

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

BACHELOREINDPROJECT CIVIELE TECHNIEK

Elementgrootte van eindige-elementenmethode voor juiste benadering van spanning rond puntlasten

W.F. Overkamp

Begeleiders:

P.C.J. Hoogenboom

C. Kasbergen



TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

BACHELOREINDPROJECT CIVIELE TECHNIEK

Elementgrootte van eindige-elementenmethode voor juiste benadering van spanning rond puntlasten

W.F. Overkamp

Studentnummer:
4909577

Begeleiders:
P.C.J. Hoogenboom
C. Kasbergen

29 juni 2023
Delft

CTB3000-16

Voorwoord

Dit verslag is tot stand gekomen als eindopdracht voor de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft.

Dit project bevatte voor mij meerdere nieuwe onderwerpen, theorieën en software programma's. Dit heeft als resultaat dat ik ontzettend veel nieuwe dingen heb geleerd, die vast en zeker later in mijn studie en/of werk-leven van pas gaan komen. Voor het schrijven van dit verslag is daarom ook uitgegaan van een begripsniveau van studenten aan het eind van hun bachelor Civiele Techniek aan de TU Delft.

Bij dit project heb ik natuurlijk voldoende hulp gehad van verschillende mensen, waarvoor ik hen graag wil bedanken. Ten eerste mijn begeleiders, Pierre Hoogenboom en Cor Kasbergen, voor de regelmatige hulp, sturing en wijze adviezen. Verder heeft Mahmoud Khadijeh mij veel geholpen met Abaqus en uiteindelijk heeft hij zelfs de berekening gemaakt omdat ik niet tijdig een licentie kon krijgen. Ten slotte zonder de steun van loyale studiegenoten bij wie ik altijd motivatie kon vinden was dit ook niet (of in ieder geval veel moeizamer) gelukt.

29 juni 2023
Wieke Overkamp

Samenvatting

Een puntlast werkt in het midden van een ronde plaat die is opgelegd over de volledige rand. Hierdoor ontstaan er theoretisch oneindige spanningen onder de puntlast. In de praktijk rekt het materiaal en zorgt dit voor een herverdeling van de spanningen. Dit zorgt dat het lineair elastische model niet meer voldoet. Een andere methode is nodig om de werkelijke spanningen en momenten te bepalen. Een oplossing daarvoor is een benadering met behulp van de eindige-elementenmethode. Hierbij wordt een oplossing exacter bij kleinere elementen en zou in theorie bij oneindig kleine elementen wederom naar oneindig naderen. Het is in deze situatie dus vooral van belang hoe groot de elementen genomen moeten worden om realistische spannings- en momentenverdeling te bepalen. Deze verdelingen moeten betrouwbaar genoeg zijn om mee te kunnen dimensioneren.

In dit project werd de vuistregel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” gecontroleerd voor spanningen in dikke platen en voor momenten. Mocht deze niet voldoen, dan werd naar een alternatieve regel gezocht. Beide spanningen en momenten zijn gecontroleerd met oplossingen van de eindige-elementenmethode met behulp van het software programma SCIA Engineer. Hier is een berekening met behulp van zowel Kirchhoff als Mindlin meegenomen. De spanning is met de analytische oplossing van Timoshenko vergeleken. Bij de momenten is een dikke plaat met een dunne plaat vergeleken.

Uit de simulaties en berekeningen is gebleken dat deze vuistregel incorrect is. Bij spanningen, indien berekend met behulp van Kirchhoff, komt deze overeen met de oplossing van Timoshenko bij een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. Dit geldt zowel voor dunne als voor dikke platen. Bij momenten bleek de elementgrootte niet afhankelijk te zijn van de plaatdikte. Bij berekening met Kirchhoff waren de resultaten van de dunne en de dikke plaat zelfs exact gelijk.

De spanning is in dit project aanzienlijk uitgebreider aan bod gekomen dan de momenten. Hier zou nog verder onderzoek naar gedaan kunnen worden door op andere manieren dezelfde situaties te berekenen, zoals met 3D software of een handmatige numerieke vergelijking, zodat de onderbouwing van de conclusie sterker kan worden, of indien nodig verworpen kan worden. De momenten kunnen ten eerste tot het niveau van de spanning worden uitgebreid, indien mogelijk met behulp van een analytische oplossing, anders numeriek.

Inhoudsopgave

Voorwoord	ii
Samenvatting	iii
1 Introductie	1
1.1 Achtergrond	1
1.2 Onderzoeksvragen	1
1.3 Aanpak	1
1.4 Opbouw	2
2 Analytische berekening	3
2.1 3D model van Timoshenko	3
2.2 Scharnierende oplegging	4
2.3 Verdeelde belasting	4
3 Eindige-elementenmethode	6
3.1 Theorie	6
3.2 Analyse	7
3.2.1 Spanningen	7
3.2.2 Momenten	8
3.2.3 Mesh	8
4 Validatie	10
4.1 Eindige-elementenmethode	10
4.2 Spanningen	10
4.3 Momenten	11
5 Resultaten	13
5.1 Spanningen	13
5.1.1 Plaatdikte	13
5.1.2 Poisson Ratio	14
5.1.3 Straal	15
5.1.4 Oplegging	16
5.1.5 Verdeelde belasting over een klein oppervlakte	17

5.2	Momenten	18
6	Conclusie en aanbevelingen	19
6.1	Conclusie	19
6.2	Aanbevelingen voor eventueel vervolgonderzoek	20
	Bibliografie	21
A	Resultatentabel spanningen	22
B	Resultatentabel momenten	23
C	Python code	24
D	Ongebruikte resultaten	33

Hoofdstuk 1

Introductie

1.1 Achtergrond

De te onderzoeken casus betreft een plaat met een puntlast in het midden. De spanning die deze puntlast veroorzaakt moet opgenomen worden door de doorsnede van de plaat, maar omdat de oppervlakte van de puntlast oneindig klein is, veroorzaakt dit oneindig grote spanningen en daarmee ook oneindig grote momenten. Dit is een singulariteit. In de praktijk kan de spanning niet oneindig zijn. In plaats daarvan zal het materiaal (of staal van de wapening, als het om gewapend beton gaat) de vloeigrens bereiken, waardoor het wel uitrekt, maar niet meer spanning opneemt, waardoor de spanning toch over een oppervlakte verdeeld wordt. Bovendien voldoet het lineair elastische model niet rondom een puntlast. Een andere methode moet dus gebruikt worden om de spanning te berekenen.

Om de juiste spanningen onder de puntlast te kunnen benaderen, geldt er een vuistregel dat hiervoor een elementgrootte genomen moet worden die twee keer de plaatdikte is (Hendriks en Hoogenboom, 2021). Hierbij gaat de elementgrootte over de eindige-elementenmethode. Het idee van deze methode is dat de plaat verdeeld wordt (als raster) in kleinere elementen die met elkaar verbonden zijn en die apart berekend worden (Blaauwendraad, 2010). Deze vuistregel roept wel vragen op. Zo is het onzeker of dit ook voldoet bij ongebruikelijke afmetingen en of de momenten in de plaat kloppen. Beide deze kwesties zijn cruciaal voor constructeurs. Staalconstructeurs hebben de spanningsverdeling nodig, ook van ongebruikelijke afmetingen, zodat ze het criterium van Von Mises (Mises, 1913) kunnen toepassen. Ongebruikelijke afmetingen zijn hier dikke platen, dus met de afmeting dikte:straal gelijk aan of groter dan 1:5 (Blaauwendraad, 2010). Betonconstructeurs moeten de momentverdeling weten om de benodigde wapening te kunnen ontwerpen.

Indien deze vuistregel een correcte benadering is, zal de betrouwbaarheid van berekeningen waarbij de vuistregel gebruikt wordt toenemen. Hiermee kan veel tijd bespaard worden, omdat een gedetailleerde 3D berekening niet telkens gemaakt hoeft te worden.

1.2 Onderzoeksvragen

Is de regel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” nauwkeurig voor spanningen bij ongebruikelijke plaatdikten? Zo niet, wat is een betere regel?

Is de regel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” nauwkeurig voor momenten?

1.3 Aanpak

Eerst werd de vuistregel onderzocht. Hiervoor is de eindige-elementenanalyse (een analyse met gebruik van de eindige-elementmethode) worden uitgevoerd op een ronde plaat met behulp van de software SCIA Engineer

(studentenversie). Voordat dit gedaan werd, is eerst de eindige-elementenmethode onderzocht worden, zodat begrepen kon worden wat de software doet en hoe de resultaten te interpreteren. Hiermee is de piekspanning en het piekmoment geplot als functie van de elementgrootte.

Vervolgens, om de vuistregel voor de spanning te kunnen controleren, kwam een analytisch 3D model van Timoshenko (Timoshenko en Woinowsky-Krieger, 1959) aan bod, waarmee de werkelijke spanning kan worden bepaald. Hiervan is eerst de theorie onderzocht en kennis opgebouwd om het vervolgens uit te voeren op dezelfde situaties.

Ten slotte kon de juiste elementgrootte afgelezen worden uit de eerder gemaakte grafieken met de gevonden spanningen. Hiermee kon uiteindelijk de onderzoeksvraag beantwoord worden. De situaties die aan bod komen zijn de volgende, uitgevoerd met staal:

- Dunne plaat, verhouding = 1:5
Dikte = 100 [mm]
Straal = 2 [m]
- Dikke plaat: verhouding = 1:20
Dikte = 400 [mm]
Straal = 2 [m]

1.4 Opbouw

De opbouw van het rapport zal grotendeels overeen komen met de stappen van de aanpak. Hoofdstuk 2 gaat onder andere over het model van Timoshenko, waarvan de theorie wordt beschreven. Hier worden ook andere gebruikte analytische berekeningen uitgelegd en toegelicht. In Hoofdstuk 3 zal de eindige-elementenmethode beschreven worden die dan ook wordt gebruikt door SCIA Engineer met daarbij ook hoe. In Hoofdstuk 4 wordt het toegepaste model gecontroleerd. Alles wat gevonden en berekend is wordt samengebracht in Hoofdstuk 5: Resultaten. Hierin wordt de juiste elementgrootte afgelezen uit de grafieken waarbij, met behulp van Timoshenko, de maximale spanning zal worden geplot tegenover de elementgrootte. In Hoofdstuk 6 staat de conclusie met het antwoord op de onderzoeksvragen. Ten slotte worden in datzelfde hoofdstuk ook aanbevelingen gedaan voor een eventueel vervolgonderzoek.

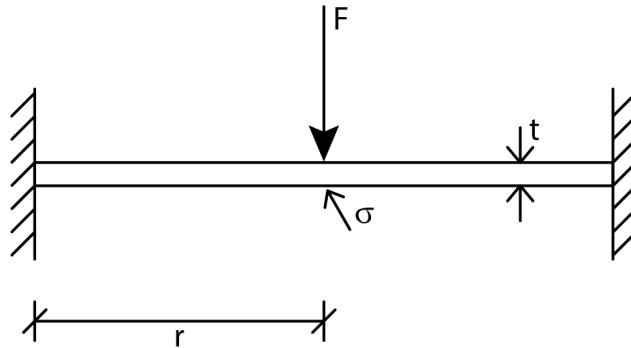
Hoofdstuk 2

Analytische berekening

In dit hoofdstuk worden de analytische berekeningen uitgelegd die zijn gebruikt om de resultaten mee te vergelijken. De uitvoering van alle berekeningen is te vinden in Bijlage C, Python code.

2.1 3D model van Timoshenko

Het 3D model van Timoshenko kijkt naar de situatie van een ronde plaat, rondom volledig ingeklemd. In het midden staat een puntlast, zoals te zien in Figuur 2.1.



Figuur 2.1: Ronde plaat met puntlast in het midden

Vergelijking 2.1 voor de spanning rond de puntlast is afgeleid uit elastiteitsleer, niet uit plaattheorie.

$$\sigma_{max} = \frac{F}{t^2}(1 + v) \left(0,52 + 0,485 * \ln \frac{r}{t} \right) \quad (2.1)$$

Waarbij:

σ_{max} = de spanning in het midden, onder de puntlast [N/mm²],

F = de grootte van de puntlast [N],

t = de dikte van de plaat [mm],

r = de straal van de plaat [mm],

v = Poisson ratio,

(Timoshenko en Woinowsky-Krieger, 1959).

Deze spanning is de maximale spanning aan de onderkant van de plaat. Dit is de meest relevante spanning voor het Von Mises criterium. Dit criterium is het meest gebruikt om te bepalen of staal gaat vloeien en gaat

vooral over het verschil tussen de spanningen in verschillende richtingen (Mises, 1913). Aan de bovenzijde van de plaat, onder de puntlast, zijn de spanningen in beide richtingen zeer groot, maar niet significant zoveel van elkaar verschillend. De onderzijde daarentegen heeft dan wel kleinere spanningen, maar een aanzienlijk groter verschil ertussen (Timoshenko en Woinowsky-Krieger, 1959). Door dit relatief grote verschil tussen de spanningsrichtingen is de onderkant maatgevend om de vloeigrens te bepalen bij een puntlast.

2.2 Scharnierende oplegging

Om de situatie te controleren waarbij de plaat niet ingeklemd is, maar scharnierend opgelegd (dit is van toepassing voor Paragraaf 5.1.4), moet de analytische uitkomst van Timoshenko omgerekend worden. Hiervoor kan de momentenlijn gebruikt worden. Het verschil in de momentenlijn tussen een ingeklemde en een scharnierende oplegging, is namelijk een verschuiving in de momentenlijn. Deze verschuiving is direct door te rekenen naar de spanning en dus naar het verschil in spanning bij een andere oplegging. Het moment dat bij de oplegging gevonden wordt, kan worden gevonden met Vergelijking 2.2. Deze kan echter niet gebruikt worden om direct de spanningen in het midden te berekenen, omdat deze daar ook naar oneindig gaat. Dit is direct te zien in de $\frac{r}{c}$, want c is in het midden 0, waardoor de breuk naar oneindig gaat.

$$m_{rr} = \frac{F}{4\pi} \left((1+v) \ln \frac{r}{c} - 1 \right) \quad (2.2)$$

Waarbij:

m_{rr} = het moment in radiale richting op het punt c van het midden af [Nmm²].

F = de grootte van de puntlast [N],

r = de straal van de plaat [mm],

c = de afstand tussen het middelpunt en de plek waar het moment berekend wordt [mm],

v = Poisson ratio,

(Blaauwendraad, 2003).

Vervolgens kan dit omgerekend worden naar spanning met behulp van Vergelijking 2.3.

$$\sigma_{xx} = \frac{m_{xx}}{\frac{1}{6}t^2} \quad (2.3)$$

Waarbij:

σ_{xx} = spanning in dezelfde richting als het moment [N/mm²],

t = de dikte van de plaat [mm].

De absolute spanning die hier uitkomt voor $c = r$, kan opgeteld worden bij de spanning die uit Vergelijking 2.1 komt. Dit zou dan de correcte spanning moeten zijn in het midden van de plaat bij een scharnierende oplegging.

2.3 Verdeelde belasting

Het model moet ook gevalideerd worden, om te bewijzen dat het model in de software overeenkomt met een analytische oplossing en daarom geschikt is om met elkaar te vergelijken. Hierom wordt ook een analytische berekening van een ingeklemde ronde plaat met een verdeelde belasting over de gehele plaat gemaakt. Het moment op een punt c [mm] van het midden af, kan worden bepaald met Vergelijking 2.4.

$$m_{rr} = \frac{1}{16}pr^2 \left((1+v) - (3+v)\frac{c^2}{r^2} \right) \quad (2.4)$$

Waarbij:

m_{rr} = het moment in radiale richting op het punt c van het midden af $[\text{Nmm}^2]$.

p = de grootte van de verdeelde belasting $[\text{N}/\text{mm}^2]$,

r = de straal van de plaat $[\text{mm}]$,

c = de afstand tussen het middelpunt en de plek waar het moment berekend wordt $[\text{mm}]$,

v = Poisson ratio,

(Blaauwendraad, 2003).

Deze kan vervolgens weer met Vergelijking 2.3 naar spanning worden omgerekend.

Hoofdstuk 3

Eindige-elementenmethode

In dit hoofdstuk wordt een ronde plaat berekend met de elementenmethode. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de software SCIA Engineer 22.0 (studentenversie).

3.1 Theorie

De eindige-elementenmethode is een methode die wordt gebruikt bij verscheidene software programma's voor berekeningen aan constructies. Het is van belang te begrijpen hoe deze uitgevoerd wordt, voordat uitkomsten zonder twijfel worden aangenomen.

Om te begrijpen hoe deze methode werkt, zal het eerst beschreven worden voor een 1D model. Vervolgens wordt uitgelegd wat hieraan complexer wordt bij 2D en ten slotte wordt 3D ook kort toegelicht. In essentie zoekt deze methode een verband tussen krachtvector $\mathbf{f}$ en de verplaatsingsvector $\mathbf{u}$ door middel van de stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$. Dit wordt voor elk element bepaald.

Een 1D element bestaat uit een lijn, met twee punten aan de uiteindes, x_1 en x_2 . Dit zijn de twee knopen. Beide ondergaan een verplaatsing, weergegeven in vector $\mathbf{u}$. Dit kan worden beschreven met zogeheten 'shapefunctions', Vergelijking 3.1.

$$u_c(x) = n_1(x)u_1 + n_2(x)u_2 \quad (3.1)$$

Hierbij gelden de volgende randvoorwaarden:

$$n_1(x_1) = 1, \quad n_2(x_1) = 0, \quad n_1(x_2) = 0, \quad n_2(x_2) = 1$$

Dus 1 op het eigen punt, 0 op het andere punt. Deze kunnen vervolgens worden weergegeven met matrix $\mathbf{N}$. Dit geeft Vergelijking 3.2.

$$u_c(x) = \mathbf{N} * \mathbf{u} \quad (3.2)$$

Vervolgens wordt de kinematische vergelijking gebruikt voor de rek, ϵ , wat de afgeleide is van de verplaatsing u naar x . Dit geeft Vergelijkingen 3.3 en 3.4

$$b = \frac{dn}{dx} \quad (3.3)$$

$$\epsilon = \mathbf{B} * \mathbf{u} \quad (3.4)$$

Deze $\mathbf{B}$ is de matrix bestaande uit $b_1(x)$ en $b_2(x)$. Hierna komt de constitutieve vergelijking aan bod, die de spanning en rek met elkaar in verband brengt door de E-modulus. Ten slotte wordt de evenwichtsvergelijking gebruikt om dit met de externe arbeid te combineren ($W_{\text{intern}} = W_{\text{extern}}$). De E-modulus en het oppervlakte A vormen samen de matrix $\mathbf{D}$. Dit geeft uiteindelijk, omgeschreven, Vergelijking 3.5

$$\mathbf{f} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx * \mathbf{u} \quad (3.5)$$

Hier is duidelijk de stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$ in te zien, namelijk de integraal in Vergelijking 3.5.

Voor 2D is het principe van de methode hetzelfde, alleen dan voor een vierkant element met vier knopen, in plaats van een lijn met twee. Nu zal er dubbele integratie uitgevoerd moeten worden omdat het om twee richtingen gaat. Verder zal de matrix een 8x8 worden, in plaats van de kleine 2x2 matrix van 1D. Deze matrix is symmetrisch. Voor de $\mathbf{D}$ matrix zal ook de Poisson ratio moeten worden meegenomen (het gaat immers nu over twee richtingen). Uiteindelijk is dit gebaseerd op perfecte vierkante elementen, wat niet altijd ook daadwerkelijk het geval is. Om dit naar een vierkant model terug te rekenen, moeten er coördinaat transformaties uitgevoerd worden met behulp van de Jacobiaan matrix. Ten slotte is het ook mogelijk om andere elementen te nemen dan vierknopige. Een daarvan is een element met drie knopen, een driehoek, wat wel minder exact is dan een vierknopig element. Een andere optie is een element met acht knopen, die nog wel een vierhoek is, maar ook halve de kanten een knoop heeft, zorgt juist voor een betere benadering van de doorbuiging.

3D wordt niet zo uitgebreid als 2D gebruikt in dit project, maar bestaat wel en wordt gebruikt bij 3D software. Vanzelfsprekend wordt deze methode in dat geval enkel complexer, met grotere matrices en driedubbele integraties.

(Hendriks en Hoogenboom, 2021)

Uit het aantal stappen wat voor elk element genomen moet worden valt op te merken hoe lang een simulatie zou kunnen duren. Hoe kleiner de elementen genomen worden, hoe meer elementen, hoe meer berekeningen, hoe langer het duurt. Hierom zit er praktisch een limiet aan hoe klein de elementen genomen kunnen worden, met betrekking tot de beschikbare tijd.

3.2 Analyse

De eindige-elementenanalyse zelf is uitgevoerd door SCIA Engineer. Hierbij wordt voor elke berekening de elementgrootte en/of plaatdikte of andere parameters aangepast en de uitkomsten genoteerd. De aangepaste parameters zijn plaatdikte, straal, Poisson ratio, oplegging en verdeling van belasting.

3.2.1 Spanningen

Om de vuistregel te controleren wordt de situatie in een 2D model in SCIA Engineer gecreëerd, met het materiaal staal (S355), al geeft dat geen verschil in de spanningsverdeling. De berekening is uitgevoerd met behulp van Kirchhoff en Mindlin. Per situatie worden zes punten berekend: 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 en 3,0. Dit is het aantal keer de plaatdikte dat voor elementgrootte genomen is. De analytische waarde is berekend met Timoshenko, zie Paragraaf 2.1. De parameters die zijn genomen voor de berekening van beide is te zien in Tabel 3.1.

Naast deze basis situatie zijn er ook andere berekeningen gemaakt. Hierbij is telkens een van de parameters veranderd. Hierbij is gevarieerd in plaatdikte, straal van de plaat, Poisson' ratio, verdeelde belasting en oplegging. Deze waarden zijn ook te vinden in Tabel 3.1 Dit is gedaan om zeker te weten dat het daadwerkelijk de elementgrootte en plaatdikte is wat van invloed is en niet andere parameters, zodat eventueel bewijs sterker

Tabel 3.1: Parameters model

	basiswaarde	gevarieerde waarde	eenheid
Straal van de plaat	2	10	m
Poisson ratio	0,3	0,35 en 0,2	
Dikte dunne (1:20) plaat	100	500	mm
Dikte dikke (1:5) plaat	400	2000	mm
Belasting dunne (1:20) plaat	1.500	20.000	kN
Belasting dikke (1:5) plaat	20.000	300.000	kN
Oplegging	volledig ingeklemd	volledig scharnierend	

wordt.

Hierin is te zien dat de belasting van de dikkere plaat groter is dan van de dunne. Dit is bewust gedaan voor hogere significante resultaten. SCIA Engineer geeft spanningen met een enkele decimaal, waardoor hogere waarden meer significante cijfers hebben, wat zorgt voor betrouwbaardere resultaten. Bij de dunne plaat zijn lagere belastingen voldoende om dezelfde hoeveelheid significante cijfers te behalen.

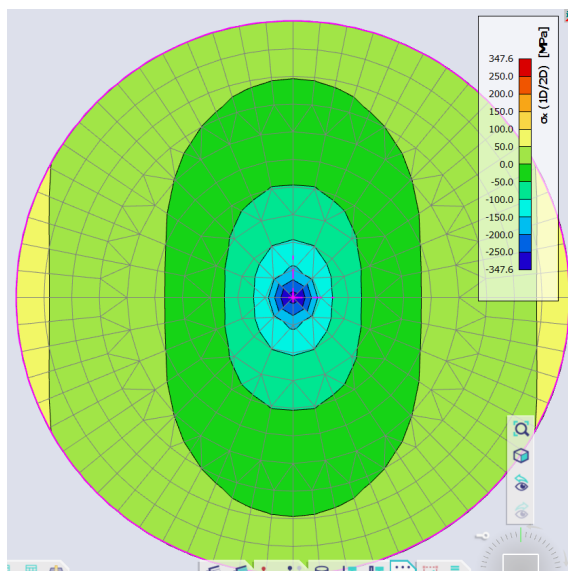
3.2.2 Momenten

Voor de momenten is enkel gevarieerd in plaatdikte. Hierbij is alleen de basissituatie berekend, met wel een cruciaal verschil: de belasting blijft hetzelfde voor zowel de dunne als de dikke plaat. Bij deze situatie is niet alleen gekeken naar de elementgrootte in verhouding tot de plaatdikte, maar de elementgrootte is ook onafhankelijk berekend, waarna de uitkomsten van de dunne en dikke plaat met elkaar zijn vergeleken. De resultaten hiervan zijn te vinden in Hoofdstuk 5.

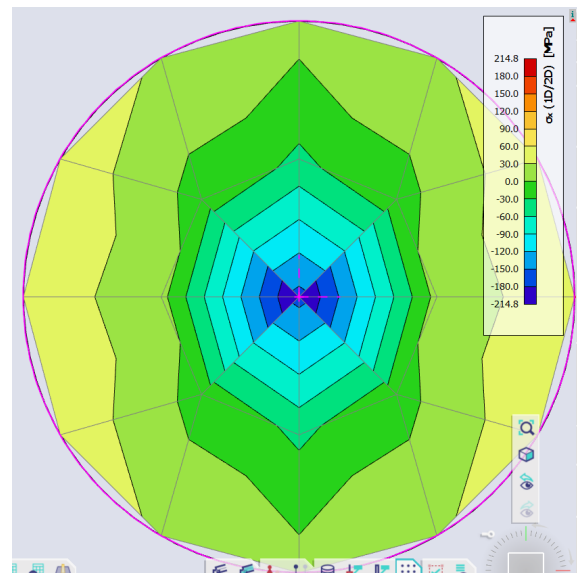
In eerste instantie zijn de momenten op een andere manier bepaald, wat terug te vinden is in Bijlage D. Deze uitkomsten waren vergeleken met een oplossing van Timoshenko, die niet bleek te voldoen als vergelijking. Dit deel was dus niet bruikbaar en inconsequent met het onderzoek naar spanningen en om die reden niet toegevoegd aan het hoofddocument.

3.2.3 Mesh

De indeling van de elementen, de mesh, is te zien in Figuur 3.1. Hier zijn de elementen weergegeven met grijze lijnen en de spanningsverloop met een kleurschaal. De numerieke uitkomsten zijn hierbij niet van belang, de vorm wel. Aan de elementen is te zien dat het vier- en driehoeken zijn, om het goed te laten passen op de plaat. Bij de spanning is te zien dat deze niet radiaal symmetrisch is. Dit is omdat het hier om de spanning in x-richting gaat. Zou de spanning in y-richting bekeken worden, zou de afbeelding 90 graden gedraaid zijn. Uiteindelijk geeft dat voor dit rapport geen verschil, aangezien enkel de maximale spanning benodigd is, wat in beide gevallen gelijk is.



(a) Bij een elementgrootte van 0,2 [m]



(b) Bij een elementgrootte van 1,0 [m]

Figuur 3.1: Mesh met spanningsverdeling

In de linker afbeelding, Figuur 3.1a, is een nette verdeling te zien in de elementen, waardoor de spanningsverdeling, op het midden na, vloeiend verloopt. Hierbij is gebruik gemaakt van een elementgrootte van 200

[mm] en een plaat van 400 [mm]. De elementgrootte is dus de helft van de plaatdikte. Hierbij zijn dus veel elementen om de spanning juist te kunnen benaderen.

Bij grotere elementen betekent dit dat er ook minder elementen gebruikt worden. In Figuur 3.1b is te zien dat er slechts 20 elementen worden gebruikt om de volledige plaat te beschrijven. Het gevolg is dat de spanning over de gehele plaat grillig verloopt. Deze plaat heeft een verhouding plaatdikte: straal = 1:5 en plaatdikte: elementgrootte = 1:2,5. Hier is te zien dat de elementgrootte dus slechts de helft is van de straal, wat weinig elementen tot gevolg heeft. Hierom worden berekeningen met grotere elementgrootte dan 3 keer de plaatdikte niet toegevoegd, aangezien dit zo weinig accuraat kan zijn.

De resultaten zijn weergegeven en beschreven in Hoofdstuk 5, met precieze getallen in bijlage A, spanningen, en B, momenten.

Hoofdstuk 4

Validatie

De eindige-elementenanalyse uitgevoerd in SCIA Engineer wordt in dit hoofdstuk gecontroleerd.

4.1 Eindige-elementenmethode

Bij een berekening in SCIA Engineer zijn veel opties hoe de uitkomst bepaald kan worden. In deze paragraaf gaat voor het belangrijkste deel daarvan gevalideerd worden, of de keuzes die gemaakt zijn, gepast zijn.

Ten eerste de keuze tussen Kirchhoff en Mindlin. Kirchhoff wordt gewoonlijk gebruikt bij dunne platen en Mindlin bij dikke platen, omdat bij de laatste afschuiving wordt meegenomen (Haukaas, 2019). Deze zijn beide meegenomen in het onderzoek, juist omdat deze de nadruk heeft op het verschil of de overeenkomsten tussen dikke en dunne platen.

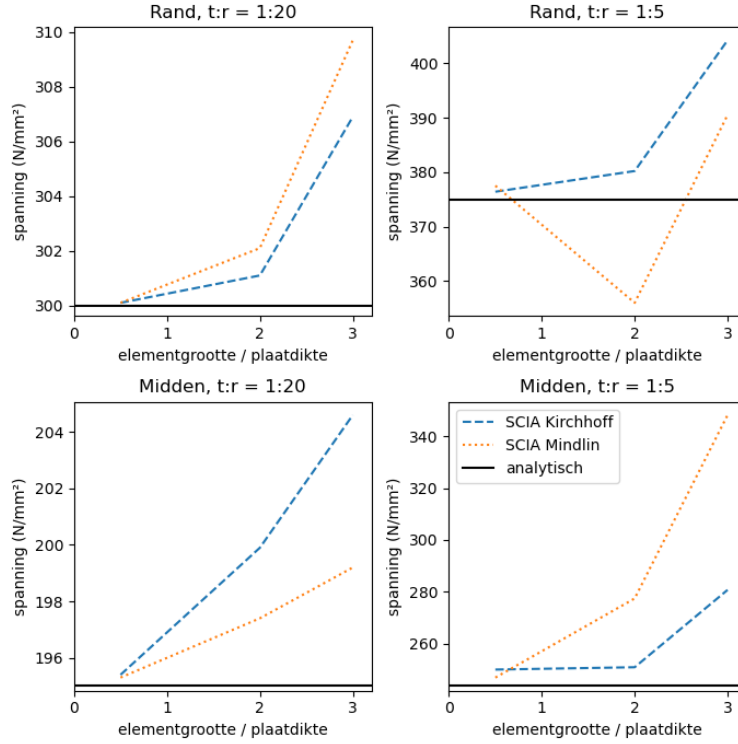
De afschuifvervorming kan daarnaast nog apart worden aangevinkt of deze verwaarloosd mag worden. Verschillende berekeningen zijn gedaan met en zonder afschuifvervorming. Tussen deze resultaten zat geen verschil in spanning of moment en dus is de afschuifvervorming verwaarloosd in de uiteindelijke analyse

De spanning en de momenten zoals SCIA deze geeft is in x of y richting. Hierdoor is, zoals te zien in Figuur 3.1, de spanning dus ook niet symmetrisch over de straal. Hetzelfde is het geval voor de momentverdeling. Dit zou voor de maximale spanning of het moment in het midden geen verschil moeten geven. Om te controleren of dit daadwerkelijk zo is, zou het programma op een radiaal assensetel gezet moeten worden. Deze functie lijkt echter in de nieuwste versie van SCIA Engineer niet meer beschikbaar. Hierom is de spanning genomen berekend in x-richting.

Verder is de zakking gecontroleerd. Deze kwam uit tussen de 1,0 en 10,0 [mm], behalve bij de situatie met scharnierende oplegging, daar werd het iets hoger dan 15,0 [mm]. Een rek van 15 [mm] op een straal van 2 [m] is 0,75%, wat voldoet.

4.2 Spanningen

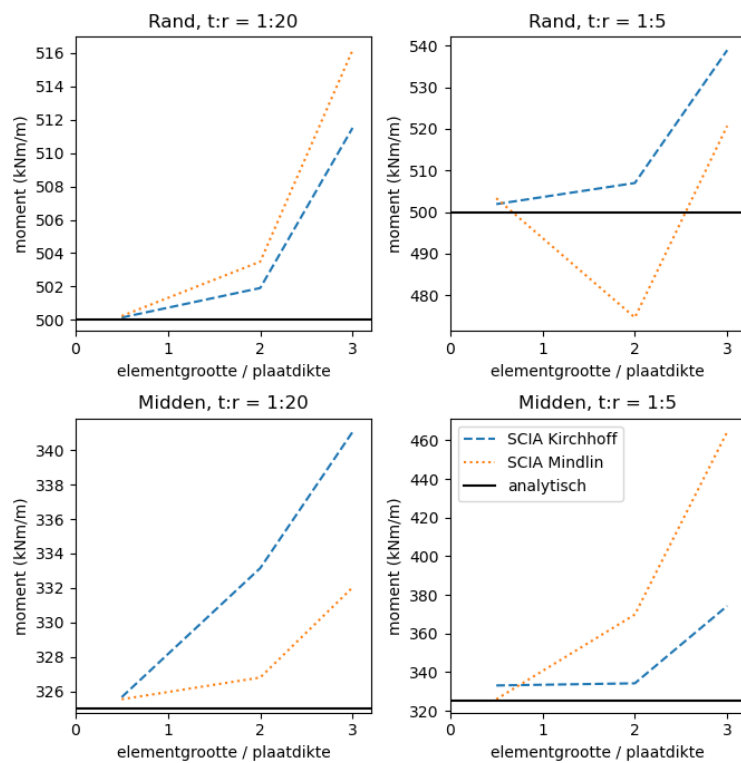
Ten slotte is het model ook gecontroleerd met behulp van een analytische oplossing. De analytische oplossing, de zwarte lijn in Figuur 4.1, is berekend zoals beschreven in Paragraaf 2.3. De blauwe gestreepte lijnen zijn de uitkomsten uit SCIA, berekend met Kirchhoff, de oranje gestippelde met Mindlin. Voor elke lijn zijn drie punten bepaald, bij 0,5, 2, en 3. Hierin is duidelijk zichtbaar dat, als de elementgrootte naar 0 gaat, de uitkomsten van SCIA naar de analytische oplossing naderen. Een punt is echter duidelijk afwijkend, namelijk in de grafiek rechtsboven, bij een elementgrootte gelijk aan twee keer de plaatdikte, berekend met SCIA Mindlin. Dit zou aan de exacte indeling van de elementen kunnen liggen.



Figuur 4.1: Spanning in een ronde stalen plaat met een verdeelde belasting

4.3 Momenten

Deze zelfde controle is ook uitgevoerd voor de momenten. Hierbij is gebruik gemaakt van de berekening uit Paragraaf 2.3. Deze oplossing is verderom de zwarte horizontale lijn. De blauwe gestreepte lijnen zijn de uitkomsten uit SCIA, berekend met Kirchhoff, de oranje gestippelde met Mindlin. Zie Figuur 4.2. Hierin is hetzelfde afwijkende punt te zien in de rechtsboven grafiek. Dit zou er op kunnen wijzen dat er bij dat specifieke punt een anormaliteit in de elementverdeling zit. Verder naderen de lijnen naar de analytische oplossing, waar uit te concluderen is dat het model voldoet.



Figuur 4.2: Momenten in een ronde stalen plaat met een verdeelde belasting

Hoofdstuk 5

Resultaten

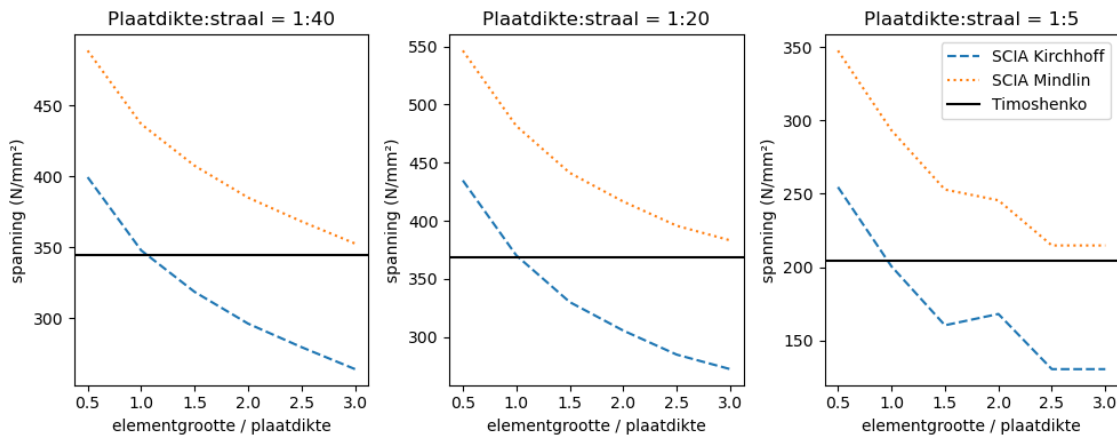
In dit hoofdstuk zijn de resultaten verzameld en weergegeven. De piekspanning wordt geplot als functie van de elementgrootte en vergeleken met berekende waarden volgens een 3D model van Timoshenko. Alle resultaten zijn te vinden in tabellen in Bijlage A en B en de gebruikte Python code in Bijlage C.

5.1 Spanningen

Alle grafieken in de volgende paragrafen zijn hetzelfde opgebouwd. Tenzij anders aangegeven zijn er 3 lijnen, een voor de SCIA Engineer berekening met Kirchhoff (blauw gestreept), een voor Mindlin (oranje, gestippeld) en de analytische oplossing van Timoshenko (zwart, doorgetrokken). Op de x-as staat de verhouding van elementgrootte / plaatdikte. Dit houdt in, kijkend naar de vuistregel, dat bij 2,0 het punt zou moeten zijn waarbij elementgrootte gelijk is aan 2 keer de plaatdikte. Hier zouden de oplossingen van SCIA en Timoshenko moeten snijden. Hoe aan deze oplossingen is gekomen staat beschreven in Paragraaf 3.2.1.

5.1.1 Plaatdikte

Voor het eerste onderzoek zijn drie ronde platen gemoduleerd. Deze hebben verschillende krachten en plaatdiktes. De grafieken die hieruit kwamen zijn te zien in Figuur 5.1. De straal is 2 [m] en de Poisson ratio 0,3. De plaat van de linker grafiek is 50 [mm] dik met een puntlast in het midden van 300 [kN], de middelste 100 [mm] met 1.500 [kN] en de rechter is 400 [mm] met 20.000 [kN]. Hierbij is te zien dat de lijn van SCIA



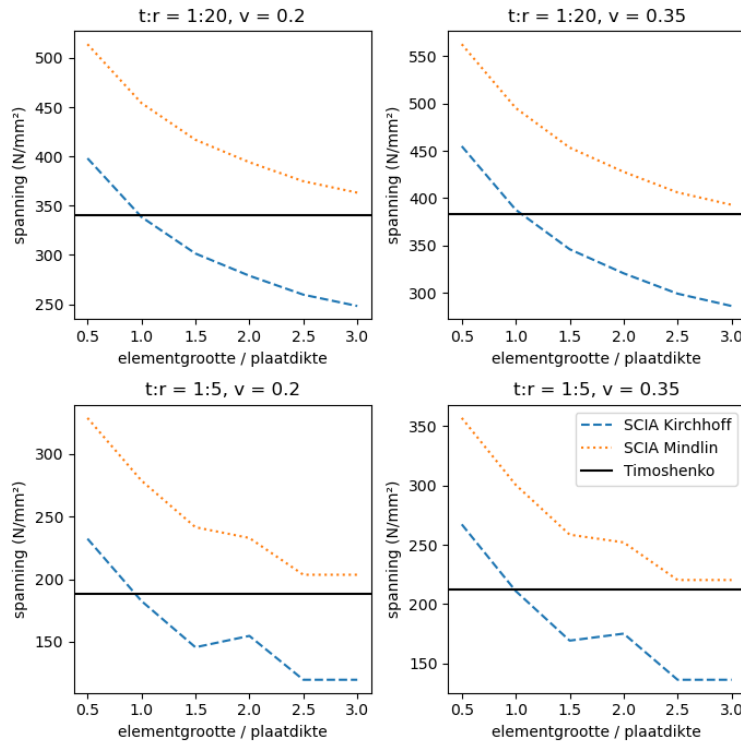
Figuur 5.1: Spanning in een ronde stalen plaat

Kirchhoff, de lijn van Timoshenko snijdt bij ongeveer een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. Bij de 1:5 plaat is te zien dat het niet meer een continue dalend verloop heeft. In deze situatie wordt de elementgrootte erg groot in vergelijking tot de straal. Een elementgrootte van drie keer de plaatdikte, waarbij de straal vijf keer de plaatdikte is, geeft slechts 20 elementen. De uitkomsten zijn dus ook afhankelijk van de meshverdeling. De gevolgen van deze mesh afhankelijk van hoe de elementen precies zijn verdeeld is te zien doordat 2,0 een hogere uitkomst geeft bij Kirchhoff dan 1,5, terwijl het andersom verwacht zou zijn. Ook daarna verloopt de grafiek bijzonder. In dit geval heeft de mesh bij zowel 2,5 al 3,0 keer de plaatdikte slechts 20 elementen. Hierdoor is te zien dat de uitkomst dan ook gelijk is. De mesh is te zien in Paragraaf 3.2.3.

5.1.2 Poisson Ratio

De Poisson ratio is bij de volgende casus gevarieerd. Bij de linker grafieken is deze 0,2, bij de rechter grafieken 0,35. Zie Figuur 5.2.

Hierbij is te zien dat de lijn van SCIA berekend met behulp van Kirchhoff nog altijd de lijn van Timoshenko snijdt bij ongeveer een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. De grafieken met verschillende Poisson ratio's zijn bijna identiek, op de precieze waarden na.

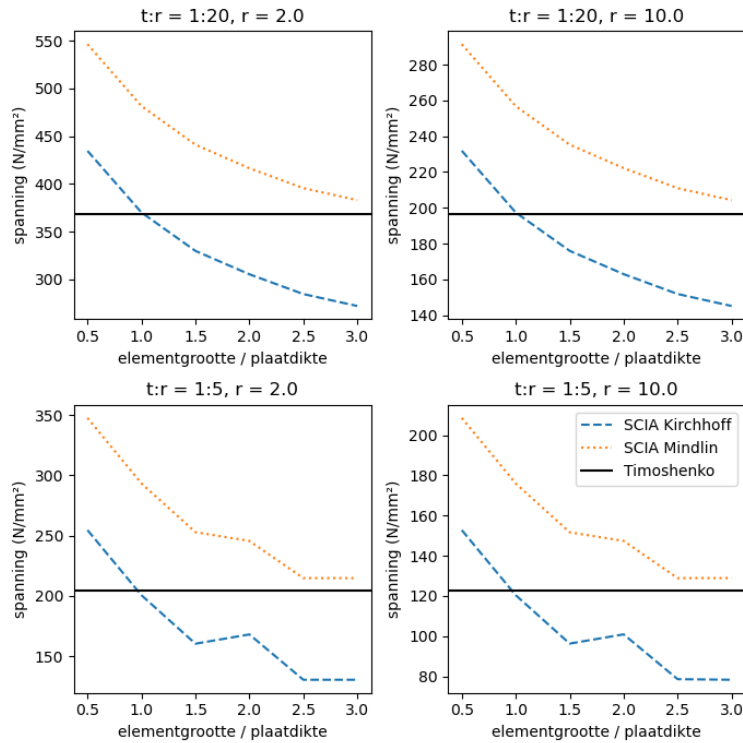


Figuur 5.2: Spanning in een ronde stalen plaat met dikte-straalverhouding t:r en variërende Poisson ratio v

5.1.3 Straal

Vervolgens is de straal veranderd. De Poisson ratio is weer overal 0,3. Naast de platen van vorige grafieken met straal van 2 [m], worden nu ook 2 platen met 10 [m] straal bekeken, met dezelfde verhouding. Bij de rechtsboven grafiek is een plaat met een plaatdikte van 500 [mm] en een kracht van 20.000 [kN], de rechtsonder grafiek heeft plaatdikte van 2 [m] en een kracht van 300.000 [kN]. Zie Figuur 5.3.

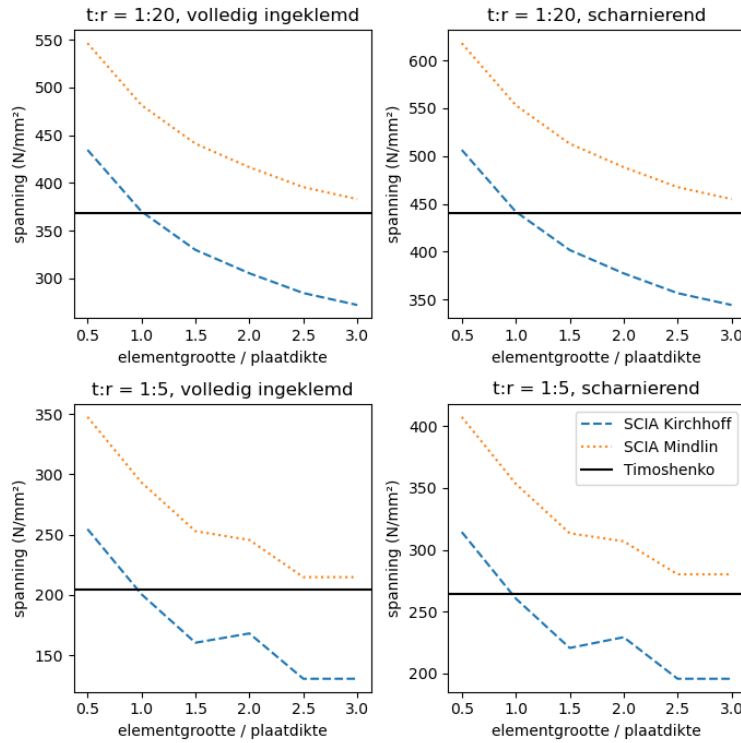
Hierbij is te zien dat de lijn van SCIA Kirchhoff de lijn van Timoshenko nog altijd snijdt rond een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. De grafieken links en rechts zijn wederom zo goed als identiek op de exacte spanningswaarde na.



Figuur 5.3: Spanning in een ronde stalen plaat met dikte-straalverhouding $t:r$ en variërende straal r

5.1.4 Oplegging

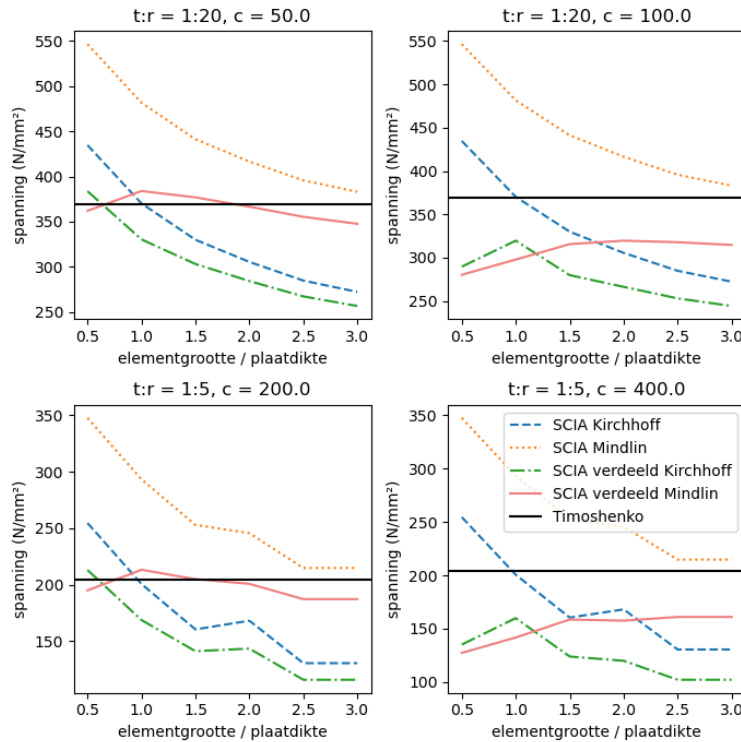
In plaats van de oplegging alle rotaties en verplaatsingen te laten beperken, worden bij deze situatie de rotaties niet beperkt, maar wordt de plaat aan de rand volledig scharnierend opgelegd. Dit zorgt ervoor dat de berekening van Timoshenko niet meer direct te gebruiken is. Hierom is deze omgerekend, zoals beschreven in Paragraaf 2.2. Deze komt erop neer dat de absolute spanning aan de rand bij de situatie van de volledig ingeklemde plaat wordt opgeteld bij de (absolute) spanning in het midden volgens Timoshenko. Hiermee is het model in SCIA vergeleken en zoals te zien in Figuur 5.4, snijdt de grafiek wederom bij een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte.



Figuur 5.4: Spanning in een ronde stalen plaat met dikte-straalverhouding $t:r$ en variërende oplegging

5.1.5 Verdeelde belasting over een klein oppervlakte

Hierbij zijn dezelfde situaties uitgevoerd, maar nu met een verdeelde belasting over een klein oppervlakte. Bij elke situatie is weer de straal 2 [m], Poisson ratio 0,3 en een volledige ingeklemde oplegging. Bij de linker grafieken is voor de straal van het ronde oppervlak van de verdeelde belasting, c , de helft van de plaatdikte genomen. Bij de rechter grafieken is de straal van de verdeelde belasting gelijk aan de plaatdikte. Hierbij is de grootte van de belasting zorgvuldig berekend zodat het nog steeds een resulterende kracht oplevert gelijk aan de puntlast. Zie Figuur 5.5. Hierin zijn de blauwe gestreepte, oranje gestipte en zwarte doorgetrokken lijn dezelfde als bij alle grafieken hierboven. De lichtrode doorgetrokken en groene gestreepte lijnen zijn voor de verdeelde belasting. Hier is te zien dat bij de verdeelde belasting van de helft van de plaatdikte, de lijnen van Kirchhoff naar elkaar naderen bij grotere elementgrootte en hetzelfde gebeurt bij Mindlin. Wanneer de belasting over een groter oppervlakte is verdeeld, is dit minder duidelijk.



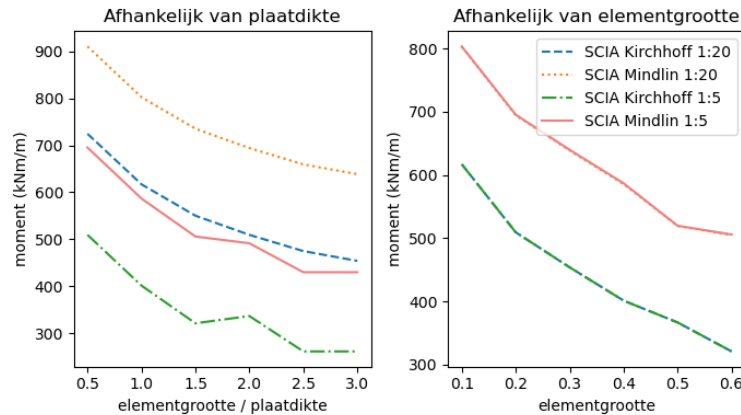
Figuur 5.5: Spanning in een ronde stalen plaat met dikte-straalverhouding $t:r$ en een belasting verdeeld over een oppervlakte met straal c

Opvallend is dat de lichtrode doorgetrokken lijn, van SCIA berekend met Mindlin, sterk overeenkomt met de zwarte lijn van Timoshenko, voor het geval dat de verdeelde belasting verdeeld is over een oppervlakte met een straal van een halve keer de plaatdikte. Bij een grotere straal komt deze te laag uit. De groene lijn, van SCIA berekend met Kirchhoff, bij deze grotere straal heeft bij 0,5 een afwijkend punt. Verwacht zou zijn, aan de hand van de andere punten, dat deze hoger zou zijn dan het punt op 1,0, echter is deze juist lager. Hier zou het mee kunnen spelen dat op dit punt, bij een straal gelijk aan de plaatdikte maar een elementgrootte 0,5 keer de plaatdikte, de straal dus groter is dan de elementgrootte, wat logischerwijs een ander resultaat geeft voor onder de belasting.

5.2 Momenten

Het onderzoek naar momenten is beknopt gebleven. Met SCIA is onderzoek gedaan naar de invloed van de elementgrootte op basis van de plaatgrootte, zoals beschreven in Paragraaf 3.2.2. Zie Figuur 5.6. Bij het linkerfiguur zijn alle lijnen zichtbaar, met een zelfde verloop als eerder gezien bij de grafieken van de spanningen. Opvallend is dat Kirchhoff van de dunne plaat sterk overeenkomt met Mindlin van de dikke plaat.

Bij het rechterfiguur hiervan lijkt het alsof er maar twee lijnen zijn. Wanneer de grafiek beter bestudeerd wordt, wordt duidelijk dat dit is omdat de lijnen overlappen. De blauwe gestreepte lijn van de dunne plaat berekend met Kirchhoff, komt vrijwel exact overeen met de groene gestreepstipte lijn van de dikke plaat, tevens berekend met Kirchhoff. Bij de andere twee lijnen, beide berekend met Mindlin, is ditzelfde het geval. De precieze getallen zijn te vinden in Bijlage B.



Figuur 5.6: Moment in een ronde stalen plaat met dikte-straalverhouding $t:r$ en variërende x -as

Hoofdstuk 6

Conclusie en aanbevelingen

6.1 Conclusie

De eerste onderzoeksvraag, zoals beschreven in de introductie, Paragraaf 1.2, luidt als volgt:

Is de regel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” nauwkeurig voor spanningen bij ongebruikelijke plaatdikten? Zo niet, wat is een betere regel?

Uit de resultaten volgt dat deze regel *niet* nauwkeurig is voor spanningen bij ongebruikelijke plaatdikten. Sterker nog, dit blijkt niet alleen voor ongebruikelijke plaatdikte, namelijk een dikke plaat, maar ook voor de gebruikelijke, dunne plaat. Hier zou het verschil tussen de eindige-elementenberekening in SCIA Engineer met behulp van Kirchhoff en Mindlin van belang kunnen zijn. Mindlin is verwacht het juiste resultaat te geven voor de dikke plaat en Kirchhoff voor de dunne plaat. Echter geven deze verschillende oplossingen voor elke situatie hetzelfde verschil, met Kirchhoff dichter bij de analytische oplossing van Timoshenko. Het is niet duidelijk of de oorzaak hiervan ligt bij de bepaling met de eindige-elementenmethode of bij Timoshenko.

Een alternatieve regel zou zijn “elementgrootte is gelijk aan plaatdikte,” indien berekend met behulp van Kirchhoff. Mindlin komt te hoog uit en zou pas bij onrealistisch grote elementen het juiste antwoord geven. Deze grootte is irreëel omdat de plaat dan verdeeld zou worden in minder dan 20 elementen, waardoor de errormarge van het resultaat hoog wordt. Deze regel zou wel eerst goed verder onderzocht moeten worden voor meer onderbouwing voordat deze als waarheid aangenomen kan worden.

Andere parameters die invloed hebben op de spanning in een plaat, blijken geen invloed te hebben op het verband met de elementgrootte.

- Bij variatie in Poisson ratio en straal komt er dezelfde conclusie uit, namelijk bij een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. Deze hebben beide dus geen invloed op dit verband.
- De oplegging geeft ook geen verschil in ditzelfde verband. Met Timoshenko correct omgerekend naar de situatie met een scharnierende oplegging, in plaats van de inklemming die bij de andere situaties werd gebruikt, blijft het snijpunt bij een elementgrootte gelijk aan de plaatdikte. Dit maakt dus ook geen significant verschil.
- De verdeelde belasting over een oppervlakte met een kleine straal geeft wel een ander resultaat. Echter is zichtbaar dat deze uitkomst naar de uitkomst van de puntlast nadert, indien de elementgrootte groter wordt. Ook wordt het verschil in uitkomsten tussen de verdeelde belasting en puntlast kleiner bij het verkleinen van de straal waar de belasting over verdeeld is. Dit toont dus aan dat, indien de straal zeer klein genomen wordt, het resultaat naar de puntlast nadert en dus geen invloed veroorzaakt in dit onderzochte verband.

De tweede onderzoeksvraag is de volgende:

Is de regel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” nauwkeurig voor momenten? Zo niet, wat is een betere regel?

Uit de resultaten in dit project volgt dat deze regel *niet* nauwkeurig is voor momenten. In dit geval is dit niet geconcludeerd door vergelijking met een analytische oplossing, maar omdat het maximale moment niet afhankelijk blijkt van de plaatdikte. Indien de resultaten geplot werden met op de x-as de elementgrootte tussen 0,1 en 0,6 [m], waren de uitkomsten van de verschillende diktes, berekend met Kirchhoff, exact gelijk. De uitkomsten van Mindlin hadden minimale afwijkingen.

Wat een correcte regel zou kunnen zijn is hieruit niet te concluderen, aangezien er niet is vergeleken met een alternatieve berekening. Wel is te zeggen dat de regel ergens anders op gebaseerd moet worden, omdat er voor momentberekening dus geen verband is tussen elementgrootte en plaatdikte. De elementgrootte zou in verband kunnen staan met andere parameter(s). Het verschil tussen de dikke en dunne plaat zou het verschil tussen de uitkomst van Kirchhoff en Mindlin moeten zijn, volgens de theorie.

6.2 Aanbevelingen voor eventueel vervolgonderzoek

Voor de spanningen kunnen de resultaten vergeleken worden met een andere software, even uitgebreid als met SCIA Engineer in dit project is gedaan. Dit zou gedaan kunnen worden met bijvoorbeeld Abaqus of Axis VM. Met deze software zou ook beter naar de situatie in 3D gekeken kunnen worden.

Daarnaast kan het waardevol zijn een alternatieve analytische oplossing vinden. Het zou kunnen dat hier verder niks voor bestaat of in ieder geval niets dat gelijkwaardig is aan de betrouwbaarheid van Timoshenko, laat staan beter. Daar logischerwijs op volgend zou ook de oplossing van Timoshenko gecontroleerd worden. In dit geval zou een numerieke oplossing kunnen worden genomen, of met behulp van een 3D programma zoals Abaqus. Hierdoor zullen de conclusies eventueel versterkt kunnen worden.

Een analytische oplossing is ook nodig voor momenten te vinden. Of dit al bestaat is wederom nog een vraag. Het nadert immers nog altijd naar oneindig onder de puntlast. Anders zou numeriek voor een vergelijking gezocht kunnen worden. Met behulp van de spanningsverdeling zou dit ook bepaald kunnen worden. Hier moet dan wel rekening mee gehouden worden dat de spanningsverloop onder de puntlast niet meer lineair verloopt. Deze spanningsverloop is bijvoorbeeld te bepalen met behulp van software programma's als Abaqus of Ansys.

Alle parameters die van invloed kunnen zijn op het moment, moeten gevarieerd worden, minstens net zo uitgebreid als bij de spanningen. Dit zijn in ieder geval de Poisson ratio, de straal, de oplegging en eventueel de belasting verdeeld over een klein oppervlakte. Dit geheel is wederom te vergelijken met een ander software programma. Hiernaast zou ook naar de situatie in 3D gekeken worden.

Bibliografie

- Blaauwendraad, J. (2003). *Theory of Elasticity Ct 5141, Direct Methods*. http://phoogenboom.nl/b16_direct_methods.pdf
- Blaauwendraad, J. (2010). *Plates and FEM: Surprises and Pitfalls*. <https://phoogenboom.nl/boek%5C%20blaauwendraad.pdf>
- Haukaas, T. (2019). *Kirchhoff and Mindlin Plates*. <https://civil-terje.sites.olt.ubc.ca/files/2019/06/Kirchhoff-and-Mindlin-Plates.pdf>
- Hendriks, M., & Hoogenboom, P. (2021). *CIE4180 Plates and Slabs, Master's course TU Delft 2021/2022*. https://phoogenboom.nl/b14_schedule.html
- Mises, R. v. (1913). Mechanik der festen Körper im plastisch- deformablen Zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913, 582–592. <http://eudml.org/doc/58894>
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*.

Bijlage A

Resultatentabel spanningen

Alle parameters gebruikt bij de berekening staan aan de linkerhelft van de dikgedrukte verticale lijn, alleen Timoshenko is hiervan berekend. De resultaten zoals ze met SCIA Engineer zijn berekend (in N/mm²) staan aan de rechterkant van de dikgedrukte lijn.

Tabel A.1: Resultaten spanning SCIA

spanningen									elementgrootte / plaatdikte					
inklemming	t [mm]	r [m]	verhouding	F [kN]	v	c [mm]	methode	analytisch	0,5	1	1,5	2	2,5	3
volledig	50	2	1: 40	300	0,3	0	kirchhoff	344,68	399,4	347,8	318,5	296,1	279,5	264,0
volledig	50	2	1: 40	300	0,3	0	mindlin	344,68	488,7	436,9	407,5	385,0	368,2	352,6
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	0	kirchhoff	368,95	434,7	370,2	330,0	305,5	284,8	272,3
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	0	mindlin	368,95	546,4	481,6	441,2	416,5	395,7	383,1
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	0	kirchhoff	204,28	254,6	200,6	160,4	168,1	130,5	130,5
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	0	mindlin	204,28	347,6	293,3	252,9	245,6	214,8	214,8
volledig	100	2	1: 20	1500	0,2	0	kirchhoff	340,57	398,1	338,5	301,4	278,8	259,6	248,1
volledig	100	2	1: 20	1500	0,2	0	mindlin	340,57	514,0	454,2	416,9	394,1	374,8	363,2
volledig	400	2	1: 5	20000	0,2	0	kirchhoff	188,57	232,3	182,5	145,5	154,6	119,5	119,5
volledig	400	2	1: 5	20000	0,2	0	mindlin	188,57	328,9	278,8	241,5	232,9	203,5	203,5
volledig	100	2	1: 20	1500	0,35	0	kirchhoff	383,14	454,9	387,8	346,1	320,7	299,2	286,2
volledig	100	2	1: 20	1500	0,35	0	mindlin	383,14	562,6	495,2	453,4	427,8	406,1	393,0
volledig	400	2	1: 5	20000	0,35	0	kirchhoff	212,14	267,3	211,1	169,3	175,2	136,3	136,3
volledig	400	2	1: 5	20000	0,35	0	mindlin	212,14	357,0	300,6	258,6	252,1	220,4	220,4
volledig	500	10	1: 20	20000	0,3	0	kirchhoff	196,77	231,9	197,4	176,0	163,0	151,9	145,2
volledig	500	10	1: 20	20000	0,3	0	mindlin	196,77	291,4	256,8	235,3	222,2	211,0	204,3
volledig	2000	10	1: 5	300000	0,3	0	kirchhoff	122,57	152,8	120,4	96,3	100,9	78,6	78,3
volledig	2000	10	1: 5	300000	0,3	0	mindlin	122,57	208,6	176,0	151,7	147,4	128,9	128,9
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	50	kirchhoff	368,95	383,7	330,4	303,2	284,3	267,3	256,7
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	50	mindlin	368,95	362,0	383,9	376,9	366,6	355,4	347,6
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	100	kirchhoff	368,95	289,6	319,6	279,8	266,3	253,0	244,2
volledig	100	2	1: 20	1500	0,3	100	mindlin	368,95	280,2	297,8	315,6	319,6	317,8	314,7
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	200	kirchhoff	204,28	213,0	168,7	141,1	143,4	115,8	115,8
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	200	mindlin	204,28	194,9	213,2	204,9	200,7	187,2	187,2
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	400	kirchhoff	204,28	135,1	159,9	123,9	119,9	102,1	102,1
volledig	400	2	1: 5	20000	0,3	400	mindlin	204,28	127,3	141,7	158,6	157,5	161,0	161,0
scharnier	100	2	1: 20	1500	0,3	0	kirchhoff	440,56	506,4	441,8	401,7	377,3	356,6	344,2
scharnier	100	2	1: 20	1500	0,3	0	mindlin	440,56	618,0	553,2	512,9	488,3	467,5	454,9
scharnier	400	2	1: 5	20000	0,3	0	kirchhoff	263,96	314,4	260,7	220,7	229,4	195,8	195,8
scharnier	400	2	1: 5	20000	0,3	0	mindlin	263,96	407,4	353,4	313,4	306,9	280,2	280,2
volledig	100	2	1: 20	1	0,3	2000	kirchhoff	300,00	300,1			301,1		306,9
volledig	100	2	1: 20	1	0,3	2000	mindlin	300,00	300,1			302,1		309,7
volledig	400	2	1: 5	20	0,3	2000	kirchhoff	375,00	376,4			380,2		404,2
volledig	400	2	1: 5	20	0,3	2000	mindlin	375,00	377,5			356,0		390,5
volledig	100	2	1: 20	1	0,3	2000	kirchhoff	195,00	195,4			199,9		204,6
volledig	100	2	1: 20	1	0,3	2000	mindlin	195,00	195,3			197,4		199,2
volledig	400	2	1: 5	20	0,3	2000	kirchhoff	243,75	249,9			250,8		280,7
volledig	400	2	1: 5	20	0,3	2000	mindlin	243,75	246,8			277,4		348,3

bij support

midden

Bijlage B

Resultatentabel momenten

Alle parameters die gevarieerd zijn en gebruikt bij de berekening staan aan de linkerhelft van de dikgedrukte verticale lijn. De rest van de parameters zijn de normale zoals beschreven in Paragraaf 3.2. De resultaten zoals ze met SCIA Engineer zijn berekend (in kNm/m) staan aan de rechterkant van de dikgedrukte lijn.

Tabel B.1: Resultaten momenten SCIA

inklemming	t [mm]	verhouding	F [kN]	methode	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6
					0,5	1	1,5	2	2,5	3	4		
volledig	100	1: 20	1500	kirchhoff	724,56	616,96	550,04	509,24	474,65	453,81	401,17	366,67	320,88
volledig	100	1: 20	1500	mindlin	910,61	802,65	735,33	694,24	659,44	638,54	585,42	519,23	504,8
					0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,2
						0,5		1		1,5	2	2,5	3
volledig	400	1: 5	1500	kirchhoff	616,69	509,24	453,81	401,17	366,67	320,88	336,29	260,9	260,9
volledig	400	1: 5	1500	mindlin	803,11	695,24	639,65	586,68	519,64	505,74	491,28	429,65	429,65
					elementgrootte / plaatdikte								
			q [N/mm2]		analytisch	0,5	2	3					
volledig	100	1: 20	1	kirchhoff	500,00	500.14	501.91	511.51	support				
volledig	100	1: 20	1	mindlin	500,00	500.23	503.49	516.17					
volledig	400	1: 5	1	kirchhoff	500,00	501.91	506.98	538.92					
volledig	400	1: 5	1	mindlin	500,00	503.32	474.63	520.71					
volledig	100	1: 20	1	kirchhoff	325,00	325.66	333.15	341.06	midden				
volledig	100	1: 20	1	mindlin	325,00	325.54	326.8	332.03					
volledig	400	1: 5	1	kirchhoff	325,00	333.15	334.26	374.32					
volledig	400	1: 5	1	mindlin	325,00	326.01	369.87	464.41					

Bijlage C

Python code

De python code is te vinden op de volgende pagina in verband met het pdf format. De output is er niet in bijgevoegd, dit zijn namelijk de grafieken die te vinden zijn in Hoofdstuk 5.

```
In [ ]: 1 %matplotlib inline
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import math
```

Analytische berekeningen

```
In [ ]: 1 def Timospanning(kracht, dikte, straal, poisson):
2     return kracht / (dikte**2) * (1 + poisson) * (0.52 + 0.458 * math.log(straal/dikte))
3
4 def moment(p, t, a, r, v):
5     return 1 / 16 * p * a**2 * ((1+v) - (3+v) * r**2 / (a**2))
6
7 def analytisch(p, t, a, r, v):
8     moment = 1 / 16 * p * a**2 * ((1+v) - (3+v) * r**2 / (a**2))
9     return moment / (1/6 * t**2)
10
11 def randspanning(F, t, a, r, v):
12     moment = F / (4 * math.pi) * ((1 + v) * math.log(a / r) - 1)
13     return moment / (1/6 * t**2)
```

FEM grafieken

Spanningen

```
In [ ]: 1 sk = [[399.4, 347.8, 318.5, 296.1, 279.5, 264.0],
2         [434.7, 370.2, 330.0, 305.5, 284.8, 272.3],
3         [254.6, 200.6, 160.4, 168.1, 130.5, 130.5]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
4 sm = [[488.7, 436.9, 407.5, 385.0, 368.2, 352.6],
5        [546.4, 481.6, 441.2, 416.5, 395.7, 383.1],
6        [347.6, 293.3, 252.9, 245.6, 214.8, 214.8]] # spanningen uit SCIA met Mindlin
7 F = [3 * 10**5, 15 * 10**5, 20 * 10**6] # N
8 r = 2 * 10**3 # mm
9 v = 0.3 # -
10
11 e = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
12 t = [40, 20, 5] # plaatdikte tov straal
13 p = [r/t[i] for i in range(len(t))]
14 correct = [Timospanning(F[i], r / t[i], r, v)
15            for i in range(len(t))] # werkelijke spanning bij plaatdikte
16 print('kracht = ', F, '[N]')
17 print('straal = ', r/1000, '[m]')
18 print('poissons ratio = ', v,)
19 print('plaatdiktes = ', p)
20
21 plt.figure(figsize=(10,4))
22 for j in range(len(t)):
23     plt.subplot(1, 3, j+1)
24     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
25     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
26     plt.axhline(y = correct[j], color = 'black', label = 'Timoshenko')
27     plt.title(f'Plaatdikte:straal = 1:{t[j]}')
28     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
29     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
30
31 plt.legend(loc='upper right')
32 plt.tight_layout()
```

Afwisseling in Poisson' ration

```
In [ ]: 1 sk = [[398.1, 338.5, 301.4, 278.8, 259.6, 248.1],
2         [454.9, 387.8, 346.1, 320.7, 299.2, 286.2],
3         [232.3, 182.5, 145.5, 154.6, 119.5, 119.5],
4         [267.3, 211.1, 169.3, 175.2, 136.3, 136.3]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
5 sm = [[514.0, 454.2, 416.9, 394.1, 374.8, 363.2],
6         [562.6, 495.2, 453.4, 427.8, 406.1, 393.0],
7         [328.9, 278.8, 241.5, 232.9, 203.5, 203.5],
8         [357.0, 300.6, 258.6, 252.1, 220.4, 220.4]] # spanningen uit SCIA met Mindlin
9 F = [15 * 10**5, 15 * 10**5, 20 * 10**6, 20 * 10**6] # N
10 r = 2 * 10**3 # mm
11 v = [0.2, 0.35, 0.2, 0.35] # -
12
13 e = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
14 t = [20, 20, 5, 5] # plaatdikte
15 p = [r/t[i] for i in range(len(t))]
16 correct = [Timospanning(F[i], r / t[i], r, v[i])
17             for i in range(len(t))] # werkelijke spanning bij plaatdikte
18 print('kracht = ', [F[i]/1000 for i in range(len(F))], '[kN]')
19 print('straal = r = ', r/1000, '[m]')
20 print('poissons ratio = v = ', v)
21 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
22
23 plt.figure(figsize=(7,7))
24 for j in range(len(t)):
25     plt.subplot(2, 2, j+1)
26     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
27     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
28     plt.axhline(y = correct[j], color = 'black', label = 'Timoshenko')
29     plt.title(f't:r = 1:{t[j]}, v = {v[j]}')
30     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
31     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
32
33 plt.legend(loc='upper right')
34 plt.tight_layout()
```

Afwisseling in straal van de plaat

```
In [ ]: 1 sk = [[434.7, 370.2, 330.0, 305.5, 284.8, 272.3],
2         [231.9, 197.4, 176.0, 163.0, 151.9, 145.2],
3         [254.6, 200.6, 160.4, 168.1, 130.5, 130.5],
4         [152.8, 120.4, 96.3, 100.9, 78.6, 78.3]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
5 sm = [[546.4, 481.6, 441.2, 416.5, 395.7, 383.1],
6         [291.4, 256.8, 235.3, 222.2, 211.0, 204.3],
7         [347.6, 293.3, 252.9, 245.6, 214.8, 214.8],
8         [208.6, 176.0, 151.7, 147.4, 128.9, 128.9]] # spanningen uit SCIA met Mindlin
9 F = [15 * 10**5, 20 * 10**6, 20 * 10**6, 30 * 10**7] # N
10 r = [2 * 10**3, 10 * 10**3, 2 * 10**3, 10 * 10**3] # mm
11 v = 0.3 # -
12
13 e = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
14 t = [20, 20, 5, 5] # plaatdikte
15 p = [r[i]/t[i] for i in range(len(t))]
16 correct = [Timospanning(F[i], r[i] / t[i], r[i], v)
17             for i in range(len(t))] # werkelijke spanning bij plaatdikte
18 print('kracht = ', [F[i]/1000 for i in range(len(F))], '[kN]')
19 print('straal = r = ', [r[i]/1000 for i in range(len(r))], '[m]')
20 print('poissons ratio = ', v)
21 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
22
23 plt.figure(figsize=(7,7))
24 for j in range(len(t)):
25     plt.subplot(2, 2, j+1)
26     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
27     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
28     plt.axhline(y = correct[j], color = 'black', label = 'Timoshenko')
29     plt.title(f't:r = 1:{t[j]}, r = {r[j]/1000}')
30     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
31     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
32
33 plt.legend(loc='upper right')
34 plt.tight_layout()
```

Belasting verdeeld over klein oppervlakte

```
In [ ]: 1 sk = [[434.7, 370.2, 330.0, 305.5, 284.8, 272.3],
2         [434.7, 370.2, 330.0, 305.5, 284.8, 272.3],
3         [254.6, 200.6, 160.4, 168.1, 130.5, 130.5], # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
4         [254.6, 200.6, 160.4, 168.1, 130.5, 130.5]] # en een puntlast
5 sm = [[546.4, 481.6, 441.2, 416.5, 395.7, 383.1],
6         [546.4, 481.6, 441.2, 416.5, 395.7, 383.1],
7         [347.6, 293.3, 252.9, 245.6, 214.8, 214.8], # spanningen uit SCIA met Mindlin
8         [347.6, 293.3, 252.9, 245.6, 214.8, 214.8]] # en een puntlast
9 ck = [[383.7, 330.4, 303.2, 284.3, 267.3, 256.7],
10        [289.6, 319.6, 279.8, 266.3, 253.0, 244.2],
11        [213.0, 168.7, 141.1, 143.4, 115.8, 115.8], # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
12        [135.1, 159.9, 123.9, 119.9, 102.1, 102.1]] # en verdeelde belasting
13 cm = [[362.0, 383.9, 376.9, 366.6, 355.4, 347.6],
14        [280.2, 297.8, 315.6, 319.6, 317.8, 314.7],
15        [194.9, 213.2, 204.9, 200.7, 187.2, 187.2], # spanningen uit SCIA met Mindlin
16        [127.3, 141.7, 158.6, 157.5, 161.0, 161.0]] # en verdeelde belasting
17 F = [15 * 10**5, 15 * 10**5, 20 * 10**6, 20 * 10**6] # N
18 r = 2 * 10**3 # mm
19 v = 0.3 # -
20 c = [0.5, 1.0, 0.5, 1.0]
21
22 e = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
23 t = [20, 20, 5, 5] # plaatdikte
24 p = [r/t[i] for i in range(len(t))]
25 correct = [Timospanning(F[i], r / t[i], r, v)
26             for i in range(len(t))] # werkelijke spanning bij plaatdikte
27 q = [round((F[i] / ((p[i] * c[i])**2 * math.pi))*1000, 2)
28       for i in range(len(c))] # q-last met gelijke resulterende kracht als de puntlast
29 print('kracht = ', [F[i]/1000 for i in range(len(F))], '[kN]')
30 print('straal = r = ', r/1000, '[m]')
31 print('poissons ratio = ', v)
32 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
33 print('belastingstraal = c = ', [p[i] * c[i] for i in range(len(p))])
34 print('q-last = ', q, '[kN/m]')
35
36 plt.figure(figsize=(7,7))
37 for j in range(len(t)):
38     plt.subplot(2, 2, j+1)
39     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
40     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
41     plt.plot(e, ck[j], label='SCIA verdeeld Kirchhoff', linestyle = "-.")
42     plt.plot(e, cm[j], label='SCIA verdeeld Mindlin', color="lightcoral", linestyle="-")
43     plt.axhline(y = correct[j], color = 'black', label = 'Timoshenko')
44     plt.title(f't:r = 1:{t[j]}, c = {p[j] * c[j]}')
45     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
46     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
47
48 plt.legend(loc='upper right')
49 plt.tight_layout()
```

Niet ingeklemd

```
In [ ]: 1 sk = [[434.7, 370.2, 330.0, 305.5, 284.8, 272.3],
2         [506.4, 441.8, 401.7, 377.3, 356.6, 344.2],
3         [254.6, 200.6, 160.4, 168.1, 130.5, 130.5],
4         [314.4, 260.7, 220.7, 229.4, 195.8, 195.8]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff
5 sm = [[546.4, 481.6, 441.2, 416.5, 395.7, 383.1],
6         [618.0, 553.2, 512.9, 488.3, 467.5, 454.9],
7         [347.6, 293.3, 252.9, 245.6, 214.8, 214.8],
8         [407.4, 353.4, 313.4, 306.9, 280.2, 280.2]] # spanningen uit SCIA met Mindlin
9
10 F = [15 * 10**5, 15 * 10**5, 20 * 10**6, 20 * 10**6] # N
11 r = 2 * 10**3 # mm
12 v = 0.3 # -
13 c = ['volledig ingeklemd', 'scharnierend', 'volledig ingeklemd', 'scharnierend']
14
15 e = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
16 t = [20, 20, 5, 5] # plaatdikte
17 p = [r/t[i] for i in range(len(t))]
18 correct1 = [Timospanning(F[i], r / t[i], r, v)
19             for i in range(len(t))] # werkelijke spanning volgens Timoshenko
20 correct2 = [randspanning(F[i], r / t[i], r, r, v)
21             for i in range(len(t))] # spanning aan de rand van de ingeklemde plaat
22 correct = [correct1[i] - correct2[i]
23            if (i % 2) != 0 else correct1[i]
24            for i in range(len(t))] # werkelijke spanning
25 print('kracht = ', [F[i]/1000 for i in range(len(F))], '[kN]')
26 print('straal = r = ', r/1000, '[m]')
27 print('poissons ratio = ', v)
28 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
29
30 plt.figure(figsize=(7,7))
31 for j in range(len(t)):
32     plt.subplot(2, 2, j+1)
33     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
34     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
35     plt.axhline(y = correct[j], color = 'black', label = 'Timoshenko')
36     plt.title(f't:r = 1:{t[j]}, {c[j]}')
37     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
38     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
39
40 plt.legend(loc='upper right')
41 plt.tight_layout()
```

Validatie

```
In [ ]: 1 # midden
2 mk = [[195.4, 199.9, 204.6],
3        [249.9, 250.8, 280.7]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff, midden v/d plaat
4 mm = [[195.3, 197.4, 199.2],
5        [246.8, 277.4, 348.3]] # spanningen uit SCIA met Mindlin, midden v/d plaat
6 #support
7 sk = [[300.1, 301.1, 306.9],
8        [376.4, 380.2, 404.2]] # spanningen uit SCIA met Kirchhoff, rand v/d plaat
9 sm = [[300.1, 302.1, 309.7],
10       [377.5, 356.0, 390.5]] # spanningen uit SCIA met Mindlin, rand v/d plaat
11 r = 2 * 10**3 # mm
12 v = 0.3 # -
13 q = [1, 20]
14
15 e = [0.5, 2.0, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
16 t = [20, 5]
17 p = [r/t[i] for i in range(len(t))] # plaatdikte
18 print('kracht = ', q, '[kN/m]')
19 print('straal = ', r/1000, '[m]')
20 print('poissons ratio = ', v,)
21 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
22
23 plt.figure(figsize=(7,7))
24 ax = plt.subplot(2, 2, 1)
25 ax.set_xlim(0, 3.2)
26
27 for j in range(len(t)):
28     x = np.arange(-r, r, 10)
29     new = [e[i] * t[j] for i in range(len(e))]
30     plt.subplot(2, 2, j+1, sharex = ax)
31     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
32     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
33     plt.axhline(y = - analytisch(q[j], p[j], r, r, v),
34                 color = 'black', label = 'analytisch')
35     plt.title(f'Support, t:r = 1:{t[j]}')
36     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
37     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
38
39
40 for j in range(len(t)):
41     plt.subplot(2, 2, j+3, sharex = ax)
42     plt.plot(e, mk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
43     plt.plot(e, mm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
44     plt.axhline(y = analytisch(q[j], p[j], r, 0, v),
45                 color = 'black', label = 'analytisch')
46     plt.title(f'Midden, t:r = 1:{t[j]}')
47     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
48     plt.ylabel('spanning (N/mm\u00b2)')
49
50 plt.legend(loc='upper left')
51 plt.tight_layout()
```

Momenten

```
In [ ]: 1 wk = [[724.56, 616.96, 550.04, 509.24, 474.65, 453.81],
2         [616.96, 509.24, 453.81, 401.17, 366.67, 320.88]] # Moment SCIA Kirchhoff, 1:20
3 wm = [[910.61, 802.65, 735.33, 694.24, 659.44, 638.54],
4         [802.65, 694.24, 638.54, 585.42, 519.23, 504.80]] # Moment SCIA Mindlin, 1:20
5 ck = [[509.24, 401.17, 320.88, 336.29, 260.90, 260.90],
6         [616.69, 509.24, 453.81, 401.17, 366.67, 320.88]] # Moment SCIA Kirchhoff, 1:5
7 cm = [[695.24, 586.68, 505.74, 491.28, 429.65, 429.65],
8         [803.11, 695.24, 639.65, 586.68, 519.64, 505.74]] # Moment SCIA Mindlin, 1:5
9 F = [15 * 10**5, 15 * 10**5, 20 * 10**6, 20 * 10**6] # N
10 r = 2 * 10**3 # mm
11 v = 0.3 # -
12
13 e = [[0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0], # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
14       [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6]] # elementgrootte in [m]
15 t = [20, 20, 5, 5] # plaatdikte
16 print('kracht = ', [F[i]/1000 for i in range(len(F))], '[kN]')
17 print('straal = r = ', r/1000, '[m]')
18 print('poissons ratio = ', v)
19 print('q-last = ', q, '[N/mm\u00b2]')
20
21 plt.figure(figsize=(7,4))
22 for j in range(2):
23     plt.subplot(1, 2, j+1)
24     plt.plot(e[j], wk[j], label='SCIA Kirchhoff 1:20', linestyle="--")
25     plt.plot(e[j], wm[j], label='SCIA Mindlin 1:20', linestyle=":")
26     plt.plot(e[j], ck[j], label='SCIA Kirchhoff 1:5', linestyle = "-.")
27     plt.plot(e[j], cm[j], label='SCIA Mindlin 1:5', color="lightcoral", linestyle="-")
28     if j == 0:
29         plt.title(f'Afhankelijk van plaatdikte')
30         plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
31     else:
32         plt.title(f'Afhankelijk van elementgrootte')
33         plt.xlabel('elementgrootte')
34     plt.ylabel('moment (kNm/m)')
35
36 plt.legend(loc='upper right')
37 plt.tight_layout()
```

Validatie

```
In [ ]: 1 # midden
2 mk = [[325.66, 333.15, 341.06],
3        [333.15, 334.26, 374.32]] # Moment SCIA met Kirchhoff, midden v/d plaat
4 mm = [[325.54, 326.8, 332.03],
5        [326.01, 369.87, 464.41]] # Moment SCIA met Mindlin, midden v/d plaat
6 #support
7 sk = [[500.14, 501.91, 511.51],
8        [501.91, 506.98, 538.92]] # Moment SCIA met Kirchhoff, rand v/d plaat
9 sm = [[500.23, 503.49, 516.17],
10       [503.32, 474.63, 520.71]] # Moment SCIA met Mindlin, rand v/d plaat
11 r = 2 * 10**3 # mm
12 v = 0.3 # -
13 q = 1
14
15 e = [0.5, 2.0, 3.0] # hoeveel keer de plaatdikte de elementgrootte is
16 t = [20, 5]
17 p = [r/t[i] for i in range(len(t))] # plaatdikte
18 print('kracht = ', q, '[kN/m]')
19 print('straal = ', r/1000, '[m]')
20 print('poissons ratio = ', v,)
21 print('plaatdiktes = t = ', p, '[mm]')
22
23 plt.figure(figsize=(7,7))
24 for j in range(len(t)):
25     plt.subplot(2, 2, j+1, sharex = ax)
26     plt.plot(e, sk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
27     plt.plot(e, sm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
28     plt.axhline(y = - moment(q, t[j], r, r, v)/1000,
29                 color = 'black', label = 'analytisch')
30     plt.title(f'Support, t:r = 1:{t[j]}')
31     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
32     plt.ylabel('moment (kNm/m)')
33
34
35 for j in range(len(t)):
36     plt.subplot(2, 2, j+3, sharex = ax)
37     plt.plot(e, mk[j], label='SCIA Kirchhoff', linestyle="--")
38     plt.plot(e, mm[j], label='SCIA Mindlin', linestyle=":")
39     plt.axhline(y = moment(q, t[j], r, 0, v)/1000,
40                 color = 'black', label = 'analytisch')
41     plt.title(f'Midden, t:r = 1:{t[j]}')
42     plt.xlabel('elementgrootte / plaatdikte')
43     plt.ylabel('moment (kNm/m)')
44
45 plt.legend(loc='upper left')
46 plt.tight_layout()
```

```
In [ ]: 1
```

Bijlage D

Ongebruikte resultaten

Dit gedeelte is niet in het verslag zelf toegevoegd omdat het moment zoals berekend door Timoshenko, gebaseerd is op de plaattheorie, en niet op elasticiteitsleer, zoals bij de eerder gebruikte theorie in Paragraaf 2.1.

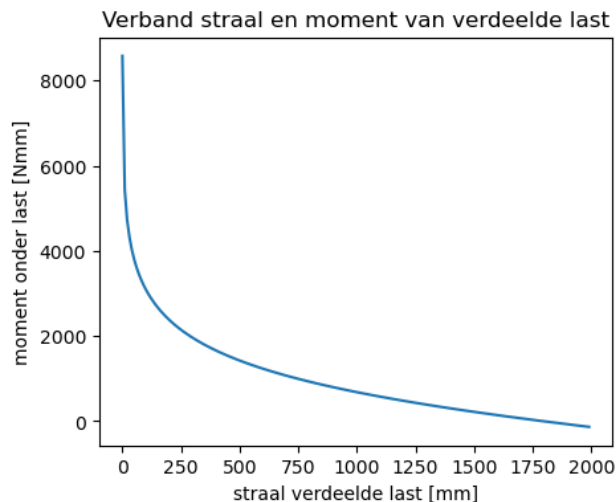
Timoshenko

Daarnaast heeft hij ook Vergelijking D.1 opgesteld voor het maximale moment.

$$M_{max} = \frac{F}{4\pi} \left((1+v) \ln \frac{r}{c} - \frac{(1-v)c^2}{4r^2} \right) \quad (D.1)$$

(Timoshenko en Woinowsky-Krieger, 1959)

Hierbij is c straal van het oppervlakte waarover F werkt. Dit betekent dus dat het maximaal een benadering kan worden, want de limiet hiervan (door de r/c met c nadert naar 0) is oneindig. Hoe de straal van de verdeelde belasting invloed heeft is grafisch weergegeven in Figuur D.1. Hierbij is Vergelijking D.1 gebruikt

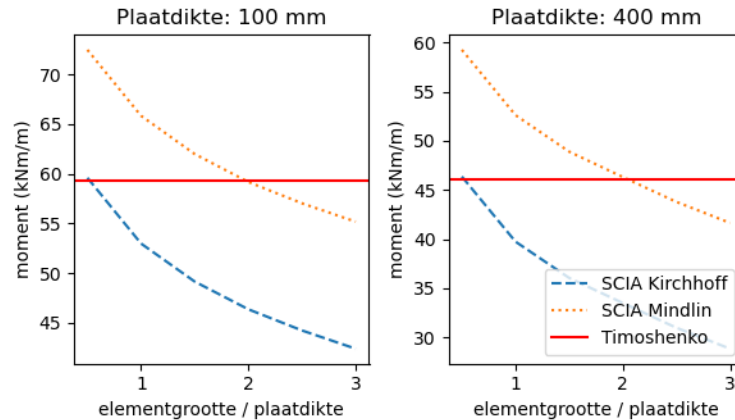


Figuur D.1: Moment hangt af van de straal van de verdeelde belasting

waarbij het maximale moment is uitgezet tegenover de straal c . Hierin is duidelijk zichtbaar dat wanneer de straal naar 0 gaat, dat het moment dan naar oneindig nadert.

Puntlast

Voor het eerste onderzoek zijn twee platen bekeken, beide met een kracht van 100 kN, een straal van 10 m en een Poisson ratio van 0.2. Een plaat is 100 mm, de ander 400 mm dik. Het probleem waar hierbij tegenaan gelopen werd is dat de Timoshenko berekening afhangt van de straal van de last, wat bij een puntlast 0 is, zie Paragraaf D. Hiervoor zijn verschillende dingen geprobeerd en is een verband gevonden tussen de straal van de verdeelde belasting van Timoshenko met de plaatdikte. Dit is te zien in Figuur D.2.

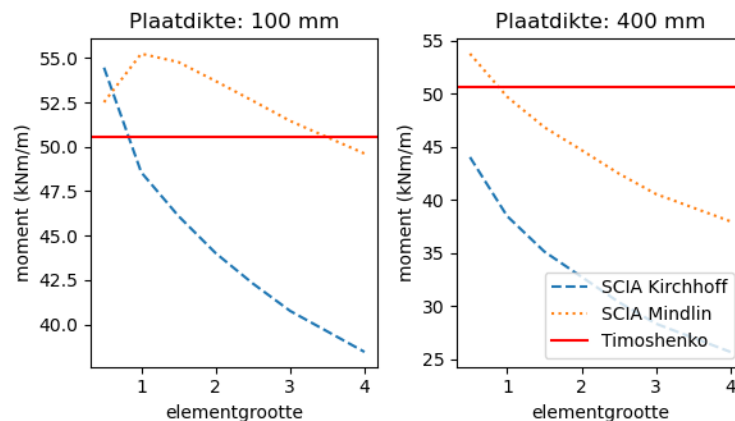


Figuur D.2: Momenten ronde plaat met puntlast

Hierin zijn de blauwe lijnen de uitkomsten van SCIA Engineer, waarbij 6 verschillende elementgroottes zijn genomen. De straal van de kracht die is genomen om de rode lijn, de spanning volgens Timoshenko, te maken is hierbij iteratief bepaald, en de waarde die daar uit kwam is $0,2 \cdot$ de plaatdikte bij berekening met Mindlin en $0,75 \cdot$ de plaatdikte bij Kirchhoff. Met deze waardes zou de vuistregel “elementgrootte is twee keer de plaatdikte” kloppen. Verder is het nergens op gebaseerd.

Verdeelde belasting

Vervolgens is gekeken hoe dit zit wanneer de last ook in SCIA verdeeld wordt. Hierbij is Mindlin gebruikt. In eerste instantie leek hier niks uit te komen, totdat de schaal werd veranderd, zoals te zien in Figuur D.3.

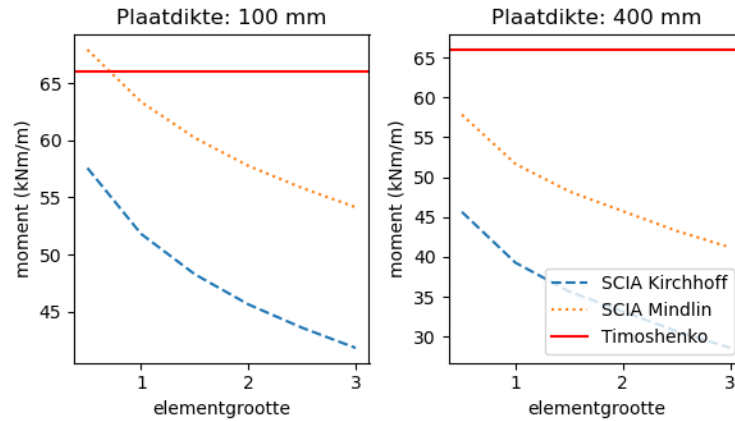


Figuur D.3: Momenten ronde plaat met verdeelde belasting met straal 50 [mm]

Het eerste punt van D.3 is hierbij afwijkend. Dit is het punt waarbij de elementgrootte precies even groot is als de straal van de verdeelde belasting. Voor deze grafieken is een extra meetpunt genomen, namelijk

elementgrootte van $4 \cdot$ de plaatdikte, om de lijnen te laten snijden. Wat hier uiteindelijk te zien is, is dat de snijpunten van beide plaatdiktes niet op ongeveer dezelfde elementgrootte tov plaatdikte zit, maar gewoon elementgrootte, alsof het niet afhankelijk is van de plaatdikte. Bij beide is het snijpunt met Mindlin ongeveer tussen de 350 en 400 mm elementgrootte.

Ten slotte is ook een plaat met een over een straal van 10 mm verdeelde belasting berekend, zie Figuur D.4. Hierbij is gebruik gemaakt van Mindlin. Bij de plaatdikte 400 mm snijdt die niet met het werkelijke moment,



Figuur D.4: Momenten ronde plaat met verdeelde belasting met straal 10 [mm]

maar het lijkt er wel naartoe te gaan om in hetzelfde punt als bij 100 mm te zijn. Dit gaat nog verder onderzocht worden.