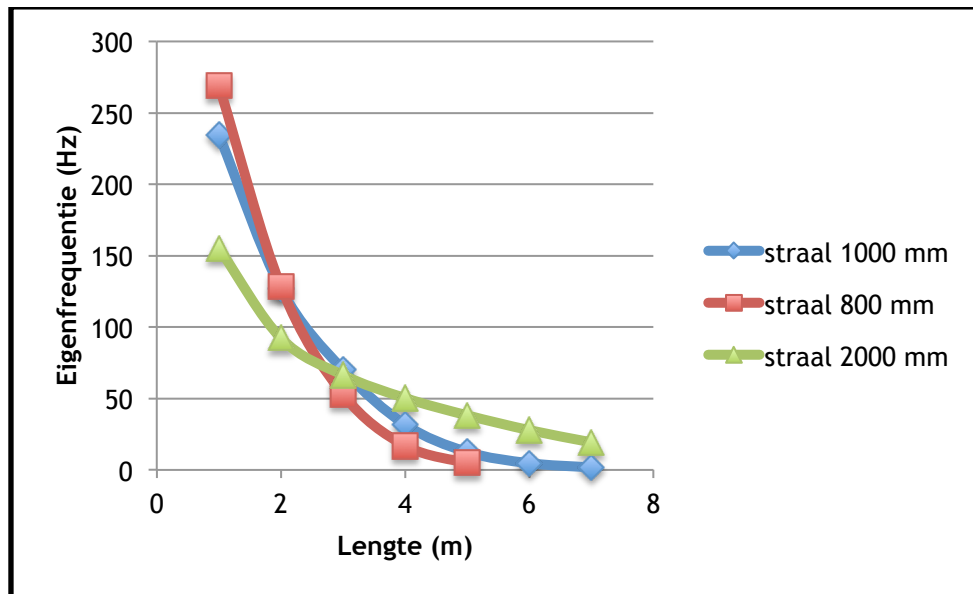
9.3 Gedrag van variabele bij verschillende stralen

In de paragraaf over de catenoïde paragraaf 4, is te zien dat onder invloed van de straal de eigenfrequentie toeneemt tot een bepaald punt. Na dit punt neemt de eigenfrequentie weer af. Het is van belang om na te gaan wat voor invloed dit heeft op andere variabele. In deze paragraaf wordt gekeken of dit invloed heeft op de dikte, lengte en dwarscontractiecoëfficiënt.



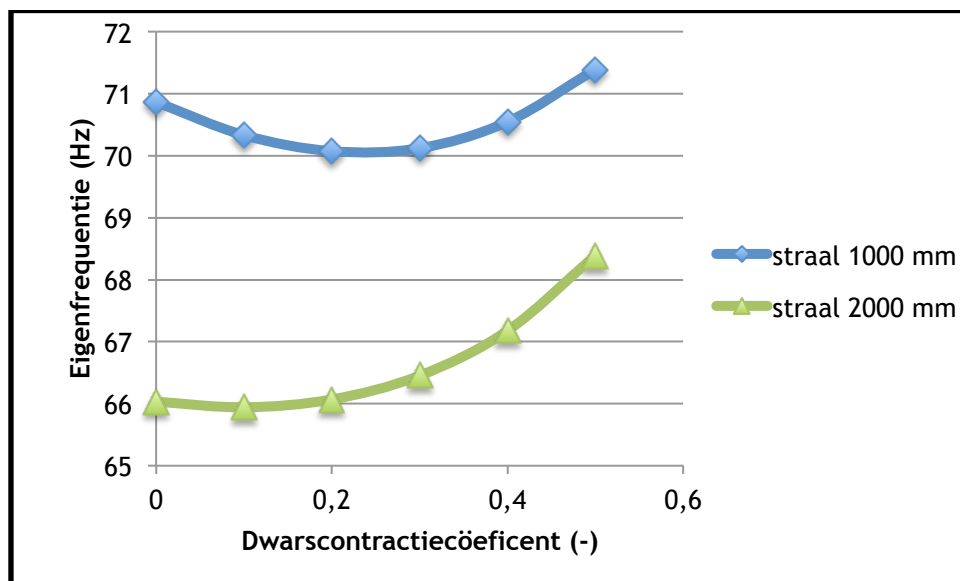
Figuur 50 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dikte (mm) voor verschillende stralen

In figuur 50 is te zien dat de stralen in het stijgende interval, straal: 800 mm en 1000 mm, dezelfde vorm hebben als de staal in de dalende interval: 2000 mm. Deze vorm komt het best overeen met een derdemachtswortelfunctie.



Figuur 51 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de lengte (m) voor verschillende stralen

Wat in figuur 51 het meest opvalt is, dat bij een staal van 2000 mm de lijn bijna lineair is na 2 meter. Deze drie lijnen kunnen benaderd worden door een formule met de lengte in de noemer.



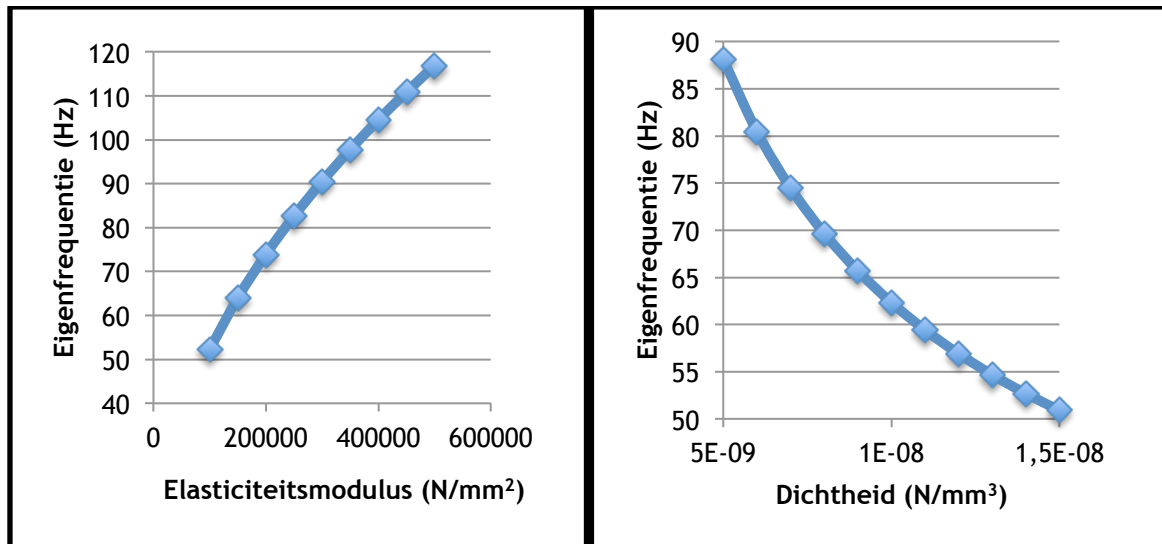
Figuur 52 Eigenfrequentie (Hz) als functie van de dwarscontractiecoëfficiënt (-) voor verschillende stralen

In figuur 52 is de zien dat deze lijnen voor de dwarscontractiecoëfficiënt erg overeenkomen met een tweedegraads vergelijking. Ook is te zien dat de dwarscontractiecoëfficiënt maar een kleine invloed heeft op de eigenfrequentie. Door deze kleine invloed zou een lineaire vergelijking ook kunnen voldoen.

9.4 Invloed van de dichtheid en elasticiteitsmodulus

Het vermoeden bestaat dat de dichtheid en de elasticiteitsmodules eenzelfde invloed hebben in vergelijking met de cilinder. De invloed die zij hebben bij de cilinder is als in de formule 9.1. Als er gekeken wordt naar figuur 53 en 54, is te zien dat deze beide, de vorm hebben, die past bij de invloed zoals beschreven in formule 9.1.

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9.1)$$



Figuur 53 Eigenfrequentie (Hz) als functie van elasticiteitsmodulus (N/mm²)

Figuur 54 Eigenfrequentie (Hz) als functie van dichtheid (N/mm³)

9.5 formule

Met de bovenstaande eigenschappen is de volgende formule vastgesteld:

$$f_n = \frac{2}{125} t^{1/3} K^{2/3} (2,3v^2 - v + 10,46)^3 \sqrt{(1,5 \frac{a}{l})^4 + 15} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9.2)$$

In deze formule is K de gauss kromming op 7/20 van de lengte ten opzichte van de oorsprong van de catenoïde. (9.3)

$$K = \frac{-\sec h^4(\frac{7l}{20a})}{a^2} \quad (9.3)$$

In het volgende hoofdstuk zal gekeken worden naar de controle en nauwkeurigheid.

10. Formule controleren en nauwkeurigheid bepalen

De gevonden formule 9.2, is gecontroleerd aan de hand van berekende Ansys waarden. Ook is gekeken, of er gebieden zijn waarbij de nauwkeurigheid niet voldoet. Mochten deze gebieden er zijn, dan zullen voorwaarden moeten worden opgenomen om de bruikbaarheid van de formule te garanderen.

De uitgangssituatie is als volgt; beide randen zijn volledig ingeklemd en de variabelen hebben de volgende waarden, wanneer deze niet gevarieerd worden:

Straal	1000	mm
Dikte	2	mm
Elasticiteitsmodulus	1,80E+05	N/mm ²
Dwarscontractiecoëfficiënt	0,3	-
Lengte	3000	mm
Dichtheid	7,90E-09	N/mm ³

10.1 Dikte

In tabel 19 wordt gekeken naar het verschil tussen de Ansys eerste eigenfrequenties en met de formule 9.2 gevonden eigenfrequenties. Deze zijn gevonden met de formule wanneer de dikte varieert. Bij 0,09 mm is het verschil 7,2%, dit is het grootste verschil bij de dikte.

Tabel 19 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de dikte

Dikte (mm)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Verschil
0,09	26,78	24,86	7,2%
0,5	45,09	44,04	2,3%
1	56,15	55,48	1,2%
2	70,12	69,91	0,3%
3	79,95	80,02	-0,1%
4	87,36	88,07	-0,8%
5	94,46	94,88	-0,4%
6	99,24	100,82	-1,6%
7	104,40	106,14	-1,7%
8	109,87	110,97	-1,0%
9	113,04	115,41	-2,1%
10	116,30	119,54	-2,8%
11	119,74	123,39	-3,1%
12	123,34	127,03	-3,0%
13	127,08	130,46	-2,7%
14	130,95	133,72	-2,1%
15	133,79	136,83	-2,3%

10.2 straal

In tabel 20 wordt gekeken naar het verschil tussen de Ansys eerste eigenfrequenties en de met de formule 9.2 gevonden eigenfrequenties. Deze zijn gevonden met de formule wanneer de straal variabel is. Als de straal kleiner wordt dan 0,6 m wordt het verschil steeds groter. Voor deze waarden zal er dus een voorwaarde moeten worden opgenomen.

Tabel 20 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de straal

Straal (m)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Vershil
0,3	0,44	0,69	-56,3%
0,4	3,63	4,77	-31,4%
0,5	11,93	13,99	-17,3%
0,6	24,80	26,82	-8,1%
0,7	39,97	40,45	-1,2%
0,8	53,03	52,74	0,5%
0,9	63,28	62,63	1,0%
1,0	70,12	69,91	0,3%
1,1	74,68	74,79	-0,2%
1,2	75,49	77,71	-2,9%
1,3	75,14	79,09	-5,3%
1,4	74,98	79,31	-5,8%
1,5	74,42	78,70	-5,8%
1,6	72,51	77,52	-6,9%
1,7	71,29	75,95	-6,5%
2,0	66,45	70,17	-5,6%
2,5	59,44	60,66	-2,1%
3,0	53,34	53,38	-0,1%
4,0	45,30	45,07	0,5%
5,0	39,04	41,62	-6,6%

10.3 Lengte

In tabel 21 wordt gekeken naar het verschil tussen de Ansys eerste eigenfrequenties en de met de formule 9.2 gevonden eigenfrequenties. Deze zijn gevonden met de formule wanneer de lengte variabel is. Als de lengte groter wordt dan 6 m, wordt het verschil steeds groter. Voor deze waarden zal er dus ook een voorwaarde moeten worden opgenomen.

Tabel 21 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de lengte

Lengte (m)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Vershil
1	234,49	230,96	1,5%
2	127,12	135,14	-6,3%
3	70,12	69,91	0,3%
4	31,81	31,93	-0,4%
5	12,59	13,57	-7,8%
6	4,73	5,55	-17,4%
7	1,75	2,23	-27,1%

8	0,64	0,88	-38,1%
9	0,24	0,35	-46,9%
10	0,09	0,14	-57,4%

10.4 Dwarscontractiecoëfficient

In tabel 22 wordt gekeken naar het verschil tussen de Ansys eerste eigenfrequenties en de met de formule 9.2 gevonden eigenfrequenties. Deze zijn gevonden met de formule wanneer de dwarscontractiecoëfficient variabel is. De dwarscontractiecoëfficient heeft zeer kleine verschillen.

Tabel 22 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de dwarscontractiecoëfficient

Dwarscontractiecoëfficient (-)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Vershil
0	70,86	70,53	0,5%
0,1	70,33	70,01	0,5%
0,2	70,08	69,80	0,4%
0,3	70,12	69,91	0,3%
0,4	70,55	70,32	0,3%
0,499	71,39	71,03	0,5%

10.5 Elasticiteitsmodulus en dichtheid

In tabel 23 en 24 wordt gekeken naar het verschil tussen de Ansys eerste eigenfrequenties en de met de formule 9.2 gevonden eigenfrequenties. Deze waarden zijn gevonden met de formule wanneer de elasticiteitsmodulus en dichtheid variabel zijn. De elasticiteitsmodulus en dichtheid hebben zeer kleine verschillen.

Tabel 23 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de Elasticiteitsmodulus

Elasticiteitsmodulus (N/mm ²)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Vershil
1,00E+05	52,27	52,10	0,3%
1,50E+05	64,01	63,81	0,3%
2,00E+05	73,92	73,69	0,3%
2,50E+05	82,64	82,38	0,3%
3,00E+05	90,53	90,25	0,3%
3,50E+05	97,78	97,48	0,3%
4,00E+05	104,53	104,21	0,3%
4,50E+05	110,87	110,53	0,3%
5,00E+05	116,87	116,51	0,3%

Tabel 24 Verschil tussen de gevonden eigenfrequenties met Ansys en de formule 9.2 voor de dichtheid

Dichtheid (N/mm ³)	Ansys freq. (Hz)	Formule freq. (Hz)	Verschil
5,00E-09	88,14	87,87	0,3%
6,00E-09	80,46	80,21	0,3%
7,00E-09	74,49	74,26	0,3%
8,00E-09	69,68	69,47	0,3%
9,00E-09	65,70	65,49	0,3%
1,00E-08	62,33	62,13	0,3%
1,10E-08	59,43	59,24	0,3%
1,20E-08	56,90	56,72	0,3%
1,30E-08	54,66	54,49	0,3%
1,40E-08	52,68	52,51	0,3%
1,50E-08	50,89	50,73	0,3%

10.6 Voorwaarden voor de nauwkeurigheid

Het verschil van 8% is het maximum wat gehanteerd wordt voor deze formule. De waarden die grotere verschillen hebben, dan de 8% zullen niet bruikbaar worden geacht. Aan de hand van deze waarden zullen er bruikbaarheidsvoorwaarden opgesteld worden. Voor lengtes groter dan 5 m wordt deze 8% overschreden. Bij stralen kleiner dan 0,7 wordt ook de waarden overschreden. Aan de hand van de gevonden waarden worden de volgende voorwaarden gevonden.

$$350 < \frac{a}{t} < 2500 \quad (10.1)$$

$$1 < \frac{l}{a} < 4,2 \quad (10.2)$$

Voor de voorwaarde 10.1 is de bovengrens misschien nog hoger, aangezien deze begrensd is door de gevonden data en niet door de nauwkeurigheid. Zo ook voor de ondergrens van voorwaarde 10.2, deze is ook begrensd door de gevonden data en niet door de nauwkeurigheid.

11. Conclusies

11.0 Algemeen

Dikte

De dikte heeft in alle ingeklemde vormen dezelfde rol. Naarmate de dikte groter wordt, wordt de eigenfrequentie hoger.

Lengte

De lengte in alle vormen heeft ook dezelfde rol. Als de lengte groter wordt gaat de eigenfrequentie naar nul. Voor de gesloten vormen, de bol en de ellipsoïde, gaat de eerste eigenfrequentie naar nul, doordat de oplegging steeds kleiner wordt totdat deze een punt is. Als dit zo is dan gedraagt de oplegging zich als een scharnier, dit is dan ook de trillingsvorm, een draaiing om de lengteas.

Bij de open vormen neemt de eigenfrequentie ook af, als de lengte toeneemt. Dit komt doordat de dikte dan relatief steeds dunner wordt.

Straal

De straal heeft bij de cilinder, pseudobol en de ellipsoïde dezelfde invloed. Als de straal toeneemt, neemt de eerste eigenfrequentie af. Dit komt doordat met een steeds grotere straal de dikte relatief steeds kleiner wordt.

Voor de bol en de catenoïde stijgt de eigenfrequentie eerst onder invloed van de straal, tot een maximum. Daarna neemt de eigenfrequentie weer af onder invloed van de straal. Wat deze vormen gemeen hebben naast dit gedrag, is dat beide krommingen absoluut gelijk aan elkaar zijn. Of dit de reden is van dit gedrag zou nader onderzocht moeten worden.

Overeenkomsten

Op de bol en de catenoïde heeft de straal eenzelfde invloed, zoals hierboven al is beschreven.

De catenoïde en de pseudobol hebben vergelijkbare trillingsvormen. Zij hebben nog een andere overeenkomst. Deze overeenkomst is dat ze beide een negatieve gausskromming hebben. Of deze overeenkomst de vergelijkbare trillingsvormen veroorzaakt, zou nader onderzocht moeten worden.

Op de bol en de ellipsoïde heeft de lengte dezelfde invloed. Dit komt door de al eerder genoemde invloed van de lengte op de inklemming, waardoor er een scharnier ontstaat.

11.1 Cilinder

Ingeklemde cilinders hebben twee trillingsvormen die de kleinste eigenfrequenties kunnen hebben. De eerste is een beweging waarbij de normaaldoorsnede van vorm verandert. De tweede is gelijk aan die van liggers.

De formules en de grafiek van Calladine voor de cilinder zijn goede benaderingen van de kleinste eigenfrequentie van ingeklemde cilinders. Naarmate de dikte toeneemt, wordt het verschil tussen de analytisch en de numeriek bepaalde eigenfrequentie groter. De grafiek van Calladine kan gebruikt worden als controlemiddel, maar deze is moeilijk nauwkeurig af te lezen.

11.2 Catenoïde

Ingeklemden catenoïden hebben drie verschillende trillingsvormen bij de kleinste eigenfrequenties. Bij kleine stralen zit de vervorming voornamelijk in de randen welke bestaat uit meerdere trillingen. Een andere trillingsvorm is de meest voorkomende. Deze bestaat uit meerdere golven over het oppervlak in een diagonale richting. Bij grote diktes zal de versmalling transleren over de lengteas.

De gevonden formules 11.1 en 11.2 zijn een goede benadering voor de catenoïde voor de eerste eigenfrequentie. Wel moet er rekening gehouden worden met de voorwaarden om zo de fout te beperken tot 8%.

$$f_n = \frac{2}{125} t^{1/3} K^{2/3} (2,3v^2 - v + 10,46)^3 \sqrt[3]{(1,5 \frac{a}{l})^4 + 15} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (11.1)$$

$$K = \frac{-\sec h^4(\frac{7l}{20a})}{a^2} \quad (11.2)$$

11.3 Pseudobol

Ingeklemden pseudobollen hebben drie verschillende trillingsvormen die elk de laagste eigenfrequentie kunnen geven. De eerste bestaat uit meerdere golven over het oppervlak. Deze trillingsvorm lijkt op die van de catenoïde. Echter, bij de pseudobol lopen deze trillingen alleen over de latitude lijnen en niet diagonaal zoals bij de catenoïde. De tweede lijkt op de eerste maar bevat maar een halve golf. De derde trillingsvorm lijkt op die van een ligger, die aan een zijde scharnierend is ondersteund en aan de andere zijde is ingeklemd.

Pseudobollen en de catenoïden hebben een negatieve Gausskroming. Het is waarschijnlijk dat dit er voor zorgt dat de trillingsvormen zoveel overeenkomen.

11.4 Ellipsoïde

Ellipsoïdes die zijn afgesneden en ingeklemd aan de randen hebben drie verschillende trillingsvormen die de laagste eigenfrequentie kunnen geven. De eerste is een rimpeling op één van de meest vlakke delen. De tweede is een rimpeling van beide meest vlakke delen. De derde is een draaiing van de hele ellipsoïde om de lengteas.

De afstand tussen de inklemmingen heeft de meeste invloed op de eigenfrequentie en de trillingsvorm.

11.5 Bol

De eerste eigenfrequentie van een vrije bol kan met de formule van Bakker zeer goed benaderd worden.

Ook bollen die aan de polen zijn ingeklemd zijn bestudeerd. Hiervoor zijn twee trillingsvormen gevonden die de laagste eigenfrequenties kunnen leveren. De eerste is een verschuiving over de lengteas. De tweede is een draaiing om de lengteas.

Net als bij de catenoïde neemt de eigenfrequentie eerst toe met de straal, om daarna weer af te nemen. Bollen hebben zeer hoge eigenfrequenties in vergelijking met de andere vormen met vergelijkbare afmetingen.

11.6 Halve bol

Vrije halve bollen zijn bestudeerd. Hiervoor zijn twee formules beschikbaar; de formule van Rayleigh en die van Blevins. Bij de formule van Rayleigh ontbrak een factor. Deze factor blijkt $1/5$ te zijn als de dwarcontractiecoëfficiënt 0.3 is. De invloed van de dwarcontractiecoëfficiënt wordt niet goed beschreven door de formule van Rayleigh. De formule van Blevins geeft wel een goede benadering van de kleinste eigenfrequentie van vrije halve bollen.

Een aan een kant ingeklemde halve bol heeft twee trillingsvormen. De eerste is een trilling van de vrije rand. De tweede is een translatie van bijna de hele vorm om de inklemming. De dikte bepaalt welk van de twee trillingsvormen er optreden. De overgang is te zien als een knik in de grafiek van de kleinste eigenfrequentie als functie van de dikte (blz 38).

Bronnen

Literatuurlijst

1. Bakker W.E. (1961), *Axisymmetric modes of vibration of thin spherical shell*, The journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 12, pp. 1749-1758.
2. Blevins, R.D. (1979) *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold Company
3. Calladine, C.R. (1983), *Theory of shell structures*, Cambridge University Press, pp. 9-651)
4. Hoogenboom, P.C.J. (2012), *Dictaat CT4143 Shell Analysis*, handout 11, Technische Universiteit Delft
5. Rayleigh, Lord (1881), *On the Infinitesimal Bending of Surfaces of Revolution*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 13, pp. 4-16
6. Wilhelm, F. (1943), *Statik und dynamik der schalen*, Ann Arbor, Mich., Edwards Bros.

Internet

1. Wikipedia De vrije encyclopedie, www.wikipedia.org, geraadpleegd 3-sep-2012 tot 14-oct-2012
2. WolframAlpha computational knowledge engine, www.wolframalpha.com, geraadpleegd 3-sep-2012 tot 14-oct-2012

Software

1. Ansys 13, Canonsburg, Ansys, Inc.
2. Excel 14.2.4, Redmond, Microsoft

Bijlage A

Cilinder

```

a = 1000      ! radius          mm
t = 2         ! thickness       mm
E = 1.8e5     ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3      ! Dwarscontractiecoëfficiënt -
g = 3000     ! length          mm
h = 30        ! element size     mm
srt= 7.9e-9   ! soortelijk gewicht  N/mm3

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,, ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA, DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181 ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t, , ! element thickness

s=g          ! number of nodes in x and y
nx=1
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO

*DO,i,1,nx    ! put nodes
  x=(i-(nx+1)/2)*g/(nx-1)
  R=a
  *DO,j,1,ny
    y=R*SIN(2*3.1415*j/ny)
    z=R*COS(2*3.1415*j/ny)
    N,,x,y,z,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1  ! put elements
  *DO,j,1,ny-1
    E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
  *ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny    ! put fixed edge
  D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
  D,(nx-1)*ny+j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
*ENDDO
NSEL, ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 1,,
MXPAND,1
SOLVE
FINISH

```

Catanoide

```

a = 1000      ! radius          mm
t = 2         ! thickness       mm
E = 1.8e5     ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3      ! Dwarscontractiecoëfficiënt -
g = 3000      ! length         mm
h = 30        ! element size    mm
srt= 7.9e-9   ! soortelijk gewicht  N/mm3

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,, ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA, DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181   ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t, , ! element thickness

s=g             ! number of nodes in x and y
nx=1
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO

*DO,i,1,nx      ! put nodes
  x=(i-(nx+1)/2)*g/(nx-1)
  R=a*COSH(x/a)
  *DO,j,1,ny
    y=R*SIN(2*3.1415*j/ny)
    z=R*COS(2*3.1415*j/ny)
    N,,x,y,z,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1    ! put elements
  *DO,j,1,ny-1
    E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
  *ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny      ! put fixed edge
  D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
  D,(nx-1)*ny+j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
*ENDDO
NSEL, ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 1,,
MXPAND,1
SOLVE
FINISH

```

Psudobol

```
a = 1000          ! radius          mm
t = 0.5           ! thickness        mm
E = 1.8e5         ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3          ! Dwarscontractiecoëfficiënt  -
g = 1000          ! length          mm
h = 30            ! element size      mm
srt= 7.9e-9       ! soortelijk gewicht  N/mm3

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,    ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181      ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t,,     ! element thickness
SHPP,Off

s=h               ! number of nodes in x and y
nx=15
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO

*DO,i,1,nx        ! put nodes
u=2.76*i/nx
  *DO,j,1,ny

    v=2*3.1415*j/ny
    x=a*((u-(SINH(2*u))/(COSH(2*u)+1)))
    y=a*((2*COSH(u))/(COSH(2*u)+1))*SIN(v)
    z=a*((2*COSH(u))/(COSH(2*u)+1))*COS(v)
    N,,x,y,z,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1      ! put elements
  *DO,j,1,ny-1
    E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
  *ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny        ! put fixed edge
D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
D,(nx-1)*ny+j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
*ENDDO
NSEL, ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 1,,
MXPAND,1
SOLVE
FINISH
```

Elipsoïde

```
a = 1000      ! radius          mm
t = 2         ! thickness       mm
E = 1.8e5     ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3      ! Dwarscontractiecoëfficiënt -
g = 1500      ! length         mm
h = 30        ! element size    mm
srt= 7.9e-9   ! soortelijk gewicht  N/mm3
```

```
/PREP7
MPTEMP,,,,,,,, ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181 ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t,, ! element thickness
SHPP, off
```

```
s=g          ! number of nodes in x and y
```

```
nx=1
```

```
*DOWHILE,s
```

```
  s=s-2*h
```

```
  nx=nx+2
```

```
*ENDDO
```

```
s=2*3.1415*a
```

```
ny=0
```

```
*DOWHILE,s
```

```
  s=s-2*h
```

```
  ny=ny+2
```

```
*ENDDO
```

```
*DO,i,1,nx ! put nodes
```

```
  p=ACOS(g/(2*a))
```

```
  v=p+(3.1415-2*p)*(i-1)/(nx-1)
```

```
  R=SIN(v)
```

```
  x=a*COS(v)
```

```
*DO,j,1,ny
```

```
  y=(a-200)*R*SIN(2*3.1415*j/ny)
```

```
  z=(a-400)*R*COS(2*3.1415*j/ny)
```

```
  N,,x,y,z,,
```

```
*ENDDO
```

```
*ENDDO
```

```
*DO,i,1,nx-1 ! put elements
```

```
*DO,j,1,ny-1
```

```
  E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
```

```
*ENDDO
```

```
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
```

```
*ENDDO
```

```
*DO,j,1,ny ! put fixed edge
```

```
  D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
```

```
  D,(nx-1)*ny+j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
```

```
*ENDDO
```

```
NSEL, ALL
```

```
FINISH
```

```
/SOLU
```

```
ANTYPE, MODAL
```

```
MODOPT, LANB, 1,,
```

```
MXPAND,1
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

Bol

```
a = 1000      ! radius          mm
t = 2         ! thickness       mm
E = 1.8e5     ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3      ! Dwarscontractiecoëfficiënt -
g = 1500      ! length         mm
h = 30        ! element size    mm
srt= 7.9e-9   ! soortelijk gewicht  N/mm3

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,, ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181   ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t,, ! element thickness
SHPP, off

s=g             ! number of nodes in x and y
nx=1
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO

*DO,i,1,nx      ! put nodes
  p=ACOS(g/(2*a))
  v=p+(3.1415-2*p)*(i-1)/(nx-1)
  R=a*SIN(v)
  x=a*COS(v)
  *DO,j,1,ny
    y=R*SIN(2*3.1415*j/ny)
    z=R*COS(2*3.1415*j/ny)
    N,,x,y,z,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1    ! put elements
  *DO,j,1,ny-1
    E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
  *ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny      ! put fixed edge
  D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
  D,(nx-1)*ny+j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ
*ENDDO
NSEL, ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 1,,
MXPAND,1
SOLVE
FINISH
```

Halve bol

```

a = 1000          ! radius          mm
t = 4             ! thickness       mm
E = 1.8e5         ! Elasticiteitsmodulus  N/mm2
nu = 0.3          ! Dwarscontractiecoëfficiënt  -
g = 1995          ! length          mm
h = 30            ! element size      mm
srt= 7.9e-9       ! soortelijk gewicht  N/mm3
/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,    ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,srt
ET,1,SHELL181      ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t,,     ! element thickness
SHPP, off

s=g               ! number of nodes in x and y
nx=1
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO

*DO,i,1,nx        ! put nodes
  p=ACOS(g/(2*a))
  v=p+(0.5*3.1415-p)*(i-1)/(nx-1)
  R=a*SIN(v)
  x=a*COS(v)
  *DO,j,1,ny
    y=R*SIN(2*3.1415*j/ny)
    z=R*COS(2*3.1415*j/ny)
    N,,x,y,z,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1      ! put elements
  *DO,j,1,ny-1
    E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
  *ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny        ! put fixed edge
  D,j,,0,,,UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ

*ENDDO
NSEL, ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 7,,
MXPAND,7
SOLVE

FINISH

```