

Eindige-elementenberekeningen rond puntlasten op betonnen platen

Vuistregels voor elementengroottes in tweedimensionale eindige-elementenmodellen
voor de nauwkeurige bepaling van spanningen en momenten



Eindige-elementenberekeningen rond puntlasten op betonnen platen: vuistregels voor elementengroottes in tweedimensionale eindige-elementenmodellen voor de nauwkeurige bepaling van spanningen en momenten

Geschreven door: Tugay Pancar

Studentnummer: 4882075

Begeleid door: dr. ir. Pierre Hoogenboom

ir. Cor Kasbergen

30 juni 2023



Voorwoord

Dit rapport is geschreven voor een bacheloreindwerk voor de opleiding Civiele Techniek aan de TU Delft. Het rapport zal waarschijnlijk voornamelijk interessant zijn voor ingenieurs met een achtergrond in constructietechniek. Ingenieurs die geïnteresseerd zijn in het berekenen van de spanningen in de onderkant van een betonnen plaat en momenten ter plaatse van een puntlast met een tweedimensionale eindige-elementenberekening kunnen vuistregels vinden voor de correcte elementengrootte in de samenvatting en in hoofdstuk 6.

Academici met een achtergrond in toegepaste wiskunde zouden sectie 5.3 interessant kunnen vinden, waar een relatie gelegd wordt tussen een singulariteit in een numeriek model en een fysisch fenomeen.

Voor de totstandkoming van het rapport wordt veel dank betuigd aan de begeleiders van het bacheloreindwerk, ir. Cor Kasbergen en dr. ir. Pierre Hoogenboom.

Delft, juni 2023

Tugay Pancar

Samenvatting

Wanneer een puntlast wordt aangebracht op een plaat in een tweedimensionaal eindige-elementenmodel ontstaan singulariteiten in de spanningen en momenten. Hierdoor is het niet mogelijk om de correcte spanningen en momenten te bepalen met tweedimensionale modellen met een puntlast als belasting. Om momenten en spanningen in de onderkant van een plaat ter plaatse van een puntlast correct te kunnen bepalen met tweedimensionale modellen, is in dit rapport onderzoek gedaan naar vuistregels voor een elementengrootte die resulteert in correcte waarden voor de spanningen en momenten voor platen met een belastingafdracht in één richting.

Om correcte werkelijke spanningen en momenten te kunnen bepalen is eerst een modelvalidatie en -kalibratie uitgevoerd voor de driedimensionale modellen. Hieruit kwam naar voren dat de puntlast gemodelleerd diende te worden als een verdeelde belasting op een oppervlakte van 0,25 keer de plaatdikte bij 0,25 keer de plaatdikte.

Voor verschillende platen zijn de elementengroottes bepaald die resulteren in correcte spanningen en momenten door zowel tweedimensionale als driedimensionale eindige-elementenberekeningen uit te voeren. Met de driedimensionale berekeningen zijn de correcte waarden voor de spanningen bepaald. Door middel van numerieke integratie zijn daaruit de corresponderende waarden voor de momenten afgeleid.

Vervolgens is met regressieanalyse de elementengrootte bepaald die leidt tot een tweedimensionale berekening met overeenkomstige waarden voor spanningen en momenten als de driedimensionale berekeningen.

Aan de hand van deze elementengroottes zijn vuistregels opgesteld.

De volgende vuistregels zijn gevonden voor spanningen:

- Voor spanningen dient voor lineaire elementen een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte gebruikt te worden voor alle richtingen
- Voor spanningen dient voor kwadratische elementen een elementengrootte van 2 keer de plaatdikte gebruikt te worden voor alle richtingen

Voor momenten is geconstateerd dat voor Poissonwaardes rond 0,14 kwadratische elementen met een grootte van 0,5 keer de plaatdikte gebruikt moeten worden. De resultaten verkregen met de berekening dienen wel vermenigvuldigd te worden met correctiefactoren. Voor de correctiefactoren is het volgende gevonden:

- Voor momenten in de richting loodrecht op de richting van de belastingsafdracht is de correctiefactor 1,27.
- Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht is de correctiefactor 1,15.

Verder is voor momenten is geconstateerd dat voor Poissonwaardes rond 0,28 lineaire elementen met een grootte van 0,5 keer de plaatdikte gebruikt moeten worden. De resultaten verkregen met de berekening dienen weer vermenigvuldigd te worden met correctiefactoren. Voor deze correctiefactoren is het volgende gevonden:

- Voor momenten in de richting loodrecht op de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van de plaat is de correctiefactor 1,79.
- Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht is de correctiefactor 1,54.

Voor momenten is tevens een alternatieve set van vuistregels opgesteld waarbij gebruik gemaakt wordt van de correcte spanningen in de onderkant van de plaat bepaald met de vuistregels voor spanningen in plaats van een correcte elementengrootte voor momenten. Deze vuistregels zijn als volgt:

- Voor momenten in de richting loodrecht op de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van de plaat geldt het verband: $m = 1,63 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$
- Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van de plaat geldt het verband: $m = 1,43 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$
- Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van een vrije rand geldt het verband: $m = 1,25 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$

Inhoudsopgave

1 Inleiding	1
2 Methode	3
2.1 Opzet van het onderzoek	3
2.2 Berekening van spanningen	4
2.3 Berekening van momenten	5
2.4 Bepaling van correcte elementengroottes.....	6
3 Modelvalidatie & -kalibratie.....	7
3.1 Convergentietest voor numerieke integraties	7
3.2 Puntlast gemodelleerd met een geconcentreerde belasting.....	7
3.3 Puntlast gemodelleerd met een verdeelde belasting	12
3.4 Vergelijking van modelresultaten met handberekeningen.....	17
4 Resultaten.....	19
5 Discussie	23
5.1 Correcte elementengroottes en vuistregels voor spanningen.....	23
5.2 Correcte elementengroottes en vuistregels voor momenten	29
5.3 Vuistregels zonder correcte elementengroottes voor momenten	32
6 Conclusie & aanbevelingen	36
6.1 Grootste spanning.....	36
6.2 Grootste moment bepaald met de elementengrootte en een correctiefactor	36
6.3 Grootste moment berekend uit de spanning.....	37
6.4 Vervolgonderzoek	37
Referenties	38
Bijlage A: tabellen voor berekeningen met plaatelementen	39
Bijlage B: tabellen voor berekeningen met volume-elementen	43
Bijlage C: tabellen voor correcte elementengroottes	44
Bijlage D: plaatvarianten voor de berekeningen.....	48

1 Inleiding

Betonnen platen worden in veel constructies toegepast. Met de komst van nieuwe technologieën zoals eindige-elementen software is het gebruik van betonnen platen verder gegroeid. Eindige-elementenmodellen stellen ingenieurs en ontwerpers in staat om spanningen en momenten te bepalen voor complexe geometrieën van constructies en complexe belastingcombinaties. Het is een numerieke analysemethode gebaseerd op een discretisatie van een materiaal door middel van elementen bestaande uit knopen.

Betonnen platen zijn oppervlakte-actieve constructies die laterale belastingen op kunnen nemen door middel van buiging uit het vlak. Deze belastingen worden in één of twee richtingen afgedragen naar kolommen via balken of direct naar kolommen in het geval van platte platen.

Inzicht en kennis over correcte en nauwkeurige spanningen en momenten in platen als reactie op belastingen is van belang voor het ontwerpen van constructies die voldoen aan eisen met betrekking tot uiterste grenstoestanden en bruikbaarheidsgrenstoestanden. Indien verkeerde waarden voor spanningen als uitgangspunt genomen worden voor een ontwerp, kan de constructieve veiligheid en de bruikbaarheid van een constructie in geding komen.

Met driedimensionale eindige-elementenmodellen kunnen ingenieurs met voldoende computationele capaciteit deze correcte waarden voor spanningen en momenten nauwkeurig bepalen. Voor tweedimensionale modellen is dit niet altijd het geval.

Hoewel eindige-elementenberekeningen een effectieve en krachtige gereedschap zijn voor ingenieurs, zijn er ook beperkingen verbonden aan deze techniek. Een van deze beperkingen is het fenomeen van het ontstaan van singulariteiten. Een singulariteit is een wiskundig begrip waar sprake van is op een bepaald punt wanneer een variabele op dat punt ongedefinieerd is. In tweedimensionale eindige-elementenmodellen van platen treedt dit op in een punt waar een geconcentreerde belasting zoals een moment of een puntlast op wordt aangebracht. In dit punt nadert de waarde van de spanning of moment naar oneindig wanneer de waarde van de elementengrootte naar nul nadert. Hierdoor is het voor een ingenieur onduidelijk of een met de eindige-elementenmethode bepaalde spanning of moment onder een puntlast de werkelijke spanning of moment is. Voor de elementengrootte die gebruikt moet worden in een tweedimensionale eindige-elementenberekening om correcte spanningen en momenten te berekenen kan een vuistregel een uitkomst bieden voor ingenieurs. Aan de hand van zo een vuistregel kunnen correcte spanningen en momenten bepaald worden met tweedimensionale modellen.

Het doel van dit onderzoek is om te bepalen wat deze vuistregels zijn voor momenten en spanningen aan de onderkant van een plaat ter plaatse van een puntlast. Hiervoor worden twee hoofdvragen beantwoord:

- "Wat is een acceptabele vuistregel voor de grootte van de plaelementen in een tweedimensionaal eindige-elementenmodel die leidt tot correcte spanningen voor platen?"
- "Wat is een acceptabele vuistregel voor de grootte van de plaelementen in een tweedimensionaal eindige-elementenmodel die leidt tot correcte momenten voor platen?"

Om de beantwoording van de hoofdvragen te ondersteunen worden de volgende deelvragen geformuleerd:

- "Wat zijn de elementengroottes die leiden tot correcte spanningen?"
- "Wat zijn de elementengroottes die leiden tot correcte momenten?"
- "Welke vuistregels kunnen geformuleerd worden aan de hand van de elementengroottes die leiden tot correcte spanningen en momenten?"
- "Zijn de vuistregels afhankelijk van de plaatdikte- en afmetingen en de Poissonwaarde?"
- "Zijn er verschillen tussen de vuistregels voor spanningen en momenten in verschillende richtingen?"
- "Zijn de vuistregels afhankelijk van de belastinglocatie?"
- "Zijn de vuistregels afhankelijk van het elementtype?"

Het antwoord op de hoofd- en deelvragen zal gevonden worden door met een eindige-elementenprogramma zowel een tweedimensionale berekening met plaelementen als een driedimensionale berekening met volume-elementen te maken. Voor platen met verschillende combinaties van plaatafmetingen, belastinglocatie en plaatdikte wordt voor 5 verschillende elementengroottes met het programma een tweedimensionale

berekening uitgevoerd met twee elementtypes. Voor dezelfde platen wordt met één enkele elementtype en een zo klein mogelijke elementengrootte een driedimensionale berekening uitgevoerd met hetzelfde programma.

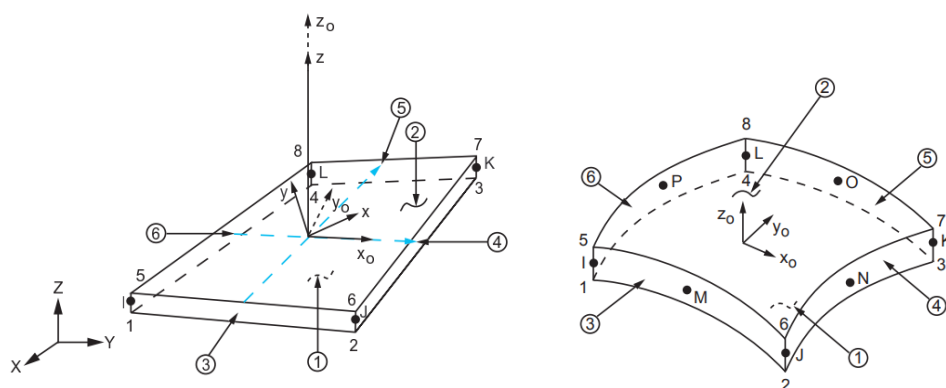
De driedimensionale waarden resulteren in de werkelijke spanningen en momenten, terwijl de tweedimensionale berekeningen asymptotisch gedrag zullen vertonen. Aan de hand van de werkelijke waarden van de spanningen en momenten kunnen de elementengroottes bepaald worden die gebruikt moeten worden in het tweedimensionale model om de correcte spanningen en momenten te verkrijgen. Deze correcte elementengroottes kunnen vervolgens gebruikt worden om de vuistregels te formuleren.

In het onderzoek zullen enkel rechthoekige platen met twee vrije randen en twee scharnierende lijnondersteuning en onderzocht worden. Hiervoor worden specifieke waarden voor plaatdiktes en elementengroottes gekozen. In totaal worden 3 plaatdiktes, 2 elementtypes, 5 elementengroottes, 2 verhoudingen voor de afmetingen van de plaat in x- en y-richting en 2 belastinglocaties in beschouwing genomen in het onderzoek. Hiermee worden verschillende combinaties gecreëerd waarvoor tweedimensionale berekeningen worden gedaan met Ansys.

Het materiaalgedrag van de betonnen platen waarvoor de analyse gedaan wordt is uitsluitend lineair-elastisch en ongescheurd. De berekeningen zullen enkel gedaan worden voor dunne platen, waar de Kirchhoff-Love platentheorie voor geldt. De platen die onderzocht worden zijn uitsluitend platen die belastingen in één richting afdragen.

Voor eindige-elementenberekeningen bestaan verschillende elementtypen. Het type element dat gebruikt wordt in een berekening bepaalt mede de nauwkeurigheid van de berekening. Een element bestaat uit knopen. In lineaire elementen bevinden de knopen zich op de hoekpunten van het element. In kwadratische element bevinden de knopen zich op de hoekpunten en daarbovenop te midden van de zijdes van het element. In de tweedimensionale berekeningen voor dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van zowel lineaire als kwadratische elementen. De gebruikte elementen voor de tweedimensionale berekeningen zijn SHELL181 voor de lineaire elementen en SHELL281 voor de kwadratische. Beide elementtypen zijn gebaseerd op de Mindlin-Reissner-theorie (ANSYS, Inc., 2011). Afbeeldingen van de elementen zijn weergegeven in figuur 1.

De structuur van het rapport is als volgt. In hoofdstuk 2 wordt de methodologie uitgelegd. In hoofdstuk 3 wordt een modelvalidatie- en kalibratie uitgevoerd. In hoofdstuk 4 worden de resultaten van de berekeningen uitgevoerd met modeleigenschappen zoals vastgesteld in hoofdstuk 3 beschreven. In hoofdstuk 5 worden de resultaten geïnterpreteerd en geanalyseerd om de hoofd- en deelvragen te kunnen beantwoorden. In hoofdstuk 6 worden de hoofd- en deelvragen beantwoordt en worden aanbevelingen gegeven voor vervolgonderzoek.



Figuur 1: links: SHELL181-elementen
rechts: SHELL281-elementen (ANSYS, Inc., 2011)

2 Methode

Voor dit onderzoek worden met het programma Ansys eindige-elementenberekeningen gedaan met zowel tweedimensionale plaelementen als driedimensionale volume-elementen. Voor het bepalen van de elementengroottes van tweedimensionale elementen waarmee de correcte spanningen en momenten met een tweedimensionaal model bepaald kunnen worden, hierna gerefereerd als correcte elementengroottes, dienen de werkelijke spanningen en momenten in de plaat bekend te zijn.

In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe alle relevante berekeningen uitgevoerd worden, welke gegevens verzameld worden met de berekeningen en voor welke platen dit gedaan wordt.

2.1 Opzet van het onderzoek

In het onderzoek worden voor in totaal 26 verschillende platen 5 tweedimensionale eindige-elementenberekeningen uitgevoerd met zowel lineaire als kwadratische plaelementen. De 26 platen waar een berekening voor uitgevoerd wordt omvatten platen met verschillende combinaties van plaatdiktes, plaatafmetingen, belastinglocaties, belastinggroottes, Poissonwaardes en elementtypes. De 5 tweedimensionale berekeningen die per geval uitgevoerd worden zijn elk voor een andere elementengrootte. Op deze manier worden er in totaal 130 tweedimensionale berekeningen uitgevoerd.

De 5 elementengroottes die voor de tweedimensionale berekeningen gebruikt worden zijn $0,5t$, t , $2t$, $3t$ en $4t$, waarbij t de plaatdikte is.

De gegevens die voor de 130 tweedimensionale berekeningen verzameld worden zijn de normaalspanning in MPa in x- en y-richting aan de onderkant van de plaat, ter plaatse van de coördinaat langs de z-as $z = -0,5t$ en de buigende momenten in x- en y-richting ter plaatse van de puntlast per eenheid van breedte van de plaat. Ook de zakking van de plaat ter plaatse van de puntlast aan de onderkant van de plaat wordt gedocumenteerd. Hoewel dit niet relevant is voor de beantwoording van de onderzoeksvragen, is het een handige hulpmiddel om eventuele fouten op te sporen bij het uitvoeren van de corresponderende driedimensionale berekeningen. Indien bij een driedimensionale berekening een zakking gevonden wordt die erg afwijkt van de gevonden zakking met de tweedimensionale berekening, is dit een indicatie dat er een fout gemaakt wordt. De zakking in de plaat kan namelijk zowel in de tweedimensionale als driedimensionale model correct bepaald worden met een eindige-elementenberekening omdat er voor de zakking geen sprake is van singulariteiten. Als alle gegevens en instellingen in de berekening correct zijn, zullen de waardes voor het tweedimensionale en driedimensionale model dus met elkaar overeen moeten komen.

Naast de tweedimensionale berekeningen worden 14 driedimensionale berekeningen uitgevoerd voor het bepalen van de werkelijke spanningen in de platen. Voor de driedimensionale berekeningen gelden dezelfde combinaties van plaatafmetingen, plaatdiktes en belastinglocaties zoals beschreven in figuur 37 in bijlage D. Omdat de driedimensionale berekeningen ertoe dienen om de werkelijke spanningen zo nauwkeurig als mogelijk te bepalen, zijn er geen variaties in de elementengroottes en elementtypes voor de driedimensionale berekeningen. De elementen moeten klein genoeg zijn om de spanningen en momenten nauwkeurig te kunnen bepalen. De groottes van de elementen zullen bepaald worden in de modelvalidatie, waarbij ook gebruik gemaakt wordt van meshverfijning indien nodig. Alle driedimensionale berekeningen worden uitgevoerd met kwadratische elementen om voldoende nauwkeurigheid te realiseren.

In het onderzoek wordt een assenstelsel gehanteerd waarin de z-as naar boven wijst en de x-en y-assen het middenvlak van de platen opspannen.

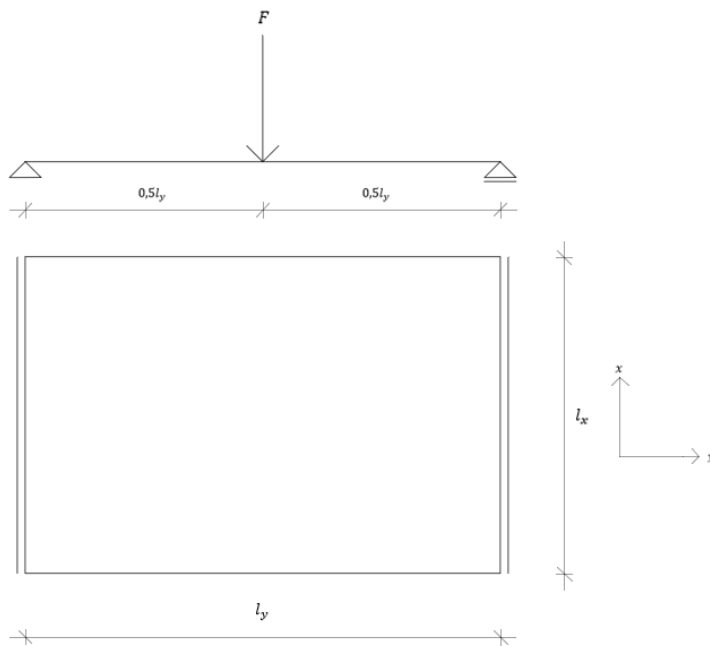
Voor de plaatafmetingen zijn twee opties meegenomen in het onderzoek: platen van 4 x 4 meter en platen van 3,2 x 4,8 meter, waarbij 3,2 de lengte is in de richting van de x-as en 4,8 de lengte is in de richting van de y-as.

Voor de belastinglocatie zijn tevens twee opties toegepast: een belasting met een aangrijpingspunt op het exacte midden van de plaat, ter plaatse van de coördinaat (2, 2, $0,5t$) voor platen van 4 x 4 meter en (1,6; 2,4; $0,5t$) voor platen van 3,2 x 4,8 meter en een belasting met een aangrijpingspunt op het middelpunt van een vrije rand, ter plaatse van de coördinaat (4, 2, $0,5t$) voor platen van 4 x 4 meter en (3,2; 2,4; $0,5t$) voor platen van 3,2 x 4,8 meter.

Voor de plaatdikte zijn drie opties: 60, 80 en 100 millimeter.

Alle platen, met uitzondering van één plaat, hebben een Poissonwaarde van 0,1414. Het uitzonderingsgeval heeft een Poissonwaarde die het dubbele is van de rest, 0,2828. Alle platen, met uitzondering van één plaat, worden onderworpen aan een neerwaartse puntlast met een grootte van 1 kN. Het uitzonderingsgeval heeft een grootte die het dubbele is van de rest, 2 kN. Alle platen hebben verder een elasticiteitsmodulus van 19,36 GPa.

De platen zijn aan twee tegenoverliggende randen, parallel aan de x-as, scharnierend opgelegd. De twee overige randen, parallel aan de y-as, zijn vrije randen. In figuur 2 is een mechanicaschema van de platen te vinden.



Figuur 2: Mechanicaschema van de platen; dubbele randen zijn scharnierondersteuning, enkele randen zijn vrije randen; voor F zijn langs de x-as twee locaties mogelijk: $x = 0,5 l_x$ en $x = l_x$; de oorsprong van het assenstelsel ligt ter plaatse van een hoekpunt van de plaat

2.2 Berekening van spanningen

De spanningen worden in zowel x- als y-richting bepaald met Ansys. Indien een berekening een plaat met een belasting op een vrije rand betreft, zijn de spanningen en momenten in de x-richting echter geen onderwerp van interesse, omdat deze in werkelijkheid 0 zullen zijn.

Voor het bepalen van de spanningen dient in Ansys eerst een puntlast aangebracht te worden op de gekozen locaties. Hiervoor zijn twee manieren mogelijk: een geconcentreerde kracht op één specifieke knoop of een verdeelde belasting op een belastingsgebied rondom de gekozen locaties voor de belasting.

Voor het toepassen van de eerste optie kan gebruik gemaakt worden van de functie Nodal Force voor het aanbrengen van de puntlast. Deze optie brengt een puntlast aan op één specifieke gekozen knoop.

Indien gebruik gemaakt wordt van deze optie, dient de door het programma gegenereerde mesh ten alle tijden een knoop te bevatten op de locatie die is gekozen als aangrijpingspunt voor de puntlast: het exacte midden van de plaat of het midden van een vrije rand. Wanneer de elementengrootte gevarieerd wordt is het echter niet gegarandeerd dat het programma voor elke elementengrootte een mesh creëert die een knoop precies op de gewenste locaties bevat. Dit is afhankelijk van de elementengrootte en de afmetingen van de plaat.

Om toch te verzekeren dat er in elke mesh, ongeacht elementengrootte en plaatafmetingen, een knoop op de gewenste locatie voor het aangrijpingspunt van de puntlast zit, kan in SpaceClaim met de functie Split het vlak waarop de puntlast aangebracht wordt verdeeld worden in vier gelijke symmetrische rechthoekige stukken. De mesh zal nu gegenereerd worden per rechthoekige stuk. Hierdoor zal er altijd een knoop in het

midden van de plaat zitten waarop de puntlast aangebracht kan worden. Tevens zullen de vrije randen gesneden worden door een lijn loodrecht op de vrije randen die door het midden van de plaat gaat. Hierdoor zal er ook een knoop ter plaatse van het midden van een vrije rand zitten.

De tweede optie kan toegepast worden door middel van de functie Force, waarmee een kracht aangebracht kan worden op een bepaalde oppervlakte. De kracht wordt dan gelijkmatig verdeeld over deze oppervlakte. Dit is dus een gelijkmatig verdeelde belasting. Door deze gelijkmatig verdeelde belasting op een oppervlakte aan te brengen die klein genoeg is, kan met deze belasting een puntlast gemodelleerd worden in het driedimensionale model. Hierdoor worden singulariteiten voorkomen. Om deze belasting aan te brengen dient een geschikte belastingsgebied gedefinieerd te worden met de functie Split in SpaceClaim.

Voor de tweedimensionale modellen zal gebruik gemaakt worden van de eerste optie.

Voor de driedimensionale modellen zal in het volgende hoofdstuk de meest geschikte optie bepaald worden door de opties met elkaar te vergelijken. Eventuele problemen of deficiënties in de modellen kunnen zo aan het licht gebracht worden. Ook wordt een elementengrootte gekozen waarbij voldoende nauwkeurigheid gerealiseerd wordt. De nauwkeurigheden van de berekeningen worden bepaald door de elementtypes en elementengroottes. De benodigde groottes voor voldoende nauwkeurigheid worden bepaald door middel van een kalibratie en validatie van het model.

2.3 Berekening van momenten

Het gebruikte eindige-elementenprogramma is niet in staat momenten te berekenen voor platen. Wel kunnen de momenten op alternatieve wijzen bepaald worden indien de spanningsverdeling over de plaatdikte ter plaatse van de puntlast bekend is. Deze spanningsverdeling kan verkregen worden met het eindige-elementenprogramma, op dezelfde wijze als bij de berekening van de spanning in de onderkant van de plaat.

Omdat voor de berekening van de momenten in het driedimensionale model niet alleen de spanning in de onderkant van de plaat, maar de volledige spanningsverdeling over de plaatdikte bekend dient te zijn, wordt er bij de berekening van de momenten een aanvullende stap genomen in Ansys.

Voor het verkrijgen van de spanningsverdeling over de plaatdikte wordt gebruik gemaakt van de functie Construction Geometry in Ansys. Met deze functie kan een zogenaamde Path, een lijn bestaande uit een gekozen aantal punten waarop de spanning geëvalueerd wordt, gegenereerd worden langs een gewenst traject. Indien een Path gegenereerd wordt ter plaatse van de puntlast over de plaatdikte, kan de spanningsverdeling over de plaatdikte bepaald worden. Dit kan gedaan worden voor zowel de spanning in de x-richting als de spanning in de y-richting. Met deze spanningsverdelingen kunnen vervolgens de momenten bepaald worden met de volgende integralen:

$$m_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \, dz ; m_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} \cdot z \, dz$$

Omdat de spanningen in deze integralen niet analytisch als functie van z bekend zijn, dient een numerieke integratie toegepast te worden. Voor deze numerieke integratie wordt de trapeziummethode toegepast.

Om het minimaal benodigde aantal spanningen over de dikte voor een nauwkeurige berekening met de numerieke integratie te bepalen, wordt in het hoofdstuk over modelvalidatie een convergentietest uitgevoerd.

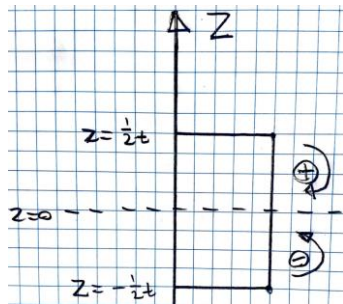
De met de numerieke integratie berekende momenten zijn een functie van de afstand tussen de integratiepunten en daarmee het aantal evaluatiepunten van de spanningen. Bij toenemende evaluatiepunten zal het moment naderen naar een bepaalde waarde. De functie zal asymptotisch gedrag vertonen. Het asymptoot van deze functie kan beschouwd worden als het exacte moment. In werkelijkheid kan dit exacte moment niet precies bepaald worden. Wel kan een benadering van dit exacte moment met voldoende nauwkeurigheid gevonden worden. De nauwkeurigheid van de numerieke integratie wordt bepaald door de afstand tussen de integratiepunten en daarmee het aantal evaluatiepunten van de spanningen.

Indien de waarde van het moment niet meer significant verandert bij toenemende evaluatiepunten, is er sprake van voldoende nauwkeurigheid. De functie is dan geconvergeerd. Het aantal evaluatiepunten waarbij de functie, het moment wat bepaald wordt met numerieke integratie, geconvergeerd is wordt bepaald aan de

hand van een convergentietest. Voor een select aantal evaluatiepunten wordt dan de numerieke integratie uitgevoerd voor het moment. Het aantal evaluatiepunten waarbij de functie vrijwel vlak is wordt gebruikt als aantal evaluatiepunten voor alle numerieke integraties voor de momenten.

Voor het uitvoeren van de numerieke integratie wordt Python gebruikt.

Het gekozen assenstelsel heeft consequenties voor de positieve en negatieve richtingen van de momenten. In dit onderzoek worden hiervoor de richtingen in figuur 3 aangehouden.



Figuur 3: Positieve en negatieve richtingen van de momenten

2.4 Bepaling van correcte elementengroottes

Voor het bepalen van de correcte elementengroottes wordt een non-lineaire regressieanalyse uitgevoerd aan de hand van de verkregen resultaten. Voor deze regressieanalyse is een functie in de vorm

$$f(h) = a \ln(h) + b$$

aangenomen.

Hierin is h de verhouding tussen de elementengrootte en de plaatdikte. De functiewaarde $f(h)$ is de verhouding tussen een spanning of moment bepaald met plaalementen met een grootte van h en de werkelijke spanning of moment in de plaat bepaald met zo klein mogelijke volume-elementen. Een functiewaarde van $f(h)=1$ duidt op een met plaalementen bepaalde moment of spanning die overeenkomt met de werkelijke spanning in de plaat. De bijbehorende elementengrootte h als veelvoud van de plaatdikte is dan de correcte elementengrootte.

Deze correcte elementengrootte kan dan bepaald worden na het uitvoeren van een regressieanalyse door de volgende vergelijking op te lossen:

$$a \ln(h) + b = 1$$

$$h = e^{\frac{1-b}{a}}$$

Voor de regressieanalyse is een functie in deze vorm gekozen omdat deze functie bepaalde logische eigenschappen heeft die het geschikt maken voor deze toepassing. Zo is het ongedefinieerd voor $h \leq 0$, wat overeenkomt met het domein van alle mogelijke elementengroottes. Elementengroottes kunnen in een eindige-elementenmodel niet nul of negatief zijn. In deze functie is dat ook niet mogelijk.

Daarnaast nadert de gekozen functievorm naar oneindig wanneer de variabele naar nul nadert. Dit past bij het fenomeen van singulariteiten wat optreedt wanneer de elementengrootte steeds kleiner genomen wordt.

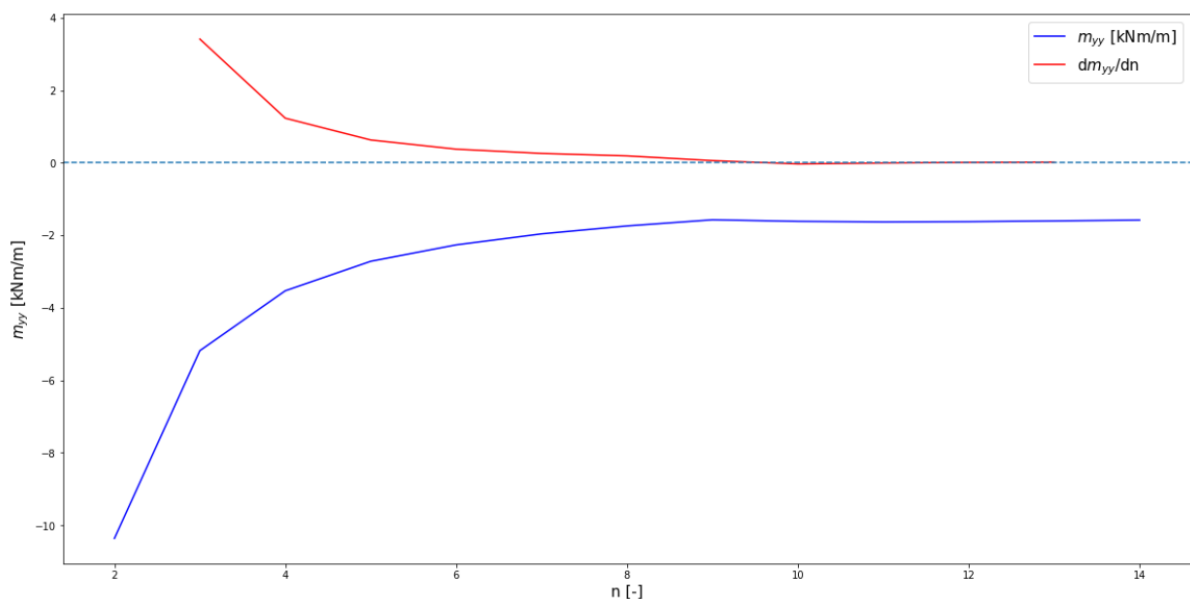
3 Modelvalidatie & -kalibratie

In dit hoofdstuk wordt een modelvalidatie en gedeeltelijke kalibratie uitgevoerd voor het driedimensionale model. Verschillende elementengroottes worden uitgetest en de prestaties van het model bij deze elementengroottes worden geanalyseerd door de verkregen waarden voor de spanningen, vervormingen en momenten te vergelijken met theoretische kennis over plaatmechanica en simpele handberekeningen. Tevens wordt de belasting als een puntlast op één enkele elementknoop en als een geconcentreerde verdeelde belasting over een klein gebied rond de theoretische puntlast gemodelleerd. Ook de prestaties van deze twee methodes voor het modelleren van de puntlast worden geanalyseerd. Voordat de prestaties van het model geanalyseerd worden, wordt een convergentietest uitgevoerd voor de numerieke integratie voor het berekenen van de momenten.

3.1 Convergentietest voor numerieke integraties

Voor de numerieke integratie van de spanningsverdeling over de dikte is een convergentietest uitgevoerd voor het moment om de x-as, in de richting van de belastingsafdracht. In deze convergentietest is uitgegaan van de vierkante plaatgeval met een dikte van 100 millimeter gemodelleerd met kubusvormige kwadratische elementen met een grootte van $\frac{t}{6}$. Over de plaatdikte zijn dus zes elementen aangebracht.

Voor oplopende datasetgroottes van het spanningsverloop over de plaatdikte is met de trapeziummethode een numerieke integratie uitgevoerd. Dit is uitgezet tegen de datasetgrootte. Vervolgens is met centrale differenties de helling van de resulterende lijn voor de verschillende datasetgroottes bepaald. Het resultaat is als volgt:



Figuur 4: Convergentietest voor de numerieke integratie voor het berekenen van de momenten

Uit de grafiek in figuur 4 blijkt dat 9 punten voldoende nauwkeurigheid oplevert voor de numerieke integratie. Bij 9 punten is er convergentie. Het gebruiken van een datasetgrootte van 9 zou echter resulteren in een datapunt ter plaatse van de z-coördinaat 0. De spanning levert hier geen bijdrage aan het moment. Daarom wordt gekozen voor een datasetgrootte van 10. Hierdoor wordt de bijdrage van de spanningen rond de z-coördinaat 0 beter in rekening gebracht. De met centrale differenties berekende helling van de momentenverloop als functie van het aantal punten in de integratie is dan -0,029. Hiermee wordt voldoende nauwkeurigheid verkregen in de berekening van de momenten.

3.2 Puntlast gemodelleerd met een geconcentreerde belasting

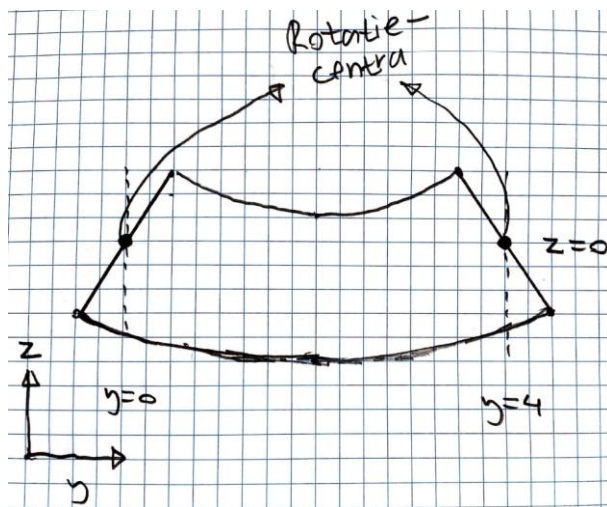
Naast voldoende nauwkeurigheid voor het bepalen van de momenten is het ook van belang dat de spanningen met voldoende nauwkeurigheid en correctheid verkregen worden in het eindige-elementenmodel. Voor het opzetten van het model dienen keuzes gemaakt te worden wat betreft randvoorwaarden, discretisatie en

belastingen. Deze keuzes hebben invloed op de correctheid en nauwkeurigheid van het model. Het model moet het fysisch en mechanisch gedrag van de plaat correct representeren. Hiervoor moeten correcte randvoorwaarden en belastingen ingevoerd worden in het model. De spanningsverloop over de plaatdikte, de oplegreacties en de vervormingen moeten realistisch zijn.

Tevens moeten de resultaten van de berekening nauwkeurig genoeg zijn. Deze nauwkeurigheid wordt bepaald door de vorm, type en grootte van de toegepaste elementen. Van voldoende nauwkeurigheid is sprake indien de resultaten van de berekening niet significant veranderen bij verdere verkleining van de elementen. In dat geval is er sprake van convergentie van de spanningen.

De nauwkeurigheid van de berekening kan lokaal aanzienlijk verbeterd worden door in een gebied rondom de locatie van interesse een verfijning van de elementen toe te passen. Elementen in dit gebied worden dan kleiner dan de elementen buiten dit gebied. Door buiten het gebied van interesse grotere elementen toe te passen, kan met een vergelijkbare hoeveelheid computergeheugen een betere berekening uitgevoerd worden voor de variabelen van interesse. Indien er gebruik gemaakt wordt van verfijning in het model rondom de puntlast, zullen de elementen tetraëders zijn. Dit is noodzakelijk om een aansluiting tussen de elementen binnen en buiten het verfijningsgebied te realiseren. Doordat deze elementen van verschillende groottes zijn, kan aansluiting niet verkregen worden indien hexaëders toegepast worden.

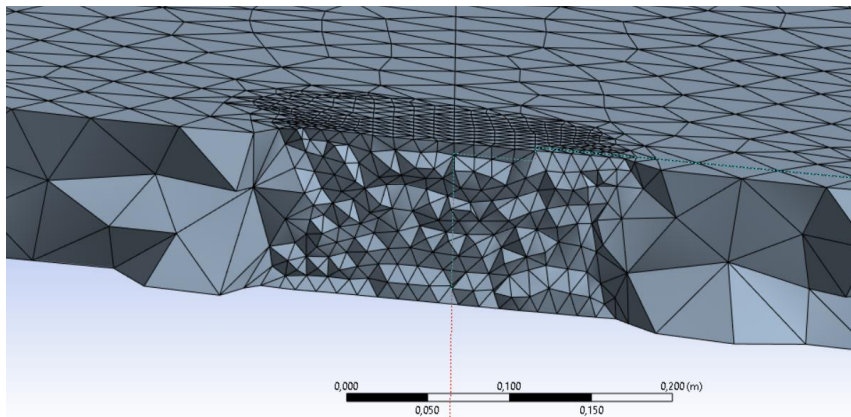
In het model worden de scharnierende opleggingen gemodelleerd aan de hand van een lijnvormige inklemming langs de lijnen $y=0$ en $y=4$ halverwege de plaatdikte. De lijnvormige inklemmingen die alle translaties verhinderen zijn dus allebei parallel aan de x -as, opdat de richting van de belastingsafdracht in de richting van de y -as is en functioneert de plaat als een éénrichtingsplaat. Omdat de lijnvormige inklemming alleen translaties verhindert en geen rotaties, modelleren de lijnvormige inklemmingen scharnierende opleggingen. De lijnvormige inklemmingen gedragen zich namelijk als vaste rotatiecentra. Dit is geïllustreerd in de onderstaande afbeelding in figuur 5.



Figuur 5: Lijnvormige inklemmingen die zich gedragen als vaste rotatiecentra in het yz -vlak

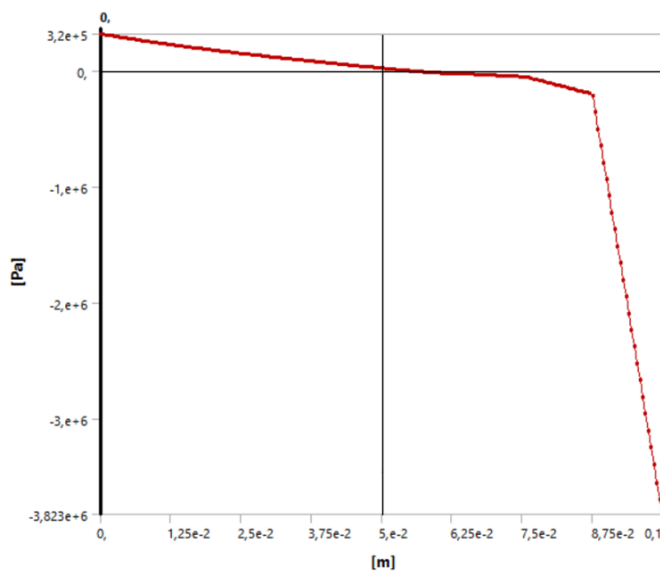
Voor het model dat gebruikt zal worden voor het bepalen van de spanningen en momenten is het eerste uitgangspunt een model met een puntlast op exact één knoop, het middelste knoop.

In dit model wordt een verfijningsgebied toegepast van 100 x 100 millimeter in het exacte midden van de plaat, rondom de puntlast. Hierdoor wordt de nauwkeurigheid van de berekende spanningen ter plaatse van de doorsnede bij de puntlast verbeterd. In dit verfijningsgebied worden 3 verfijningscycli toegepast. De elementengrootte buiten het verfijningsgebied is 0,5t. De resulterende elementen rondom de puntlast zien er in dat geval als in de onderstaande snede in figuur 6 uit:



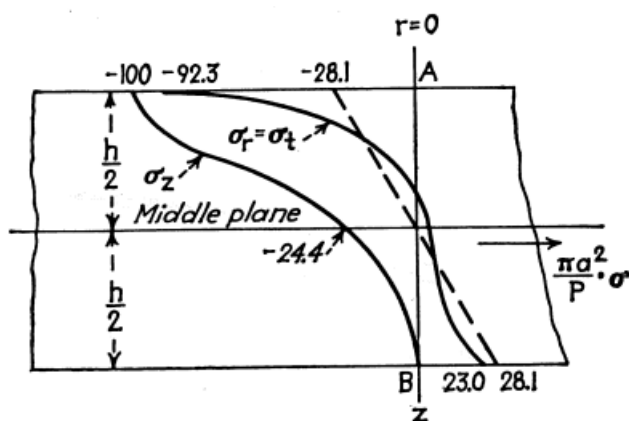
Figuur 6: Elementen rondom de puntlast voor een elementengrootte van 0,5t buiten het verfijningsgebied en 3 verfijningscycli met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één enkele knoop in het midden

Het resulterende spanningsverloop over de plaatdikte van dit model is weergegeven in figuur 7.



Figuur 7: Spanningsverloop over de plaatdikte voor een model met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één knoop

Deze spanningsverloop komt niet overeen met het spanningsverloop van Timoshenko en Woinowsky-Krieger (1959) zoals weergegeven in figuur 8. Tevens bevindt zich twee knikken in het verloop. Het model voldoet dus niet aan de verwachtingen.

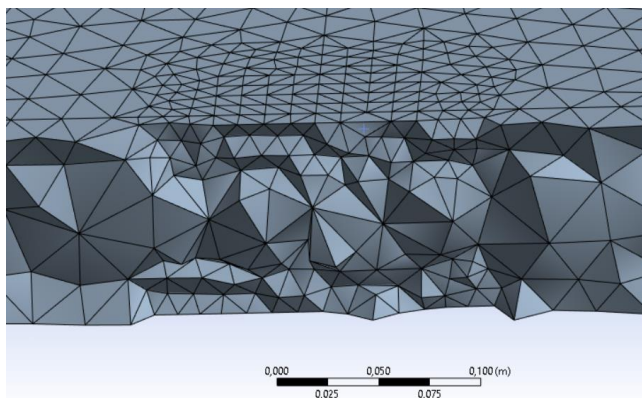


Figuur 8: Werkelijke spanningsverdeling onder een puntlast (S. Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959)

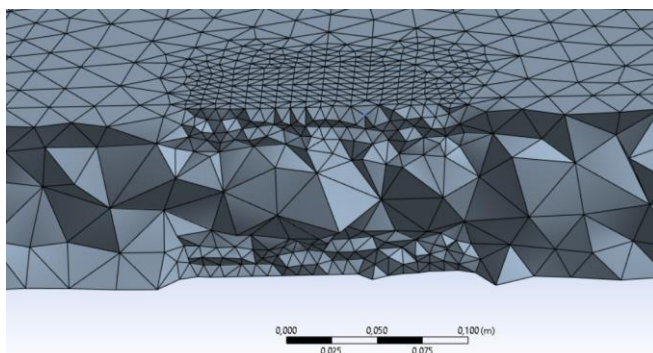
Nu zal onderzocht worden of de spanningsverloop verbeterd kan worden door de elementen in het verfijningsgebied verder te verkleinen.

De elementengroottes in het verfijningsgebied worden bepaald door de elementengroottes buiten het verfijningsgebied en het gekozen aantal verfijningscycli. Een groter aantal verfijningscycli en een kleinere elementengrootte buiten het verfijningsgebied resulteert in een kleinere elementengrootte in het verfijningsgebied. Er zijn dus twee manieren om de elementengroottes binnen het verfijningsgebied te verkleinen: het vergroten van het aantal verfijningscycli en het verkleinen van de elementengroottes buiten het verfijningsgebied. Het aantal toepasbare verfijningscycli is begrensd op 3, dus indien een kleinere elementengrootte binnen het verfijningsgebied gerealiseerd moet worden dan bij 3 verfijningscycli, moeten de elementengroottes buiten het verfijningsgebied rond de puntlast verkleind worden.

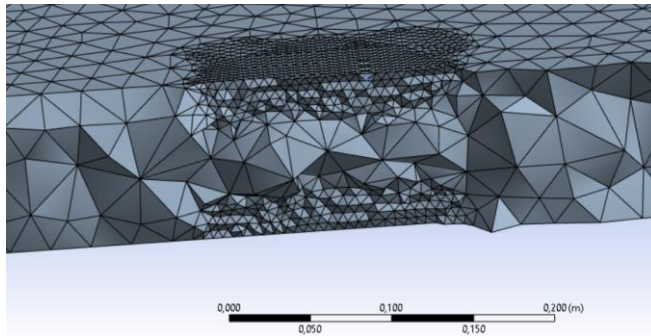
Een verdere verkleining van de elementen in het verfijningsgebied wordt nu gerealiseerd door buiten het verfijningsgebied een elementengrootte van 0,25t toe te passen. Vervolgens wordt een verfijningscylcus oplopend van 1 tot 3 een berekening uitgevoerd. Deze berekeningen worden vergeleken met de eerder uitgevoerde berekening met een elementengrootte van 0,5t buiten het verfijningsgebied en 3 verfijningscycli, gerefereerd als "Belasting op één knoop" in figuur 6. De resulterende meshes zijn afgebeeld in figuren 9 t/m 11. Een plot van de resulterende spanningsverlopen is te zien in figuur 12.



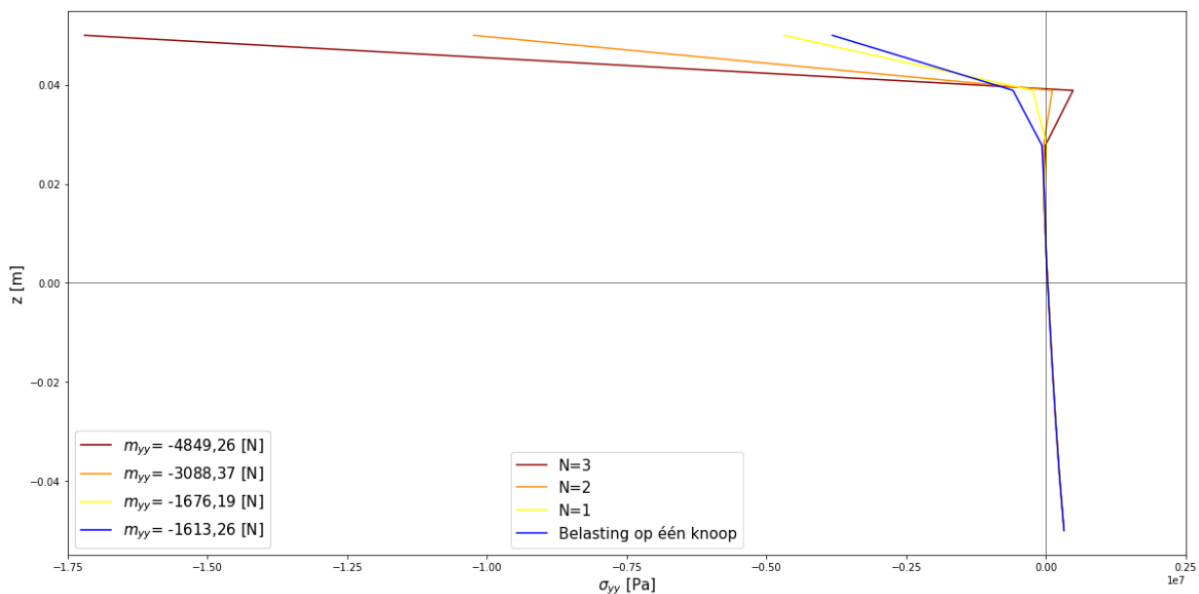
Figuur 9: Elementen rondom de puntlast voor een elementengrootte van 0,25t buiten het verfijningsgebied en 1 verfijningscycli



Figuur 10: Elementen rondom de puntlast voor een elementengrootte van 0,25t buiten het verfijningsgebied en 2 verfijningscycli



Figuur 11: Elementen rondom de puntlast voor een elementengrootte van 0,25t buiten het verfijningsgebied en 3 verfijningscycli



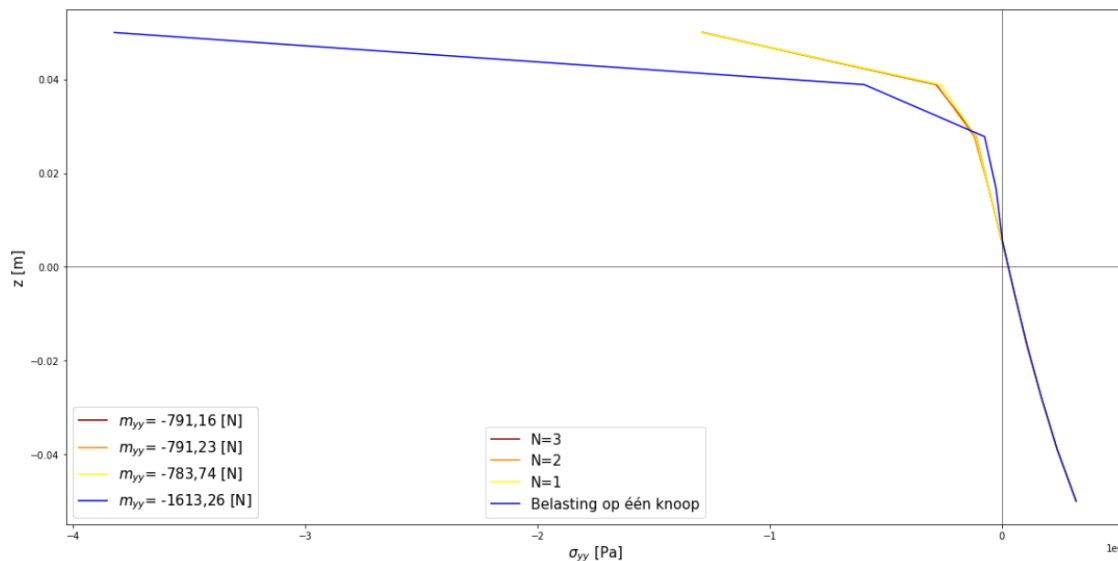
Figuur 12: Convergentietest voor een model met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één knoop met oplopende verfijningscycli

Er is na verdere verkleiningen van de elementengrootte geen verbetering van de spanningsverloop over de dikte waar te nemen. Hierdoor kan een onvoldoende kleine elementengrootte dus uitgesloten worden als oorzaak van de incorrecte spanningsverloop. Wel is een singulariteitachtig gedrag te observeren in de spanning bovenin de plaat, ter plaatse van de puntlast. Bij afnemende grootte van de elementengroottes (corresponderend met een hogere waarde van N) worden de spanningen bovenin de plaat bijna ongecontroleerd groter. Er is geen sprake van convergentie van de spanning bovenin de plaat en een verdere verkleining van de elementengroottes is onhaalbaar vanwege beperkingen van computergeheugen. Dit heeft ook een effect op de berekende momenten. Omdat het moment berekend wordt met numerieke integratie op het interval $\left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right]$, zal de uitdrukking waarmee het moment berekend wordt bestaan uit een sommatie met een component $\sigma_{yy} \left(z = \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2}$. Omdat bij verdere verkleining deze spanning vergroot wordt, wordt het corresponderende moment ook vergroot. De momenten zijn ook berekend per model en weergegeven in het kader linksonder in de plot in figuur 12. Zoals te zien is worden de momenten ook veel groter bij verdere verkleining van de elementen. De modellen met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één specifieke knoop resulteren dus in een spanning bovenin de plaat zonder convergentie, een moment zonder convergentie en een incorrecte spanningsverloop. Deze manier van het modelleren van de puntlast is dus niet geschikt.

3.3 Puntlast gemodelleerd met een verdeelde belasting

Een andere methode voor het modelleren van de belasting is een model met een vierkante belastingsgebied van $0,25t$ bij $0,25t$ in het exacte midden van de plaat. Zoals beschreven in het boek *Theory of Plates and Shells* van Timoshenko wordt voor de grootte van dit belastingsgebied $0,25t \times 0,25t$ aangehouden. In het boek van Timoshenko is dit belastingsgebied echter cirkelvormig. In dit onderzoek is gekozen voor een vierkante belastingsgebied om praktische redenen. Het middelpunt van dit belastingsgebied komt overeen met de locatie van de puntlast in het tweedimensionale model. De maximale spanningen zullen optreden in het midden van dit verfijningsgebied. In dit verfijningsgebied wordt een verdeelde belasting aangebracht zo dat $\frac{1}{16}t^2q = F$. Deze geconcentreerde verdeelde belasting representeert een puntlast.

Hetzelfde proces als voor de modellen met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één enkele knoop wordt nu ook uitgevoerd voor de modellen met een puntlast gemodelleerd als een geconcentreerde verdeelde belasting. Het resultaat is als volgt in figuur 13:



Figuur 13: Convergentietest voor een model met een puntlast gemodelleerd als een verdeelde belasting op een vierkant van $0,25t \times 0,25t$ met oplopende verfijningscycli

De spanningsverlopen en corresponderende momenten blijven nu relatief onveranderd voor afnemende elementengroottes. Hetzelfde geldt voor de momenten. Tevens zijn de knikken verdwenen, zoals te zien is in figuur 13 en 15 en representeert het spanningsverloop het verloop zoals beschreven door Timoshenko en Woinowsky-Krieger (1959) en getoond in figuur 8 beter. De spanningsverloop is bijna identiek aan het verloop van Timoshenko. Optredende verschillen kunnen eventueel verklaard worden doordat het verloop van Timoshenko geldig is voor cirkelvormige dikke platen, terwijl de plaat in deze modelvalidatie en onderzoek een vierkante dunne plaat is.

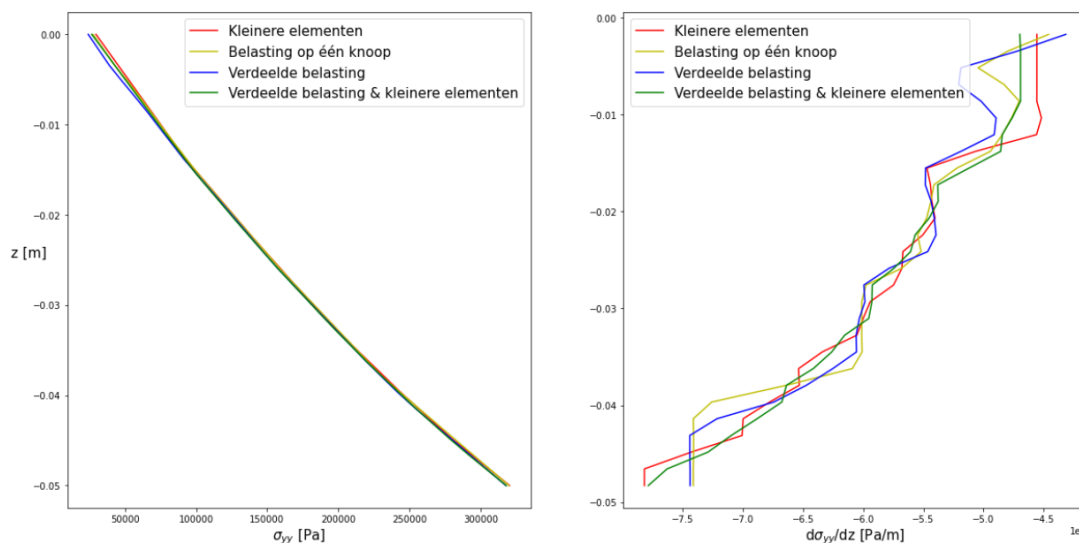
De oorzaak van het incorrecte spanningsverloop bij een model met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één enkele knoop kan dus gevonden worden bij de wijze waarop de puntlast gemodelleerd wordt. Een puntlast gemodelleerd als een verdeelde belasting op een belastingsgebied van $0,25t \times 0,25t$ resulteert in een realistisch spanningsverloop die in grote lijnen overeenkomstig is met het spanningsverloop zoals beschreven door Timoshenko in het boek *Theory of Plates and Shells* (1959). Vanwege de convergentie in het spanningsverloop kan aangenomen worden dat de nauwkeurigheid bij een elementengrootte van $0,25t$ buiten het verfijningsgebied en 3 verfijningscycli meer dan voldoende is.

Uit de vergelijkingen tussen de verschillende modelleringswijzen blijkt tevens dat de verschillen in modelleringswijzen nauwelijks van invloed is op de spanningsverloop in de onderste helft van de plaat. Dit geldt voor zowel modellen met een puntlast gemodelleerd als een kracht op één knoop als voor modellen met een puntlast gemodelleerd als een verdeelde belasting. Voor de spanning in de onderste helft is al sprake van

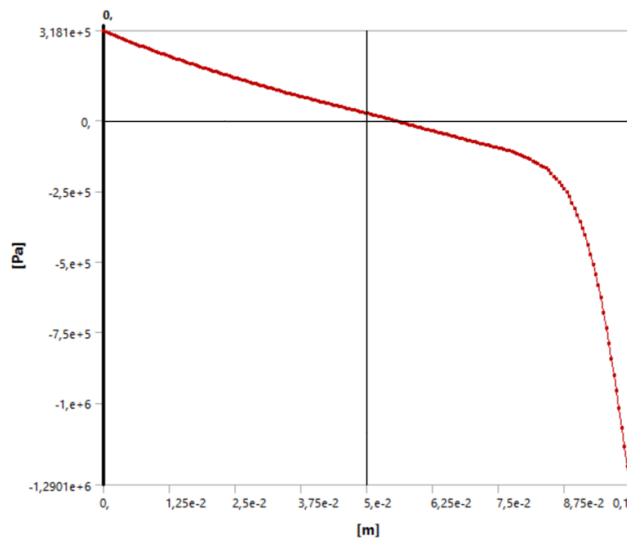
convergentie bij een elementengrootte van 0,5t buiten het verfijningsgebied en 3 verfijningscycli. Een verdere verkleining van de elementengroottes binnen het verfijningsgebied door een verkleining van de elementen buiten het verfijningsgebied is voor het verkrijgen van nauwkeurige spanningen in de onderste helft van de plaatdikte dus niet noodzakelijk. Tevens voldoet de spanningsverloop in de onderste helft van de plaat in grote lijnen aan de spanningsverloop zoals beschreven door Timoshenko. Om dit te illustreren is de spanningsverloop in de onderste helft van de plaat uitvergroot weergegeven in figuur 14. in combinatie met het verloop van de helling van de spanningsverloop over de plaatdikte. Het feit dat deze helling niet constant is vormt een goede ondersteuning van de overeenkomsten tussen de spanningsverloop zoals bepaald met het model en de spanningsverloop zoals beschreven door Timoshenko in alle modelopties.

Indien enkel de spanning in de onderkant van de plaat onderwerp van interesse is volstaat een model met een elementengrootte van 0,5t buiten het verfijningsgebied, 3 verfijningscycli en een puntlast gemodelleerd als een kracht op één knoop dus. Indien ook momenten nauwkeurig en correct bepaald dienen te worden, zijn verdere verbeteringen van het model noodzakelijk. De belangrijkste verbetering is het modelleren van de puntlast als een verdeelde belasting en het verkleinen van de elementengrootte buiten het verfijningsgebied tot 0,25t met een verfijningscyclusaantal van 1. Een verdere verkleining van de elementen binnen het verfijningsgebied door een vergroting van het aantal verfijningscycli is eveneens een optie, hoewel dit niet strikt noodzakelijk is. Bij een enkele verfijningscyclus is al sprake van convergentie. Indien deze verbeteringen nagelaten worden, zal een incorrecte spanningsverloop verkregen worden en zullen de berekende momenten incorrect zijn.

Omdat in dit onderzoek zowel momenten als spanningen bepaald dienen te worden, zullen de hiervoor beschreven verbeteringen uitgevoerd worden. Alle berekeningen voor alle plaatgevallen zullen dan uitgevoerd worden met de beschreven modelkarakteristieken.



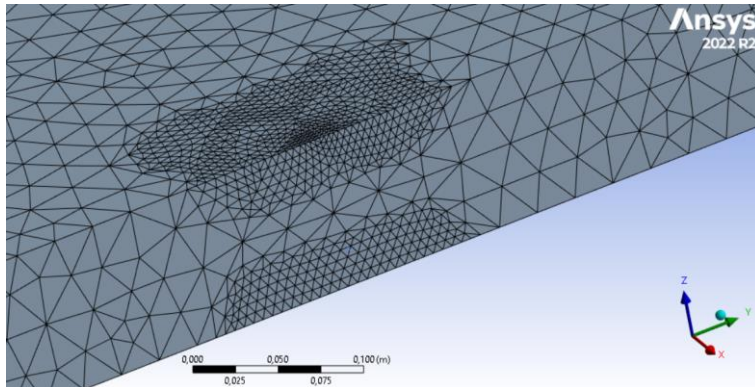
Figuur 14: links: Spanningsverloop over de dikte van de plaat in de onderste helft voor verschillende modelmethodes; rechts: Helling van de spanningsverloop in de onderste helft voor verschillende modelmethodes



Figuur 15: Spanningsverloop over de dikte van de plaat voor het toegepaste model; het spanningsverloop zorgt tevens voor drukkrachten in de doorsnede in beide richtingen: $N_x = -4,4 \text{ kN}$ en $N_y = -4,3 \text{ kN}$

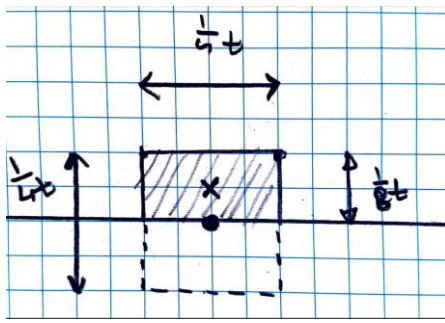
In dit onderzoek zal naar aanleiding van de bevindingen uit de analyse van de prestaties van de verschillende modelopties een model gebruikt worden met een vierkant verfijningsgebied van 100×100 millimeter rondom de puntlast, een puntlast gemodelleerd als een verdeelde belasting op een vierkant oppervlak van $0,25 \times 0,25 \text{ m}$ met een middelpunt van de vierkant die overeenkomt met de exacte locatie van de puntlast in het tweedimensionaal model, een elementengrootte buiten het verfijningsgebied van $0,25 \text{ t}$ en een verfijningscyclusaantal van 3 voor verdere nauwkeurigheid.

Een voorbeeld van een mesh voor deze modelopties is weergegeven in figuur 16 voor een plaatrand.



Figuur 16: Mesh aan de rand van de plaat voor het toegepaste model

Voor plaatranden moet tevens opgemerkt worden dat het modelleren van de puntlast als een verdeelde belasting op een belastingsgebied resulteert in een onnauwkeurigheid voor gevallen waarbij de puntlast zich bevindt op een plaatrand.

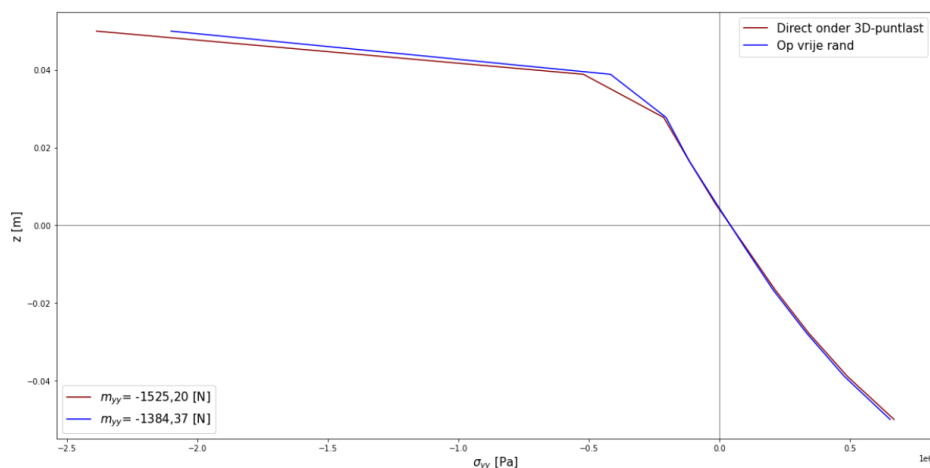


Figuur 17: Puntlast gemodelleerd als verdeelde belasting voor een puntlast op een vrije plaatrand

Voor platen met een puntlast op een vrije rand gemodelleerd met een verdeelde belasting ontstaat de situatie zoals beschreven in figuur 17. Het midden van het belastingsgebied komt nu niet overeen met de locatie van de puntlast in het tweedimensionaal model. Het is nu niet mogelijk om een belastingsgebied toe te passen met een geometrie zo dat het zwaartepunt van het belastingsvlak overeenkomt met de locatie van de puntlast in het tweedimensionaal model. De maximale spanningen zullen nu niet optreden op de locatie waar de spanningen beschouwd worden, ter plaatse van de vrije rand. De correcte elementengroottes voor de spanning in de onderkant van de plaat en het moment in y-richting moeten immers bepaald worden ter plaatse van de vrije rand. Dat is dan ook de locatie waar de spanningen beschouwd worden en waar de puntlast aangrijpt in het tweedimensionale model. Vanwege de wijze waarop de puntlast gemodelleerd is ontstaat er een afstand van $\frac{t}{16}$ tussen het feitelijke aangrijpingspunt van de puntlast in het driedimensionaal model en het aangrijpingspunt van de puntlast in het tweedimensionaal model. Hierdoor zijn de driedimensionale spanningen en momenten waarmee de correcte elementengroottes bepaald worden voor de plaatgevallen met een puntlast op een vrije rand niet de spanningen en momenten direct onder de puntlast, maar op een afstand $\frac{t}{16}$ van de puntlast.

Het verschil tussen de spanningen direct onder het driedimensionale puntlast gemodelleerd als een verdeelde belasting en de spanningen op een afstand $\frac{t}{16}$ van de puntlast op de vrije rand is weergegeven in figuur 18. De corresponderende momenten zijn weergegeven in het kader linksonder in de plot. Omdat het gaat om een moment per eenheid van lengte is de eenheid van het moment Newton.

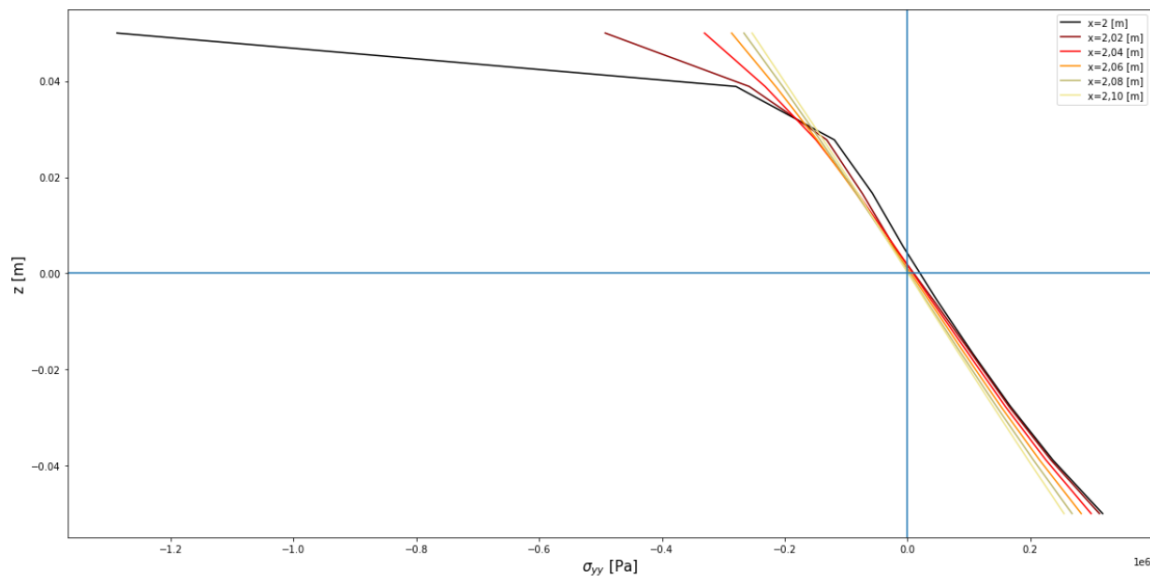
Het verschil tussen de spanningen en momenten direct onder het driedimensionale puntlast en de vrije rand waar de spanningen beschouwd worden kan verkleind worden door een belastingsgebied toe te passen met een geometrisch zwaartepunt dat zich dichterbij de plaatrand bevindt. Dat is in dit onderzoek niet gedaan.



Figuur 18: Het verschil tussen het spanningsverloop over de dikte direct onder de puntlast gemodelleerd als verdeelde belasting en het spanningsverloop ter plaatse van de vrije rand

Nu zijn de modeleigenschappen waarmee de spanningsverloop direct onder de puntlast correct bepaald kan worden vastgesteld. Hiernaast is het van belang dat de spanningsverlopen in de overige delen van de plaat ook

goed berekend worden. Voor deze spanningsverlopen geldt dat deze lineair-elastisch moeten zijn. De spanningsverloop zoals beschreven door Timoshenko is een gevolg van de aanwezigheid van de puntlast en treedt enkel op onder en direct rondom de puntlast. Naarmate de afstand tot de puntlast toeneemt, neemt de spanningsverloop steeds meer een lineair-elastisch verloop aan. Dit is tevens getoetst in het gekozen model en geïllustreerd in figuur 19. Voor verschillende x-coördinaten langs de lijn $y=2$ is het verloop van de spanning weergegeven. Direct onder de puntlast ter plaatse van $x=2$ volgt de spanning het verloop zoals beschreven door Timoshenko. Bij toenemende waarden van de x-coördinaat daalt de drukspanning in de bovenkant van de plaat in hoge tempo totdat deze gelijk is aan de spanning in de onderkant en daartussen een volkomen lineair verloop aanneemt.

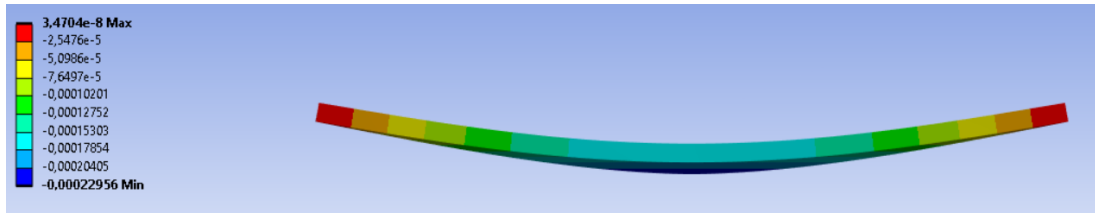


Figuur 19: Spanningsverloop over de dikte van de plaat voor verschillende afstanden vanaf het midden van de plaat langs de lijn $y=2$

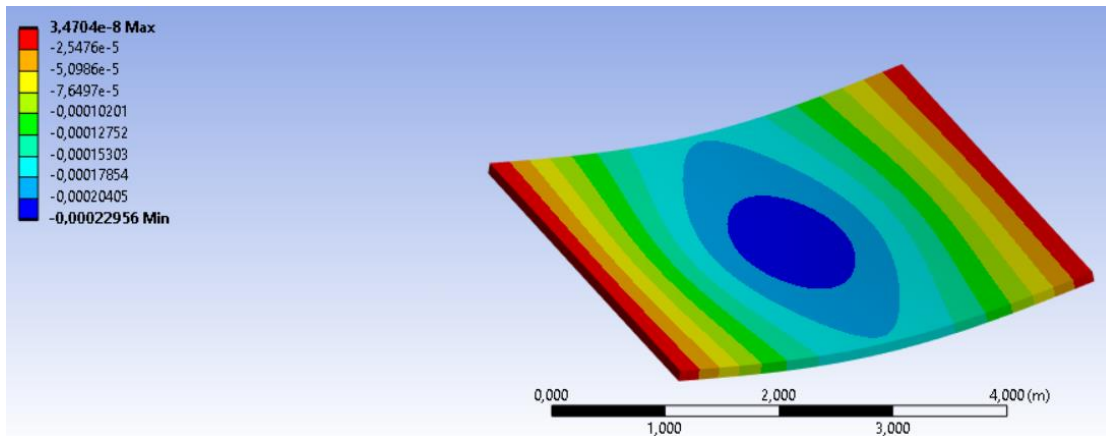
Ook de spanningen in de overige delen van de plaat verlopen dus zoals verwacht. De spanningen in x-richting bij de vrije randen en de spanningen in y-richting bij de scharnierende ondersteuning moeten gelijk zijn nul. Het is echter onwaarschijnlijk dat deze spanningen correct berekend zijn in het model. Spanningen worden in eindige-elementen namelijk niet ter plaatse van de randen bepaald, maar ter plaatse van Gaussische integratiepunten in hoekpunten van elementen. Van daaruit worden de spanningen bin de randen geëxtrapoleerd. Omdat de spanningen in de Gaussische integratiepunten ongelijk zijn aan nul, zullen de geëxtrapoleerde spanningen in de randen ook ongelijk zijn aan nul. Wanneer de elementengrootte nadert naar nul, zullen de geëxtrapoleerde spanningen ook naderen naar nul. Indien de spanningen in de randen ongelijk zijn aan nul in het model, is dat dus geen probleem maar een natuurlijk gevolg van de werking van het model. Zolang de spanningen significant kleiner zijn dan de spanningen in de rest van de plaat kan verondersteld worden dat het model naar behoren functioneert.

3.4 Vergelijking van modelresultaten met handberekeningen

Voor het toegepaste model zijn nu de vervormingen weergegeven in figuur 20 en 21 voor het uitvoeren van een validatie door middel van versimpelde handberekeningen.



Figuur 20: Een zijaanzicht van de doorbuiging van de plaat voor het toegepaste model



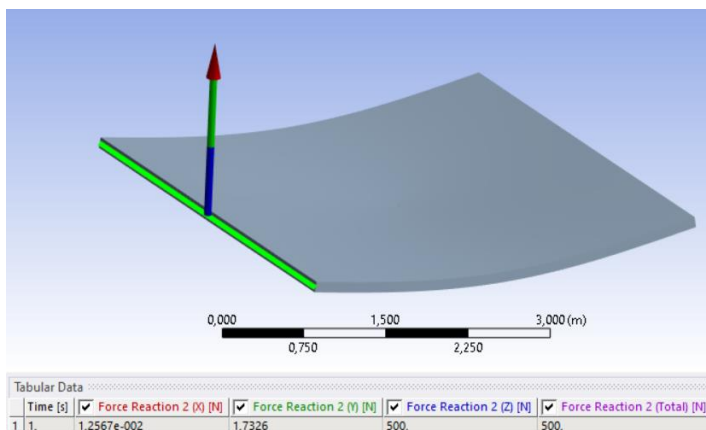
Figuur 21: Een bovenaanzicht van de doorbuiging van de plaat voor het toegepaste model

De doorbuiging in het midden van de plaat kan gecontroleerd worden aan de hand van een handberekening. Voor deze handberekening wordt de plaat beschouwd als een balk en wordt het vergeet-mij-nietje voor een balk belast door een puntlast in het midden ondersteund door twee scharnieren gebruikt:

$$w = \frac{Fl_y^3}{48EI} = \frac{Fl_y^3}{4Ebh^3}$$

$$w = \frac{1000 \cdot 4000^3}{4 \cdot 1,936 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 100^3} \approx 0,207 [mm]$$

De doorbuiging die op deze manier gevonden wordt zit erg in de buurt van de doorbuiging gevonden met het model van 0,230 millimeter. De doorbuiging gevonden met het model is dus realistisch.



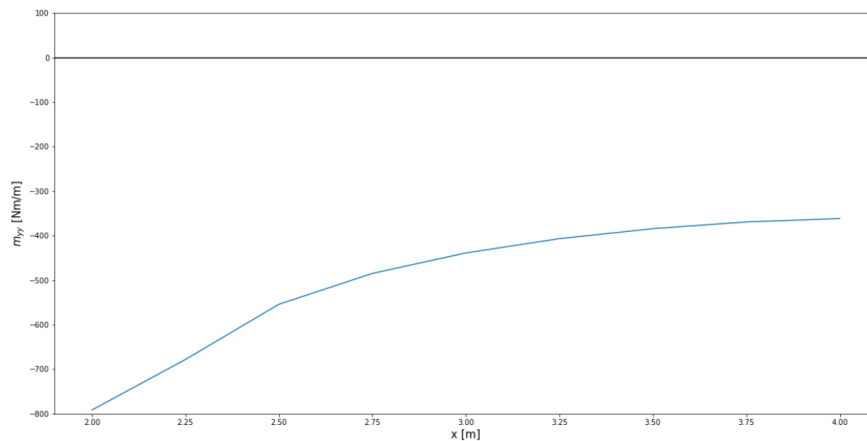
Figuur 22: De oplegreacties van de plaat voor het toegepaste model

De oplegreacties weergegeven in figuur 22 zijn in evenwicht met elkaar en de puntlast van 1 kN. Er zijn kleine oplegreacties in x- en y-richting. Een mogelijke verklaring hiervoor is ruis, afschuiving of vervormingen in x- en y-richting. Omdat de oplegreacties in x- en y-richting een fractie zijn van de oplegreacties in z-richting, zijn deze verwaarloosbaar. De gevonden oplegreacties zijn dus ook realistisch.

Ten slotte wordt een validatie uitgevoerd voor de momenten. Hiervoor worden de momenten in y-richting en x-richting langs de lijn $y=2$ tussen de coördinaten (2, 2) en (4, 2) met een interval van 0,25 meter. Zoals eerder vastgesteld zijn spanningen op voldoende afstand van de puntlast lineair-elastisch. Deze afstand is minimaal 0,1 meter. Alle momenten op bovengenoemde locaties met uitzondering van het moment ter plaatse van (2, 2) kunnen dus bepaald worden volgens een lineair-elastische spanningsverdeling over de plaatdikte. Het resultaat hiervan is weergegeven voor m_{yy} in figuur 23. Met de trapeziummethode kunnen deze momenten geïntegreerd worden langs de lijn $y=2$. Omdat het afgebeelde momentenverloop symmetrisch is langs de symmetrieas $x=2$, kan het totale moment $M_y(y=2)$ gevonden worden door het moment verkregen met de numerieke integratie te vermenigvuldigen met 2:

$$M_y(y=2) = 2 \int_{x=2}^{x=4} m_{yy}(x, y=2) dx$$

Op dezelfde wijze kan het moment in x-richting bepaald worden.



Figuur 23: Het verloop van het moment m_{yy} tussen de coördinaten (2, 2) en (4, 2)

De resultaten van deze berekeningen zijn als volgt:

$$M_y(y=2) \approx -1,95 \text{ [kNm]}; M_x(y=2) \approx -0,39 \text{ [kNm]}$$

$$\frac{M_x}{M_y} = 0,2 \text{ [-]}$$

Deze momenten kunnen vergeleken worden met het veldmoment voor een balk met een overeenkomstige mechanicaschema:

$$M_{y,max} = -\frac{1}{4} Fl_y = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 = -1 \text{ [kNm]}$$

Uit deze handberekening blijkt dat het moment zoals bepaald met het model in dezelfde orde van grootte zit als een balk met een gelijke mechanisch schema als de plaat in het model. De waarde gevonden met het model is dus realistisch en aanvaardbaar. Ook wat betreft momenten blijkt het model het fysiek en mechanisch gedrag van de plaat correct te modelleren. Tevens ligt de verhouding tussen het moment in x-richting en het moment in y-richting rond de Poissonwaarde van 0,1414.

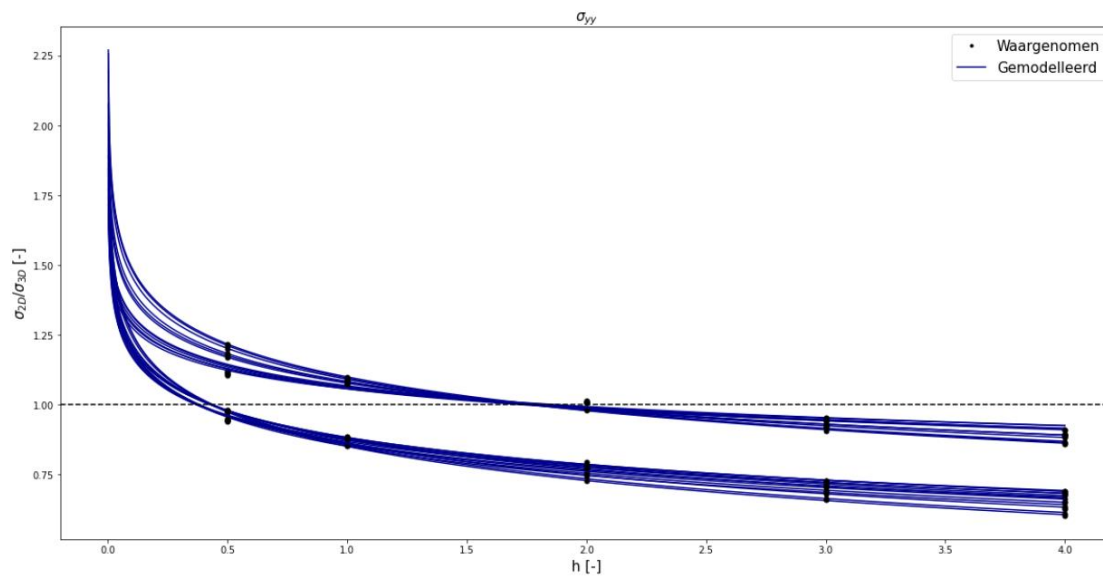
Het model is hiermee voldoende gevalideerd en kan gebruikt worden voor het berekenen van de werkelijke spanningen en momenten in de plaat.

4 Resultaten

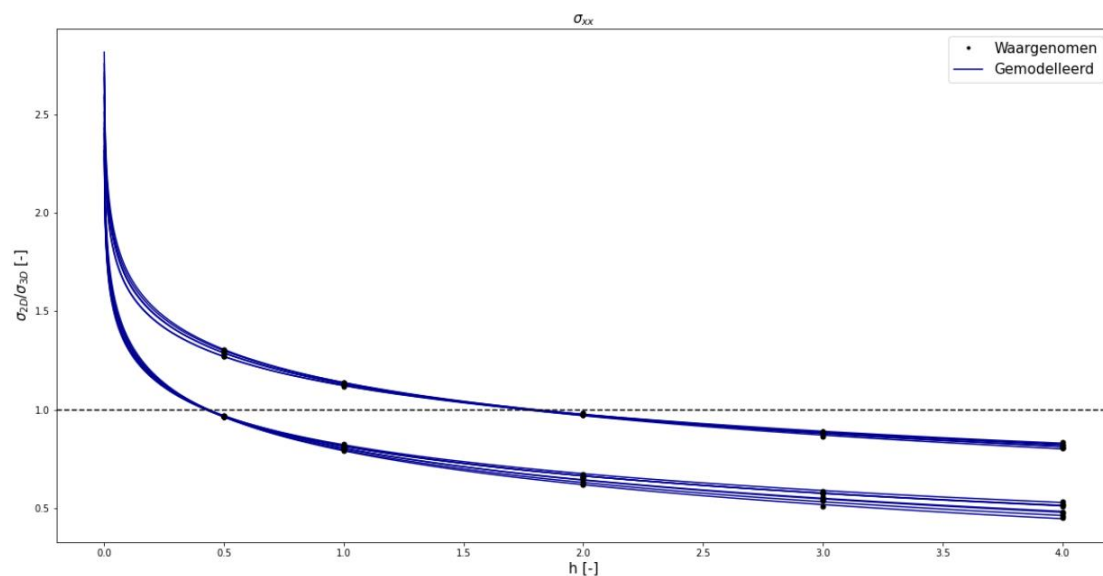
In dit hoofdstuk worden de verkregen resultaten van de eindige-elementenberekeningen en regressieanalyses getoond. Aan de hand van grafieken van de regressiemodellen wordt een beeld geschetst van het gedrag van de singulariteiten. In tabellen worden de correcte elementengroottes getoond.

In de onderstaande grafieken zijn de elementengroottes uitgezet tegen de verhouding tussen de spanning of het moment berekend met een tweedimensionaal model en de werkelijke met een driedimensionaal model berekende spanning of moment. De punten zijn resultaten van eindige-elementenberekeningen terwijl de blauwe lijnen de resultaten van de regressieanalyses zijn. Elke plaatgeval levert 5 punten en één blauwe lijn.

Het snijpunt tussen een regressiemodel voor een bepaalde plaatgeval en de lijn $y=1$ is de correcte elementengrootte voor het desbetreffende plaatgeval. In de grafieken in figuren 24 en 25 is te zien dat er op de lijn $y=1$ twee locaties zijn waar de snijpunten zich concentreren. Deze locaties kunnen bepaald worden als de gemiddelde correcte elementengroottes van de bundels van lijnen die door de locaties gaan. Elke concentratiepunt van de snijpunten correspondeert met een correcte elementengrootte voor een elementtype.

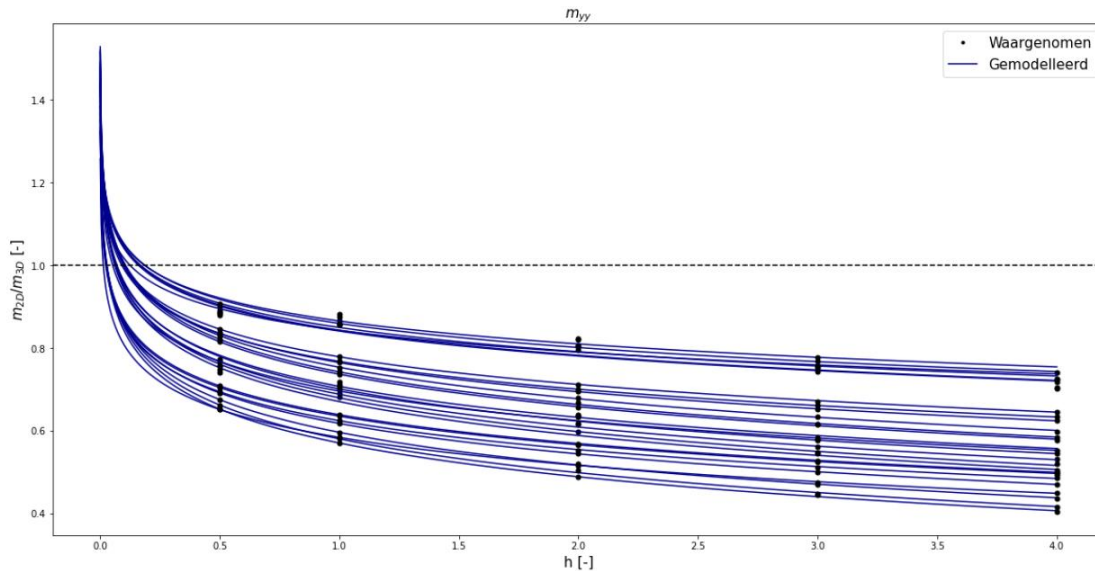


Figuur 24: Logaritmische regressiemodellen voor σ_{yy}

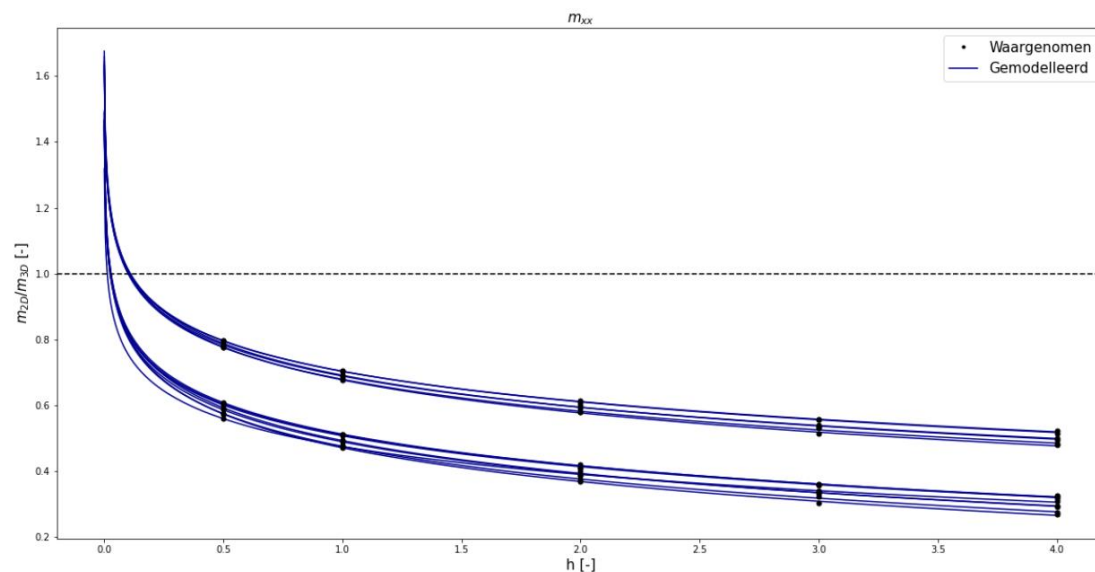


Figuur 25: Logaritmische regressiemodellen voor σ_{xx}

In figuur 26 kan waargenomen worden dat er op de lijn $y=1$ vier locaties zijn waar de snijpunten zich concentreren voor het moment in de y -richting. Elke concentratiepunt van de snijpunten correspondeert met een combinatie van een elementtype en belastinglocatie. Omdat er voor het moment in x -richting van slechts één belastinglocatie sprake is, zijn er, zoals in figuur 27 te zien is, twee concentratiepunten. Elke concentratiepunt in figuur 27 correspondeert met een correcte elementgrootte voor een elementtype. Beide correcte elementengroottes die de concentratiepunten representeren zijn voor belastingen in het midden van de plaat.



Figuur 26: Logaritmische regressiemodellen voor m_{yy}



Figuur 27: Logaritmische regressiemodellen voor m_{xx}

De correcte elementengroottes die voor de 26 platen zijn bepaald zijn verzameld in de tabellen 1 t/m 5. Naast de afzonderlijke correcte elementengroottes voor de 26 verschillende platen zijn tevens gemiddelde correcte elementengroottes bepaald. Er zijn twee groepen gemiddelde correcte elementengroottes bepaald. Een groep bestaat uit correcte elementengroottes gemiddeld over de 4 combinaties van belastinglocatie en plaatafmetingen voor de 3 plaatdiktes. Deze gemiddeldes zijn in de tabellen getoond als de dikgedrukte waarden in de verticale kolom aan de uiterste rechterkant van de tabellen. De andere groep bestaat uit correcte elementengroottes gemiddeld over de 3 plaatdiktes voor de 4 verschillende combinaties van belastinglocatie en plaatafmetingen. Deze waarden zijn in de tabellen getoond als de dikgedrukte waarden in

de onderste rij van de tabellen. Ten slotte is er een correcte elementengrootte gemiddeld over alle waarden. In de tabel is deze waarde de onderstreepte dikgedrukte waarde.

Wat opgemerkt kan worden is dat de correcte elementengroottes gemiddeld over de 4 combinaties van belastinglocatie en plaatafmetingen bijna identiek zijn aan de correcte elementengroottes gemiddeld over alle waarden. Dit impliceert dat de plaatdikte geen significante invloed heeft op de correcte elementengrootte. Wanneer de correcte elementengroottes gemiddeld worden over de plaatdiktes, ontstaat in de meeste gevallen een significante afwijking van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes weergegeven als de onderstreepte waarde.

Lineair σ_{xx}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,435	0,426	n.v.t.	n.v.t.	0,431
t=80 [mm]	0,437	0,428	n.v.t.	n.v.t.	0,433
t=100 [mm]	0,428	0,432	n.v.t.	n.v.t.	0,430
	0,433	0,429	n.v.t.	n.v.t.	<u>0,431</u>

Lineair σ_{yy}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,437	0,432	0,371	0,377	0,404
t=80 [mm]	0,439	0,428	0,384	0,370	0,405
t=100 [mm]	0,431	0,435	0,372	0,376	0,404
	0,436	0,432	0,376	0,374	<u>0,404</u>

Tabellen 1A & 1B: Correcte elementengroottes voor lineaire elementen voor spanningen

Kwadratisch σ_{xx}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	1,764	1,785	n.v.t.	n.v.t.	1,775
t=80 [mm]	1,759	1,798	n.v.t.	n.v.t.	1,779
t=100 [mm]	1,796	1,760	n.v.t.	n.v.t.	1,778
	1,773	1,781	n.v.t.	n.v.t.	<u>1,777</u>

Kwadratisch σ_{yy}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	1,767	1,781	1,734	1,821	1,776
t=80 [mm]	1,765	1,810	1,784	1,878	1,809
t=100 [mm]	1,801	1,779	1,849	1,806	1,809
	1,778	1,790	1,789	1,835	<u>1,798</u>

Tabellen 2A & 2B: Correcte elementengroottes voor kwadratische elementen voor spanningen

Lineair m_{xx}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,029	0,027	n.v.t.	n.v.t.	0,028
t=80 [mm]	0,029	0,026	n.v.t.	n.v.t.	0,028
t=100 [mm]	0,026	0,028	n.v.t.	n.v.t.	0,027
	0,028	0,027	n.v.t.	n.v.t.	<u>0,028</u>

Lineair m_{yy}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,029	0,027	0,071	0,053	0,045
t=80 [mm]	0,029	0,024	0,066	0,067	0,047
t=100 [mm]	0,026	0,027	0,062	0,065	0,045
	0,028	0,026	0,066	0,062	<u>0,046</u>

Tabellen 3A & 3B: Correcte elementengroottes voor lineaire elementen voor momenten

Kwadratisch m_{xx}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,109	0,107	n.v.t.	n.v.t.	0,108
t=80 [mm]	0,110	0,103	n.v.t.	n.v.t.	0,107
t=100 [mm]	0,100	0,107	n.v.t.	n.v.t.	0,104
	0,106	0,106	n.v.t.	n.v.t.	<u>0,106</u>

Kwadratisch m_{yy}	Midden		Rand		
	4 x 4	3,2 x 4,8	4x4	3,2 x 4,8	
t=60 [mm]	0,107	0,101	0,188	0,125	0,130
t=80 [mm]	0,104	0,091	0,167	0,186	0,137
t=100 [mm]	0,098	0,099	0,161	0,170	0,132
	0,103	0,097	0,172	0,160	<u>0,133</u>

Tabellen 4A & 4B: Correcte elementengroottes voor kwadratische elementen voor momenten

In tabel 5 zijn de correcte elementengroottes weergegeven voor de platen met afwijkende waarden voor de belasting of Poissonwaarde.

Hieruit blijkt dat een verdubbeling van de Poissonwaarde een halvering van de correcte elementengrootte voor momenten veroorzaakt. Het verdubbelen van de belasting heeft geen significante effecten.

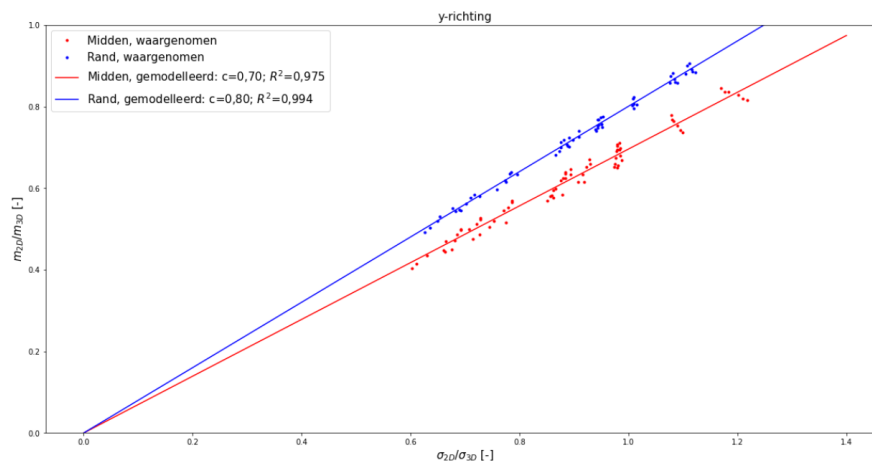
Midden, Linear; 3,2 x 4,8; t=60 [mm]	σ_{xx}	σ_{yy}	m_{xx}	m_{yy}
2v	0,429	0,435	0,014	0,014
2F	0,425	0,431	0,026	0,026

Tabel 5: Correcte elementengroottes voor afwijkende waarden voor de belasting of Poissonwaarde

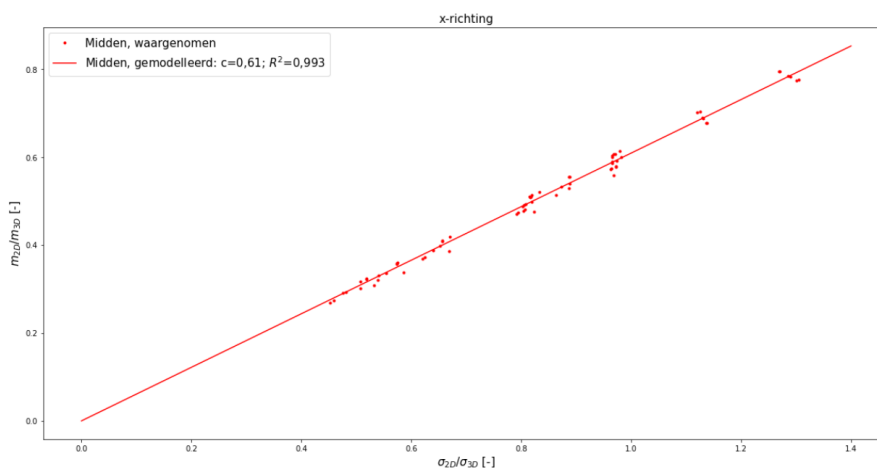
Naast de correcte elementengroottes is de serendipiteit aangetroffen dat er een lineair verband is tussen de waarde van het regressiemodel voor spanningen, $S(h)$, en de waarde van het regressiemodel voor de momenten, $M(h)$. Voor dit verband geldt het volgende:

$$\frac{m_{2D}}{m_{3D}} = c \cdot \frac{\sigma_{2D}}{\sigma_{3D}}; M(h) = c \cdot S(h)$$

Hierin is m_{2D} het moment berekend met een tweedimensionaal model, m_{3D} het werkelijke moment bepaald met een driedimensionaal model, σ_{2D} de spanning in de onderkant van de plaat berekend met een tweedimensionaal model en σ_{3D} de werkelijke spanning in de onderkant van de plaat berekend met een driedimensionaal model. In figuren 28 en 29 zijn de gevonden verbanden inclusief de waarden van de coëfficiënten en de R^2 -waarden getoond voor zowel de y-richting als de x-richting. De waarden van de coëfficiënten bleken afhankelijk te zijn van de richting van het moment en de belastinglocatie. Om deze reden zijn er voor de y-richting twee lijnen te zien.



Figuur 28: Grafieken van de lineaire relatie tussen $M(h)$ en $S(h)$ voor de y-richting



Figuur 29: Grafiek van de lineaire relatie tussen $M(h)$ en $S(h)$ voor de x-richting

5 Discussie

Aan de hand van de uitgevoerde berekeningen en de gevonden resultaten zijn correcte elementengroottes gevonden voor zowel spanningen als momenten voor de verschillende beschouwde plaatgevallen. In dit hoofdstuk wordt met $S(h)$ en $M(h)$ gerefereerd naar de verhouding tussen een met een tweedimensionale model berekende waarde en een met een driedimensionale model berekende werkelijke waarde voor respectievelijk de spanningen en momenten, oftewel de regressiemodellen voor respectievelijk de spanningen en momenten. De correcte elementengroottes worden gebruikt voor de formulering van vuistregels, waarna de nauwkeurigheid en de geldigheid van de vuistregels bepaald worden.

5.1 Correcte elementengroottes en vuistregels voor spanningen

Voor spanningen in de y-richting worden gemiddelde correcte elementengroottes van 0,40 voor lineaire elementen en 1,80 voor kwadratische elementen gevonden. Voor spanningen in de x-richting zijn deze waarden 0,43 en 1,78. Hoewel dit de indruk opwekt dat er verschillende gemiddelde correcte elementengroottes zijn voor de twee richtingen is dit niet het geval. In de berekening van de gemiddelde waarden van de correcte elementengroottes voor de x-richting zijn namelijk geen correcte elementengroottes voor vrije randen meegerekend, omdat de spanningen in x-richting op vrije randen gelijk zijn aan nul. Wanneer de gemiddelde correcte elementengroottes voor het midden van de plaat voor de x-richting vergeleken worden met de y-richting, blijkt er een verwaarloosbaar verschil te zijn. Hierdoor kan dus geconcludeerd worden dat er geen verschillen zijn tussen correcte elementengroottes voor de x- en y-richtingen. Daarom kan een gemiddelde correcte elementengrootte van 0,40 voor lineaire elementen en 1,80 voor kwadratische elementen gehanteerd worden voor alle spanningen.

Voor kwadratische elementen geldt een grotere gemiddelde correcte elementengrootte dan voor lineaire elementen. Dit is in lijn met de verwachting, aangezien kwadratische elementen nauwkeuriger zijn dan lineaire. Om hetzelfde resultaat te behalen met lineaire elementen als met kwadratische in een berekening, dient voor lineaire elementen een kleinere elementengrootte gebruikt te worden.

Voor het formuleren van de vuistregels dient een afweging gemaakt te worden tussen nauwkeurigheid en praktische toepasbaarheid. Om de spanningen correct te bepalen zou een elementengrootte van 1,80 voor kwadratische en 0,40 voor lineaire elementen gekozen moeten worden. Voor een vuistregel is het acceptabel om deze waarden af te ronden op respectievelijk 2 en 0,5. Dit resulteert in simpelere en praktischere vuistregels voor de spanningen. Deze afronding resulteert in een verschil van Δh tussen de correcte elementengrootte en de elementengrootte gebruikt in een eindige-elementenberekening en daarmee een lichte onderschatting van de spanningen.

Een indicatie van het maximum van deze onderschatting voor kwadratische elementen kan verkregen worden door de helling van het regressiemodel voor de spanningen rond $h=1,9$ in beschouwing te nemen. De maximale onderschatting treedt op bij het plaatgeval met de hoogste waarde voor de a-coëfficiënt, omdat de helling dan het grootst is. Voor de spanningen in y-richting voor kwadratische elementen geldt voor de a-coëfficiënt een maximale waarde van -0,17. Met deze waarde kan door middel van centrale differenties met een stapgrootte $0,5\Delta h$ die overeenkomt met de helft van het verschil tussen de correcte elementengrootte en de elementengrootte gehanteerd in de vuistregel een schatting gemaakt worden van de helling van het regressiemodel tussen $h=1,8$ en $h=2,0$ rond $h=1,9$ voor kwadratische elementen:

$$\frac{-0,17 \ln\left(\frac{2}{1,8}\right)}{\Delta h} \approx \frac{dS}{dh}$$

Met de gevonden helling kan nu een benadering van de onderschatting door het afronden van de correcte elementengrootte gevonden worden:

$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h = -0,17 \ln\left(\frac{2}{1,8}\right) \approx -0,018$$

Door een vuistregel van 2 keer de plaatdikte te hanteren voor kwadratische elementen ontstaat dus een maximale onderschatting van 1,8% van de spanningen. Deze onderschatting zou eventueel ongedaan gemaakt

kunnen worden door na de berekening met het tweedimensionale model en de elementengrootte van 2 keer de plaatdikte de gevonden spanning te vermenigvuldigen met 1,02.

Op vergelijkbare manier kan een indicatie van de mate van onderschatting gevonden worden voor lineaire elementen. Voor lineaire elementen geldt een maximale a-coëfficiënt van -0,18. Voor de onderschatting geldt dan:

$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h = -0,18 \ln\left(\frac{0,5}{0,4}\right) \approx -0,040$$

Door een vuistregel van 0,5 keer de plaatdikte te hanteren voor lineaire elementen ontstaat dus een maximale onderschatting van 4% van de spanningen. Deze onderschatting zou eventueel ongedaan gemaakt kunnen worden door na de berekening met het tweedimensionale model en de elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte de gevonden spanning te vermenigvuldigen met 1,04.

Omdat de onderschatting kleiner is bij de vuistregel voor kwadratische elementen dan bij de vuistregel voor lineaire elementen, kan het dus voordeliger zijn om gebruik te maken van kwadratische elementen. De onderschatting is echter op simpele wijze ongedaan te maken door middel van een correcte na de berekening door simpelweg de gevonden spanning te vermenigvuldigen met 1,02 of 1,04 afhankelijk van het gebruikte elementtype. Deze correctie zal echter in bepaalde plaatgevallen resulteren in een lichte overschatting van de spanning, omdat de gevonden onderschattingen van 2% en 4% maxima zijn. Een overschatting van een spanning is vanuit constructieve veiligheidsoverwegingen echter gewenster dan een onderschatting.

Voor spanningen in x-richting geldt voor kwadratische elementen een maximale waarde voor de a-coëfficiënt van -0,24 en voor lineaire elementen een waarde van -0,25. Dit is aanzienlijk groter dan de maximale waarde voor de spanningen in y-richting. De onderschatting zal voor spanningen in x-richting dan ook groter zijn. Voor kwadratische elementen geldt:

$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h = -0,24 \ln\left(\frac{2}{1,8}\right) \approx -0,025$$

Voor lineaire elementen geldt:

$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h = -0,25 \ln\left(\frac{0,5}{0,4}\right) \approx -0,056$$

De nauwkeurigheid van de vuistregel is dus slechter voor spanningen in x-richting dan voor spanningen in y-richting. Voor kwadratische elementen is de maximale onderschatting 2,5%. Voor lineaire elementen is dit 5,6%.

De gevonden vuistregels kunnen gebruikt worden voor alle plaattypen en -dikten. De eerder genoemde correcte elementengroottes van 1,80 voor kwadratische en 0,40 voor lineaire elementen zijn gemiddelde waardes voor alle plaattypen en -dikten. Naast de totale gemiddeldes zijn ook gemiddelde correcte elementengroottes voor specifieke plaattypen en -diktes bepaald. Deze waardes zijn weergegeven in de tabellen in hoofdstuk 5. Het hanteren van een elementengrootte van 2 voor kwadratische en 0,5 voor lineaire elementen resulteert in een verschil van Δh tussen de gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaatgeval of plaatdikte en de elementengrootte in de vuistregel op dezelfde manier als bij de totale gemiddelde correcte elementengroottes.

Omdat er nu niet gekeken wordt naar het verschil tussen de elementengrootte uit de vuistregel en de totale gemiddelde correcte elementengrootte, maar naar het verschil tussen de elementengrootte uit de vuistregel en gemiddelde correcte elementengroottes voor specifieke plaattypen- en diktes, zijn er meerdere waardes voor Δh . Deze waardes hangen nu af van de plaattype of plaatdikte. Voor de waardes Δh kunnen voor specifieke plaattypen of plaatdiktes corresponderende gemiddelde waardes voor de a-coëfficiënten bepaald worden. Vervolgens kan met de onderstaande herleiding de onderschatting bepaald worden als functie van Δh en de gemiddelde waarde van de a-coëfficiënt:

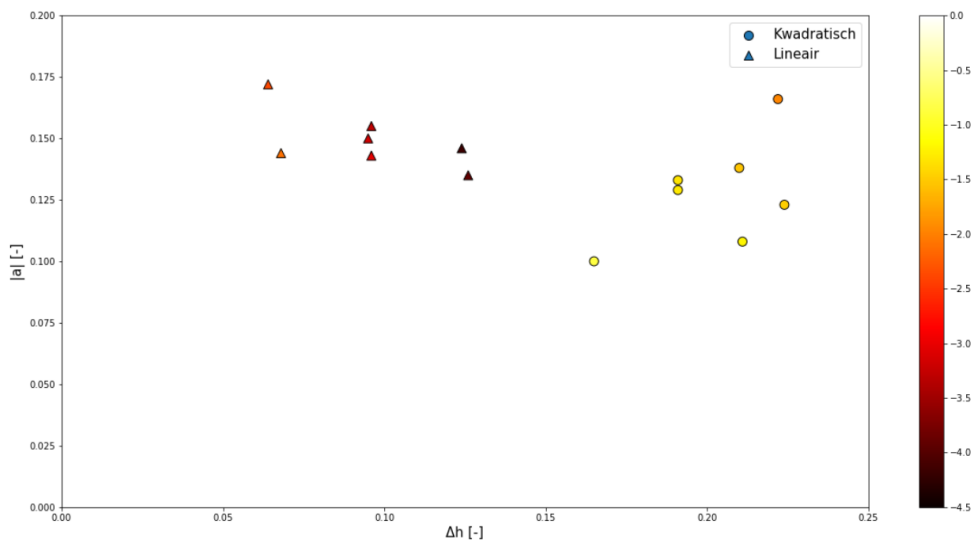
$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h \approx \frac{a \ln(2) - a \ln(2 - \Delta h)}{\Delta h} \Delta h = \ln\left(\frac{2^a}{(2 - \Delta h)^a}\right)$$

Dezelfde herleiding voor lineaire elementen levert:

$$\Delta S = \frac{dS}{dh} \cdot \Delta h \approx \frac{a \ln(0,5) - a \ln(0,5 - \Delta h)}{\Delta h} \Delta h = \ln\left(\frac{0,5^a}{(0,5 - \Delta h)^a}\right)$$

Met deze herleidingen kunnen voor de 7 gemiddelde correcte elementengroottes en de corresponderende gemiddelde a-coëfficiënten van de 4 plaattypen en 3 plaatdiktes uit hoofdstuk 4 de bijbehorende onderschattingen bepaald worden. De onderschattingen zijn gemiddelde onderschattingen voor specifieke combinaties van belastinglocaties en plaatafmetingen of plaatdiktes, omdat voor de a-coëfficiënt de gemiddeldes voor de specifieke combinaties van belastinglocaties en plaatafmetingen of plaatdiktes zijn gebruikt. De resultaten daarvan zijn weergegeven in de onderstaande grafiek.

In de onderstaande grafiek in figuur 30 is voor zowel lineaire als kwadratische elementen voor de spanning in y-richting de onderschatting ten gevolge van het hanteren van een op 0,5 of 2 afgeronde elementengrootte te zien voor de specifieke plaattypen en -dikten. De onderschatting is gevisualiseerd met kleuren. Hoe donkerder de kleur van een stip of driehoek, hoe groter de onderschatting. De waarden van de onderschattingen in procenten zijn af te lezen in de kleurenbalk. Op de x-as staat het verschil Δh tussen de gemiddelde correcte elementengrootte van een bepaalde plaattype of -dikte en de elementengrootte van 0,5 of 2 uit de vuistregel. De stippen en driehoeken representeren elk een plaattype of plaatdikte.

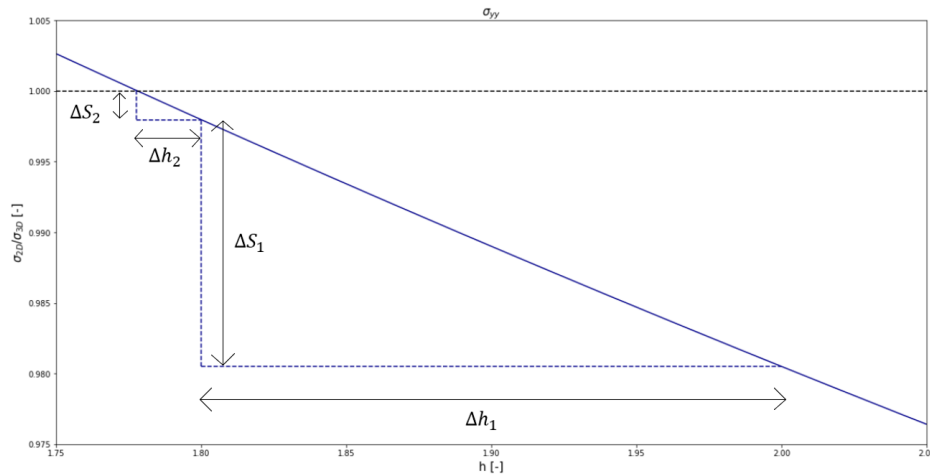


Figuur 30: Gemiddelde onderschattingen van σ_y

De getoonde onderschattingen betreffen totale onderschattingen. De totale onderschattingen liggen voor kwadratische elementen tussen ongeveer 1% en 2% en voor lineaire elementen tussen ongeveer 2% en 4%. Omdat de onderschattingen voor specifieke plaattypen en -dikten nauwelijks verschillen van en in dezelfde orde van grootte zitten als de maximale onderschatting van 2% en 4% bepaald aan de hand van de totale gemiddelde correcte elementengrootte, kan geconcludeerd worden dat de variatie van de correcte elementengroottes voor verschillende plaattypen en -dikten geen significante invloed heeft op de vuistregels.

De gevonden vuistregels kunnen dus voor alle onderzochte plaattypen en -diktes gebruikt worden. Eventuele vermenigvuldiging van de met het tweedimensionale eindige-elementenmodel gevonden spanning met 1,02 voor kwadratische en 1,04 voor lineaire elementen elimineert voor de spanning in y-richting de onderschattingen die ontstaan door het afronden van de correcte elementengrootte voor het formuleren van de vuistregels en resulteert bij sommige plaattypen- en diktes zelfs in een lichte overschatting. Voor de spanning in x-richting kan vermenigvuldigd worden met 1,03 voor kwadratische elementen en met 1,06 voor lineaire elementen voor een eliminatie van de onderschatting.

Een andere manier om de verwaarloosbaarheid van de invloed van de plaattypen en -diktes op de vuistregel aan te tonen kan gevisualiseerd worden aan de hand van de volgende afbeelding in figuur 31:



Figuur 31: Componenten van de onderschatting

Het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengrootte op 2 voor het formuleren van een vuistregel zorgt voor een verschil Δh_1 en een corresponderende onderschatting ΔS_1 . Het afronden van de gemiddelde correcte elementengrootte van een bepaalde plaattype of -dikte op een algehele gemiddelde correcte elementengrootte 1,8 resulteert in een bijkomend verschil Δh_2 en een corresponderende bijkomende onderschatting ΔS_2 .

Hierbij moet opgemerkt worden dat indien de gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaattype of -dikte groter is dan 1,8, de algehele gemiddelde correcte elementengrootte, het totale verschil tussen de gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaattype of -dikte kleiner wordt dan het verschil tussen de algehele gemiddelde correcte elementengrootte en de vuistregel van 0,2. Dit betekent dat de onderschatting ten gevolge van het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengrootte op 2 deels wordt gecompenseerd door een overschatting ten gevolge van het afronden van een gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaattype of -dikte voor het desbetreffende plaattype of -dikte. Nu kan een herleiding gevonden worden voor de onder- of overschatting ten gevolge van het afronden van een gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaattype of -dikte op een algehele gemiddelde correcte elementengrootte op dezelfde wijze als voor de onderschatting ten gevolge van het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes op de elementengroottes in de vuistregels.

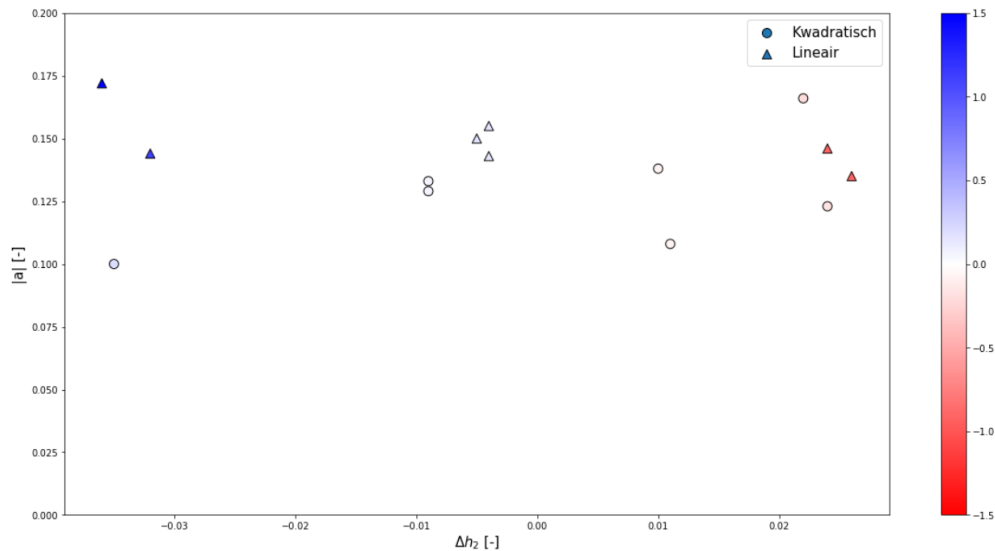
Voor kwadratische elementen leidt dit tot:

$$\Delta S_2 = \ln\left(\frac{1,8^a}{(1,8 - \Delta h_2)^a}\right)$$

Voor lineaire elementen leidt dit tot:

$$\Delta S_2 = \ln\left(\frac{0,4^a}{(0,4 - \Delta h_2)^a}\right)$$

In de onderstaande grafiek in figuur 32 zijn de berekende onder- of overschattingen voor de verschillende plaattypes- of plaatdiktes weergegeven voor beide elementtypen. De waarden van de onder- of overschattingen in procenten kunnen afgelezen worden in de kleurenbalk. Op de x-as staat Δh_1 , het verschil tussen de gemiddelde correcte elementengrootte van een bepaalde plaattype of -dikte. Positieve waarden voor dit verschil gelden voor waarden waarbij de gemiddelde correcte elementengrootte van een bepaalde plaattype of -dikte kleiner is dan de algehele gemiddelde correcte elementengrootte. Negatieve waarden voor dit verschil gelden voor waarden waarbij de gemiddelde correcte elementengrootte van een bepaalde plaattype of -dikte groter is dan de algehele gemiddelde correcte elementengrootte. Op de y-as staat de absolute waarde van de gemiddelde a-coëfficiënt voor een bepaalde plaattype of -dikte.



Figuur 32: Onder- of overschatting ten gevolge van het afronden van gemiddelde correcte elementengroottes van specifieke combinaties van plaatafmetingen en belastinglocaties of plaatdiktes op algehele gemiddelde correcte elementengroottes

Voor kwadratische elementen liggen de waarden voor ΔS_2 tussen ongeveer -0,2% en 0,2%, een onderschatting van 0,20% en een overschatting van 0,20%. Voor lineaire elementen is dit tussen -0,9% en 1,5%, een onderschatting van 0,9% en een overschatting van 1,5%. Overschattingen ten gevolge van de afronding van de gemiddelde correcte elementengroottes op algehele gemiddelde correcte elementengroottes zijn gunstig voor de nauwkeurigheid van de vuistregel voor het desbetreffende plaattype of -dikte waarbij de overschatting optreedt, omdat deze overschatting voor een gedeelte de onderschatting ten gevolge van de afronding van de algehele gemiddelde correcte elementengrootte op de elementengrootte in de vuistregel compenseert.

Uit deze grafiek en de berekende waarden voor de over- en onderschattingen blijkt dat de onder- en overschattingen ten gevolge van de afronding van gemiddelde correcte elementengroottes voor specifieke plaattypen of -dikten op algehele gemiddelde correcte elementengroottes verwaarloosbaar is. Dit impliceert dat de gevonden vuistregels voor de elementengroottes van 0,5 en 2 voor alle plaattypen en -diktes toepasbaar zijn. De variatie in gemiddelde correcte elementengrootte voor verschillende plaattypen en -diktes zorgt niet voor merkbare afwijkingen van de correcte spanningen bij toepassing van de vuistregels bovenop de afwijking die ontstaat door het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes op de waarden uit de vuistregels.

De afwijkingen die ontstaan door de afronding van gemiddelde correcte elementengroottes voor specifieke plaattypen of -dikten op algehele gemiddelde correcte elementengroottes is een orde kleiner dan het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes op de waarden uit de vuistregels. Dit kan bevestigd worden door de verhoudingen $\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$ te bepalen voor de plaattypen en -diktes. Voor deze verhouding geldt voor kwadratische elementen de volgende uitdrukking:

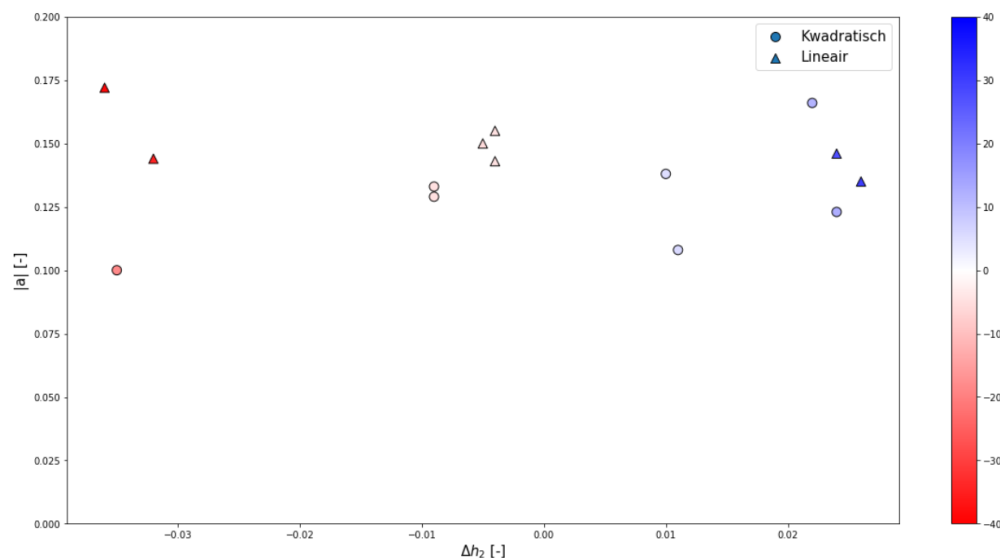
$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \log_{\left(\frac{2^a}{1,8^a}\right)} \left(\frac{1,8^a}{(1,8 - \Delta h_2)^a} \right)$$

Voor lineaire elementen geldt:

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \log_{\left(\frac{0,5^a}{0,4^a}\right)} \left(\frac{0,4^a}{(0,4 - \Delta h_2)^a} \right)$$

In de onderstaande grafiek in figuur 33 zijn voor zowel lineaire als kwadratische elementen de bijkomende afwijkingen ten gevolge van de afronding van gemiddelde correcte elementengroottes voor specifieke plaattypen of -dikten op algehele gemiddelde correcte elementengroottes weergegeven als percentage van de afwijking ten gevolge van het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes op de waarden

uit de vuistregels. Negatieve percentages duiden op een bijkomende onderschatting, positieve waardes op een bijkomende overschatting die de onderschatting ten gevolge van het afronden van de algehele gemiddelde correcte elementengroottes op de waardes uit de vuistregels gedeeltelijk compenseert. Deze waardes zijn af te lezen in de kleurenbalk.



Figuur 33: Verhouding tussen ΔS_2 en ΔS_1 in procenten

Voor kwadratische elementen liggen de waardes tussen ongeveer -20% en 13%, een onderschatting van 20% en een overschatting van 13%. Voor lineaire elementen is dit tussen ongeveer -40% en 30%, een onderschatting van 40% en een overschatting van 30%.

Exakte waardes van de grafieken in figuren 30, 32 en 33 voor de verschillende plaattypes en -diktes kunnen gevonden worden in tabel 6. Uit de totale onderschattingen blijkt dat de vuistregel elementengrootte is 2 keer de plaatdikte nauwkeuriger is. Alle waardes zijn voor de spanning in y-richting. Indien de vuistregels gelden voor alle plaattypes en -diktes voor de spanning in y-richting, zal dit ook het geval zijn voor de spanning in x-richting. De onderschattingen zullen voor de spanningen in x-richting wel groter zijn dan de onderschattingen voor de spanningen in y-richting. Deze constatering volgt uit het feit dat de maximale onderschatting ten gevolge van de afronding van de algehele gemiddelde correcte elementengrootte op de elementengrootte uit de vuistregel groter was bij de spanning in x-richting dan bij de spanning in y-richting.

Naast de waardes ΔS_1 en ΔS_2 ontstaat er tevens een onder- of overschatting door het afronden van de correcte elementengrootte van een bepaalde combinatie van plaattype en plaatdikte op een gemiddelde correcte elementengrootte voor een plaattype of -dikte. Deze over- of onderschatting wordt echter verwaarloosd. Deze over- of onderschatting is verwaarloosbaar omdat het een orde kleiner is dan de over- of onderschatting ten gevolge van de afronding van de gemiddelde correcte elementengrootte voor een bepaalde plaattype of -dikte op een algehele gemiddelde correcte elementengrootte. Het verschil tussen de correcte elementengrootte voor een bepaalde combinatie van plaattype en -dikte en de gemiddelde correcte elementengrootte voor het plaattype of -dikte is namelijk een orde kleiner dan het verschil tussen de gemiddelde correcte elementengrootte voor de plaattype of -dikte en de algehele gemiddelde correcte elementengrootte.

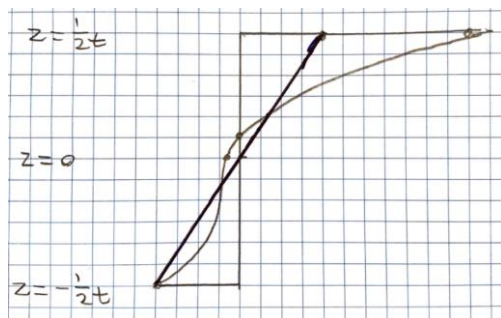
De vuistregels gelden tevens voor verschillende belastingen en Poissonwaardes. De correcte elementengroottes voor de plaatgevallen met een verschillende belasting of Poissonwaarde verschillen niet significant van de gemiddelde correcte elementengroottes voor platen van 60 millimeter en voor platen van 3,2 x 4,8 met een belasting in het midden.

σ_{yy}	Lineair			Kwadratisch		
	ΔS [%]	ΔS_2 [%]	$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$ [%]	ΔS [%]	ΔS_2 [%]	$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$ [%]
Midden; 4 x 4	-2,36	1,48	-38,62	-1,95	-0,20	11,67
Midden; 3,2 x 4,8	-2,11	1,11	-34,49	-1,53	-0,08	5,29
Rand; 4 x 4	-4,16	-0,90	27,73	-1,20	-0,07	5,82
Rand; 3,2 x 4,8	-3,92	-0,91	30,12	-0,86	0,19	-18,28
t=60 [mm]	-3,05	0,14	-4,46	-1,46	-0,17	12,74
t=80 [mm]	-3,16	0,19	-5,57	-1,29	0,06	-4,73
t=100 [mm]	-3,30	0,15	-4,46	-1,33	0,07	-4,73

Tabel 6: Onder- en overschattingen van de spanningen in y-richting

5.2 Correcte elementengroottes en vuistregels voor momenten

Voor de momenten is het eveneens mogelijk om correcte elementengroottes af te leiden. Deze correcte elementengroottes zijn kleiner dan voor de spanningen. Dit kan verklaard worden aan de hand van het verloop van de spanning over de dikte zoals in figuur 34 en de illustratie in figuur 8. Indien de correcte elementengrootte voor de spanning in de onderkant gehanteerd zou worden voor het bepalen van de momenten, zou een tweedimensionale berekening resulteren in een grote onderschatting van de momenten. In een tweedimensionale berekening is de spanningsverdeling over de dikte namelijk lineair-elastisch en is de spanning aan de bovenkant van de plaat gelijk en tegengesteld aan de spanning in de onderkant. De oppervlakte van de lineair-elastische spanningsverloop, en dus het moment, is kleiner dan de oppervlakte onder de werkelijke spanningsverdeling, het werkelijke moment, zoals te zien is in de illustratie in figuur 34. Deze onderschatting ontstaat doordat de lineair-elastische spanningsverdeling de drukpiek aan de bovenkant van de plaat ter plaatse van het aangrijpingspunt van de puntlast niet correct modelleert en erg onderschat. Omdat er bij de correcte elementengrootte voor de spanningen voor de momenten nog sprake is van een onderschatting en een onderschatting van het moment correspondeert met een elementengrootte groter dan de correcte elementengrootte, zoals te zien is in de grafieken van de regressiemodellen, is de correcte elementengrootte voor de momenten kleiner dan de elementengrootte voor de spanningen.



Figuur 34: Een vergelijking van de lineair-elastische spanningsverdeling corresponderend met een spanning aan de onderkant van de plaat berekend met de correcte elementengroottes voor spanningen met de werkelijke spanningsverdeling: het absolute oppervlakte tussen de z-as en de werkelijke spanning is groter dan het absolute oppervlakte tussen de z-as en de lineair-elastische spanningsverdeling; dit veroorzaakt een onderschatting van het werkelijke moment bij gebruik van correcte elementengroottes voor de spanning in de onderkant van de plaat

Voor de momenten kan geen praktisch toepasbare vuistregel geformuleerd worden vanwege de grootte van de correcte elementengroottes en de steilheid van de regressiemodellen rondom de correcte elementengroottes. Elke afronding van de correcte elementengroottes naar boven naar een praktisch toepasbare vuistregel zal leiden tot grote onderschattingen van de momenten.

Een vuistregel voor de momenten kan wel geformuleerd worden in combinatie met een noodzakelijke correctiefactor voor een compensatie van de onderschattingen. Hiervoor kan op dezelfde wijze te werk gegaan worden als bij de spanningen.

Voor de vuistregel wordt uitgegaan van een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte voor zowel lineaire als kwadratische elementen. Dit is overeenkomstig met de vuistregel voor lineaire elementen voor spanningen en dat draagt bij aan de overzichtelijkheid. De resulterende onderschattingen van het toepassen van een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte zijn getoond in tabel 7. De dikgedrukte waardes zijn gemiddelde waardes voor een elementtype en een richting. Zoals verwacht zijn de onderschattingen erg groot en dient er een correctiefactor toegepast te worden.

	m_{xx}		m_{yy}	
ΔM [%]	Lineair	Kwadratisch	Lineair	Kwadratisch
Midden; 4 x 4	-40,93	-21,28	-33,72	-17,85
Midden; 3,2 x 4,8	-41,45	-21,54	-30,45	-16,23
Rand; 4 x 4	n.v.t.	n.v.t.	-23,49	-9,18
Rand; 3,2 x 4,8	n.v.t.	n.v.t.	-22,75	-9,12
t=60 [mm]	-39,49	-20,54	-26,01	-12,39
t=80 [mm]	-40,93	-21,56	-26,48	-12,30
t=100 [mm]	-42,61	-22,30	-27,45	-12,92
	-41,08	-21,44	-27,19	-12,86

Tabel 7: Onderschattingen van de momenten ten gevolge van het hanteren van een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte

Met de dikgedrukte gemiddelde onderschattingen ΔM_{gem} kunnen per richting en elementtype de benodigde correctiefactoren bepaald worden:

$$M(0,5) = 1 + \Delta M_{gem}$$

$$M(0,5) \cdot \frac{1}{1 + \Delta M_{gem}} = 1$$

$$CF = \frac{1}{1 + \Delta M_{gem}}$$

De correctiefactoren die op deze wijze gevonden worden zijn getoond in tabel 8.

CF [—]	Lineair	Kwadratisch
m_{xx}	1,70	1,27
m_{yy}	1,37	1,15

Tabel 8: Correctiefactoren voor momenten berekend met een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte

Na toepassing van de correctiefactoren op een tweedimensionale eindige-elementenberekening met kwadratische elementen met 0,5 keer de plaatdikte als elementengrootte worden de in tabel 9 getoonde over- en onderschattingen van de momenten gevonden.

	m_{xx}		m_{yy}	
ΔM [%]	Lineair	Kwadratisch	Lineair	Kwadratisch
Midden; 4 x 4	0,54	-0,09	-9,16	-5,43
Midden; 3,2 x 4,8	0,03	-0,35	-4,32	-3,56
Rand; 4 x 4	n.v.t.	n.v.t.	4,59	4,38
Rand; 3,2 x 4,8	n.v.t.	n.v.t.	5,84	4,36
t=60 [mm]	3,01	1,08	0,40	0,25
t=80 [mm]	0,03	-0,13	-0,68	0,03
t=100 [mm]	-2,39	-1,39	-2,04	-0,50
	0,25	-0,18	-0,77	-0,07

Tabel 9: Onder- of overschattingen van momenten na toepassing van correctiefactoren

De dikgedrukte waardes zijn gemiddelde waardes voor een richting en elementtype. De vuistregel heeft de hoogste nauwkeurigheid bij kwadratische elementen. Bovendien is de spreiding rond de gemiddelde groter bij lineaire elementen voor de momenten in y-richting. Er is bijvoorbeeld een grote uitschieter voor een plaat van 4 x 4 belast in het midden. Om deze redenen kan de vuistregel het best enkel voor kwadratische elementen gehanteerd worden. De vuistregel heeft nu een vergelijkbare nauwkeurigheid als de vuistregel voor lineaire elementen spanningen.

De gevonden correctiefactoren zijn enkel geldig voor Poissonwaardes van en rond 0,14. De Poissonwaarde heeft grote invloed op de correcte elementengrootte voor momenten. Een verdubbeling van de Poissonwaarde resulteert in een halvering van de correcte elementengrootte. Hierdoor zijn de gevonden correctiefactoren dus niet toepasbaar voor Poissonwaardes die erg afwijken van 0,14. De grootte van het effect van de Poissonwaarde op de nauwkeurigheid van de correctiefactoren is niet bekend. Het toepassen van de correctiefactor van 1,37 voor het moment in de y-richting, waarvoor wordt gekozen omdat dat de correctiefactor is voor lineaire elementen en de plaatgeval met een dubbele Poissonwaarde enkel met lineaire elementen is berekend, op de plaatgeval met een Poissonwaarde van 0,28 resulteert in een onderschatting van ongeveer 11%. Voor het moment in de x-richting is de onderschatting 5% bij gebruik van de correctiefactor van 1,70 voor lineaire elementen. Indien de Poissonwaarde niet erg afwijkt van 0,14 en er gebruik gemaakt wordt van kwadratische elementen en de bijbehorende correctiefactor in tabel 8 zal de bijkomende onderschatting ten gevolge van de variatie van de Poissonwaarde hoogstwaarschijnlijk in de orde van grootte van een paar procenten zijn. Omdat de hellingen van de regressiemodellen voor kwadratische elementen kleiner zijn rond $M(h)=1$, zal de bijkomende onderschatting ten gevolge van vergrotingen van de Poissonwaarde kleiner zijn bij kwadratische elementen dan bij lineaire.

Omdat er enkel één andere Poissonwaarde voor slechts één plaatafmeting en belastinglocatie is meegenomen in het onderzoek, is het exacte verloop van de onnauwkeurigheid bij toenemende afwijkingen van de Poissonwaarde van 0,14 niet bekend.

Voor Poissonwaardes van of in de buurt van 0,28 kan eveneens een correctiefactor afgeleid worden. Deze correctiefactor wordt afgeleid voor lineaire elementen, omdat de berekening voor de Poissonwaarde van 0,28 enkel met lineaire elementen is uitgevoerd. Daardoor is ook alleen een a-coëfficiënt voor de Poissonwaarde van 0,28 bekend voor lineaire elementen. Het afleiden gebeurt op dezelfde wijze als voor de correctiefactoren die geldig zijn voor Poissonwaardes van of in de buurt van 0,14.

De verkregen correctiefactor voor de momenten in y-richting is 1,54. Voor momenten in x-richting is dit 1,79. Bij spanningen werd geconstateerd dat de Poissonwaarde niet van invloed was op de vuistregel. Voor momenten is het tegendeel het geval. De Poissonwaarde heeft grote invloed op de vuistregels. Om deze redenen zijn aparte vuistregels geformuleerd voor de twee waardes van de Poissonwaarde.

De gevonden correctiefactoren voor de vuistregel zijn samengevat in tabel 10. De correctiefactoren gelden voor de vuistregel dat voor bepaling van de momenten een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte gebruikt dient te worden. Voor Poissonwaardes van of rond 0,14 worden kwadratische elementen gebruikt vanwege een betere nauwkeurigheid ten opzichte van lineaire elementen. Voor zowel momenten in de x-richting als in de y-richting zijn correctiefactoren gegeven. De correctiefactoren zijn waarden waarmee het gevonden moment vermenigvuldigd dient te worden voor compensatie van de onderschatting ten gevolge van de afwijking van de correcte elementengrootte in de vuistregel.

Vanwege de invloed van de Poissonwaarde op de correcte elementengroottes zijn voor een Poissonwaarde van 0,28 voor de momenten in x- en y-richting aparte correctiefactoren gevonden. Deze correctiefactoren gelden voor lineaire elementen omdat voor de Poissonwaarde enkel een berekening met lineaire elementen is uitgevoerd. De onnauwkeurigheid die ontstaat vanwege een afwijking van de Poissonwaardes van 0,14 en 0,28 is niet bekend. De verwachting is dat indien een grenswaarde van 0,21 aangehouden wordt voor de Poissonwaardes en dat voor Poissonwaardes lager dan 0,21 de vuistregel voor de Poissonwaarde van 0,14 en voor Poissonwaardes hoger dan 0,21 de vuistregel voor de Poissonwaardes van 0,28 wordt gebruikt, de onnauwkeurigheid in de orde van grootte van een paar procenten zal zitten.

$h = 0,5$	$\nu \approx 0,14$		$\nu \approx 0,28$	
	$CF [-]$	Elementtype	$CF [-]$	Elementtype
m_{xx}	1,27	Kwadratisch	1,79	Lineair
m_{yy}	1,15	Kwadratisch	1,54	Lineair

Tabel 10: Uiteindelijke correctiefactoren voor twee Poissonwaardes

5.3 Vuistregels zonder correcte elementengroottes voor momenten

Naast het formuleren van een vuistregel voor elementengroottes kan er een alternatieve wijze gevonden worden voor het bepalen van momenten waarbij geen gebruik gemaakt wordt van de correcte elementengroottes voor momenten. Hiervoor kan gekeken worden naar de volgende verhouding:

$$\frac{M(h)}{S(h)} = \frac{\frac{m_{2D}}{m_{3D}}}{\frac{\sigma_{2D}}{\sigma_{3D}}} = c$$

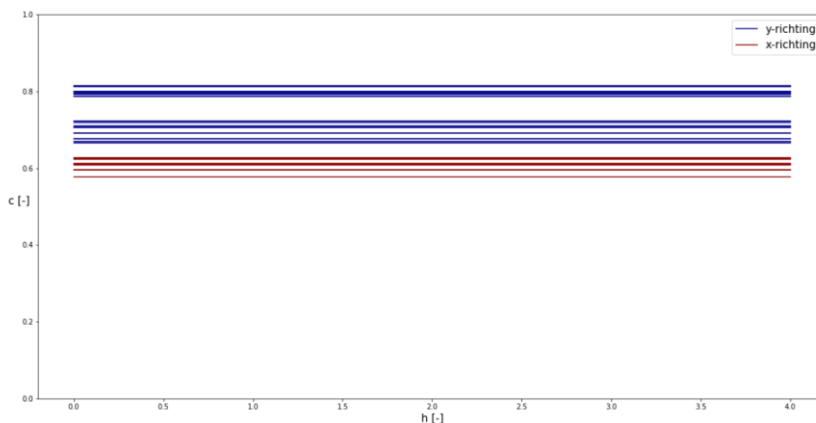
Uit de resultaten kwam de serendipiteit naar voren dat deze verhouding constant is en dat er twee waardes zijn voor deze verhouding. Na verdere algebraïsche herleiding kan een verband gevonden worden tussen het driedimensionale werkelijke moment en de waarde van de verhouding:

$$\frac{m_{2D}}{m_{3D}} \frac{\sigma_{3D}}{\sigma_{2D}} = c$$

$$\frac{m_{2D}}{\sigma_{2D}} \frac{\sigma_{3D}}{m_{3D}} = c$$

$$\frac{1}{6} t^2 \frac{\sigma_{3D}}{m_{3D}} = c$$

$$m_{3D} = \frac{1}{6c} t^2 \sigma_{3D}$$



Figuur 35: $M(h)/S(h)$ voor de 26 platen

In de grafiek in figuur 35 zijn waardes voor de verhouding weergegeven voor alle combinaties van plaattype en -dikte. De verhoudingen concentreren zich rond drie horizontale lijnen. Deze drie lijnen corresponderen met de eerder bepaalde en in de grafiek in figuur 28 en 29 in de resultaten getoonde waardes voor de verhoudingen. Voor de spanning in y-richting zijn er twee waardes voor deze verhouding. Deze twee waardes zijn elk de verhouding voor een bepaalde belastinglocatie. Voor een belasting in het midden van de plaat wordt dus een andere waarde voor de verhouding gevonden dan voor de belasting op de vrije rand.

De gegevens lijken dus te suggereren dat de coëfficiënten voor de verbanden tussen het correcte moment en de correcte spanning, de waardes voor de verhoudingen, afhankelijk zijn van de locatie van de belasting. Dit

kan echter niet met zekerheid vastgelegd worden. Ook wanneer een lineaire regressieanalyse uitgevoerd wordt voor alle datapunten, dus zonder een onderscheid te maken tussen datapunten voor de belasting in het midden en de belastingen op de vrije rand, wordt een sterk lineair verband tussen de verhouding van de spanningen en de verhouding van de momenten gevonden met een waarde voor R^2 van 0,84.

Een eventuele oorzaak voor het ontstaan van een verschil tussen de waarden voor de verschillende belastinglocaties zou gevormd kunnen zijn door het verschil tussen de belasting direct onder de puntlast en de belasting op de vrije rand vanwege de wijze van modelleren van de puntlast zoals beschreven in hoofdstuk 4. Desondanks zijn de lineaire verbanden voor de afzonderlijke belastinglocaties sterker. Tevens is er een verschil tussen gemiddelde correcte elementengroottes voor de twee belastinglocaties voor zowel spanningen als momenten. Dat lijkt zich te reflecteren in een corresponderende verschil tussen de waarden van de verhoudingen voor de afzonderlijke belastinglocaties. Het is dus aannemelijk dat er wel degelijk een afhankelijkheid van de belastinglocatie is voor de verhouding.

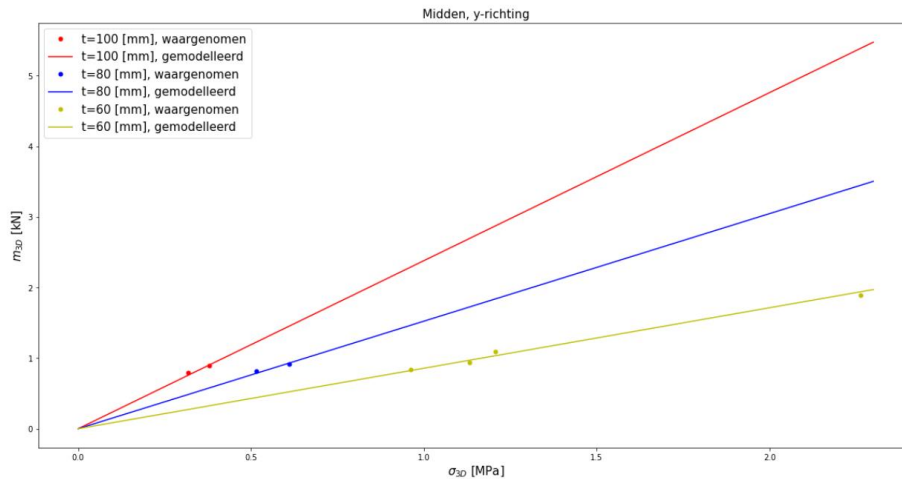
Aan de hand van deze verhoudingen kan een uitdrukking gevonden worden tussen de werkelijke driedimensionale moment en de werkelijke driedimensionale spanning. De werkelijke driedimensionale spanning kan gevonden worden met een tweedimensionale eindige-elementenmodel waarbij gebruik gemaakt wordt van de eerder gevonden vuistregels. Met de correcte werkelijke spanning kan vervolgens gebruikmakend van de waarden voor de verhoudingen het moment bepaald worden zonder een eindige-elementenberekening. Met de resultaten van de eindige-elementenberekening voor de spanning wordt dus tevens een moment bepaald.

Een voordeel van deze methode is de verbeterde nauwkeurigheid ten opzichte van de vuistregel voor elementengroottes voor de momenten. Dit is geïllustreerd in de grafiek in figuur 36. De lijnen representeren het verband tussen het driedimensionale moment en de driedimensionale spanning voor platen met een bepaalde dikte voor spanningen in y-richting met een belasting op het midden van de plaat. De helling van deze

lijnen is $\frac{t^2}{6c}$ en hangt dus af van de verhouding tussen $M(h)$ en $S(h)$. In de grafiek is te zien dat de resultaten van de uitgevoerde berekeningen gerepresenteerd door punten in de grafiek bijna op de lijnen liggen.

Een ander voordeel is de onafhankelijkheid van materiaaleigenschappen. Voor de eerder opgestelde vuistregels met bijbehorende correctiefactoren werd een grote afhankelijkheid van de Poissonwaarde vastgesteld. Dit is niet het geval in de alternatieve methode.

Een nadeel is dat er verschillende waarden voor de coëfficiënten zijn voor belastingen op het midden van de plaat en op de vrije rand. Voor alle andere belastinglocaties zijn de waarden voor de coëfficiënt onbekend. Wel kan een goede indruk verkregen worden van een moment bij een belasting op een locatie in de buurt van een vrije rand of het midden in de y-richting. De waarden voor de twee verschillende belastinglocaties verschillen niet veel van elkaar. Het gebruiken van de waarden voor de vrije rand voor belastinglocaties in de buurt van de vrije rand zal resulteren in een geringe en waarschijnlijk acceptabele onnauwkeurigheid. Hetzelfde kan gesteld worden voor belastinglocaties dichtbij het midden van de plaat. Voor deze locaties kan de waarde voor het midden van de plaat gebruikt worden. Deze benaderingen gelden echter enkel voor locaties op de transversale verbindingslijn tussen het midden van de plaat en het midden van de vrije rand. In de richting van de belastingsafdracht ontstaat een invloed van de afstand in y-richting tussen de belastinglocatie en het midden van de plaat op de waarde van de coëfficiënt. Deze invloed is onbekend.



Figuur 36: Gevonden verbanden toegepast op het berekenen van het moment in de y-richting met een belasting op het midden van de plaat voor verschillende plaatdiktes

Voor het bepalen van de momenten kan dus gebruik gemaakt worden van de volgende uitdrukkingen:

- Voor m_{yy} met een belasting op of in de buurt van het midden: $m_{yy} = 1,43 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$
- Voor m_{yy} met een belasting op of in de buurt van een vrije rand: $m_{yy} = 1,25 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$
- Voor m_{xx} met een belasting op het midden: $m_{xx} = 1,64 \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$

In de buurt kan gedefinieerd worden als een belasting binnen een afstand $\frac{l_x}{4}$ van de vrije rand of het midden.

Wat opgemerkt kan worden aan het gevonden verband tussen de driedimensionale momenten en spanningen is dat dit een grotendeels overeenkomstige vorm heeft als het lineair-elastische verband voor de tweedimensionale situatie. Het enige verschil is de factor $\frac{1}{c}$ waarmee in het driedimensionale verband vermenigvuldigd wordt. Omdat c kleiner is dan één, is deze factor dus een vergrotingsfactor. In het driedimensionale model correspondeert eenzelfde spanning in de onderkant van de plaat als in het tweedimensionale model dus met een groter moment dan in de lineair-elastische tweedimensionale situatie. Dit kan verklaard worden aan de hand van de spanningsverdeling over de plaatdikte in het driedimensionale geval zoals in bladzijde 71 van het boek *Theory of Plates and Shells* van Timoshenko en Woinowsky-Krieger. In deze spanningsverdeling is er sprake van een drukpiek ter plaatse van de puntlast die een orde groter is dan de trekspanning aan het andere uiteinde van de plaatdikte. Deze spanningsverdeling resulteert in grotere momenten dan in een situatie waarin de trek- en drukspanningen aan beide uiteinden van de plaatdikte gelijk en tegengesteld aan elkaar zijn, zoals het geval is in het tweedimensionale lineair-elastische model. Dit is tevens geïllustreerd in figuur 34.

De gevonden coëfficiënt c en de factor $\frac{1}{c}$ die in het driedimensionale verband voorkomt kan dus beschouwd worden als een correctiefactor die het non-lineaire karakter van de spanningsverdeling over de plaatdikte in het driedimensionale model in rekening brengt. De waarde $\frac{1}{c}$ is de verhouding tussen het werkelijke moment in de plaat en het moment berekend met een tweedimensionaal model.

Met behulp van dit verband kan voor momenten dus een vuistregel opgesteld worden aan de hand van de verhouding tussen de niet-lineaire werkelijke spanningsverdeling over de plaatdikte en de gemodelleerde lineair-elastische verdeling in plaats van aan de hand van correcte elementengroottes zoals bij de spanningen is gedaan. De afhankelijkheid van het gebruikte elementtype zoals eerder is vastgesteld voor de correcte elementengroottes speelt zodoende geen rol meer in de vuistregel voor de momenten. Deze afhankelijkheid komt impliciet voor in de berekende driedimensionale spanning. Deze spanning kan bepaald worden met lineaire oftewel kwadratische elementen. Voor beide typen geldt een verschillende elementengrootte om de correcte waardes te bepalen met een tweedimensionale eindige-elementenmodel, zoals ook het geval is voor

de momenten. De bijkomende afhankelijkheid van de belastinglocatie wordt gerepresenteerd door de coëfficiënt c .

De uitdrukking voor c kan ook geschreven worden op de volgende manier door de uitdrukkingen voor de regressiemodellen te substitueren in de verhoudingen tussen de tweedimensionale en driedimensionale waarden:

$$\frac{a_m \ln(h) + b_m}{a_\sigma \ln(h) + b_\sigma} = c$$

Hierin zijn de coëfficiënten met een subscript m waarden voor de momenten en een subscript σ voor de spanningen. Voor deze verhouding is reeds vastgesteld dat het constant is. De verhouding tussen twee logaritmische functies zoals hierboven kan alleen constant zijn indien geldt dat de verhouding $\frac{b}{a}$ in de teller en noemer niet verschillen van elkaar. Dit is een noodzakelijke voorwaarde om een constante verhouding tussen de twee logaritmische functies te verkrijgen.

Hieruit kan dus opgemaakt worden dat geldt dat de verhouding $\frac{b_\sigma}{a_\sigma}$ gelijk is aan de verhouding $\frac{b_m}{a_m}$ voor elke plaat. Hieruit volgt vervolgens het volgende:

$$\frac{a_m}{a_\sigma} = \frac{b_m}{b_\sigma} = c$$

De coëfficiënten a_m en a_σ geven een indicatie van de intensiteit waarmee de singulariteit optreedt in het tweedimensionale model. Een negatievere waarde van deze coëfficiënten impliceert dat de singulariteit sterker optreedt. Bij gelijkblijvende waarden van b_m en b_σ worden voor negatievere waarden van a_m en a_σ de spanningen en momenten voor elementengroottes kleiner dan t sterker overschat, terwijl de spanningen en momenten voor elementengroottes groter dan t sterker worden onderschat. Door het verband tussen c , a_m en a_σ te substitueren in het verband tussen m_{3D} en σ_{3D} , kan een uitdrukking voor $\frac{a_m}{a_\sigma}$ gevonden worden uitgedrukt in $\frac{\sigma_{3D}}{m_{3D}}$:

$$\frac{a_m}{a_\sigma} = \frac{1}{6} t^2 \frac{\sigma_{3D}}{m_{3D}}$$

Hieruit valt dus op te maken dat er een relatie is tussen de verhouding tussen de intensiteiten van de singulariteiten voor de spanningen en momenten en de verhouding tussen de spanning in de onderkant van de plaat en het moment. Omdat de verhouding tussen de spanning in de onderkant en het moment een fysiek fenomeen is en dit onafhankelijk is van het gedrag van een numeriek model, kan gesteld worden dat de verhouding tussen de intensiteiten van de singulariteit voor een moment en spanning in een tweedimensionaal model afhangt van de verhouding tussen de werkelijke spanning in de onderkant van de plaat en het werkelijke moment.

In de coëfficiënt c kan gebruik makend van de hierboven gevonden verhoudingen tevens een eigenwaardeprobleem herkend worden. Indien het mogelijk is om een stelsel van lineaire vergelijkingen op te stellen in de volgende vorm, kan de coëfficiënt gevonden worden als de eigenwaarde van het resulterende stelsel:

$$c \begin{bmatrix} a_\sigma \\ b_\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\sigma \\ b_\sigma \end{bmatrix}$$

De coëfficiënt moet dan voldoen aan de volgende vergelijking:

$$(p_{11} - c)(p_{22} - c) - p_{12}p_{21} = 0$$

Hieruit volgt een waarde voor de coëfficiënt uitgedrukt in de componenten van de matrix. Om de coëfficiënt te kunnen vinden als een eigenwaarde van een stelsel in de vorm zoals hierboven is het noodzakelijk dat er een lineair onafhankelijke basis gevonden wordt voor het stelsel. Dat is vooralsnog niet het geval.

6 Conclusie & aanbevelingen

In dit rapport is onderzocht wat acceptabele vuistregels zijn voor de elementengroottes van lineaire en kwadratische plaelementen in tweedimensionale eindige-elementenmodellen in Ansys voor de nauwkeurige bepaling van zowel spanningen als momenten onder een puntlast bij belastingafdracht in één richting. Daarbij is tevens bekeken of de vuistregels beïnvloed worden door plaatafmetingen, belastinglocaties, Poissonwaardes, plaatdiktes en richtingen van de spanningen of momenten. Bovendien is een indicatie verkregen van de nauwkeurigheden van de vuistregels.

6.1 Grootste spanning

Voor een plaat belast door een loodrechte puntlast aangrijpend aan de bovenzijde geldt dat de grootste trekspanning op zal treden ter plaatse van de puntlast aan de andere zijde van de plaat. Als de plaat gemodelleerd wordt met lineaire vierhoekige elementen gebaseerd op de Mindlin-Reissner-theorie, wordt deze spanning correct berekend bij een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte. Als de plaat gemodelleerd wordt met kwadratische vierhoekige elementen gebaseerd op de Mindlin-Reissner-theorie, wordt deze spanning correct berekend bij een elementengrootte van 2 keer de plaatdikte.

Beide vuistregels zijn onafhankelijk van alle eerder genoemde factoren en gelden dus voor alle situaties. De nauwkeurigheden van de vuistregels verschillen echter per situatie en worden beïnvloed door de factoren. Dit creëert geen begrenzing van de geldigheid van de vuistregels voor verschillende situaties, omdat alle nauwkeurigheden acceptabel en te overzien waren.

Voor de nauwkeurigheden van de vuistregels is gevonden dat voor spanningen in de richting van de belastingafdracht berekend met kwadratische elementen een maximale onderschatting van de spanningen van ongeveer 2% ontstaat. Indien de berekening gedaan is met lineaire elementen stijgt de maximale onderschatting naar ongeveer 4%. Voor spanningen in de richting loodrecht op de richting van de belastingafdracht is voor berekeningen met kwadratische elementen vastgesteld dat de maximale onderschatting ongeveer 3% bedraagt. Voor berekeningen met lineaire elementen stijgt de maximale onderschatting naar ongeveer 6%. De genoemde nauwkeurigheden zijn enkel indicatief en dienen voornamelijk om de algemene geldigheid van de vuistregels te onderstrepen.

6.2 Grootste moment bepaald met de elementengrootte en een correctiefactor

Voor momenten zijn vuistregels gevonden die bestaan uit een elementengrootte en een correctiefactor. De correctiefactor is een waarde waarmee het moment dat bepaald is aan de hand van de voorgeschreven elementengrootte vermenigvuldigd dient te worden.

Voor een plaat die overspant in één richting en belast wordt door een loodrechte puntlast geldt dat het grootste buigend moment optreedt ter plaatse van de puntlast. Het juiste moment ter plaatse van de puntlast is het moment bij een elementengrootte van 0,5 keer de plaatdikte vermenigvuldigd met een correctiefactor. Deze correctiefactor is afhankelijk van de Poissonwaarde, de richting van het moment en de belastinglocatie.

Voor Poissonwaardes tussen 0,14 en 0,21 kunnen kwadratische elementen gebruikt worden. Voor het moment in de richting van de belastingafdracht geldt dan een correctiefactor van 1,15. Voor het moment in de richting loodrecht op de richting van de belastingafdracht is dit 1,27.

Voor Poissonwaardes tussen 0,21 en 0,28 dienen lineaire elementen gebruikt worden. Voor het moment in de richting van de belastingafdracht geldt dan een correctiefactor van 1,54. Voor het moment in de richting loodrecht op de richting van de belastingafdracht is dit 1,79.

In het geval dat de Poissonwaarde gelijk is aan 0,14 is de nauwkeurigheid van de vuistregels voor de momenten voor Poissonwaardes tussen 0,14 en 0,21 in de orde van grootte van een paar procenten. Voor afwijkingen van 0,14 van de Poissonwaarde is de nauwkeurigheid van de vuistregels niet bekend. Voor de vuistregels voor Poissonwaardes tussen 0,21 en 0,28 is de nauwkeurigheid vooralsnog ook onbekend.

6.3 Grootste moment berekend uit de spanning

Het moment m onder een puntlast kan ook als volgt berekend worden:

$$m = C \cdot \frac{1}{6} t^2 \sigma_{3D}$$

Hierin is $\frac{1}{6} t^2$ het weerstandsmoment gebaseerd op de hypothese van Bernoulli die stelt dat rechte doorsneden recht blijven. Deze hypothese geldt vrijwel overal in platen. Alleen in een klein gebied rond puntlasten met een straal van ongeveer de plaatdikte geldt de hypothese niet. De coëfficiënt C in de uitdrukking brengt deze discrepantie tussen de spanningsverdeling in het model met plaalementen en de werkelijke spanningsverdeling in rekening.

Coëfficiënt C is afhankelijk van de belastinglocatie en richting van het moment.

Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van de plaat geldt een waarde voor C van 1,43.

Voor momenten in de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van een vrije rand geldt een waarde voor C van 1,25.

Voor momenten in de richting loodrecht op de richting van de belastingsafdracht met een belasting op het midden van de plaat geldt een waarde voor C van 1,64.

De bovengenoemde vuistregels voor het moment in de richting van de belastingsafdracht kunnen ook toegepast worden indien de belasting aangrijpt op de verbindingslijn tussen het midden van de plaat en het midden van een vrije rand binnen een afstand van de helft van de afstand tussen het midden van de plaat en het midden van de vrije rand. Dit resulteert echter in een verminderde nauwkeurigheid. De vermindering van de nauwkeurigheid hierdoor is niet bekend.

Voor belastinglocaties op het midden of op het midden van een vrije rand is de nauwkeurigheid voor beide richtingen hoog.

In de bovengenoemde vuistregels is σ_{3D} de werkelijke spanning onderin de plaat welke bepaald kan worden met behulp van de vuistregels voor de spanningen, t de plaatdikte en m het moment per eenheid van lengte of breedte. In de vuistregels dient tevens rekening gehouden te worden met het gedefinieerde assenstelsel. Indien het assenstelsel zo is gedefinieerd dat een trekspanning aan de onderkant van de plaat een negatief moment levert, dienen de vuistregels vermenigvuldigd te worden met -1.

6.4 Vervolgonderzoek

In dit onderzoek is een methode gevonden voor het opstellen van vuistregels voor de elementengroottes van plaalementen voor het bepalen van momenten. Wat betreft de invloed van de Poissonwaarde op de geldigheden van de vuistregels bestaan nog onduidelijkheden. Voor verder onderzoek kan voor de in dit onderzoek gehanteerde methode de nauwkeurigheid van de gevonden correctiefactoren in de vuistregels voor de momenten bij variërende Poissonwaardes in kaart gebracht worden. Een optie is om het onderzoek over te doen met de Poissonwaarde als variabele in plaats van de plaatdikte en plaatafmetingen. Voor bijvoorbeeld Poissonwaardes van 0,125, 0,175 en 0,225 kunnen correcte elementengroottes bepaald worden voor zowel lineaire als kwadratische elementen, waarna met de correcte elementengroottes correctiefactoren bepaald kunnen worden voor de verschillende Poissonwaardes.

Verder kan aanvullend onderzoek gedaan worden naar de afhankelijkheid van de coëfficiënt C van de belastinglocatie. Door de locatie van de belasting te variëren in zowel de richting van de belastingsafdracht als de richting loodrecht op de belastingsafdracht kan de invloed van de belastinglocatie op de waarde van C in kaart gebracht worden. Dit kan gedaan worden voor zowel in één richting dragende als in twee richtingen dragende platen.

Referenties

ANSYS, Inc. (2011). ANSYS Mechanical APDL Element Reference (Release 14).

https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/vem/ansys_14_element_reference.pdf

Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company.

https://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqua1_denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf

Bijlage A: tabellen voor berekeningen met plaalementen

In deze bijlage staan de resultaten van de tweedimensionale berekeningen met plaalementen voor alle platen voor de 5 verschillende elementengroottes van de plaalementen.

$m_{xx} \left[\frac{kNm}{m} \right]$	0,5t	t	2t	3t	4t
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,3704	-0,305616667	-0,24035	-0,207083333	-0,176366667
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,49985	-0,436866667	-0,373783333	-0,34115	-0,310316667
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,390549333	-0,32576	-0,264074667	-0,218848	-0,192394667
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,519989333	-0,457002667	-0,397461333	-0,353237333	-0,326848
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,416988	-0,350826	-0,288264	-0,24756	-0,218172
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60mm, 4000x4000	-0,546396	-0,482148	-0,421758	-0,382104	-0,352974
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,3646	-0,299916667	-0,2348	-0,192266667	-0,170983333
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,493983333	-0,431	-0,367883333	-0,326833333	-0,3043
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-0,384853333	-0,320149333	-0,254954667	-0,220981333	-0,191882667
Vrije rand, lineair, t = 80mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,51424	-0,451253333	-0,388181333	-0,354048	-0,326656
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,410406	-0,347304	-0,278982	-0,243648	-0,220308
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,539976	-0,478104	-0,412854	-0,377304	-0,354006
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	-0,478008	-0,406728	-0,329994	-0,289512	-0,26301
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	-0,8208	-0,69462	-0,557958	-0,487302	-0,440616

$m_{yy} \left[\frac{kNm}{m} \right]$	0,5t	t	2t	3t	4t
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,516083333	-0,451266667	-0,385566667	-0,351583333	-0,31945
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-1,025483333	-0,944333333	-0,82625	-0,753733333	-0,681566667
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,645533333	-0,582583333	-0,519666667	-0,487266667	-0,45685
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-1,224166667	-1,187583333	-1,1004	-1,037016667	-0,970583333
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,536352	-0,471573333	-0,409653333	-0,363776	-0,336426667
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-1,0768	-0,995712	-0,884906667	-0,787104	-0,724608
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,665792	-0,602837333	-0,543349333	-0,499402667	-0,473248
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-1,275413333	-1,238826667	-1,15776	-1,071253333	-1,013130667
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,562998	-0,496788	-0,434118	-0,393084	-0,36318
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-1,14354	-1,0605	-0,94788	-0,86022	-0,7914
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	-0,6924	-0,62802	-0,56772	-0,52824	-0,499278
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	-1,34184	-1,30416	-1,22094	-1,14378	-1,07928
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,618116667	-0,55325	-0,487333333	-0,447316667	-0,420333333
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-1,100966667	-1,01985	-0,901733333	-0,818283333	-0,75665
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,747583333	-0,68465	-0,621766667	-0,582916667	-0,559066667
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-1,2996	-1,262983333	-1,175766667	-1,098266667	-1,045766667
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-0,6384	-0,573578667	-0,507872	-0,47008	-0,44688
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-1,152426667	-1,07136	-0,953397333	-0,870901333	-0,822037333
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,767850667	-0,704896	-0,641973333	-0,606698667	-0,582922667
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-1,35104	-1,314346667	-1,2272	-1,15744	-1,105173333
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,6645	-0,599964	-0,533856	-0,494064	-0,469488
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-1,21914	-1,13742	-1,02012	-0,9327	-0,87582
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,7938	-0,73146	-0,66726	-0,63006	-0,60654
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-1,4175	-1,38084	-1,29228	-1,2189	-1,16652
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	-0,70908	-0,63654	-0,561558	-0,517218	-0,489612
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	-1,329	-1,19994	-1,0677	-0,98814	-0,939

σ_{xx} [MPa]	0,5t	t	2t	3t	4t
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	0,22224	0,18337	0,14421	0,12425	0,10582
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	0,29991	0,26212	0,22427	0,20469	0,18619
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	0,36614	0,3054	0,24757	0,20517	0,18037
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	0,48749	0,42844	0,37262	0,33116	0,30642
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	0,69498	0,58471	0,48044	0,4126	0,36362
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60mm, 4000x4000	0,91066	0,80358	0,70293	0,63684	0,58829
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	0,21876	0,17995	0,14088	0,11536	0,10259
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	0,29639	0,2586	0,22073	0,1961	0,18258
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	0,3608	0,30014	0,23902	0,20717	0,17989
Vrije rand, lineair, t = 80mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	0,4821	0,42305	0,36392	0,33192	0,30624
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	0,68401	0,57884	0,46497	0,40608	0,36718
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	0,89996	0,79684	0,68809	0,62884	0,59001
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	0,79668	0,67788	0,54999	0,48252	0,43835
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	1,368	1,1577	0,92993	0,81217	0,73436

σ_{yy} [MPa]	0,5t	t	2t	3t	4t
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	0,30965	0,27076	0,23134	0,21095	0,19167
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	0,61529	0,5666	0,49575	0,45224	0,40894
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	0,38732	0,34955	0,3118	0,29236	0,27411
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	0,7345	0,71255	0,66024	0,62221	0,58235
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	0,50283	0,4421	0,38405	0,34104	0,3154
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	1,0095	0,93348	0,8296	0,73791	0,67932
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	0,62418	0,56516	0,50939	0,46819	0,44367
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	1,1957	1,1614	1,0854	1,0043	0,94981
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	0,93833	0,82798	0,72353	0,65514	0,6053
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	1,9059	1,7675	1,5798	1,4337	1,319
Centrisch, kwadratisch, t = 60mm, 4000x4000	1,154	1,0467	0,9462	0,8804	0,83213
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	2,2364	2,1736	2,0349	1,9063	1,7988
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	0,37087	0,33195	0,2924	0,26839	0,2522
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	0,66058	0,61191	0,54104	0,49097	0,45399
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	0,44855	0,41079	0,37306	0,34975	0,33544
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	0,77976	0,75779	0,70546	0,65896	0,62746
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	0,5985	0,53773	0,47613	0,4407	0,41895
Vrije rand, lineair, t = 80mm, 3200x4800	1,0804	1,0044	0,89381	0,81647	0,77066
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	0,71986	0,66084	0,60185	0,56878	0,54649
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	1,2666	1,2322	1,1505	1,0851	1,0361
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	1,1075	0,99994	0,88976	0,82344	0,78248
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	2,0319	1,8957	1,7002	1,5545	1,4597
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	1,323	1,2191	1,1121	1,0501	1,0109
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	2,3625	2,3014	2,1538	2,0315	1,9442
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, $\nu = 0,2828$	1,1818	1,0609	0,93593	0,86203	0,81602
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	2,215	1,9999	1,7795	1,6469	1,565

Bijlage B: tabellen voor berekeningen met volume-elementen

In deze bijlage staan de volledige resultaten van de driedimensionale berekeningen voor alle platen. De berekende momenten en spanningen worden getoond.

4x4 Centrisch	σ_{xx} [MPa]	σ_{yy} [MPa]	m_{xx} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$	m_{yy} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$
t = 100 mm	0,23065	0,31809	-0,64447	-0,79165
t = 80 mm	0,37935	0,51595	-0,66173	-0,81249
t = 60 mm	0,71757	0,96077	-0,68700	-0,83483

4x4 Vrije rand	σ_{xx} [MPa]	σ_{yy} [MPa]	m_{xx} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$	m_{yy} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$
t = 100 mm	n.v.t.	0,65386	n.v.t.	-1,38437
t = 80 mm	n.v.t.	1,0698	n.v.t.	-1,44027
t = 60 mm	n.v.t.	2,0188	n.v.t.	-1,48990

3,2x4,8 Centrisch	σ_{xx} [MPa]	σ_{yy} [MPa]	m_{xx} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$	m_{yy} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$
t = 100 mm	0,22712	0,3792	-0,63630	-0,89516
t = 80 mm	0,37387	0,61149	-0,65593	-0,91903
t = 60 mm	0,70832	1,1309	-0,67911	-0,93877
t = 60 mm, v = 0,2828	0,82278	1,2068	-0,85470	-1,08924
t = 60 mm, F = 2 kN	1,4168	2,2624	-1,36571	-1,88775

3,2x4,8 Vrije rand	σ_{xx} [MPa]	σ_{yy} [MPa]	m_{xx} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$	m_{yy} $\left[\frac{kNm}{m}\right]$
t = 100 mm	n.v.t.	0,6989	n.v.t.	-1,45713
t = 80 mm	n.v.t.	1,1392	n.v.t.	-1,49136
t = 60 mm	n.v.t.	2,1378	n.v.t.	-1,60983

Bijlage C: tabellen voor correcte elementengroottes

In deze bijlage staan alle resultaten van de regressieanalyses voor de functies $S(h)$ en $M(h)$. De coëfficiënten a en b en de correcte elementengroottes zijn weergegeven voor alle platen.

m_{xx}	a	b	h
Centrisch, lineair, $t = 100 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,143565214	0,474724823	0,025763631
Vrije rand, lineair, $t = 100 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 100 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,139941805	0,678410842	0,100457487
Vrije rand, kwadratisch, $t = 100 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 80 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,144059063	0,492199623	0,029453406
Vrije rand, lineair, $t = 80 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 80 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,14018704	0,690633687	0,110051034
Vrije rand, kwadratisch, $t = 80 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,138239719	0,51173552	0,029245985
Vrije rand, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 60 \text{ mm}$, 4000x4000	-0,134294518	0,702954912	0,109493196
Vrije rand, kwadratisch, $t = 60 \text{ mm}$, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 100 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,148192226	0,470497635	0,028069326
Vrije rand, lineair, $t = 100 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 100 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,144615256	0,676621102	0,106871012
Vrije rand, kwadratisch, $t = 100 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 80 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,140734816	0,488527428	0,026402404
Vrije rand, lineair, $t = 80 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 80 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,137047656	0,688409413	0,102941649
Vrije rand, kwadratisch, $t = 80 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,136074866	0,509571895	0,027211789
Vrije rand, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800	-0,132793246	0,702782949	0,106650939
Vrije rand, kwadratisch, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800, $v = 0,2828$	-0,122222996	0,474278402	0,013550507
Centrisch, lineair, $t = 60 \text{ mm}$, 3200x4800, $F = 2 \text{ kN}$	-0,135326178	0,50677717	0,026129342

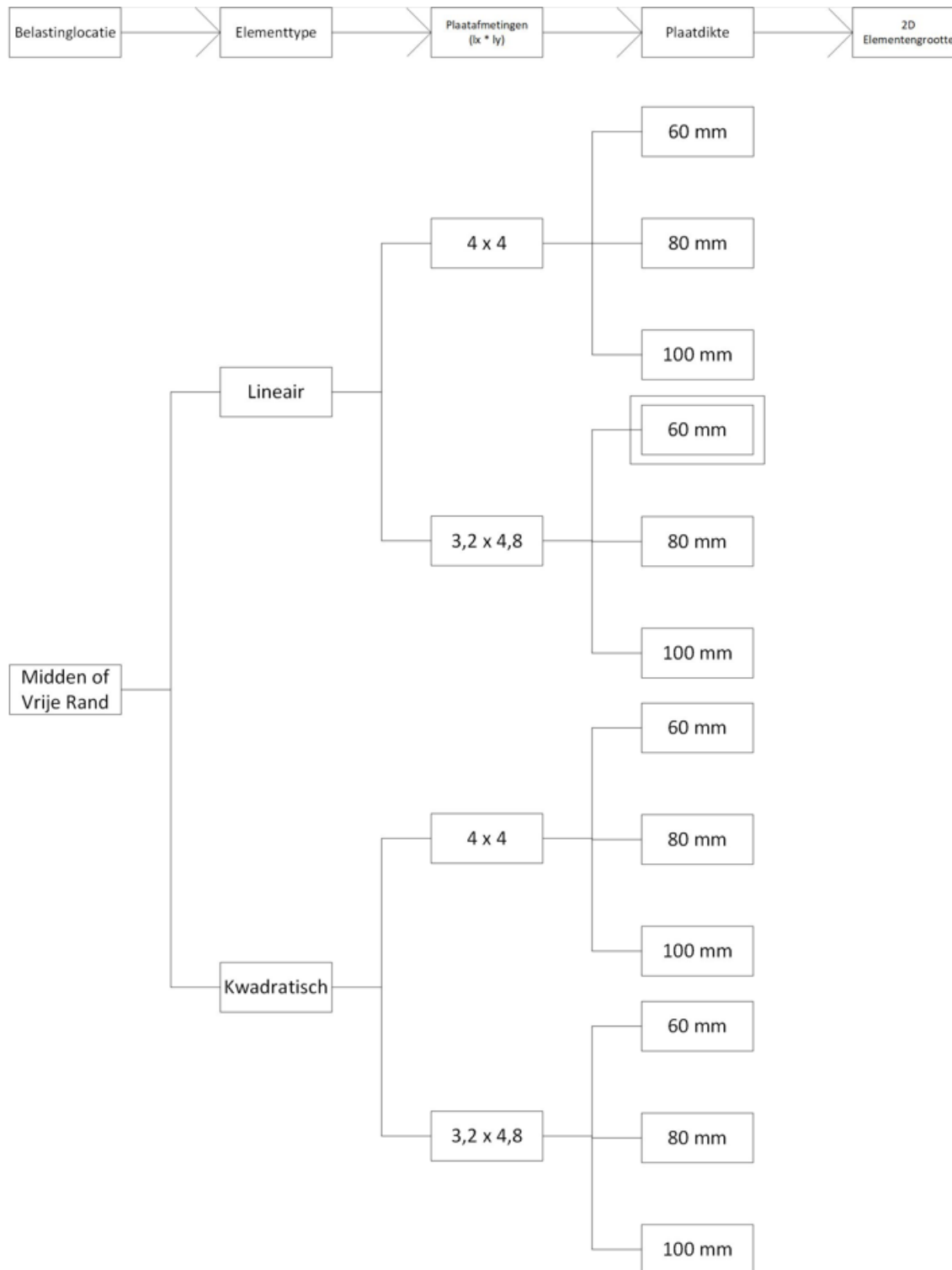
m_{yy}	a	b	h
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,118246232	0,570093832	0,026365842
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,118446004	0,670172369	0,06175228
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,113465233	0,736467641	0,098020128
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,087097677	0,840725995	0,160625039
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,118254852	0,580077071	0,028695942
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,117922066	0,679202511	0,065847125
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,113850835	0,742037634	0,103747783
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,08779581	0,842982343	0,167220606
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,114259692	0,595858831	0,029099316
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,113026675	0,700986268	0,070968816
Centrisch, kwadratisch, t = 60mm, 4000x4000	-0,110344339	0,753344753	0,106957569
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	-0,084088245	0,859295294	0,18762722
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,106466993	0,617360789	0,027488974
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,114201946	0,687787751	0,064967962
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,101792832	0,764650363	0,099058441
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,084852241	0,849561546	0,169831901
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-0,100998936	0,624018736	0,024170413
Vrije rand, lineair, t = 80mm, 3200x4800	-0,108504299	0,707034787	0,06720328
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,097126563	0,767362621	0,091154602
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,080139078	0,865273724	0,186158687
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,100570207	0,638382004	0,027442094
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,103594384	0,695678337	0,052991327
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,096601382	0,77856281	0,101036073
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,07594845	0,842308955	0,125394502
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	-0,097602603	0,583557811	0,014027832
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	-0,100022685	0,634932328	0,02599506

σ_{xx}	a	b	h
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,240685261	0,795870146	0,428219459
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,234610661	1,137347173	1,795755751
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,23558635	0,804916471	0,436888818
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,229254255	1,129424738	1,758650443
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,220582832	0,816553097	0,435331995
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	-0,214287655	1,121673184	1,764386517
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,249103864	0,79088345	0,431937086
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,243091153	1,13736689	1,759595354
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-0,231479595	0,803526339	0,427939636
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,225414982	1,132290766	1,798362528
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,21743905	0,814263736	0,425623891
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,212195228	1,123002809	1,785445776
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	-0,211608571	0,821133326	0,429440789
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	-0,217410065	0,814169579	0,425391152

σ_{yy}	a	b	h
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,176570859	0,851291042	0,430759412
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 4000x4000	-0,150465953	0,85134256	0,372327818
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,169431647	1,099728273	1,80147317
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 4000x4000	-0,110643116	1,068002581	1,848938983
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,174582418	0,856381413	0,43927018
Vrije rand, lineair, t = 80 mm, 4000x4000	-0,148863431	0,857417275	0,383732747
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,168080664	1,095487599	1,764920756
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 4000x4000	-0,1108324	1,064171013	1,784238042
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,165469899	0,862917612	0,436728721
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 4000x4000	-0,139025118	0,862227424	0,371208814
Centrisch, kwadratisch, t = 60mm, 4000x4000	-0,159799719	1,090987363	1,767177696
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 4000x4000	-0,103430258	1,056950758	1,734327778
Centrisch, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,150798479	0,874421877	0,434849807
Vrije rand, lineair, t = 100 mm, 3200x4800	-0,1428594	0,86037891	0,376313696
Centrisch, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,144178057	1,083040933	1,778839114
Vrije rand, kwadratisch, t = 100 mm, 3200x4800	-0,106144779	1,062747681	1,806067511
Centrisch, lineair, t = 80 mm, 3200x4800	-0,142307843	0,879244513	0,428034633
Vrije rand, lineair, t = 80mm, 3200x4800	-0,133168557	0,867751809	0,370430766
Centrisch, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,136851657	1,081216532	1,810248272
Vrije rand, kwadratisch, t = 80 mm, 3200x4800	-0,098355599	1,06196025	1,877538477
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,139140772	0,883213502	0,431995289
Vrije rand, lineair, t = 60 mm, 3200x4800	-0,130016005	0,873110241	0,376832339
Centrisch, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,133649828	1,077156282	1,781225784
Vrije rand, kwadratisch, t = 60 mm, 3200x4800	-0,095319008	1,057138818	1,82111382
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, v = 0,2828	-0,146825094	0,877854979	0,435217947
Centrisch, lineair, t = 60 mm, 3200x4800, F = 2 kN	-0,139098647	0,882981976	0,431167234

Bijlage D: plaatvarianten voor de berekeningen

Deze bijlage bevat een schema met alle platen die onderzocht worden. Voor alle plaatgevallen onder het kolom plaatdikte worden met 5 elementengroottes tweedimensionale berekeningen uitgevoerd. Voor het dubbel omkaderde plaatgeval worden tevens berekeningen gedaan met een dubbele waarde voor de Poissonwaarde en een dubbele waarde voor de belasting voor de belastinglocatie midden. Het volledige schema wordt een keer doorlopen voor de belastinglocatie midden en de belastinglocatie vrije rand, met uitzondering van de dubbele Poissonwaardes en belastinggroottes.



Figuur 37: Platen die onderzocht worden