

# Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen

F. J. Noortman

Delft University of Technology



Dalian Shell Museum (Architecture Linked, 2015)

# Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen

Bachelor eindwerk CTB3000

door

**F.J. Noortman**

Bachelor student Civiele Techniek

|                |                                                       |
|----------------|-------------------------------------------------------|
| Studentnummer: | 4218213                                               |
| Projectduur:   | 21 april 2015 – 15 juni 2015                          |
| Begeleiders:   | dr. ir. P.C.J Hoogenboom<br>dr. ir. F.P. van der Meer |
| Faculteit:     | Civiele Techniek en Geowetenschappen                  |

## VOORWOORD

In dit bachelor-eindwerk voor de bachelor opleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft wordt onderzoek gedaan naar de eigenfrequenties van schalen. Er is een ontwerpformule opgesteld voor de laagste eigenfrequentie van een schaal met verschillende afmetingen, materiaaleigenschappen, kromtestralen in twee richtingen en twist.

In het rapport wordt in hoofdstuk 1 en 2 eerst de probleemstelling toegelicht en het onderzoeksgebied afgebakend. Hierna wordt in hoofdstuk 3 en 4 aandacht besteed aan de analytische beschrijving van een schaal, waaruit een ontwerpformule volgt. Vervolgens wordt in hoofdstuk 5,6 en 7 deze formule gecontroleerd en worden bruikbaarheidsgrenzen opgesteld. Als slot volgt een conclusie met bijbehorende aanbevelingen.

Bij deze wil ik mijn begeleiders dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en dr. ir. F.P. van der Meer graag bedanken voor hun hulp en advies.

Bleiswijk, juni 2015

Falko Noortman

Schalen worden vanwege hun gunstige mechanische eigenschappen veelvuldig toegepast. Dunne schalen kunnen zeer gevoelig zijn voor trillingen. Voordat gekeken kan worden wat de invloed is van deze trillingen op een schaal, dienen de eigenfrequenties bepaald te worden. Deze zijn te berekenen met de eindig-elementenmethode. Het doel van dit rapport is om een ontwerpformule op te stellen die de laagste eigenfrequentie van een schaal bepaald met een onzekerheidsmarge van tien procent.

Door eerst het probleem analytisch aan te pakken is het gelukt om tot een ontwerpformule te komen. Vervolgens is deze formule getoetst met Ansys en zijn er bruikbaarheidsgrenzen opgesteld voor de formule. Uit het onderzoek bleek dat als er kromming in twee richtingen en twist aanwezig is, dat de ontwerpformule zeer snel onnauwkeurig wordt. Daarom is er voor gekozen om twee formules op te stellen.

$$f_{\text{schaal, kromming}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)I^4} + \frac{(k_{xx} + k_{yy})^2}{16\pi^2} \right)}$$

$$f_{\text{schaal, twist}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)I^4} + \frac{k_{xy}}{4\pi^2} \right)}$$

De bovenstaande formules zijn geldig als de parameters voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000$$

$$l(k_{xx} + k_{yy}) \leq 1.2$$

$$lk_{xy} \leq 0.04$$

Tevens bleek dat op alle materialen die in de praktijk gebruikt worden, de bovenstaande formule kan worden toegepast.

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| Voorwoord .....                                  | 3  |
| Samenvatting.....                                | 4  |
| Inhoudsopgave .....                              | 5  |
| Symbolenlijst.....                               | 6  |
| 1. Inleiding .....                               | 7  |
| 2. Definiëring schaal .....                      | 9  |
| 3. Theorie eigenfrequentie .....                 | 11 |
| 4. Analytische beschrijving .....                | 13 |
| 5. Test en uitleg model ANSYS.....               | 23 |
| 6. Invloed van de verschillende parameters ..... | 26 |
| 7. Bruikbaarheidsgrenzen formule .....           | 33 |
| 8 Conclusie en aanbevelingen .....               | 42 |
| Bronvermelding.....                              | 45 |
| Bijlage 1 Script Ansys .....                     | 46 |
| Bijlage 2 Model Maple.....                       | 50 |

# SYMBOLENLIJST

| Symbol        | Grootheid             | Eenheid  |
|---------------|-----------------------|----------|
| $C$           | Krommingsterm         | $Hz^2$   |
| $E$           | Elasticiteitsmodulus  | $N/m^2$  |
| $\varepsilon$ | Rek                   | -        |
| $f$           | Eigenfrequentie       | $Hz$     |
| $h$           | Schaaldikte           | $m$      |
| $k$           | Veerstijfheid         | $N/m$    |
| $k_{xx}$      | Kromming om de x as   | $1/m$    |
| $k_{xy}$      | Twist                 | $1/m$    |
| $k_{yy}$      | kromming om de y as   | $1/m$    |
| $l$           | Lengte                | $m$      |
| $m$           | Massa                 | $kg$     |
| $m$           | Moment                | $Nm$     |
| $n$           | Normaalkracht         | $N$      |
| $\omega$      | Eigenhoekfrequentie   | $Hz$     |
| $\varphi$     | Hoekverdraaiing       | $rad$    |
| $\varphi$     | Airy spanningsfunctie | $N/m^2$  |
| $\rho$        | Dichtheid             | $kg/m^3$ |
| $\rho_{xy}$   | Hoekverdraaiing       | $rad$    |
| $t$           | Tijd                  | $s$      |
| $u$           | Verplaatsing          | $m$      |
| $\nu$         | Poisson ratio         | -        |
| $v$           | Dwarskracht           | $N$      |

## 1. INLEIDING

### 1.1 PROBLEEMSTELLING

Schalen hebben hun toepassing op erg veel verschillende gebieden. Deze toepassing varieert van de lucht- en ruimtevaartindustrie tot onderdelen voor auto's of gebouwen. Een eigenschap van een schaal is dat het erg stijf is. Een gebrek aan stijfheid zal zelden de oorzaak zijn van het falen van zo'n constructieonderdeel. In de hierboven genoemde toepassingen van panelen, of schalen, treden ook veel dynamische belastingen op. Als door zo'n belasting resonantie optreedt in het constructie-element kan deze daardoor falen. Bezwijken door resonantie is dus iets, waar zeker rekening mee moet worden gehouden. Om te bepalen of een constructie hierdoor bezwijkt zijn er twee onderdelen die bepaald moeten worden: de verschillende frequenties van de dynamische belastingen die kunnen optreden en de eigenfrequenties van de schaal. Vaak is de laagste eigenfrequentie maatgevend, dus in dit rapport zal enkel op de laagste eigenfrequentie van een schaal gefocust worden.

Het blijkt niet eenvoudig te zijn om de laagste eigenfrequentie te bepalen. In de praktijk wordt deze bepaald met de eindige elementen methode. Dit is een reken methode waar partiële differentiaalvergelijkingen mee worden opgelost. Met de hand zou dit een tijdrovende bezigheid zijn, dus wordt dit met een eindig elementenpakket als Ansys gedaan. Een nadeel hiervan is de ingenieur geen duidelijk beeld krijgt van de invloed van zijn input op het resultaat. Zo kan hij niet duidelijk zien, wat de verbanden zijn tussen de verschillende parameters en de eigenfrequentie. Een ontwerpformule zou hier uitkomst voor bieden. Tevens zou dit de ingenieur kunnen helpen als een voorontwerp gemaakt moet worden. Een korte handberekening is namelijk een stuk sneller gedaan dan een berekening met een eindig elementen pakket.

Er zijn al enkele ontwerpformules opgesteld. (Blevins, 1993) heeft een zeer algemene formule opstelt voor de laagste eigenfrequentie van een schaal. Vervolgens heeft (Scheltema, 2013) onderzoek gedaan genaam naar hoe kromming en twist in de formule verwerkt konden worden. Hierna heeft (Dijk, 2014) onderzoek gedaan naar wat de invloed is van krachten op de eigenfrequentie van de schaal.

### 1.2 DOELSTELLING

In dit rapport wordt gezocht naar een ontwerpformule waarmee, met een foutmarge van 10 procent, de laagste eigenfrequentie van een schaal bepaald kan worden. Daarnaast moet voor deze formule een aantal bruikbaarheidsgrenzen worden opgesteld, waarbinnen de formule nauwkeurige resultaten geeft.

Een ingenieursformule voor een rechte plaat bestaat al en over de jaren heen zijn er al enkele formules opgesteld, waarmee je de eigenfrequentie zou kunnen bepalen als deze plaat ook gekromd is. Deze formules blijken echter niet compleet te zijn en ze zijn nog niet genoeg getoetst. De drie componenten die ik aan de bestaande formule voor een rechte plaat wil toevoegen zijn:

- De kromming in de x richting
- De kromming in de y richting
- De twist

### 1.3 PLAN VAN AANPAK

In eerste instantie zal gedefinieerd worden wat een schaal precies is. Hierna wordt een bewegingsvergelijking voor een schaal opgesteld. Aan de hand van deze vergelijking is het mogelijk om de eigenfrequenties van de schaal te bepalen. Vanuit hier kan een formule worden opgesteld om de laagste eigenfrequentie van een schaal te bepalen. Uit deze formule zal blijken wat het verband is tussen de verschillende parameters in de laagste eigenfrequentie van de schaal.

Vervolgens wordt een model in Ansys opgesteld, die het gedrag van een schaal simuleert. Het is dan mogelijk om de eigenfrequenties te bepalen die ook in het echt zouden optreden. Door dan in dit model één parameter stapsgewijs te verhogen of te verlagen, zal blijken wat het verband is tussen deze parameter en de laagste eigenfrequentie. Vervolgens wordt dit verband vergeleken met het verband uit de formule die analytisch bepaald is.

Ten slotte wordt bepaald wat de bruikbaarheidsgrenzen zijn van de formule. Ook dit wordt gedaan door resultaten van Ansys te vergelijken met uitkomsten van de formule

## 2. DEFINIËRING SCHAAL

### 2.1 THEORIE SCHAAL

Een schaal is een generalisatie van een vlakke plaat. Een plaat is een platte structuur waarvan de dimensies in richtingen in het vlak groot zijn ten opzichte van de derde richting. De lengte en breedte van de plaat zijn veel groter dan zijn dikte. Het verschil tussen een plaat en een schaal is dat bij een plaat het middenvlak plat is, waar daarentegen een schaal een gekromd middenvlak heeft. Dit heeft tot gevolg dat een schaal krachten uit het vlak, in het vlak kan afvoeren. Dit is de grootste reden waarom schalen zulke sterke en relatief goedkope constructies zijn.

In dit verslag wordt uitgegaan van dunne elastische schalen. Een dunne schaal heeft een kleine dikte tot lengte/breedte ratio.

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 4000 \quad (2.1)$$

Bij zo'n soort schaal dragen de membraankrachten het grootste gedeelte van de belasting, maar er zijn wel degelijk buigende momenten aanwezig.

Tevens wordt uitgegaan van vlakke schalen. Dit zijn schalen waar er een niet hele grote verhoging aanwezig is in vergelijking met zijn overspanning. Deze keuze is gemaakt, omdat als een schaal als vlak beschouwd wordt, de krommingen over de gehele schaal als constant kunnen worden aangenomen. Dit heeft tot gevolg dat de bewegingsvergelijking van de schaal een stuk korter wordt. Zonder deze aanname zou de kromming zeer waarschijnlijk niet als constante in de uiteindelijke ontwerpformule kunnen zitten. Hierdoor zou waarschijnlijk een eenvoudige ingenieursformule niet mogelijk zijn.

Over wat precies de definitie is van een vlakke schaal zijn de meningen verdeeld. (Ventsel & Krauthammer, 2001) zeggen een schaal als vlak beschouwd mag worden, als de volgende vergelijkingen gelden.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta z}{\delta x} \right)^2 &\ll 1 \\ \left( \frac{\delta z}{\delta y} \right)^2 &\ll 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

In deze vergelijking staat  $z(x,y)$  voor de vergelijking die de  $z$  coördinaat beschrijft op elk punt van de schaal. Vergelijking (2.2) zegt dus dat de helling van het vlak in het kwadraat veel kleiner moet zijn dan 1. Wat precies de vergelijking is die het vlak beschrijft en welke grenzen er moeten gelden om aan deze formule te voldoen, volgt in hoofdstuk 7.

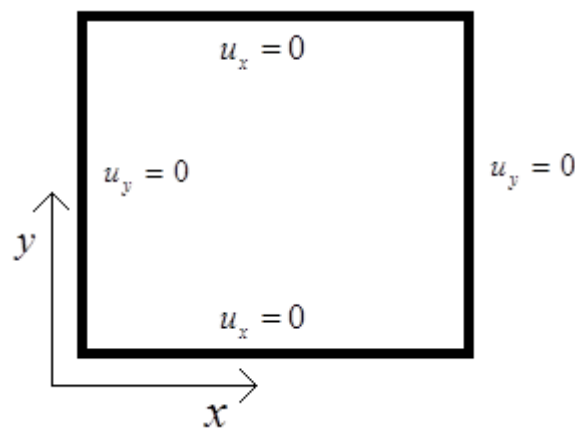
## 2.2 REFERENTIE SCHAAL

In dit rapport wordt steeds uitgegaan van een referentieschaal. Dit is een schaal gemaakt van staal, waar tegelijk twist en kromming in twee richtingen aanwezig is. Er wordt ook aangenomen dat het materiaal isotroop en homogeen is. Ten slotte wordt er in het gehele rapport uitgegaan van een vierkante schaal.

| Parameter   | Waarde | Eenheid  |
|-------------|--------|----------|
| $I_x = I_y$ | 0.3    | $m$      |
| $h$         | 0.001  | $m$      |
| $E$         | 2.1e11 | $N/m^2$  |
| $\rho$      | 7850   | $kg/m^3$ |
| $k_{xx}$    | 0.1    | $1/m$    |
| $k_{yy}$    | 0.1    | $1/m$    |
| $k_{xy}$    | 0.05   | $1/m$    |
| $\nu$       | 0.3    | -        |

**Tabel 1 : Referentieschaal**

De randvoorwaarden voor de schaal zijn als volgt gedefinieerd:



**Figuur 1 : Randvoorwaarden schaal**

De randvoorwaarden zijn zo gekozen, zodat in de hoekpunten geen translatie kan plaats vinden. Op de randen zelf kan de plaat niet bewegen in zijn lengterichting, maar wel loodrecht op de lengterichting. De  $z$ -richting staat niet aangegeven in figuur 1, maar staat loodrecht op het  $x,y$ -vlak. Op alle randen is er geen beweging mogelijk in deze richting.

### 3. THEORIE EIGENFREQUENTIE

#### 3.1 SYSTEEM MET ÉÉN VRIJHEIDSGRAAD

Een eigenfrequentie is een frequentie waarmee een systeem gaat trillen, als het vanuit zijn evenwichtsstand wordt losgelaten. Voor het bepalen van de eigenfrequentie van een systeem dient eerst een bewegingsvergelijking van dat systeem te worden opgesteld. Eerst zal een beschrijving volgen van een relatief eenvoudig mechanisch systeem, om duidelijk te maken wat het plan van aanpak is (Blaauwendraad J. , 2010). Veel mechanismen kunnen worden teruggebracht naar een zogenaamd massa-veer systeem met een aantal vrijheidsgraden. De algemene bewegingsvergelijking van zo'n soort systeem is:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku(t) = F(t) \quad (3.1)$$

In de bovenstaande vergelijking is M de massa, c de wrijvingscoëfficiënt en k de veerstijfheid. Als op het gegeven systeem geen externe belasting werkt, zal in externe kracht uit de formule vallen. Dit wordt de eigenbeweging van een voorwerp genoemd.

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku(t) = 0 \quad (3.2)$$

Vervolgens kan voor zo'n soort systeem een bewegingsvorm worden geschat. Door deze vorm dan te substitueren in de bewegingsvergelijking, is het mogelijk de eigenhoekfrequentie te bepalen. Hierbij wordt wel de aanname gedaan dat de wrijving verwaarloosbaar is.

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.4)$$

Hierboven is een systeem beschreven met één vrijheidsgraad. Om de eigenfrequentie te bepalen dient de eigenhoekfrequentie te worden ingevuld in vergelijking (3.5).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.5)$$

Voor gekromde platen kan een soortgelijke oplosmethode worden toegepast als bij het netgenoemde systeem met één vrijheidsgraad. De drie stappen die doorlopen moeten worden zijn:

1. Bewegingsvergelijking opstellen
2. Bewegingsvorm aannemen
3. Bewegingsvorm substitueren in de bewegingsvergelijking en vergelijking oplossen

### 3.2 THEORIE EIGENFREQUENTIE SCHAAL

Vergelijking (3.6) geeft een algemene formule voor het berekenen van de laagste eigenfrequentie van een vlakke plaat, die voldoet aan de randvoorwaarden die eerder dit onderzoek zijn opgelegd.

$$f_{vlak} = \left( \frac{\pi^2 E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2) I^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

De verwachting is dat als deze formule uitgebreid gaat worden naar een schaal, de formule de vorm aanneemt zoals in vergelijking (3.7) is beschreven (Blevins, 1993).

$$f_{schaal} = \left( f_{vlak}^2 + C \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Blevins zei dat de eigenfrequentie van een schaal in het kwadraat, gelijk is aan de eigenfrequentie van een vlakke plaat plus een bepaalde krommingsterm. Vanaf nu wordt deze krommingsterm  $C$  genoemd. In de term  $C$  zal de kromming in de twee richtingen en de twist terug komen.

## 4. ANALYTISCHE BESCHRIJVING

### 4.1 KEUZE THEORIE

Voor het opstellen van de bewegingsvergelijking dient er eerst een theorie gekozen te worden gekozen. De meest eenvoudige theorie die het gedrag van een gekromd paneel kan beschrijven is de membraan theorie. Bij deze theorie wordt aangenomen dat alle externe belastingen worden opgenomen door membraanspanningen in het materiaal en er geen buigspanningen kunnen optreden. Deze theorie geldt alleen voor hele dunne schalen.

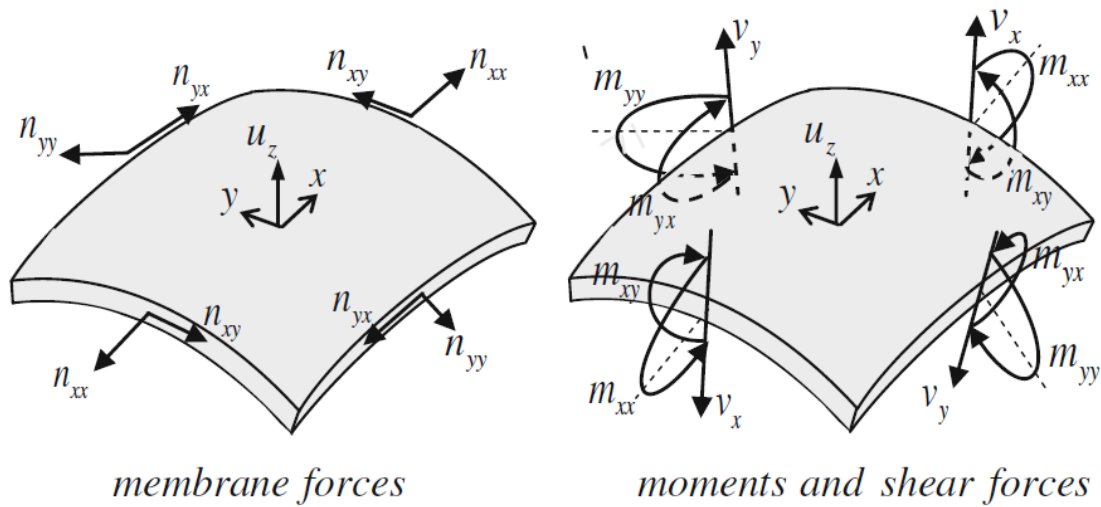
Een theorie die wel past bij de plaat categorie is de theorie van Donell. Deze theorie beschrijft het mechanische gedrag van een schaal waarbij rekening wordt gehouden met membraan krachten en buiging.

Belangrijk is om te vermelden dat het verschil tussen het globale assenstelsel en het lokale assenstelsel in het schaal oppervlak niet in rekening wordt genomen. Dit is toegestaan zolang de helling van het oppervlak relatief klein is. Er mag hiervan van worden uitgegaan, omdat alleen gekeken wordt naar vlakke schalen. Hiernaast worden dwarskracht vervormingen ook niet meegenomen in het model.

De analytische beschrijving die hier onder volgt is overgenomen van (Blaauwendraad & Hoefakker, 2014). Er zijn geen toevoegingen aan deze beschrijving, maar voor het inzicht van de lezer wordt toch het gehele stappenplan weergegeven en niet alleen het eindresultaat.

Voor de schaal worden vier verschillende vectoren opgesteld: De verplaatsingsvector, de vervormingsvector, de schaalkrachtenvector en de belastingsvector. De richtingen die als positief worden aangenomen, zijn aangegeven in figuur 2.

- **u** de verplaatsingsvector
- **e** de vervormingsvector
- **s** de schaalkrachtenvector
- **p** de belastingsvector



**Figuur 2: Assenstelsel schaal. Bron: (Blaauwendraad & Hoefakker, 2014)**

Het verband tussen **u** en **e** wordt de kinematische relatie genoemd. Het verband tussen **e** en **s** heet de constitutieve relatie. Ten slotte heet het verband tussen **s** en **p** de evenwichtsrelatie.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \\
 \mathbf{e} &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \rho_{xy}]^T \\
 \mathbf{s} &= [n_{xx} \quad n_{yy} \quad n_{xy} \quad m_{xx} \quad m_{yy} \quad m_{xy}]^T \\
 \mathbf{p} &= [p_x \quad p_y \quad p_z]^T
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

## 4.2 KINEMATISCHE RELATIE

Voor de rek in het materiaal worden de volgende formules gebruikt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_x u_z \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} - k_y u_z \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - k_{xy} u_z\end{aligned}\quad (4.2)$$

De hoekverdraaiingen ten gevolge van buiging van een schaal met een lengte  $d_x$  en  $d_y$  zijn:

$$\begin{aligned}\varphi_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \varphi_y &= -\frac{\partial u_z}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.3)$$

De buigvervorming wordt dan:

$$\begin{aligned}\kappa_{xx} &= \frac{\delta \varphi_x}{\delta x} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \kappa_{yy} &= \frac{\delta \varphi_y}{\delta y} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \rho_{xy} &= \frac{\delta \varphi_x}{\delta y} + \frac{\delta \varphi_y}{\delta x} = -2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Als bovenstaande vergelijkingen in matrixnotatie worden gezet, in de vorm van  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ .

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \rho_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & -k_x \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & -k_y \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & -2k_{xy} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}\quad (4.5)$$

### 4.3 CONSTITUTIEVE RELATIE

De relatie tussen de schaalkrachtenvector en de vervormingsvector wordt de constitutieve relatie genoemd. Hier wordt deze weergegeven als  $\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}$ .

$$\begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \\ m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & \nu D_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_m & D_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_m \left( \frac{1-\nu}{2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_b & \nu D_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D_b & D_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_b \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \rho_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Met:

$$D_m = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad (4.7)$$

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

#### 4.4 EVENWICHTSRELATIE

Tussen de krachten in de schaal en de externe belastingen kunnen drie evenwichtsvergelijkingen worden opgesteld. In deze vergelijkingen wordt niet alleen het gedrag van membraan meegenomen maar ook het buiggedrag. De dwarskrachten dragen bij aan het evenwicht buiten het vlak, maar in het vlak wordt het evenwicht puur beschreven door krachten in het vlak.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + p_x &= 0 \\
 \frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + p_y &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + k_x n_{xx} + k_y n_{yy} + 2k_{xy} n_{xy} + p_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Volgens het evenwicht van momenten in de x en y richting, beschrijven de volgende formules voor de dwarskrachten.

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{\delta m_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta m_{xy}}{\delta y} \\
 v_y &= \frac{\delta m_{yy}}{\delta y} + \frac{\delta m_{xy}}{\delta x}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Als deze dwarskrachten worden gesubstitueerd in vergelijking (4.8), volgt de volgende evenwichtsvergelijking:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\delta}{\delta x} & 0 & -\frac{\delta}{\delta y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{\delta y} & -\frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 & 0 \\ -k_x & -k_y & -2k_{xy} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \\ m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

#### 4.5 BEWEGINGSVERGELIJKING

De differentiaalvergelijking voor schalen kan nu opgesteld worden. Dit is mogelijk door te kijken naar twee verschillende situaties. Ten eerste wordt gekeken naar een schaal die belast wordt in het vlak. Daarna wordt gekeken naar een schaal die loodrecht op het vlak wordt belast. Belastingen loodrecht op het vlak zijn de dwarskrachten en momenten. Voor het bepalen van de eigenfrequentie, worden externe belastingen buiten beschouwing gelaten, dus vanaf nu wordt aangenomen dat  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$  en  $p_z = 0$ .

Voor de schaal belast in het vlak, wordt de krachtenmethode toegepast. Hiervoor dient eerst de Airy spanningsfunctie  $\phi$  geïntroduceerd te worden. Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} n_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ n_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Als nu gekeken wordt naar de constitutieve relatie, is het mogelijk om de vervormingen uit te drukken in de rek. Hierbij dient de inverse te worden genomen van vergelijking (4.7).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{D_m(1-\nu^2)}(n_{xx} - \nu n_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{D_m(1-\nu^2)}(-\nu n_{xx} + n_{yy}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu^2)}{D_m(1-\nu^2)}n_{xy} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nu de vergelijkingen voor de vervormingen bekend zijn, kan gekeken worden naar de kinemastische relatie. Uit vergelijking (4.5) kunnen de volgende vergelijkingen worden opgesteld.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} - k_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Door het verschil te nemen van deze twee vergelijkingen, worden  $u_x$  en  $u_y$  uit de vergelijking geëlimineerd.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = -k_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - k_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

Als in vergelijking (4.14) de veranderingen van de krommingen zoals beschreven in vergelijking (4.5) worden gesubstitueerd, ontstaat vergelijking (4.15).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = k_y \kappa_{xx} - k_{xy} \kappa_{xy} + k_x \kappa_{yy} \quad (4.15)$$

Deze vergelijking wordt de compatibiliteit conditie genoemd. Spanningen en krommingen kunnen niet vrij veranderen. De veranderingen moeten voldoen aan vergelijking (4.15). Als nu vergelijking (4.12) wordt gesubstitueerd in vergelijking (6.14), waarna deze nieuwe vergelijking weer wordt gesubstitueerd in vergelijking (6.15) ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + D_m (1 - \nu^2) \left( k_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.16)$$

Vergelijking (4.16) geldt enkel voor de toestand in het vlak. Om de differentiaalvergelijking loodrecht het vlak op te stellen, wordt eerst gekeken naar de kinematische relatie. De laatste drie kinematische vergelijkingen uit vergelijking (4.5) worden gesubstitueerd in de constitutieve relatie (4.7). Hieruit volgt voor de momenten de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} m_{xx} &= -D_b \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ m_{yy} &= -D_b \left( \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \\ m_{xy} &= -D_b (1 - \nu^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Als nu vergelijking (4.17) wordt gesubstitueerd in vergelijking (4.10), terwijl rekening wordt gehouden met vergelijking (4.11), is het mogelijk om een volgende differentiaalvergelijking op te stellen:

$$-k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_b \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (4.18)$$

Vergelijking (4.16) en vergelijking (4.18) zijn gekoppelde differentiaalvergelijkingen met als onbekende  $\phi$  en  $u_z$ . Het is mogelijk om  $\phi$  uit de vergelijking te elimineren zodat een enkele differentiaalvergelijking voor  $u_z$  ontstaat. Voordat dit gedaan wordt, is het gunstig om de vergelijking te herschikken en de differentiaaloperator  $\Gamma$  en de Laplaciaan  $\Delta$  te introduceren.

$$\begin{aligned} \Gamma &= k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Als de differentiaaloperator en de Laplaciaan, zoals gedefinieerd in vergelijking (4.19), in vergelijkingen (4.16) en (4.18) worden gesubstitueerd, is het mogelijk de vergelijkingen als volgt op te schrijven:

$$\begin{aligned} -\Gamma\phi + D_b\Delta_z &= 0 \\ \Delta\Delta\phi + D_m(1-\nu^2)\Gamma u_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Omdat wordt aangenomen dat de krommingen constant zijn, zijn de operatoren  $\Gamma$  en  $\Delta$  commutatief. Dat wil zeggen dat  $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$ . Hierdoor is het mogelijk om een vergelijking op te stellen waar de verplaatsing  $u_z$  de enige onbekende is. Allereerst wordt de eerste vergelijking in (4.20) vermenigvuldigt met  $\Delta\Delta$ . Hierna wordt de tweede vergelijking in (4.20) vermenigvuldigt met  $\Gamma$ . Als dan de twee vergelijkingen van elkaar worden afgetrokken ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$D_b\Delta\Delta\Delta\Delta u_z + D_m(1-\nu^2)\Gamma^2 u_z = 0 \quad (4.21)$$

Met vergelijking (4.21) wordt alleen de statica van het probleem beschreven. Er mist nog een term waar de versnelling in voor komt. Deze term wordt de traagheidsterm genoemd. Als de schaal een beweging in de z richting begaat, wordt deze beweging tegengewerkt door de traagheid van de schaal. Deze traagheidsterm dient nog aan de differentiaalvergelijking te worden toegevoegd, om de volledige differentiaalvergelijking te krijgen. Er staat een min teken voor de term, omdat de traagheid te beweging tegenwerkt.

$$D_b\Delta\Delta\Delta\Delta u_z + D_m(1-\nu^2)\Gamma^2 u_z = -\Delta\Delta\rho h\ddot{u}_z \quad (4.22)$$

Dit is de bewegingsvergelijking voor een vlakke, dunne schaal. Door nu voor  $u_z$  een bewegingsvorm aan te nemen en deze te substitueren in vergelijking (4.22). Zou het mogelijk moeten zijn om de eigenfrequentie van het systeem te bepalen. Vergelijking (4.23) zou een mogelijke bewegingsvorm kunnen zijn.

$$u_z = \hat{u} \cos\left(\frac{\pi X}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi Y}{l}\right) \cos(\omega t) \quad (4.23)$$

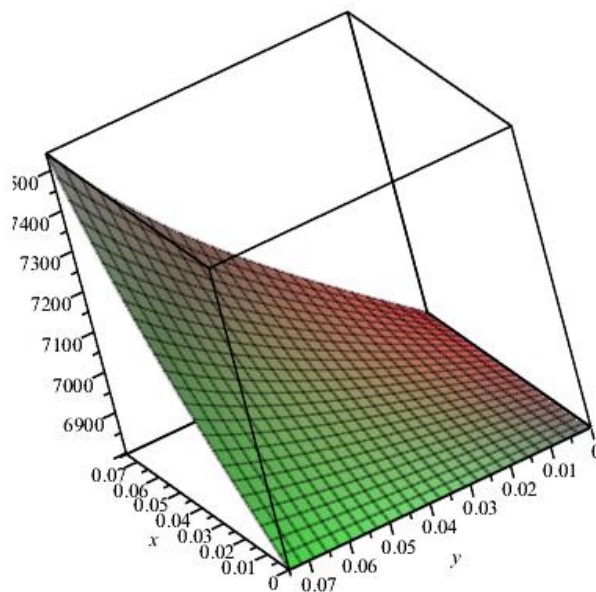
## 4.6 SUBSTITUTIE BEWEGINGSVORM

Met behulp van Maple wordt de bewegingsvorm, zoals vermeld in vergelijking (4.23), gesubstitueerd in vergelijking (4.24). Het script waarmee dit gedaan is, is te vinden in bijlage 2. Het doel is om tot een uitdrukking te komen voor  $C$ , zoals vermeld in vergelijking (3.7).

In vergelijking (4.24) is het resultaat te vinden, van de uitdrukking voor  $C$  volgens Maple.

$$C = \frac{E}{16\pi^2\rho} \left( 4 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xy} (k_{xx} + k_{yy}) + (k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 \right) \quad (4.24)$$

Wat opvalt aan vergelijking (4.24), is dat volgens de formule de  $x$  en  $y$  coördinaat, waar de eigenfrequentie wordt gemeten, uitmaakt voor de eigenfrequentie van de gehele schaal. Dit is niet waar, omdat de gehele plaat maar één laagste eigenfrequentie heeft. Dit is tevens een verschijnsel dat alleen optreedt als er kromming in de  $x$  of  $y$  richting aanwezig is en tegelijk twist. In het onderstaande diagram is de invloed van het  $x$  en  $y$  coördinaat te vinden op de  $C$  term. Er is een kwart schaal gemodelleerd, omdat als voor  $x$  en  $y$  een waarde wordt ingevuld die de grootte heeft van de helft van de lengte, schiet de tangens term naar oneindig.



**Figuur 3: C(x,y) diagram.**

Hieruit is te concluderen dat de invloed van  $x$  en  $y$  wel degelijk invloed zouden moeten hebben op de eigenfrequentie van een schaal. Omdat deze term niet goed te verklaren is met de theorie van eigenfrequenties, wordt er van uit gegaan dat deze term verwaarloosbaar is. Uit de analyse in Ansys zal blijken of deze aanname correct is.

Deze aanname maakt vergelijking (4.24) een stuk eenvoudiger:

$$C = \frac{E \left( (k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 \right)}{16\pi^2 \rho} \quad (4.25)$$

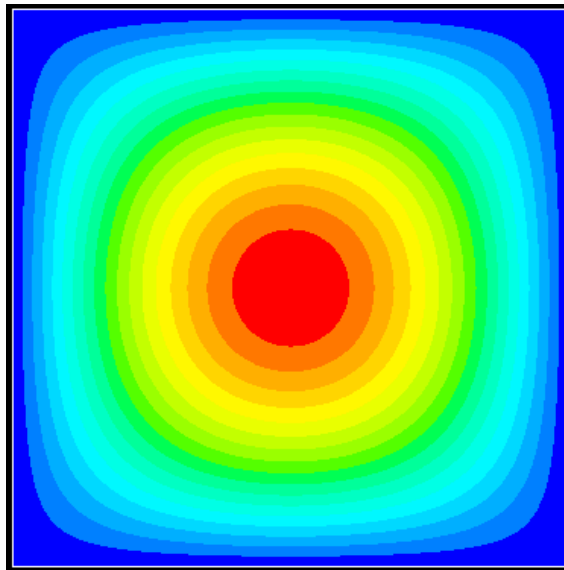
Door vergelijking (4.25) te substitueren in vergelijking (3.7) ontstaat de volgende formule. Deze formule komt overeen met (Hoogenboom, 2013).

$$f_{\text{schaal}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)l^4} + \frac{(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2}{16\pi^2} \right)} \quad (4.26)$$

### 5.1 MODELVORMING

Met behulp van het eindige elementen programma Ansys is een model van een schaal gemaakt. Het model zoals in bijlage 1 is opgebouwd uit verschillende onderdelen. Het pre-process, de solution en het post-process. In het preprocess wordt het model opgebouwd; hier worden de materiaaleigenschappen gedefinieerd, de afmetingen en eventuele kromming en wordt het aantal elementen vastgesteld. Aan de hand van deze gegevens worden de knopen geplaatst; de elementen komen tussen deze knopen te liggen. Hierna volgt het roteren van het assenstelsel per knoop. Voor de randen van het paneel worden de vrijheidsgraden gedefinieerd. In het post-process worden de resultaten van de analyse weergegeven. Hier kunnen conclusies uit worden getrokken.

Wat belangrijk is om te vermelden, is dat alleen naar de laagste eigenfrequentie wordt gekeken, die de vorm moet hebben zoals aangegeven is in figuur 4. Dat beschrijft namelijk de bewegingsvorm van de vergelijking (4.23). Als de schaal een andere trillingsvorm krijgt met een lagere frequentie zal de formule niet meer gelden.



**Figuur 4 : Trillingsvorm die overeenkomt met aangenomen bewegingsvorm.**

## 5.2 TEST VLAKE PLAAT

Voordat aan de hand van een parameterstudie wordt gekeken naar de invloed van  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  en  $k_{xy}$  wordt eerst gecontroleerd of het opgezette model wel nauwkeurige resultaten geeft. Dit wordt gecontroleerd voor een vlakke plaat aan de hand van de formule van Blevins (vergelijking (3.6)). Er worden drie verschillende situaties gecontroleerd met elk verschillende parameters. Eerst wordt aan de hand van de formule de eigenfrequentie berekend, en hierna wordt deze vergeleken met de eigenfrequentie die door met Ansys bepaald is.

|                                      | Situatie 1 | Situatie 2 | Situatie 3 |
|--------------------------------------|------------|------------|------------|
| $E \left( \frac{N}{m^2} \right)$     | 2.1e11     | 1e11       | 3e12       |
| $h \text{ (m)}$                      | 0.001      | 0.002      | 0.005      |
| $\nu$                                | 0.3        | 0.2        | 0.1        |
| $l \text{ (m)}$                      | 0.3        | 0.5        | 0.2        |
| $\rho \left( \frac{kg}{m^3} \right)$ | 7850       | 5000       | 10000      |

**Tabel 2: Testsituaties vlakke plaat.**

De bovenstaande gegevens zijn aselekt gekozen. Later wordt bepaald wat de bruikbaarheidsgrenzen zijn van de formule. De foutmarge wordt met vergelijking (5.1) berekend.

$$Foutmarge = \frac{f_{Ansys} - f_{Formule}}{f_{Formule}} \times 100\% \quad (5.1)$$

|            | $f_{Ansys}$ | $f_{formule}$ | Foutmarge |
|------------|-------------|---------------|-----------|
| Situatie 1 | 54.63       | 54.63         | 0.005%    |
| Situatie 2 | 33.11       | 33.11         | -0.01%    |
| Situatie 3 | 1948        | 1971          | -1.2%     |

**Tabel 3: Test formule vlakke plaat.**

Hieruit blijkt dat voor de gekozen parameters het model resultaten geeft die vergelijkbaar zijn met de uitkomsten van de formule.

### 5.3 AANTAL ELEMENTEN

Ansys deelt de ingevoerde geometrie in een aantal elementen. Per element worden een aantal vergelijkingen opgelost. Hoe meer elementen er aanwezig zijn, hoe nauwkeuriger de uitkomst van de berekening. Meer elementen betekent ook een langere rekentijd. Opdeling van een vlak in 100 elementen in zowel x-als y-richting, die ieder 6 vrijheidsgraden hebben, leidt tot het moeten oplossen van meer dan 60.000 vergelijkingen.

Om deze reden dient het minimale elementenaantal te worden bepaald dat een uitkomst garandeert die voldoet aan de vereisten ten aanzien van de nauwkeurigheid. Het feit dat het slechts berekening van eigenfrequenties betreft, leidt tot de verwachting dat er relatief weinig elementen nodig zijn om een snelle, doch vrij nauwkeurige bepaling te verkrijgen.

Voor een paneel met karakteristieken, zoals vermeld in het referentiepaneel in hoofdstuk 2, is de nauwkeurigheid ten opzichte het maximale elementaantal berekend:

Het maximale aantal elementen waarin het vlak in de x en y richting opgedeeld kon worden, is 150. Dit is zo omdat gewerkt is met studentenlicentie van Ansys, waar een limiet zit op het aantal vergelijkingen die Ansys kan oplossen. Hieronder wordt de berekening met 150 elementen gezien als de meest nauwkeurige berekening en daarna worden de resultaten met een lager aantal elementen hiermee vergeleken. Daarnaast is bijgehouden hoelang de computer bezig was om het resultaat te berekenen.

| Aantal elementen | Eigenfrequentie (Hz) | Verschil met 150 elementen | Rekentijd (s) |
|------------------|----------------------|----------------------------|---------------|
| 10               | 55.1287              | 1.06%                      | 1             |
| 25               | 54.7049              | 0.29%                      | 1             |
| 50               | 54.6382              | 0.16%                      | 2             |
| 100              | 54.6160              | 0.13%                      | 8             |
| 150              | 54.5463              | 0%                         | 20            |

**Tabel 4: Nauwkeurigheid bepaling ten opzichte van aantal elementen.**

Zoals verwacht convergeert de foutmarge snel. Met de opdracht om een snel toepasbare ontwerpformule te ontwikkelen die de laagste eigenfrequentie redelijk nauwkeurig benadert in gedachte wordt een foutmarge van 0,16% verder acceptabel geacht. Dit impliceert de beginkeuze van een raster met 50x50 elementen.

## 6. INVLOED VAN DE VERSCHILLENDE PARAMETERS

### 6.1 VEREENVOUDIGEN FORMULE

Nu op analytische wijze een formule is gevonden voor de laagste eigenfrequentie van een schaal, gaat nu gekeken worden of met een parameterstudie hetzelfde resultaat wordt behaald. Door steeds een enkele parameter stapsgewijs te veranderen in het model, is het mogelijk te zien wat het verband is tussen deze parameter en de eigenfrequentie. Er wordt steeds uitgegaan van een referentiepaneel zoals gedefinieerd in hoofdstuk 2.

De oplossing die analytisch is verkregen (Vergelijking (4.26)) is hieronder verkort weergegeven, puur om het overzichtelijk te houden.

$$f_{\text{schaal}} = (f_{\text{vlak}}^2 + C_k + C_t)^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

Met:

$$C_k = \frac{E}{\rho} \frac{(k_{xx} + k_{yy})^2}{16\pi^2} \quad (6.2)$$

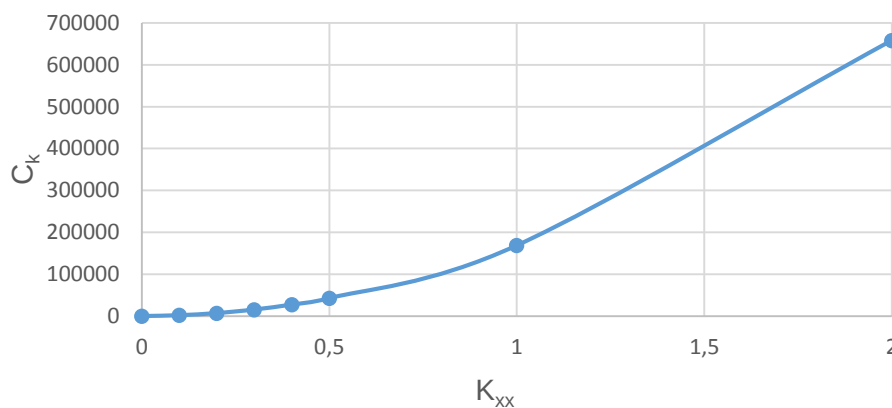
$$C_t = \frac{E}{\rho} \frac{k_{xy}^2}{4\pi^2} \quad (6.3)$$

## 6.2 KROMMING IN ÉÉN RICHTING

Voor het controleren van de formule bij kromming in één richting, wordt aangenomen dat er geen twist aanwezig is. Aangezien de kromming geen invloed heeft op  $f_{vlak}$  kan deze als constant worden aangenomen en naar voren worden gehaald. Nu kan de vergelijking worden omgeschreven tot vergelijking (6.4).

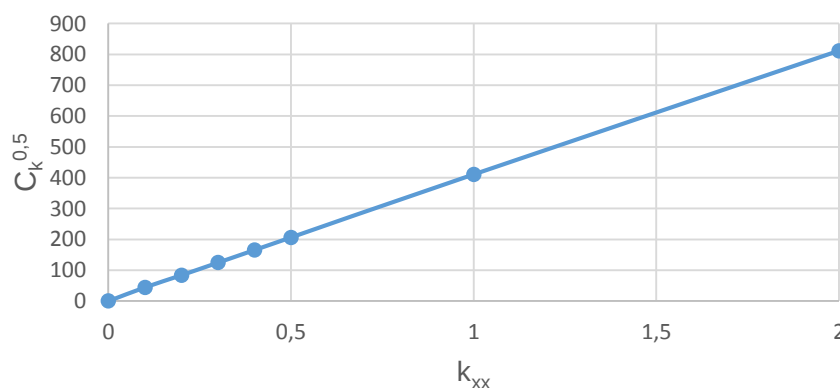
$$C_k = f_{schaal}^2 - f_{vlak}^2 \quad (6.4)$$

$f_{schaal}$  en  $f_{vlak}$  zijn met Ansys te bepalen. Door nu enkel de kromming steeds aan te passen, is het mogelijk om het verband te vinden tussen de kromming en de term  $C_k$ .



**Figuur 5: Verband kromming en  $C_k$**

In figuur 5 is het verband te zien tussen de krommingsterm en de kromming zelf. Dit lijkt een kwadratisch verband te zijn. Om dit te verduidelijken wordt  $k_{xx}$  uitgezet tegen de wortel van  $C_k$  in figuur 6.



**Figuur 6: Verband kromming en de wortel van  $C_k$**

Uit figuur 6 is te concluderen dat er een lineair verband is tussen de kromming en de wortel van de krommingsterm. Hieruit volgt het volgende verband:

$$k_{xx}^2 \sim C_k \quad (6.5)$$

### 6.3 KROMMING IN TWEE VERSCHILLENDE RICHTINGEN

Na de resultaten van Ansys van een gekromde plaat in twee richtingen te vergelijken met de resultaten van een gekromde plaat in één richting komt er een zeer duidelijk verband naar voren.

| $k_{xx}$ | $k_{yy}$ | $f$   |
|----------|----------|-------|
| 0.1      | 0        | 68.4  |
| 0.2      | 0        | 98.8  |
| 0.5      | 0        | 212.8 |
| 1        | 0        | 413.8 |

**Tabel 5: Laagste eigenfrequentie bij kromming in één richting.**

| $k_{xx}$ | $k_{yy}$ | $k_{xx} + k_{yy}$ | $f$   |
|----------|----------|-------------------|-------|
| 0.05     | 0.05     | 0.1               | 67.2  |
| 0.1      | 0.1      | 0.2               | 98.7  |
| 0.25     | 0.25     | 0.5               | 212.9 |
| 0.3      | 0.7      | 1                 | 414.2 |

**Tabel 6: Laagste eigenfrequentie bij kromming in twee richtingen.**

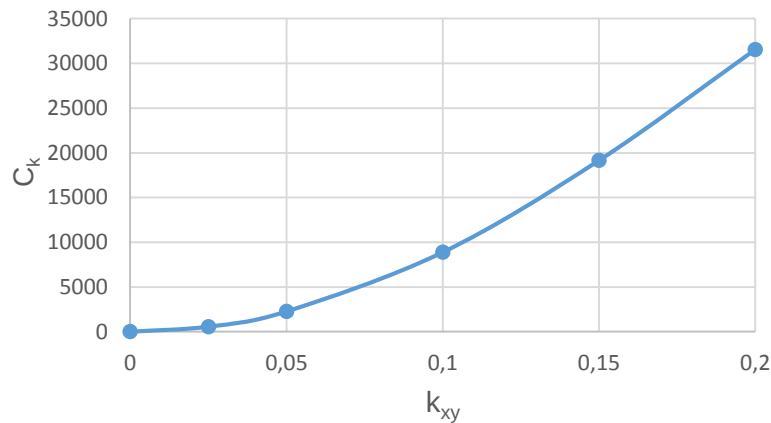
Uit bovenstaande gegevens blijkt dat als de kromming in twee verschillende richtingen gelijk is aan de kromming van een plaat die in één richting gekromd is, dat ze een vergelijkbare eigenfrequentie hebben. Met dit gegeven en het eerder ontdekte verband die te vinden is in vergelijking (6.5) volgt:

$$(k_{xx} + k_{yy})^2 \sim C_k \quad (6.6)$$

Dit komt overeen met de formule die analytisch bepaald is.

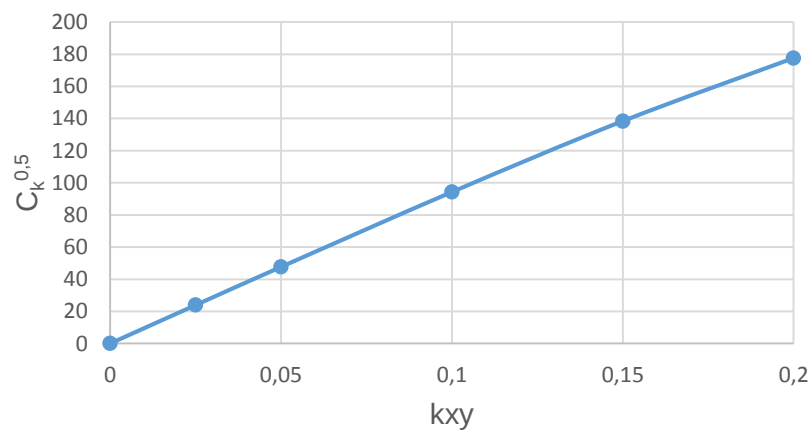
## 6.4 TWIST

Om het verband tussen de twist en de krommingsterm te bepalen, worden dezelfde stappen doorlopen als bij het bepalen van het verband tussen  $k_{xx}$  en  $C_k$ . Hierbij wordt aangenomen dat er geen kromming in de x en y richting aanwezig is.



**Figuur 7: Verband twist en krommingsterm**

Dit lijkt weer een kwadratisch verband te zijn. Als vervolgens  $k_{xy}$  wordt uitgezet tegen de wortel van  $C_t$  komt dit verband duidelijk naar voren.



**Figuur 8: Verband twist en de wortel van de krommingsterm**

Uit figuur 8 blijkt dat er een lineair verband is tussen  $k_{xy}$  en de wortel van  $C_k$ . Hieruit kan de volgende conclusie worden getrokken:

$$k_{xy}^2 \sim C_t \quad (6.7)$$

## 6.5 COMBINATIE KROMMING IN TWEE RICHTINGEN EN TWIST

Volgens vergelijking (6.1) bestaat het aandeel van de kromming aan de eigenfrequentie uit twee verschillende onderdelen. Een term voor de kromming in de x en y richting plus een term voor de twist. De som van deze twee termen wordt  $C$  genoemd.

$$C = C_k + C_t \quad (6.8)$$

Om er achter te komen of dit in de werkelijkheid ook zo is kan eerst voor situaties met louter kromming in de x of y richting of twist, de eigen frequentie bepaald worden. Van hieruit kunnen respectievelijk  $C_k$  en  $C_t$  bepaald worden. Vervolgens kunnen dezelfde krommingen en twist weer in het model worden ingevoerd, echter treden ze nu tegelijk op. Uit deze gegevens kan weer  $C$  bepaald worden. Als blijkt dat deze  $C$  gelijk is aan de som van  $C_k$  en  $C_t$ , is het verband gegeven in de formule correct.

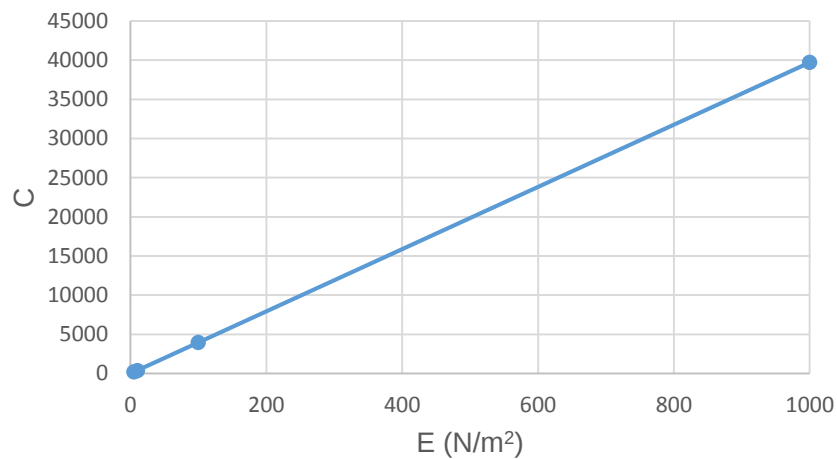
| $k_{xx} = k_{yy}$ | $k_{xy}$ | $C_{k,Ansys}$ | $C_{t,Ansys}$ | $C_k + C_t$ | $C_{Ansys}$ | Foutmarge |
|-------------------|----------|---------------|---------------|-------------|-------------|-----------|
| 0,05              | 0,025    | 1964          | 570           | 2534        | 2393        | 5,55      |
| 0,10              | 0,03     | 7049          | 570           | 7619        | 7439        | 2,36      |
| 0,10              | 0,05     | 7049          | 2270          | 9319        | 8592        | 7,80      |
| 0,15              | 0,05     | 15519         | 2270          | 17789       | 19496       | -9,60     |
| 0,15              | 0,10     | 15519         | 88300         | 24401       | 20386       | 16,45     |

**Tabel 7: Foutmarge bepaling kromming en twist.**

Voor kleine krommingen geldt de formule, maar hoe groter de krommingen worden, hoe groter de foutmarge. Dit zou kunnen betekenen dat er nog een extra term in de formule hoort. In hoofdstuk 7 wordt hier dieper op in gegaan.

## 6.6 ELASTICITEITSMODULUS

Volgens vergelijking (6.2) en (6.3) zal de elasticiteitsmodulus een recht evenredig verband hebben met  $C_k$  en  $C_t$ . Het is mogelijk dit verband te laten zien, door in Ansys schalen te modeleren met verschillende elasticiteitsmodulussen en hieruit  $C$  te bepalen.  $C$  is hier te som van  $C_k$  en  $C_t$ . Dit verband is te zien in figuur 9.



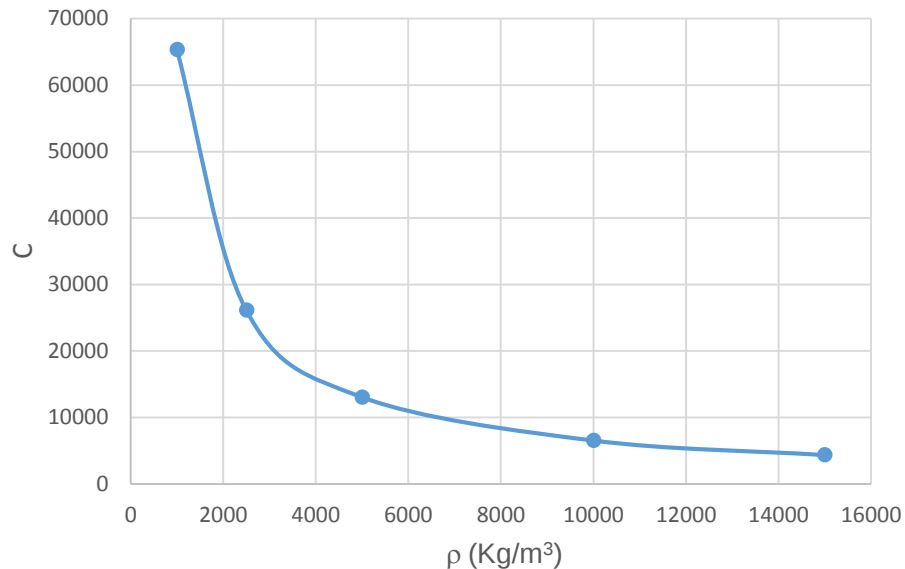
**Figuur 9: Verband elasticiteitsmodulus en de krommingsterm**

Hier is duidelijk te zien dat er een recht evenredig verband is tussen de elasticiteitsmodulus en de krommingsterm. Hieruit is te concluderen dat:

$$E \sim C \quad (6.9)$$

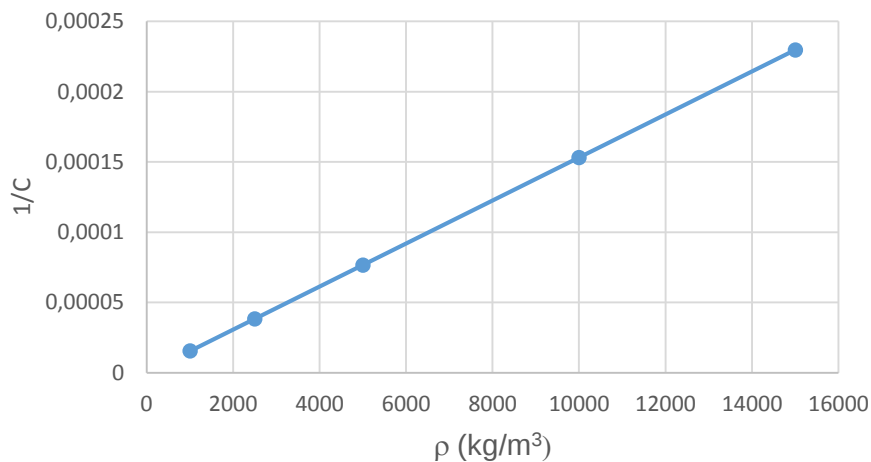
## 6.7 DICHTHEID

Op soortgelijke wijze is het verband te laten zien, tussen de dichtheid van het materiaal en de krommingsterm. Volgens vergelijking (6.2) en (6.3), zal dit een omgekeerd evenredig verband moeten zijn.



**Figuur 10: Verband dichtheid en de krommingsterm.**

In grafiek 5 lijkt er een omgekeerd evenredig verband te zijn tussen  $C$  en  $\rho$ . Dit verband wordt duidelijker als  $1/C$  wordt uitgezet tegen  $\rho$ . Dit is gedaan in figuur 11.



**Figuur 11: Verband dichtheid en de inverse krommingsterm.**

Hier is duidelijk te zien dat er een recht evenredig verband is tussen  $1/C$  en  $\rho$ . Hieruit kan het volgende geconcludeerd worden:

$$\frac{1}{\rho} \sim C \quad (6.10)$$

## 7. BRUIKBAARHEIDSGRENZEN FORMULE

In het vorige hoofdstuk is elk verband bewezen tussen de parameters uit de formule en de eigenfrequentie. Al deze verbanden bleken te kloppen met de formule die analytisch afgeleid is. Nu moet er voor de formule grenzen worden opgesteld waarbinnen de formule resultaten geeft die kloppen met de werkelijkheid. Hierbij moeten de resultaten van de formule een kleinere fout hebben dan de toelaatbare 10%. Ook zal het kunnen voorkomen dat bij bepaalde parameters, de gekozen bewegingsvorm, zoals aangegeven in figuur 4, niet meer de laagste eigenfrequentie heeft. Een andere trillingsvorm kan maatgevend worden. Het blijkt dat vooral door twist, al snel een andere trillingsvorm maatgevend wordt. Daarom wordt bij het bepalen van de bruikbaarheidsgrenzen van de kromming, van een schaal uitgegaan waar geen twist in zit.

### 7.1 VERHOUDING LENGTE EN DIKTE

Bij het definiëren van de schaal werd gekozen voor een dunne schaal. Deze moet aan de eis voldoen zoals gegeven in vergelijking (7.1).

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 4000 \quad (7.1)$$

In tabel 8 is te vinden welke eigenfrequentie Ansys uitrekent bij een bepaalde lengte/dikte verhouding en wat voor resultaat de formule geeft.

| $l/h$ | $f_{Ansys}$ | $f_{Formule}$ | Fout   |
|-------|-------------|---------------|--------|
| 30    | 552,51      | 543,66        | 1,63   |
| 100   | 183,10      | 187,98        | -2,60  |
| 200   | 98,93       | 97,72         | 1,26   |
| 500   | 88,64       | 94,31         | -6,00  |
| 1000  | 83,97       | 93,48         | -10,17 |

**Tabel 8: Foutmarge bij verschillende lengte/dikte verhoudingen.**

Hieruit kan geconcludeerd worden dat de formule goede resultaten geeft, zolang de verhouding  $l/h$  kleiner is dan 1000.

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000 \quad (7.2)$$

## 7.2 ELASTICITEITSMODULUS

Voor het bepalen van de grenzen van de elasticiteitsmodulus wordt eerst gekeken naar welke materialen er in de praktijk gebruikt zouden worden voor schalen. Het materiaal met de hoogste elasticiteitsmodulus is staal en het materiaal met de laagste zou hout zijn. De grenzen die om deze praktische redenen zijn gekozen, staan in vergelijking (7.2).

$$10^9 \frac{N}{m^2} \leq E \leq 210 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \quad (7.3)$$

Als deze grenzen getoetst worden met Ansys volgt het volgende resultaat:

| E (x10 <sup>9</sup> ) | $f_{Ansys}$ | $f_{Formule}$ | Foutmarge |
|-----------------------|-------------|---------------|-----------|
| 1                     | 6,82        | 6,81          | -0,15     |
| 10                    | 21,57       | 21,56         | -0,05     |
| 50                    | 48,22       | 48,21         | -0,02     |
| 100                   | 68,2        | 68,18         | -0,03     |
| 150                   | 83,53       | 83,50         | -0,04     |
| 210                   | 98,83       | 98,80         | -0,03     |

**Tabel 8: Foutmarge bij verschillende elasticiteitsmoduli**

Voor alle materialen die in de praktijk gebruikt worden, valt de elasticiteitsmodulus binnen de bruikbaarheidsgrenzen.

### 7.3 DICHTHEID

Voor het bepalen van de grenzen van de dichtheid wordt dezelfde methode toegepast als bij het bepalen van de bruikbaarheidsgrenzen van de elasticiteitsmodulus. Ook hier zijn hout en staal de maatgevende materialen. De grenzen die om deze praktische redenen zijn gekozen, staan in vergelijking (7.4).

$$500 \leq \rho \leq 8000 \quad (7.4)$$

Als deze grenzen getoetst worden met Ansys volgt het volgende resultaat:

| $\rho$ | Ansys  | Formule | Foutmarge |
|--------|--------|---------|-----------|
| 500    | 391,61 | 391,47  | -0,034    |
| 1000   | 276,90 | 276,81  | -0,031    |
| 2500   | 175,13 | 175,07  | -0,034    |
| 5000   | 123,84 | 123,79  | -0,037    |
| 8000   | 97,90  | 97,868  | -0,032    |

**Tabel 9: Foutmarge bij verschillende dichtheden**

Voor alle materialen die in de praktijk gebruikt worden, valt de dichtheid binnen de bruikbaarheidsgrenzen.

## 7.4 POISSON RATIO

Voor het bepalen van de grenzen van de poisson ratio wordt dezelfde methode toegepast als bij het bepalen van de bruikbaarheidsgrenzen van de elasticiteitsmodulus en de dichtheid. Alle materialen die in de praktijk voor constructies worden gebruikt, hebben een waarde tussen de 0 en 0.5.

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (7.5)$$

Als deze grenzen getoetst worden met Ansys volgt het volgende resultaat:

| $\nu$ | Ansys  | Formule | Foutmarge |
|-------|--------|---------|-----------|
| 0     | 107,67 | 105,77  | -1,76     |
| 0,1   | 106,88 | 105,90  | -0,92     |
| 0,3   | 106,68 | 107,03  | 0,33      |
| 0,5   | 108,77 | 109,96  | 1.09      |

**Tabel 10: Foutmarge bij verschillende poisson ratio**

Voor alle materialen die in de praktijk gebruikt worden, valt de poisson ratio binnen de bruikbaarheidsgrenzen.

## 7.5 KROMMING IN DE X EN Y RICHTING

Eén van de eisen die in hoofdstuk 2 werd gesteld, die moest gelden voor de schaal was dat overal op de schaal de helling in het kwadraat veel kleiner moest zijn dan 1. Dit is terug te vinden in vergelijking (2.2).

Als niet aan deze eis voldaan wordt, mag de theorie van Donnell niet gebruikt worden, wat zal leiden tot een andere vergelijking voor de eigenfrequentie. Door de vergelijking van de schaal te toetsen aan deze norm, kan een bovenste grens worden vast gesteld voor de kromming. Een vergelijking die goed de goniometrie van een schaal beschrijft, is vergelijking (7.6).

$$z(x,y) = \frac{1}{2}x^2k_{xx} + \frac{1}{2}y^2k_{yy} + xyk_{xy} \quad (7.6)$$

De helling op elk punt op deze schaal is gelijk aan de afgeleide van vergelijking (7.6).

$$\begin{aligned} \frac{\delta dz}{\delta x} &= xk_{xx} + yk_{xy} \\ \frac{\delta dz}{\delta y} &= yk_{yy} + xk_{xy} \end{aligned} \quad (7.7)$$

De afgeleide is maximaal aan de randen van de schaal, dus op de plek van x en y kan  $\frac{1}{2}l$  worden ingevuld.

$$\begin{aligned} \frac{\delta z}{\delta y} &= \frac{1}{2}l(k_{xx} + k_{xy}) \\ \frac{\delta z}{\delta x} &= \frac{1}{2}l(k_{yy} + k_{xy}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Als vergelijking (7.8) vervolgens wordt gesubstitueerd in vergelijking (2.2) dan volgt de vergelijking (7.9).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}l^2(k_{xx} + k_{xy})^2 &\ll 1 \\ \frac{1}{4}l^2(k_{yy} + k_{xy})^2 &\ll 1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Omdat de term, veel kleiner dan 1, nogal vaag is. Wordt met Ansys gezocht naar een absolute grens, waaronder de vergelijking gegarandeerd goede resultaten geeft.

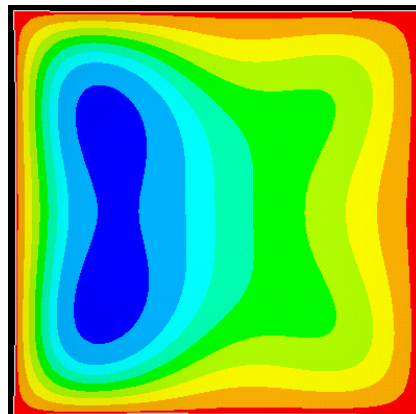
In tabel 12 zijn resultaten van Ansys vergeleken met resultaten van de formule.

| $k_{xx} + k_{yy}$ | $l$  | $l(k_{xx} + k_{yy})$ | $f_{Ansys}$ | $f_{Formule}$ | Foutmarge |
|-------------------|------|----------------------|-------------|---------------|-----------|
| 0,1               | 0,30 | 0,03                 | 68,3        | 68,4          | 0,08      |
| 0,5               | 0,30 | 0,15                 | 213,6       | 212,9         | -0,32     |
| 1                 | 0,30 | 0,3                  | 425,7       | 415,2         | -2,46     |
| 3                 | 0,30 | 0,9                  | 1154,2      | 1235,2        | 7,01      |
| 2                 | 0,30 | 0,6                  | 819,8       | 819,1         | -0,09     |
| 1                 | 0,60 | 0,6                  | 411,8       | 408           | -0,92     |
| 4                 | 0,15 | 0,6                  | 1650,1      | 1660,8        | 0,71      |
| 1,5               | 0,60 | 0,9                  | 597,6       | 617,5         | 3,32      |
| 1                 | 0,90 | 0,9                  | 395,9       | 411,6         | 3,98      |
| 6                 | 0,15 | 0,9                  | 2427,7      | 2479,2        | 2,12      |
| 4                 | 0,30 | 1,2                  | 1556,1      | 1647,9        | 5,90      |
| 2                 | 0,60 | 1,2                  | 763,0       | 823,3         | 7,90      |
| 1,33              | 0,90 | 1,2                  | 501,5       | 547,5         | 9,18      |

**Tabel 11: Foutmarge bij verschillende lengte/kromming verhoudingen**

Na het testen van onder andere de onderstaande resultaten, blijkt dat de formule voor een bepaalde lengte, kromming verhouding niet meer klopt, omdat een andere trillingsvorm maatgevend wordt. De lengte/kromming verhouding waaronder alle resultaten van Ansys overeen kwamen met de formule is:

$$l(k_{xx} + k_{yy}) \leq 1.2 \quad (7.10)$$



**Figuur 13: Trillingsvorm met laagste eigenfrequentie als bruikbaarheidsgrens overschreden wordt.**

## 7.6 TWIST

Voor het bepalen van de bruikbaarheidsgrenzen voor de twist kan een zelfde soort aanpak worden gebruikt als bij het bepalen van de grenzen voor de kromming in de x en y richting. Ook hier blijkt dat de formule goed de frequentie kan bepalen van de trillingsvorm zoals weergegeven in figuur 4, maar dit blijkt al snel niet meer de trillingsvorm te zijn met de laagste eigenfrequentie.

| $k_{xy}$ | $l$  | $l \times k_{xy}$ | $f_{Ansys}$ | $f_{Formule}$ | Foutmarge |
|----------|------|-------------------|-------------|---------------|-----------|
| 0,1      | 0,30 | 0,03              | 100,0       | 98,8          | -1,24     |
| 0,15     | 0,30 | 0,045             | 135,5       | 135,0         | -0,37     |
| 0,1      | 0,60 | 0,06              | 42,8        | 87,1          | 103,08    |
| 0,1      | 0,45 | 0,045             | 85,8        | 67,1          | -21,79    |
| 0,2      | 0,15 | 0,03              | 276,4       | 273,6         | -0,99     |
| 0,05     | 0,90 | 0,045             | 45,9        | 41,6          | -9,38     |
| 0,05     | 0,80 | 0,04              | 23,4        | 41,9          | 79,21     |
| 0,12     | 0,30 | 0,036             | 114,0       | 112,9         | -1,017    |
| 0,05     | 0,60 | 0,03              | 37,1        | 43,4          | 16,83     |
| 0,06     | 0,50 | 0,03              | 52,3        | 53,6          | 2,48      |
| 0,08     | 0,50 | 0,04              | 54,3        | 68,7          | 26,66     |

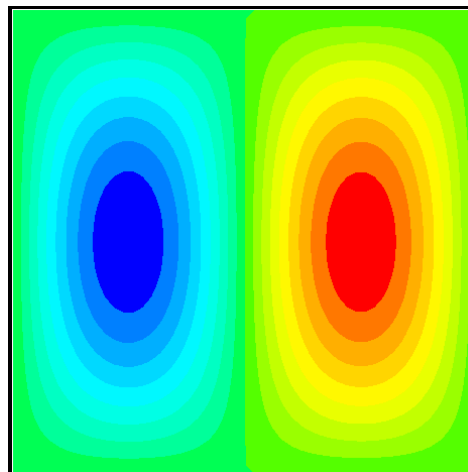
**Tabel 13: Foutmarge bij verschillende lengte/twist verhoudingen**

Ten eerste blijkt bij een toenemende lengte en breedte, de foutmarge snel omhoog te schieten. Hierom wordt er een maximale lengte aangenomen, waarvoor de formule nog nauwkeurige resultaten geeft.

$$l \leq 0.5 \text{ m} \quad (7.11)$$

De grens waar de formule nog de laagste eigenfrequentie mee kan bepalen is:

$$l \times k_{xy} \leq 0.04 \quad (7.12)$$



**Figuur 14: Trillingsvorm met laagste eigenfrequentie als bruikbaarheidsgrens overschreden wordt.**

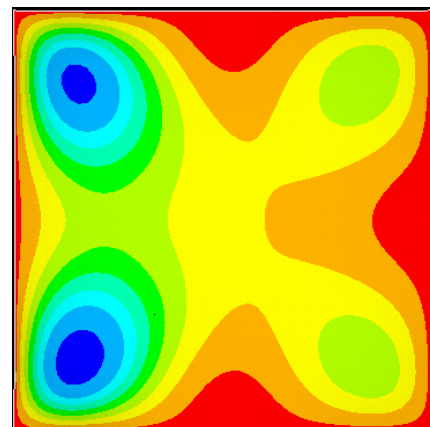
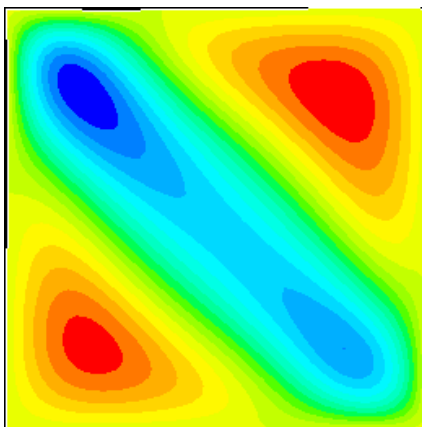
## 7.7 KROMMING EN TWIST

Voor het opstellen van de bruikbaarheidsgrenzen voor als er in een schaal tegelijk kromming en twist aanwezig, zijn weer opnieuw resultaten van Ansys vergeleken met resultaten van de formule. Deze resultaten zijn te vinden in tabel 13.

| $k_{xx} + k_{yy}$ | $k_{xy}$ | $l$ | $l(k_{xx} + k_{yy})$ | $l \times k_{xy}$ | Ansys   | Formule | Foutmarge |
|-------------------|----------|-----|----------------------|-------------------|---------|---------|-----------|
| 4                 | 0,13     | 0,3 | 1,2                  | 0,039             | 1519,9  | 1650,93 | 8,62      |
| 2                 | 0,06     | 0,6 | 1,2                  | 0,036             | 748,87  | 824,81  | 10,14     |
| 1,33              | 0,04     | 0,9 | 1,2                  | 0,036             | 494,03  | 428,93  | -13,18    |
| 0,5               | 0,04     | 0,9 | 0,45                 | 0,036             | 181,91  | 211,73  | 16,39     |
| 2                 | 0,13     | 0,3 | 0,6                  | 0,039             | 712,522 | 831,91  | 16,75     |

**Tabel 12: Foutmarge bij verschillende kromming/twist/engte verhoudingen**

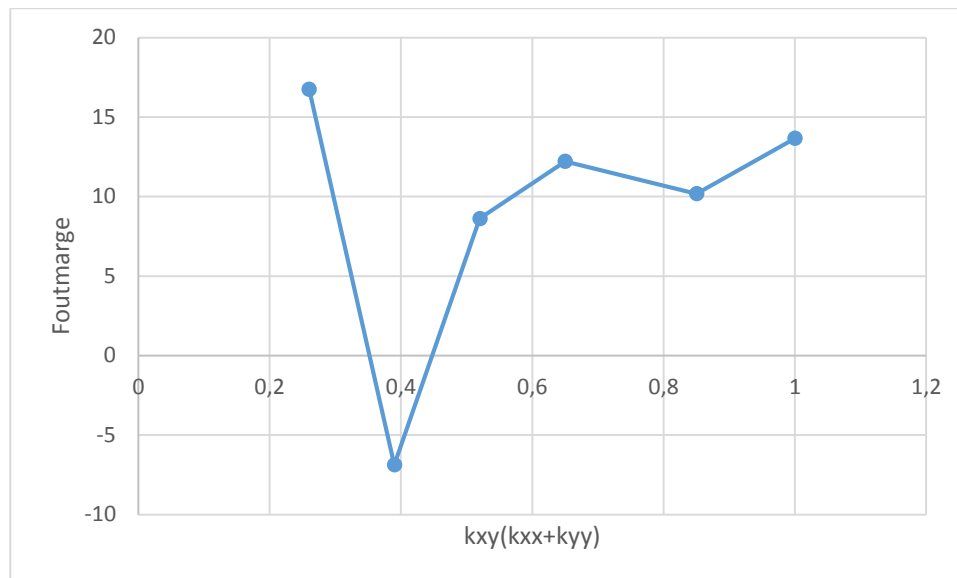
Hieruit blijkt dat als dezelfde bruikbaarheidsgrenzen worden gebruikt als bij louter kromming en twist, het niet geldt dat ze ook gelden als ze tegelijk optreden. Als kromming en twist tegelijk aanwezig zijn in een schaal, wordt de trillingsvorm van de laagste eigenfrequentie zeer onvoorspelbaar.



**Figuur 15: Trillingsvorm als  $k_{xy}$  maatgevend is**      **Figuur 16: Trillingsvorm als  $k_{xx} + k_{yy}$  maatgevend is**

Wanneer de twist relatief groot is ten opzichte van de kromming, ontstaat een trillingsvorm zoals weergegeven in figuur 15. Zodra de kromming maatgevend is ontstaat een trillingsvorm zoals in figuur 16. Wanneer deze sprong gebeurt van de basis-trillingsvorm naar een van deze twee trillingsvormen hangt niet alleen af van de twist en de kromming, maar ook van de lengte en dikte verhoudingen. Door dit onvoorspelbare gedrag is het niet mogelijk om duidelijke grenzen op te stellen voor de formule.

Bovenstaande resultaten zouden ertoe kunnen wijzen dat een term  $k_{xy}(k_{xx} + k_{yy})$  wel in de formule voor zou moeten komen. Om te kijken of er een verband zit tussen deze term en de foutmarge die er ontstaat als er tegelijk kromming en twist aanwezig is, zijn in figuur 17 deze twee parameters tegen elkaar uit gezet.



**Figuur 17: Verband foutmarge en  $k_{xy}(k_{xx} + k_{yy})$**

Als er een term met  $k_{xy}(k_{xx} + k_{yy})$  in de formule zit, dan zou er een bepaald verband te zien moeten zijn tussen de foutmarge en deze term. Dit blijkt niet het geval te zijn.

## 8 CONCLUSIE EN AANBEVELINGEN

### 8.1 CONCLUSIE

De doelstelling van het onderzoek was om een formule op te stellen voor de laagste eigenfrequentie van een schaal. Om het onderzoek niet te breed te maken is er gekozen voor een vlakke, dunne schaal. Voor zo'n soort schaal is het gelukt om analytisch een ingenieursformule op te stellen, namelijk vergelijking (8.1)

$$f_{\text{schaal}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)I^4} + \frac{(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}}{16\pi^2} \right)} \quad (8.1)$$

Vervolgens is met een parameterstudie gebleken dat elke parameter goed in deze formule zit verwerkt. Hierna zijn door middel van uitkomsten van de formule te vergelijken met resultaten van Ansys, een aantal gebruikersgrenzen opgesteld. Ten eerste bleek dat alle materialen die in de praktijk gebruikt worden, getoetst kunnen worden met de formule. Hierna werd duidelijk dat de schaal aan een bepaalde lengte, dikte verhouding moet voldoen.

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000 \quad (8.2)$$

Als de som van de kromming en de lengte van de schaal te groot is, dan gaat de schaal een andere trillingsvorm aannemen. Hierdoor krijgt een andere trillingsvorm de lagere eigenfrequentie, dan de trillingsvorm die onderzocht werd. Dit verschijnsel blijkt bij twist sneller op te treden dan bij kromming in de x en y richting. Voor als er in een plaat enkel kromming in de x en y richting aanwezig is of twist, zijn er een aantal bruikbaarheidsgrenzen opgesteld.

$$l(k_{xx} + k_{yy}) \leq 1.2 \quad (8.3)$$

$$lk_{xy} \leq 0.04 \quad (8.4)$$

Toen er grenzen moesten worden opgesteld voor als er tegelijk kromming en twist aanwezig zou zijn, bleek snel dat dit niet eenvoudig zou zijn. De schaal neemt dan namelijk heel onvoorspelbaar een andere trillingsvorm aan, die de laagste eigenfrequentie heeft. Er is gekeken of de fout in de formule als het ware opgevuld kon worden met een term met  $k_{xy}(k_{xx}+k_{yy})$  erin. Helaas bleek er geen duidelijk verband aanwezig te zijn hiertussen. Al zouden bruikbaarheidsgrenzen voor de gehele formule worden opgesteld, zouden deze heel streng moeten zijn. Veel strenger dan als de schaal apart gekromd of getwist is. Hierom wordt gekozen om de formule op te splitsen in twee verschillende formules, met allebei hun eigen bruikbaarheidsgrens.

$$f_{\text{schaal,kromming}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)l^4} + \frac{(k_{xx} + k_{yy})^2}{16\pi^2} \right)} \quad (8.5)$$

$$f_{\text{schaal,twist}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left( \frac{\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)l^4} + \frac{k_{xy}}{4\pi^2} \right)} \quad (8.6)$$

Deze beide formules kunnen binnen de bruikbaarheidsgrenzen de eigenfrequentie van een schaal met een onzekerheid van tien procent bepalen. Als men buiten deze grenzen de laagste eigenfrequentie wil bepalen, wordt aangeraden om dit te doen met een eindig elementen pakket. Ook als er een combinatie van kromming en twist aanwezig is, is een eindig elementenpakket de oplossing. Dit omdat een schaal dan onvoorspelbaar een bepaalde trillingsvorm aanneemt, die de laagste eigen frequentie heeft.

## 8.2 VERVOLGONDERZOEK

Het doel van dit rapport was om een ontwerpformule op te stellen voor de laagste eigenfrequentie van een schaal. Deze ontwerpformule blijkt onnauwkeurig te worden, als niet de van te vooraf aangenomen trillingsvorm, de trillingsvorm is met de laagste eigenfrequentie. Om deze reden zijn er bruikbaarheidsgrenzen opgesteld, waarbinnen de formule nog betrouwbare resultaten geeft. Het zou tevens interessant kunnen zijn, om niet alleen te kijken naar de laagste eigenfrequentie, maar om de formule te behandelen alsof enkel wordt gekeken naar de meest eenvoudige trillingsvorm. De reden dat dit interessant is, is omdat schalen in deze vorm knikken en dan zou aan de hand van de formule de knikkracht voorspelt kunnen worden. Het zou mogelijk kunnen zijn dat als op deze manier naar de formule wordt gekeken, de term  $k_{xy}(k_{xx}+k_{yy})$  wel in de formule voor komt.

## BRONVERMELDING

- Architecture Linked. (2015, 6 10). *Dalian Shell Museum*. Opgehaald van Architecture Linked: <http://architecturelinked.com/profiles/blogs/dalian-shell-museum>
- Blaauwendraad, J. (2010). *Dynamica van Systemen*. Delft: Technische Universiteit Delft.
- Blaauwendraad, J., & Hoefakker, J. (2014). *Structural Shell Analysis*. Dordrecht: Springer Science+Business Media.
- Blevins, R. D. (1993). *Formulas for natural frequency and mode shape*. Florida: Krieger Publishing Company.
- Dijk, R. v. (2014). *Eigenfrequentie van belaste panelen*. Delft: Technische Universiteit Delft.
- Hoogenboom, P. (2013). *Handout Shell Analysis*. Delft.
- Scheltema, A. (2013). *BSc Eindwerk Eigenfrequenties, Dubbele Krommingen & Twist*. Delft: Technische Universiteit Delft.
- Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells*. New York: Marcel Dekker.

## BIJLAGE 1 SCRIPT ANSYS

```

lx = 0.3          ! m    lengte in de x-richting
ly = 0.3          ! m    breedte in de y-richting
h = 0.001         ! m    dikte
kxx = 0.1         ! 1/m   kromming
kyy = 0.1         ! 1/m
kxy = 0.05        ! 1/m
E = 210e9         ! N/m2  elastiteitsmodulus
nu = 0.3          ! -     dwarscontractiecoefficient
rho = 7800        ! kg/m3 massadichtheid
n = 50            ! -     aantal elementen in beide richtingen
nxx = 0.0         ! N/m   membraankrachten
nyy = 0.0         ! N/m
nxy = 0.0         ! N/m

G=E/(2*(1+nu))

pz = -kxx*nxx-2*kxy*nxy-kyy*nyy ! N/m2  belasting loodrecht op het oppervlak

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,    ! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,rho
ET,1,SHELL181      ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h, , , ! element dikte

*DO,i,0,n          ! plaats knopen
*DO,j,0,n
  x=lx/n*i-lx/2
  y=ly/n*j-ly/2
  z1=0.5*x*x*kxx
  z2=x*y*kxy
  z3=0.5*y*y*kyy
  z=z1+z2+z3
  N,,x,y,z,,
*ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,n          ! plaats elementen

```

```

*DO,j,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO

```

```

*DO,i,1,(n+1)*(n+1)      ! roteer de assenstelsels van alle knopen
  xx=1
  xy=0
  xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
  lx=SQRT(1+xz*xz)
  zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
  zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

```

```

*DO,i,2,n                ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=-lx/2
  yx=0
  yy=1
  yz=NX(i)*kxy+NY(i)*kyy
  ly=SQRT(1+yz*yz)
  zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
  zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

```

```

*DO,i,2,n                ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=lx/2
  j=n*(n+1)+i
  yx=0
  yy=1
  yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
  ly=SQRT(1+yz*yz)
  zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
  zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

```

```

*DO,i,1,n                ! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het vlak
j=i
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)
D,j,UZ,0
j=i+n*(n+1)+1
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)+1
D,j,UZ,0
*ENDDO

*DO,i,1,n+1              ! randvoorwaarde: geen verplaatsing in de richtingen van de randen
D,i,UY,0
*ENDDO
*DO,i,n*(n+1)+1,(n+1)*(n+1)
D,i,UY,0
*ENDDO
*DO,i,1,n*(n+1)+1,n+1
D,i,UX,0
*ENDDO
*DO,i,n+1,(n+1)*(n+1),n+1
D,i,UX,0
*ENDDO

FINISH

/SOLU
!*
ANTYPE,0
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 20,,,
MXPAND,20
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH

```

```
/POST1
/SHOW,WIN32C
SET,FIRST
/PLOPTS,INFO,3
/CONTOUR,ALL,18
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
/REPLOT,RESIZE
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,1
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,1
PLNSOL,U,Z
```

```

restart :      nu := 0 :
uz := u*cos( (Pi*x)/l ) * cos( (Pi*y)/l ) * cos(2*Pi*f*t) :
t1 := diff(uz, x, x) + diff(uz, y, y) :
t2 := diff(t1, x, x) + diff(t1, y, y) :
t3 := diff(t2, x, x) + diff(t2, y, y) :
t4 := diff(t3, x, x) + diff(t3, y, y) :
g1 := kxx*diff(uz, y, y) - 2*kxy*diff(uz, x, y) + kyy*diff(uz, x, x) :
g2 := kxx*diff(g1, y, y) - 2*kxy*diff(g1, x, y) + kyy*diff(g1, x, x) :
f0 := -rho*h*diff(uz, t, t) :
f1 := diff(f0, x, x) + diff(f0, y, y) :
f2 := diff(f1, x, x) + diff(f1, y, y) :
eq := (E*h^3)/(12*(1-v^2)) * t4 + E*h*g2 = f2 :
solve(eq, f) :

```

$$\begin{aligned}
 & \text{fit} \\
 & := \frac{1}{12} \frac{1}{\pi \rho (v^2 - 1) l^2} \left( \sqrt{3} \left( \rho (v^2 - 1) E \left( 12 l^4 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xx} k_{xy} v^2 \right. \right. \right. \\
 & + 12 l^4 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xy} k_{yy} v^2 - 12 l^4 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xx} k_{xy} \\
 & - 12 l^4 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xy} k_{yy} + 3 l^4 k_{xx}^2 v^2 + 6 l^4 k_{xx} k_{yy} v^2 + 12 l^4 k_{xy}^2 v^2 \\
 & \left. \left. \left. + 3 l^4 k_{yy}^2 v^2 - 4 h^2 \pi^4 - 3 l^4 k_{xx}^2 - 6 l^4 k_{xx} k_{yy} - 12 l^4 k_{xy}^2 - 3 l^4 k_{yy}^2 \right) \right)^{1/2} \right) \\
 & - \frac{1}{12} \frac{1}{\pi \rho l^2} \left( \sqrt{3} \left( -\rho E \left( -12 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xx} k_{xy} l^4 \right. \right. \right. \\
 & - 12 \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xy} k_{yy} l^4 - 4 \pi^4 h^2 - 3 k_{xx}^2 l^4 - 6 k_{xx} k_{yy} l^4 - 12 k_{xy}^2 l^4 \\
 & \left. \left. \left. - 3 k_{yy}^2 l^4 \right) \right)^{1/2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{fit} := \text{fit}^2 - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot h^2}{12 \cdot (1 - v^2) \cdot \rho \cdot l^4} :$$

expand(fit)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \frac{E \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xx} k_{xy}}{\rho \pi^2} + \frac{1}{4} \frac{E \tan\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tan\left(\frac{\pi y}{l}\right) k_{xy} k_{yy}}{\rho \pi^2} + \frac{1}{16} \frac{E k_{xx}^2}{\rho \pi^2} \\
 & + \frac{1}{8} \frac{E k_{xx} k_{yy}}{\rho \pi^2} + \frac{1}{4} \frac{E k_{xy}^2}{\rho \pi^2} + \frac{1}{16} \frac{E k_{yy}^2}{\rho \pi^2}
 \end{aligned}$$

$x := 0 : y := 0 : \text{simplify}(ft);$

$$\frac{1}{16} \frac{E (k_{xx}^2 + 2 k_{xx} k_{yy} + 4 k_{xy}^2 + k_{yy}^2)}{\rho \pi^2}$$