



Stijn Platzer

Knik van schalen

Onderzoek naar het model waarmee kan worden gecontroleerd of een schaalstructuur knikt

Omslagfoto: Indrebo, (sd).

Knik van schalen

Onderzoek naar het model waarmee kan worden gecontroleerd of een schaalstructuur knikt

Door

Stijn Platzer

Student nummer: 5135486

Dit verslag is geschreven om te voldoen aan de gedeeltelijke eisen voor de graad van

Bachelor of Science
in Civil Engineering

aan de Technische Universiteit Delft

Auteur:	S.A. Platzer Student nummer: 5135486	
Begeleiders:	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom, Ir. C. Kasbergen,	TU Delft TU Delft
Datum:	13 juni 2022	

Voorwoord

Dit project is uitgevoerd ter afronding van de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. In dit project is onderzoek gedaan naar de verschillende mogelijkheden om het model voor knik van schaalconstructies op een andere methode op te lossen. Voor de verschillende afleidingen en berekeningen is gebruik gemaakt van de computerprogramma's Maple, Python en Microsoft Excel.

Dit project is bestemd voor medestudenten die meer te weten willen komen over knik van schalen en de vergelijkingen hiervan. De lezer van dit rapport heeft hiervoor kennis nodig die wordt opgedaan tijdens de bachelor Civiele Techniek. Verder is in hoofdstuk 5 nog een interessante toepassing van het model uitgewerkt voor de geïnteresseerde.

Hierbij wil ik graag mijn begeleiders dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. C. Kasbergen bedanken voor de ondersteuning, adviezen en inzichten die hebben geholpen bij de totstandkoming van dit project.

Den Haag, juni 2022

Stijn Platzer

Samenvatting

Schalen zijn dunne, gekromde plaatstructuren, waarbij knik een belangrijk bezwijkmechanisme is. De knikbelasting is hierbij vaak lastig te bepalen doordat vormimperfecties van onbekende grootte veel invloed kunnen hebben op de knikbelasting. Er is daarom een eenvoudig model voorgesteld door meneer Hoogenboom om de knikbelasting van schalen te berekenen, waarbij vormimperfecties worden meegenomen. Dit wordt gedaan door de kritische knikbelasting te vermenigvuldigen met een knockdownfactor C , die rekening houdt met de imperfectie gevoeligheid. Het voorgestelde model bestaat uit de volgende twee niet-lineaire vergelijking (1 en 2) om de knockdownfactor C te bepalen:

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t} \right) \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t} \right)}$$

(1)

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{1-C}$$

(2)

(Hoogenboom, Handout 13, 2022)

Het probleem is echter dat het model op een numeriek iteratieve manier opgelost moet worden waarbij de iteraties voor bepaalde belastingen en sommige schaalvormen niet blijkt te convergeren.

Het doel van dit project is het vinden van een eenvoudige methode om het model van niet-lineaire vergelijkingen, waarmee gecontroleerd kan worden of een schaalconstructie knikt, op te lossen.

Hiervoor is eerst gekeken of het model ook analytisch opgelost kan worden. Hieruit is gebleken dat er een derdegraadsvergelijking ontstaat door de vergelijkingen (1 en 2) te combineren. Voor het oplossen van deze derdegraadsvergelijking zijn 5 verschillende methodes opgesteld, namelijk: algebraïsche methode (formule van Cardano), goniometrische methode, Newton-Rapshon methode, bisectiemethode en de Excel methode: Oplosser. De verschillende methodes zijn gecontroleerd door te kijken of er voor realistische belastinggevallen en schaalvormen altijd een realistische oplossing wordt verkregen. Verder zijn de methodes op een overzichtelijke manier gepresenteerd door het maken van een stappenplan in Excel en stroomdiagrammen.

Uit het stappenplan en de stroomdiagrammen is gebleken dat de analytische methode en de Excel methode de meest eenvoudige en snelle methodes zijn om het model op te lossen, omdat er het minst aantal stappen nodig zijn en omdat er geen iteraties uitgevoerd hoeven te worden. Verder is uit de controle gebleken dat er voor alle methodes, behalve de Excel methode, bijna altijd een realistische waarde voor de knockdownfactor uitkomt. Het blijkt dat Excel methode voor een paar belastinggevallen en schaalvormen niet werkt. Hierom wordt dus geadviseerd om de analytische methode te kiezen voor het oplossen van het model van niet-lineaire vergelijkingen (1 en 2).

Er wordt aanbevolen om het stappenplan en stroomdiagrammen op meer verschillende criterium met elkaar te vergelijken. Ook zou er verder onderzoek gedaan kunnen worden of naar het interval waarin de knockdownfactor zou moeten vallen, deze is nu namelijk gebaseerd op experimenten en er kan nog verder onderzoek worden gedaan naar de Excel methode waarom deze niet altijd werkt.

Inhoudsopgave

Voorwoord	V
Samenvatting	VI
Symbolenlijst	VIII
1 Inleiding	1
2 Knik van schalen	2
2.1 WAT ZIJN SCHALEN?	2
2.2 WAT IS KNIK?	2
2.3 VORMIMPERFECTIES	3
2.4 MODEL VOOR KNIK VAN SCHALEN	4
3 Methodes voor het oplossen van het model voor knik van schalen	5
3.1 IS EEN ANALYTISCHE OPLOSSING MOGELIJK?	5
3.2 ALGEBRAÏSCHE METHODE: FORMULE VAN CARDANO	7
3.3 GONIOMETRISCHE METHODE	8
3.4 NUMERIEKE METHODE: NEWTON-RAPSHON METHODE EN BISECTIEMETHODE	8
3.5 EXCEL METHODE: OPLOSSER	10
3.6 STROOMDIAGRAM VOOR CONSTRUCTEURS	11
3.6.1 <i>Analytische stroomdiagram: algebraïsche en goniometrische methode</i>	12
3.6.2 <i>Numerieke stroomdiagram: numerieke methodes</i>	13
3.6.3 <i>Excel stappenplan: Bisectiemethode</i>	14
4 Resultaten van de verschillende methodes	16
4.1 STAPPENPLAN CONTROLE	16
4.2 CONTROLE: ANALYTISCHE METHODE	17
4.2.1 <i>Verhouding k_{xx}/k_{yy}</i>	17
4.2.2 <i>Verhouding n_{xx}/n_{yy}</i>	17
4.2.3 <i>Verhouding d/t</i>	17
4.3 CONTROLE: NUMERIEKE METHODE	18
4.3.1 <i>Verhouding k_{xx}/k_{yy}</i>	18
4.3.2 <i>Verhouding n_{xx}/n_{yy}</i>	18
4.3.3 <i>Verhouding d/t</i>	18
4.4 CONTROLE: EXCEL METHODE	19
4.4.1 <i>Verhouding k_{xx}/k_{yy}</i>	19
4.4.2 <i>Verhouding n_{xx}/n_{yy}</i>	19
4.4.3 <i>Verhouding d/t</i>	19
5 Toepassing: Uiterste kniklast van een zweefvliegtuigvleugel	20
5.1 BELANGRIJKE DIMENSIES EN EIGENSCHAPPEN VAN HET ZWEEFVLIEGTUIG	20
5.1.1 <i>Belangrijke dimensies van het zweefvliegtuig</i>	20
5.1.2 <i>Belangrijke eigenschappen van het zweefvliegtuig</i>	21
5.2 METHODE OM DE UITERSTE KNIKLAST VAN DE VLEUGEL TE BEPALEN	21
5.3 RESULTATEN BEPALING UITERSTE KNIKLAST VAN DE VLEUGEL	23
6 Conclusies en aanbevelingen	24
6.1 CONCLUSIES	24
6.2 AANBEVELINGEN	24
Literatuurlijst:	26
Bijlage 1: Afleiding derdegraadsvergelijkingen in Maple	27
Bijlage 2: Voorbeeld berekening algebraïsche methode in Maple	31
Bijlage 3: Voorbeeld berekening goniometrische methode in Maple	33
Bijlage 4: Voorbeeld berekening numerieke methode in Maple	35
Bijlage 5: Toevoegen Oplosser in Microsoft Excel	38
Bijlage 6: Bepaling realistisch interval voor η	39
Bijlage 7: Berekeningen voor het bepalen van de uiterste kniklast van een zweefvliegtuigvleugel	40

Symbolenlijst

Grootheid/coëfficiënt		Eenheid	
symbool	naam	symbool	naam
a, a_x, a_y	kromtestraal	m	meter
C	knockdownfactor	-	dimensie één
d	amplitude van de imperfectie	m	meter
E	elasticiteitsmodulus	N/m ²	newton per vierkante meter
k_{xx}, k_{yy}	kromming	m ⁻¹	per meter
l_x, l_y	kniklengte	m	meter
n_{xx}, n_{yy}	membraankracht	N/m	newton per meter
$n_{xx\ cr}, n_{yy\ cr}$	kritische membraankracht	N/m	newton per meter
$n_{xx\ ult}, n_{yy\ ult}$	uiterste membraankracht	N/m	newton per meter
t	schaaldikte	m	meter
η	variabele in de vergelijking voor de knockdownfactor	-	dimensie één
λ	knikfactor	-	dimensie één
λ_{cr}	kritische knikfactor	-	dimensie één
λ_{ult}	uiterste knikfactor	-	dimensie één
ν	Poisson's ratio	-	dimensie één

Hoofdstuk 1 Inleiding

Een schaalstructuur wordt gekarakteriseerd door zijn geometrie. Het zijn vaak dunne, gekromde plaatstructuren die worden geassembleerd om grote structuren te maken. Voor deze schaalstructuren is knik een van de belangrijkste bezwijkvormen. Het is daarom van essentieel belang om de knikbelasting zo nauwkeurig mogelijk te bepalen. Echter is dit vaak lastig te bepalen doordat vormimperfecties van onbekende grootte een grote invloed kunnen hebben op de knikbelasting. Het berekenen van de knikbelasting kan op drie verschillende manieren worden gedaan, namelijk: eindige-elementenmethode lineaire knik, eindige-elementenmethode niet-lineair statisch of een eenvoudig model voorgesteld door meneer Hoogenboom. In dit rapport zal verder onderzoek worden gedaan naar het model voorgesteld door Hoogenboom. In dit model worden vormimperfecties meegenomen door de kritische knikbelasting te vermenigvuldigen met een knockdownfactor C , die rekening houdt met de imperfectie gevoeligheid. Het voorgestelde model bestaat uit de volgende twee niet-lineaire vergelijking (1 en 2) om de knockdownfactor C te bepalen: (Hoogenboom, Handout 13, 2022)

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t} \right) \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t} \right)} \quad (1) \quad \eta = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{1-C} \quad (2)$$

Waarbij:

Grootheid/coëfficiënt		Eenheid	
symbool	naam	symbool	naam
C	knockdownfactor	-	dimensie één
d	amplitude van de imperfectie	m	meter
k_{xx}, k_{yy}	kromming	m^{-1}	per meter
n_{xx}, n_{yy}	membraankracht	N/m	newton per meter
t	schaaldikte	m	meter
η	variabele in de vergelijking voor de knockdownfactor	-	dimensie één
ν	Poisson's ratio	-	dimensie één

Het probleem is echter dat de bovenstaande niet-lineaire vergelijkingen (1 en 2) op een numeriek iteratief manier opgelost moeten worden. Dit kost vaak veel tijd en moet meestal door verschillende computerprogramma's worden uitgevoerd. Ook blijkt de vergelijking voor bepaalde belastingen en sommige schaalvormen niet te convergeren, waardoor het model niet altijd bruikbaar is.

Het doel van dit project is het vinden van een eenvoudige methode om het model van niet-lineaire vergelijkingen, waarmee gecontroleerd kan worden of een schaalconstructie knikt, op te lossen, zodanig dat constructeurs op een begrijpelijke en eenvoudige manier een oplossing kunnen vinden. Dit gebeurt op basis van literatuuronderzoek en het uitproberen van ideeën in computerprogramma's zoals Maple en Python. Ook gebeurt dit aan de hand van het beantwoorden van de volgende onderzoeksvragen:

- Kunnen de niet-lineaire vergelijkingen (1 en 2) ook analytisch worden opgelost?
- Zo ja, werkt de analytische oplossing voor alle realistische belastingengevallen en schaalvormen?
- Is de analytische oplossing op een begrijpelijke manier uit te leggen aan de constructeur?
- Toepassing: Wat is de uiterste kniklast van een zweefvliegtuigvleugel?

De opbouw van het rapport is als volgt: in hoofdstuk 2 zal de theorie van knik van schalen worden behandeld. Vervolgens wordt er in hoofdstuk 3 gekeken naar verschillende methodes om het model op een eenvoudige manier op te lossen en dit op een begrijpelijke manier uit te leggen aan de constructeur. In hoofdstuk 4 worden de resultaten van de gevonden methodes gecontroleerd en in hoofdstuk 5 is er naar een interessante toepassing gekeken waarbij de uiterste kniklast van een zweefvliegtuigvleugel wordt bepaald. Ten slotte is er in hoofdstuk 6 een conclusie getrokken en zijn er aanbevelingen gedaan. In de bijlagen zijn alle gedetailleerde berekeningen opgenomen.

Hoofdstuk 2 Knik van schalen

In dit hoofdstuk zal de theorie worden beschreven die nodig is voor het uitvoeren van dit project. Eerst zal de definitie van schalen worden uitgelegd (2.1). Vervolgens zal er dieper in worden gegaan op de bezwijkvorm knik en de invloed van knik op schalen (2.2). Daarna zullen vormimperfecties worden beschreven en waarom deze zo belangrijk zijn voor knik van schalen (2.3). Ten slotte zal het model gepresenteerd worden waarmee gecontroleerd kan worden of een schaalconstructie knikt waarbij rekening wordt gehouden met vormimperfecties (2.4).

2.1 Wat zijn schalen?

Een schaal is een dunne, gekromde plaatstructuur die gevormd is om uitgeoefende krachten zoals druk-, trek- en schuifspanningen die in het vlak werken over te brengen naar de steunpunten. De schaaldikte is hierbij meestal erg klein ten opzichte van de andere dimensies zoals de breedte, spanwijdte en kromtestraal. Om te bepalen of een constructie een schaal genoemd kan worden, wordt er gebruik gemaakt van de verhouding tussen de kromtestraal a en de schaaldikte t van de schaal. Deze verhouding a/t ratio wordt ook wel de slankheidsverhouding genoemd. Volgens hand-out 1 van CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application kan een constructie een schaal genoemd worden als de a/t verhouding binnen het volgende interval ligt: $5 \leq \frac{a}{t} \leq 4000$.

De redenatie voor de gekozen grenzen is als volgt: de ondergrens van 5 is gekozen omdat als de verhouding kleiner wordt dan 5, de afschuifvervorming steeds belangrijker wordt, waardoor de constructie zich niet meer zal gedragen als een schaal. Wanneer de verhouding boven de 4000 uitkomt, dan is de verhouding te groot, waardoor de constructie te zwak wordt en al snel zal bezwijken bij een lage belasting. Twee toepassingen van schaalconstructies zijn in onderstaande figuren te zien. In figuur 1 is het Palazzetto dello sport in Rome te zien met een a/t verhouding van 260 en in figuur 2 is een zelfgemaakte foto van het Pantheon in Rome te zien met een a/t verhouding van 18. (Hoogenboom, Handout 1, 2022)



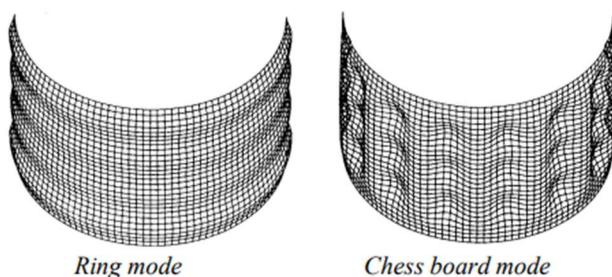
Figuur 1. Palazzetto dello sport in Rome
(Hoogenboom, Handout 1, 2022)



Figuur 2. Pantheon in Rome

2.2 Wat is knik?

Knik is een ongecontroleerde, plaatselijke buiging van een slanke constructie, onder verlies van stabiliteit, die wordt veroorzaakt door een externe kracht. Zoals ook al was aangegeven in hoofdstuk 1 is knik een van de belangrijkste bezwijkvormen van schalen. Wanneer een schaalconstructie axiaal wordt belast op druk kunnen er twee knikvormen ontstaan, dit is afhankelijk van de a/t verhouding: een ringpatroon of een schaakbordpatroon. De twee knikvormen zijn weergegeven in figuur 3.



Figuur 3. Knikvormen van een axiaal belaste cilinder (Hoogenboom, Handout 12, 2022)

De vervormingen die ontstaan bij de knikvormen in figuur 3 zijn meestal erg klein en niet zichtbaar voor het blote oog. Dit is anders wanneer het materiaal plastisch gaat vervormen, hierbij zullen de knikvormen veranderen: het ringpatroon verandert in een olifantsvoet en het schaakbordpatroon verandert in een Yoshimura patroon. De twee knikvormen zijn weergegeven in figuur 4.



Figuur 4. Links een olifantsvoet en rechts een Yoshimura patroon (Hoogenboom, Handout 12, 2022)

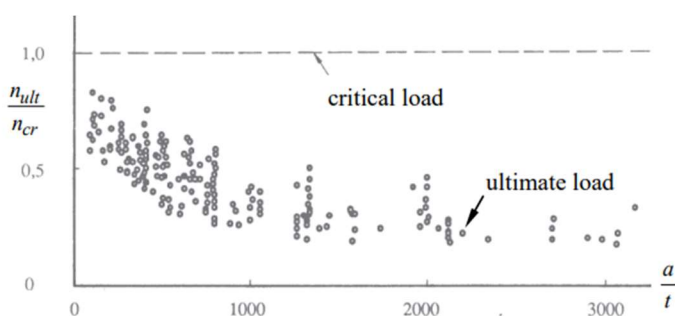
Om de knikbelasting te bepalen kan een lineaire knikanalyse worden uitgevoerd. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden met eindige-elementen programma's. Hierbij worden zogenaamde kritische belasting factoren λ_{cr} berekend. Voor de kritische kniklastfactor is een formule afgeleid die voor zowel een ringpatroon of een schaakbordpatroon gebruikt kan worden. De vergelijking (3) is overgenomen uit hand-out 12 van CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application (Hoogenboom, Handout 13, 2022). In dit document zijn ook alle bewijzen en afleidingen te vinden van de vergelijking:

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (3)$$

De knikbelasting kan vervolgens worden bepaald door de kniklastfactor te vermenigvuldigen met de belasting. Als de knikbelasting lager is dan de belasting, dan zal de constructie bezwijken op knik. Dit is het geval wanneer : $0 < \lambda_{cr} < 1$

2.3 Vormimperfecties

Vormimperfecties kunnen grote invloed hebben op de grootte van de maximale knikbelasting van een schaalconstructie. Om de invloed van vormimperfecties uit te leggen worden eerst twee begrippen geïntroduceerd: de kritische belasting en de uiterste belasting. De kritische belasting, ook wel de theoretische belasting, is de belasting waarbij men volgens de theorie verwacht dat een schaalconstructie zal bezwijken. Met vergelijking (3) uit paragraaf 2.2 kan de kritische knikbelasting worden berekend. De uiterste belasting is gebaseerd op experimenten, dit is dus de belasting waarbij de constructie in de praktijk zal bezwijken. Verschillende experimenten hebben bewezen dat er een groot verschil is tussen de uiterste belasting en de kritische belasting. Dit is ook te zien in figuur 5, waarin de uitkomsten van 172 experimenten zijn weergegeven waarbij schalen met verschillende a/t verhouding axiaal werden belast. Hierin is te zien dat de experimenten "uiterste belasting" soms wel 6 keer zo klein zijn dan de theoretische "kritische belasting". Dit verschil kan worden verklaard door de onzichtbare vormimperfecties in de schalen.



Figuur 5. Experimentele uiterste belastingen van 172 axiaal belaste aluminium cilinders (Hoogenboom, Handout 12, 2022)

2.4 Model voor knik van schalen

Uit paragraaf 2.3 is gebleken dat vormimperfecties erg belangrijk zijn voor schaalconstructies. De uiterste belasting kan soms wel 6 keer lager zijn dan de verwachte kritische belasting. Om de vormimperfecties mee te nemen in de berekening voor de knikbelasting moeten de kritische kniklastfactoren worden vermenigvuldigd met een zogenaamde knockdownfactor C . Deze knockdownfactor houdt rekening met de imperfectie gevoeligheid. Als er weinig informatie bekend is over de constructie, wordt vaak een knockdownfactor van $1/6$ gebruikt. Dit is gebaseerd op experimenten waaruit blijkt dat de uiterste belasting bijna altijd groter is dan 0.166 keer de kritische belasting. Dit is ook te zien in figuur 5 uit paragraaf 2.3.

Voor het bepalen van de knikbelasting kan een lineaire knikanalyse worden uitgevoerd. Het nadeel hieraan is dat een lineaire knikanalyse wordt uitgevoerd zonder rekening te houden met vormimperfecties. Om de imperfecties wel mee te nemen moet er een niet-lineaire eindige elementen analyse worden uitgevoerd. Voor het bepalen van de knockdownfactor is daarom een model voorgesteld. In dit model wordt een amplitude voor de imperfectie d aangenomen. Het model is in hoofdstuk 1 weergegeven met de vergelijkingen (1 en 2) en is hieronder nog een keer te zien:

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t} \right) \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t} \right)} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{1-C} \quad (2)$$

Het model bestaat uit twee-niet lineaire vergelijkingen (1 en 2) die numeriek iteratief opgelost kunnen worden. De afleidingen voor dit model zijn te vinden in hand-out 13 van CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application (Hoogenboom, Handout 13, 2022).

Hoofdstuk 3 Methodes voor het oplossen van het model voor knik van schalen

In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar verschillende methodes om het model (vergelijking 1 en 2) waarmee kan worden gecontroleerd of een schaalstructuur knikt op te lossen. Hiervoor wordt eerst onderzoek gedaan of de vergelijkingen ook analytisch opgelost kunnen worden (3.1). Daarna zullen verschillende methodes worden beschreven om de vergelijking op te lossen: Algebraïsch met de Formule van Cardano (3.2), goniometrisch (3.3), numeriek met de bisectiemethode en de Newton Rapshon methode (3.4) of met de invoegtoepassing Oplosser in Excel (3.5). Ten slotte zullen de verschillende methodes op een overzichtelijke manier worden gepresenteerd, zodat een constructeur op relatief eenvoudige wijze de methodes kan toepassen (3.6).

3.1 Is een analytische oplossing mogelijk?

Om de vraag te kunnen beantwoorden of er ook een analytische oplossing mogelijk is voor het model voor knik van schalen, worden de vergelijkingen (1 en 2) van het model onderzocht met behulp van het computerprogramma Maple. De eerste stap die hiervoor is uitgevoerd is het omschrijven van de twee niet-lineaire vergelijking tot één vergelijking. Dit kan op twee manieren worden gedaan:

1. De vergelijking voor C (1) in de vergelijking voor η (2) stoppen of;
2. De vergelijking voor η (2) in de vergelijking voor C (1) stoppen.

Hieruit is gebleken dat er voor beide manieren een derdegraadsvergelijking (polynoom) ontstaat. In bijlage 1 zijn de gedetailleerde berekeningen van de afleidingen voor de derdegraadsvergelijkingen 4 en 5 te vinden. De volgende derdegraadsvergelijkingen (4 en 5) kunnen worden verkregen door de vergelijkingen 1 en 2 van het model met elkaar te combineren:

$$0 = -20 d^2 k_{yy}^2 n_{xx} \eta^3 + \left(16 d k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 d k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3v^2 + 3} d^2 n_{xx} k_{yy}^2 - 8 d k_{yy}^2 n_{yy} t \right) \eta^2 + \left(8 \sqrt{-3v^2 + 3} d t n_{yy} k_{yy}^2 - 20 \sqrt{-3v^2 + 3} d t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} + t^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \right) \eta + 4 \sqrt{-3v^2 + 3} n_{xx} k_{xx}^2 t^2 - 4 \sqrt{-3v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 : \quad (4)$$

$$0 = \left(-4 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} \right) C^3 + \left(20 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 8 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} + 9 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 8 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \right) C^2 + \left(-24 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} + 24 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} - 6 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 2 t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \right) C + 4 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} + t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx} : \quad (5)$$

In vergelijking 5 geldt: $s = \sqrt{-3v^2 + 3}$

Vergelijkingen 4 en 5 kunnen nu beide verder uitgewerkt worden, echter wordt dit alleen gedaan voor vergelijking 4 in dit verslag. Dit wordt gedaan omdat het uitwerken van beide vergelijkingen te veel tijd kost en zal dit rapport te groot worden voor de scope van het vak.

Zoals hierboven al is beschreven ontstaat er een derdegraadsvergelijking. Een derdegraadsvergelijking heeft de volgende algemene vorm (Cubic equation, 2022):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (6)$$

Derdegraadsvergelijking 4 kan ook in de algemene vorm worden geschreven. Waarbij in plaats van x , η de onbekende is:

$$a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d = 0 \quad (7)$$

Waarbij de coëfficiënten zijn:

$$a = -20 z^2 k_{yy}^2 n_{xx} \quad (8)$$

$$b = 16 z k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 z k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3v^2 + 3} z^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 8 z k_{yy}^2 n_{yy} t \quad (9)$$

$$c = 8\sqrt{-3v^2 + 3} z t k_{yy}^2 n_{yy} - 20\sqrt{-3v^2 + 3} z t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 n_{yy} k_{yy} k_{xx} + t^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 n_{xx} k_{yy} k_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \quad (10)$$

$$d = 4\sqrt{-3v^2 + 3} k_{xx}^2 n_{xx} t^2 - 4\sqrt{-3v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 \quad (11)$$

(In de bovenstaande vergelijkingen is d , de imperfectie amplitude, vervangen door z . Dit is gedaan om verwarring te voorkomen tussen de variabele d van de algemene vorm van de derdegraadsvergelijking.)

Om de algemene vorm te versimpelen kan het worden geschreven in een gereduceerde vorm. Deze vorm kan worden verkregen door een verandering van variabele:

$$\eta = w - \frac{b}{3a} \quad (12)$$

Door deze verandering van variabele ontstaat er een derdegraadsvergelijking zonder de term w^2 . De gereduceerde vorm ontstaat vervolgens door alles door a te delen:

$$w^3 + wt + q = 0 \quad (13)$$

Waarbij:

$$t = \eta + \frac{b}{3a} \quad (14)$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad (15)$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad (16)$$

Deze vorm is eenvoudiger te gebruiken dan de algemene vorm en zal daarom ook in dit hoofdstuk verder worden gebruikt voor het oplossen van de derdegraadsvergelijking.

Nu bekend is dat het model kan worden geschreven als een derdegraadsvergelijking kan ook het gedrag van de oplossingen worden bepaald aan de hand van de discriminant Δ van de vergelijking. De discriminant voor de gereduceerde vorm luidt:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 \quad (17)$$

Hierbij kunnen 4 verschillende mogelijke situaties van oplossingen worden onderscheiden, namelijk:

- $\Delta = 0$; $p = q = 0$, de vergelijking heeft een drievoudige oplossing $\eta = 0$
- $\Delta = 0$; $p, q \neq 0$, de vergelijking heeft 2 verschillende reële oplossingen
- $\Delta > 0$, de vergelijking heeft 1 reële oplossing en twee complex geconjugeerde oplossingen
- $\Delta < 0$, de vergelijking bestaat uit 3 verschillende reële oplossingen

Het oplossen van een derdegraadsvergelijking kan op verschillende manieren. Zo kan het analytisch of numeriek worden opgelost. In het geval van een analytische methode kan het op twee manieren worden opgelost:

- In het geval dat de $\Delta > 0$, kan de vergelijking algebraïsch worden opgelost aan de hand van de formule van Cardano.
- In het geval dat de $\Delta < 0$, kan de vergelijking op een goniometrische methode worden opgelost. Deze methode is bedacht door de Franse wiskundige Viète waarbij 3 verschillende reële oplossingen ontstaan.

Ten slotte kunnen ook verschillende numerieke methoden worden gebruikt voor het berekenen van een reële oplossing, zoals de Newton Raphson methode en de bisectiemethode.

In de volgende paragrafen worden de verschillende methodes verder toegelicht.

3.2 Algebraïsche methode: formule van Cardano

Niccolò Tartaglia was een Italiaanse wiskundige die voor het eerst een formule ontdekte voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Deze wiskundige formule, ook wel de formule van Cardano genoemd, geeft de oplossingen voor de gereduceerde vorm van een derdegraadsvergelijking (13). Dit is alleen het geval als p en q reële getallen zijn zodanig dat de discriminant > 0 is:

$$4p^3 + 27q^2 > 0 \quad (18)$$

Hierbij heeft de vergelijking 1 reële oplossing en twee complex geconjugeerde oplossingen (paragraaf 3.1). Met de formule van Cardano kan de reële oplossing worden gevonden. De formule luidt als volgt:

$$w_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \rightarrow \eta_1 = w - \frac{b}{3a} \quad (19)$$

Waarbij:

+ η_1 = reële oplossing van de derdegraadsvergelijking

De andere twee oplossingen zijn complex geconjugeerde oplossingen. Deze kunnen worden verkregen door de reële oplossing te vermenigvuldigen met de derdemachtseenheidswortels, in het Engels ook wel 'cube roots of unity':

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{en} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad (20)$$

De andere twee oplossingen worden dan:

$$w_2 = w_1 \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \eta_2 = w_2 - \frac{b}{3a} \quad (21)$$

$$w_3 = w_1 \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \eta_3 = w_3 - \frac{b}{3a} \quad (22)$$

Waarbij:

+ η_2, η_3 = complex geconjugeerde oplossingen van de derdegraadsvergelijking

Met de gevonden oplossingen voor η kan de knockdownfactor bepaald worden door deze in te vullen in vergelijking (1) (Aan het einde van deze pagina is vergelijking 1 nog een keer weergegeven). Hiervoor hoeft alleen de reële oplossing gebruikt te worden, omdat de andere twee oplossingen complex zijn en dus niet voor een realistische knockdownfactor zorgen. (Cubic equation, 2022)

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t}\right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t}\right) \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t}\right)} \quad (1)$$

In bijlage 2 is een voorbeeld van de berekening met de formule van Cardano uitgewerkt in Maple.

3.3 Goniometrische methode

In de vorige paragraaf was te zien dat de formule van Cardano een oplossing geeft in het geval van een positieve discriminant. Hierbij ontstaat 1 reële oplossing en 2 complex geconjugeerde oplossingen. Het kan natuurlijk ook voorkomen dat de discriminant negatief is:

$$4p^3 + 27q^2 < 0 \quad (23)$$

In dat geval ontstaan er 3 verschillende reële oplossingen. Ook dit geval is op te lossen met de formule van Cardano, maar dit is alleen mogelijk door gebruik te maken van complexe getallen. Hierdoor worden de berekeningen een stuk ingewikkelder dan wanneer de discriminant positief is. Een andere methode om in het geval van een negatieve discriminant 3 verschillende reële oplossingen te krijgen is de goniometrische methode. Deze methode is bedacht door de Franse wiskundige François Viète. Bij deze methode wordt gebruik gemaakt van trigonometrische functies, in termen van cosinussen en arccosinussen. De trigonometrische vergelijkingen voor de goniometrische methode zijn:

$$w_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2\pi k}{3} \right] \quad \text{voor } k = 0, 1, 2. \quad (24)$$

$$\eta_k = w_k - \frac{b}{3a} \quad \text{voor } k = 0, 1, 2. \quad (25)$$

Waarbij:

+ $\eta_k = 3$ verschillende reële oplossingen van de derdegraadsvergelijking

Vervolgens kan net zoals bij de formule van Cardano de knockdownfactors bepaald worden aan de hand van vergelijking (1). Er ontstaan bij deze methode 3 verschillende reële oplossingen, hierdoor ontstaan er dus ook 3 verschillende knockdownfactors. Er zal dus een keuze gemaakt moeten worden tussen de 3 verschillende knockdownfactors. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door te kijken naar welke van de 3 waarden het meest realistisch is. (Cubic equation, 2022)

In bijlage 3 is een voorbeeld van de berekening met de goniometrische methode uitgewerkt in Maple.

3.4 Numerieke methodes: Newton Rapshon methode en bisectiemethode

Voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen kunnen ook numerieke methodes gebruikt worden. De numerieke methode heeft alleen wel een groot nadeel ten opzichte van de analytische methode (algebraïsche of goniometrisch), namelijk dat de oplossing een benadering is van de werkelijke oplossing en dat voor het vinden van de benaderde oplossing een iteratief proces nodig is. Toch wordt er in dit project naar twee numerieke methodes gekeken, namelijk de Newton-Rapshon methode en de bisectiemethode. De Newton-Rapshon methode heeft als eigenschap dat het kwadratisch convergeert, wat dus betekent dat de methode snel kan convergeren als de startwaarde dicht in de buurt van de oplossingen liggen. De bisectiemethode heeft weer de eigenschap dat de methode onvoorwaardelijke convergent is, wat betekent dat het altijd convergeert naar een oplossing.

Aan de hand van de methodes kan een benadering van een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking gevonden worden. Net als bij de analytische methodes is het verstandig om eerst het gedrag van de oplossingen te bepalen door het berekenen van de discriminant van de derdegraadsvergelijking. Dit kan aan de hand van vergelijking (17). De verschillende mogelijke oplossingen zijn:

- $\Delta = 0; p = q = 0$, de vergelijking heeft een drievoudige oplossing $\eta = 0$ (analytisch oplossen)
- $\Delta = 0; p, q \neq 0$, de vergelijking heeft 2 verschillende reële oplossingen (analytisch oplossen)
- $\Delta > 0$, de vergelijking heeft 1 reële oplossing en twee complex geconjugeerde oplossingen. De reële oplossing is de oplossing voor het bepalen van de knockdownfactor.
- $\Delta < 0$, de vergelijking bestaat uit 3 verschillende reële oplossingen. Er zal een keuze moeten worden gemaakt tussen de 3 verschillende knockdownfactors.

Uitleg Newton-Rapshon methode:

De Newton-Rapshon methode start met een initiële gok voor de oplossing en genereert dan een reeks nieuwe oplossingen $\{\eta_n\}$ door de volgende vergelijking:

$$\eta_n = \eta_{n-1} - \frac{f(\eta_{n-1})}{f'(\eta_{n-1})}, \quad \text{for } n \geq 1. \quad (26)$$

Waarbij:

- η_n = Benadering van een reële oplossing van η na n iteraties
- η_{n-1} = De nieuwe benadering van η na elke iteratie, welke start met een benadering van η_0 die zelf te bepalen is.
- $f(\eta_{n-1}) = a(\eta_{n-1})^3 + b(\eta_{n-1})^2 + c(\eta_{n-1}) + d = 0$
- $f'(\eta_{n-1}) =$ De afgeleide van de algemene vorm =
 $f(\eta) = a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d = 0 \rightarrow$
 $f'(\eta) = 3a\eta^2 + 2b\eta + c = 0 \rightarrow$
 $f'(\eta_{n-1}) = 3a(\eta_{n-1})^2 + 2b\eta_{n-1} + c = 0$
- n = Aantal iteraties

Door het uitvoeren van n iteraties zal de methode uiteindelijk convergeren. Hierbij wordt gestart met een willekeurige startwaarde, waardoor de methode een nieuwe waarde genereert, die weer opnieuw als startwaarde gebruikt zal worden. Dit herhaalt zich tot er convergentie is. De snelheid van de convergentie is afhankelijk van de initiële gok van de startwaarde. Ligt de startwaarde voldoende dichtbij de oplossing dan zal de methode snel convergeren. Zal deze er te ver aflaggen dan zal het langer duren voordat de methode convergeert of zal de methode helemaal niet convergeren. Om er zeker van te zijn dat er een goede startwaarde wordt gekozen, kan er eerst een andere numerieke methode worden uitgevoerd, namelijk de bisectiemethode. Deze methode heeft de eigenschap van onvoorwaardelijke convergentie, wat betekent dat het altijd convergeert naar een oplossing. De bisectiemethode zou daarom ook alleen gebruikt kunnen worden, zonder de Newton-Rapshon methode. (Vuik, Vermolen, van Gijzen, & Vuik, 2018)

Uitleg bisectiemethode:

Voor het uitvoeren van de bisectiemethode moeten 2 startwaardes worden gekozen a en b . Hierdoor ontstaat het interval $[a, b]$. $f(a)$ en $f(b)$ moeten hierbij tegenovergestelde tekens hebben, $f(a)f(b) < 0$, omdat er dan volgens de tussenwaardestelling (In het Engels: Intermediate-value theorem) geldt dat er een waarde p in het interval $[a, b]$ zit waarbij $f(p) = 0$.

De methode verdeelt het interval $[a, b]$ in twee gelijke delen en gaat vervolgens verder met het interval waar de waarde van p in valt. De bisectiemethode gaat als volgt:

Laat bijvoorbeeld $a_0 = a$ en $b_0 = b$ zijn,

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (27)$$

Met de nieuwe gevonden waarde voor p kan de volgende iteratie worden opgesteld:

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{en} \quad b_{n+1} = p_n, \quad \text{als } f(a_n) \cdot f(p_n) < 0,$$

of anders

$$a_{n+1} = p_n \quad \text{en} \quad b_{n+1} = b_n.$$

Voor de methode zal ook een stopcriterium gekozen moeten worden, dit kan bijvoorbeeld door het aangeven van het aantal iteraties voor een bepaalde fout ϵ waarvoor de benadering nauwkeurig genoeg is. De bisectiemethode kan daarnaast ook worden gebruikt voor de Newton-Rapshon methode om een goede startwaarde te vinden. (Vuik, Vermolen, van Gijzen, & Vuik, 2018)

Met de bovengenoemde numerieke methodes kan een benadering van een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking worden gevonden. De andere twee oplossingen kunnen nu gemakkelijk worden bepaald door de algemene derdegraadsvergelijking in de volgende vorm te schrijven:

$$(\eta - \eta_1)(\alpha\eta^2 + \beta\eta + \gamma) = 0 \quad (28)$$

Waarbij:

- η_1 = Benadering van een reële oplossing na n iteraties
- α = a ($a \rightarrow$ vergelijking 7)
- γ = $-\frac{d}{\eta_1}$ ($d \rightarrow$ vergelijking 10)
- β = $-\frac{c-\gamma}{\eta_1}$ ($c \rightarrow$ vergelijking 9)

De twee andere oplossingen van de derdegraadsvergelijking kunnen nu worden berekend door het oplossen van vergelijking (28) met behulp van de abc-formule:

$$(\alpha\eta^2 + \beta\eta + \gamma) = 0 \quad (29)$$

$$\eta_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{en} \quad \eta_3 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (30)$$

Waarbij:

- + η_2, η_3 = overige twee oplossingen van de derdegraadsvergelijking

Ook kunnen hier weer de knockdownfactors berekend worden aan de hand van vergelijking (1). In bijlage 4 is een voorbeeld van de berekening met de Newton-Rapshon methode en de bisectiemethode uitgewerkt in Maple.

3.5 Excel methode: Oplosser

Als laatste kan ook nog de Excel methode worden gebruikt. Deze methode maakt gebruik van de invoegtoepassing Oplosser in het programma Microsoft Excel. Met deze invoegtoepassing kan een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking worden gevonden. De Oplosser is alleen niet in alle Excel programma's gelijk beschikbaar, maar kan op een relatief eenvoudige manier worden toegevoegd aan Excel. In Bijlage 5 staat een stappenplan voor het toevoegen van de Oplosser in Excel.

Om de Oplosser te gebruiken voor het oplossen van de derdegraadsvergelijking kunnen de volgende stappen worden uitgevoerd (Khan, 2021):

1. Zet eerst alle coëfficiënten (vergelijking 8, 9, 10 en 11) van de derdegraadsvergelijking in verschillende cellen. In figuur 6 is een screenshot te zien van de cellen in Excel.

	A	B	C	D	E
1					
2		A =	B =	C =	D =
3	coëfficiënten	Vergelijking (8)	Vergelijking (9)	Vergelijking (10)	Vergelijking (11)
4					

Figuur 6. Screenshot van stap 2 in Excel

2. In een andere cel kan een gekozen beginwaarde voor X neer worden gezet. Dit kan bijvoorbeeld 0 zijn. In figuur 7 is een screenshot van de cel in Excel te zien.
3. Weer in een andere cel kan de derdegraadsvergelijking (7) worden geschreven, die bestaat uit de cellen van de coëfficiënten en de startwaarde van X. In figuur 7 is een screenshot van de cel in Excel te zien.

	A	B	C	D
4				
5	Startwaarde η	0	Derdegraadsvergelijking	Vergelijking (7)
6				

Figuur 7. Screenshot van stap 2 en 3 in Excel

4. Vervolgens kan de Oplosser worden gebruikt door de Oplosser te openen, welke te vinden is onder de "Analyse" optie in de "Gegevens" tabblad. In de "Parameters van Oplosser" dialoogvenster, kunnen de onderstaande gegevens worden ingevuld:
 - Doelfunctie bepalen: Cel stap 3
 - Naar: Waarde van: 0
 - Door veranderen Cel stap 2 van variabelecellen:
 5. Nu kan de Oplossen optie worden aangeklikt, waarnaar er een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking in de cel van de startwaarde van X zal verschijnen.
- In figuur 8 is een screenshot te zien van de stappen 4 en 5 die zijn uitgevoerd in Excel.

Figuur 8. Screenshot van stap 4 en 5 in Excel

De andere twee oplossingen kunnen nu op dezelfde manier worden gevonden zoals beschreven is in paragraaf 3.4 aan de hand van vergelijking (25). Vervolgens kunnen de knockdownfactors worden berekend aan de hand van vergelijking (1).

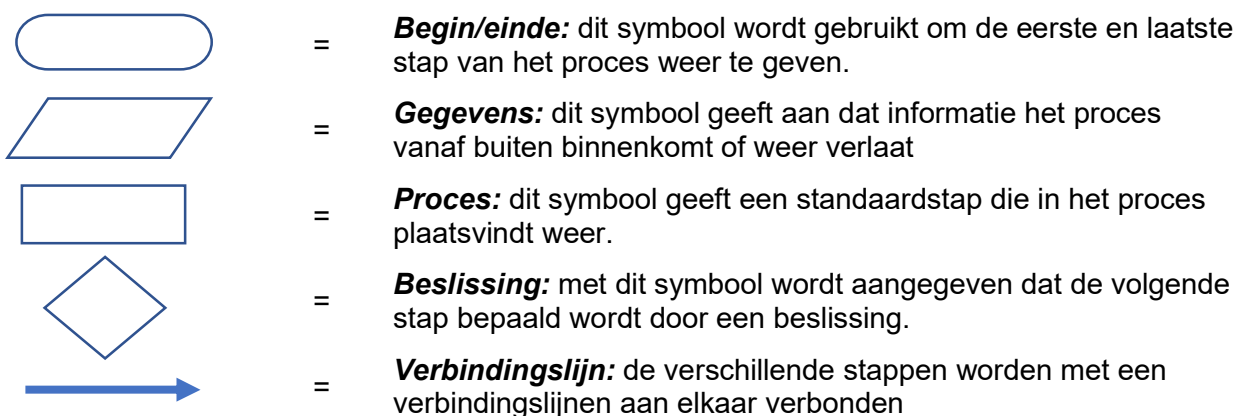
3.6 Stroomdiagram voor constructeurs

Voor constructeurs is het handig om op een snelle en eenvoudige manier gegevens te kunnen berekenen. Zo ook voor het bepalen van de knockdownfactor voor knik van schalen. Een voorbeeld van het overzichtelijke presenteren van de methodes is een stroomdiagram. Hiermee kan de constructeur op een relatief eenvoudige wijze stapsgewijs benodigde gegevens berekenen.

In de vorige paragrafen zijn 2 methodes gepresenteerd voor het bepalen van de knockdownfactor:

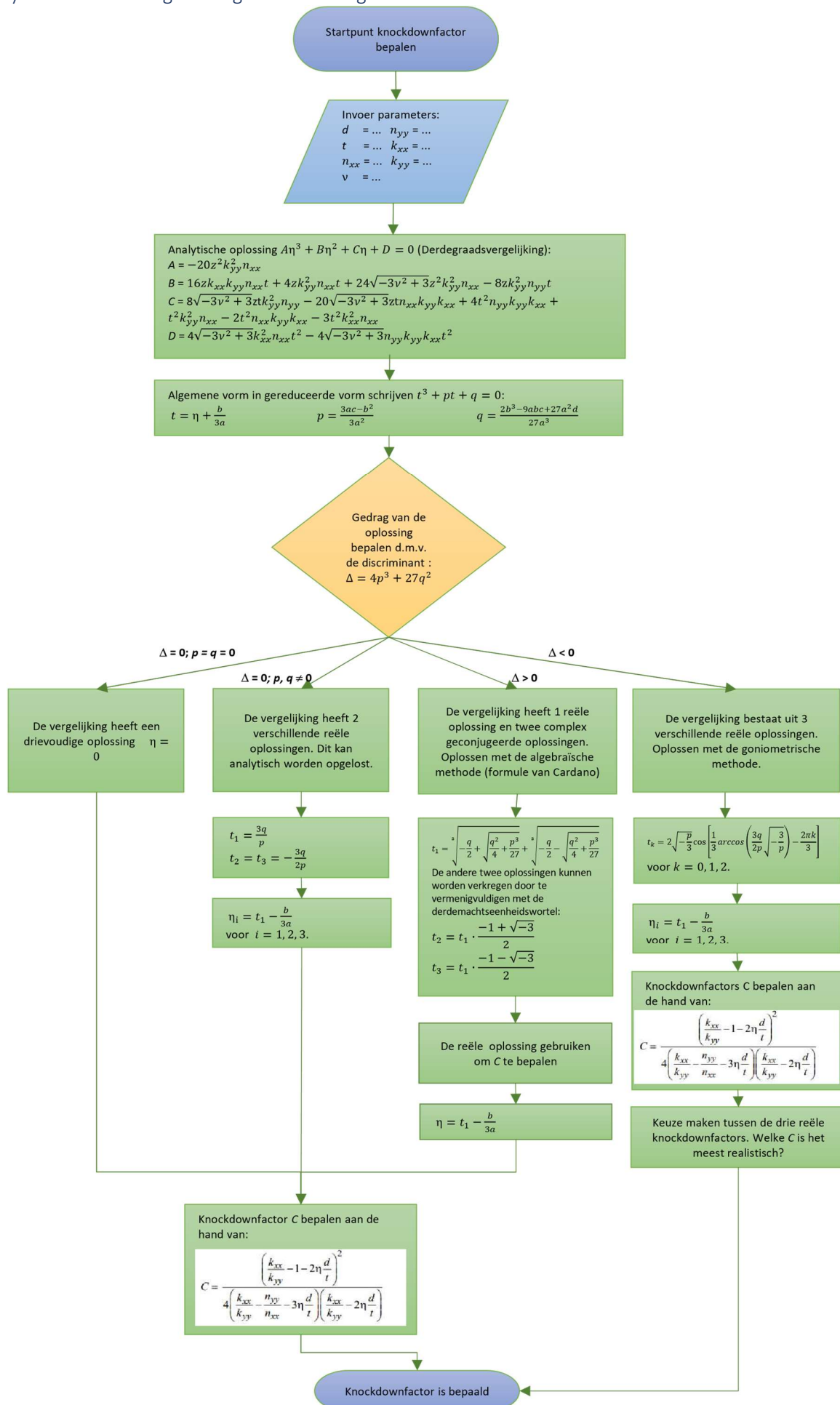
1. Analytisch: Algebraïsche methode ($\Delta > 0$) en goniometrische methode ($\Delta < 0$)
2. Numeriek: Newton Rapshon methode en bisectiemethode

In de sub paragrafen 3.6.1 en 3.6.2 zijn bovenstaande manieren voor het bepalen van de knockdownfactor in een stroomdiagram weergegeven. Dit is gedaan met het programma Microsoft Excel. In deze stroomdiagrammen zijn de volgende symbolen met betekenis gebruikt (Leaninfo, 2022):

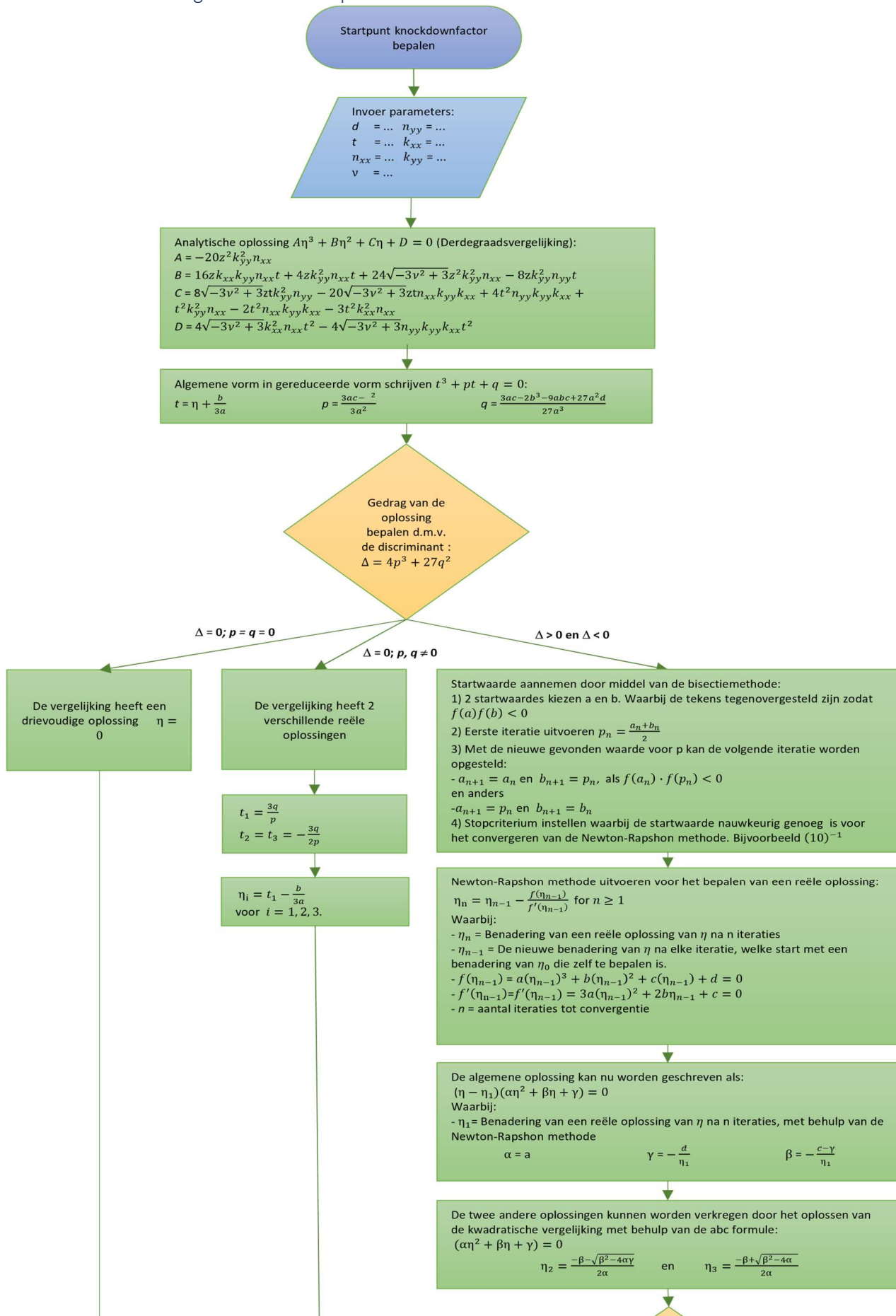


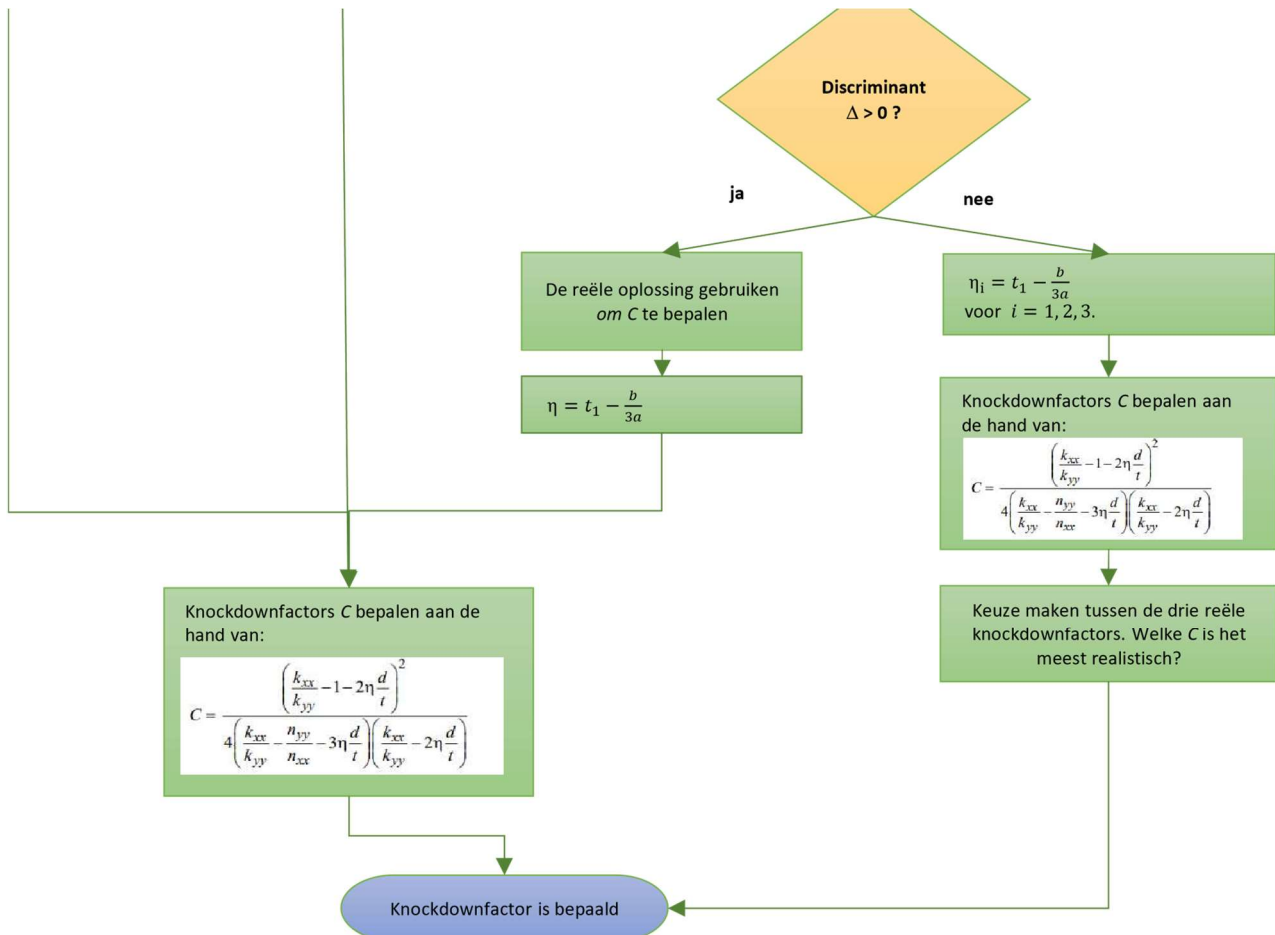
Ten slotte is er in sub paragraaf 3.6.3 een eenvoudig stappenplan gemaakt voor het toepassen van de bisectiemethode. Het stappenplan bestaat uit een aantal stappen waarmee de constructeur met behulp van het programma Microsoft Excel de knockdownfactors kan bepalen voor verschillende combinaties van de parameters.

3.6.1 Analytische stroomdiagram: algebraïsche en goniometrische methode



3.6.2 Numerieke stroomdiagram: Newton-Rapshon methode en bisectiemethode





3.6.3 Excel stappenplan: bisectiemethode

Stap 1) Invoeren parameters en berekenen coëfficiënten derdegraadsvergelijking:

$A = -20 \cdot B^2 \cdot B_7^2 \cdot B_4$
 $B = 16 \cdot B^2 \cdot B_6 \cdot B_7 \cdot B_4 \cdot B_3 + 4 \cdot B^2 \cdot B_7^2 \cdot B_4 \cdot B_3 + 24 \cdot \text{WORTEL}(-3 \cdot B_8^2 + 3) \cdot B^2 \cdot B_4 \cdot B_7^2 - 8 \cdot B^2 \cdot B_7^2 \cdot B_5 \cdot B_3$
 $C = 8 \cdot \text{WORTEL}(-3 \cdot B_8^2 + 3) \cdot B^2 \cdot B_3 \cdot B_5 \cdot B_7^2 - 20 \cdot \text{WORTEL}(-3 \cdot B_8^2 + 3) \cdot B^2 \cdot B_3 \cdot B_4 \cdot B_7 \cdot B_6 + 4 \cdot B_3^2 \cdot B_6 \cdot B_7 \cdot B_5 + B_3^2 \cdot B_7^2 \cdot B_4 - 2 \cdot B_3^2 \cdot B_6 \cdot B_7 \cdot B_4 - 3 \cdot B_3^2 \cdot B_6^2 \cdot B_4$
 $D = 4 \cdot \text{WORTEL}(-3 \cdot B_8^2 + 3) \cdot B_4 \cdot B_6^2 \cdot B_3^2 - 4 \cdot \text{WORTEL}(-3 \cdot B_8^2 + 3) \cdot B_5 \cdot B_7 \cdot B_6 \cdot B_3^2$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Invoeren parameters:			Berekenen coëfficiënten derdegraadsvergelijking:				
2	d =	1		A =	-20			
3	t =	1		B =	50,939954			
4	nxx =	1		C =	-19,47			
5	nyy =	1		D =	0			
6	kxx =	1						
7	kyy =	1						
8	v =	0,35						

Stap 2) Bisectiemethode opstellen 1^{ste} Iteratie rij 12:

a = 1^{ste} gok
 b = 2^{de} gok
 Middelpunt a en b = (A12+B12)/2
 f(a) = $\$E\$2 \cdot A12^3 + \$E\$3 \cdot A12^2 + \$E\$4 \cdot A12 + \$E\5
 f(b) = $\$E\$2 \cdot B13^3 + \$E\$3 \cdot B13^2 + \$E\$4 \cdot B13 + \$E\5
 f(middelpunt) = $\$E\$2 \cdot C14^3 + \$E\$3 \cdot C14^2 + \$E\$4 \cdot C14 + \$E\5
 Error (a - b) = H11 = Stopcriterium kiezen, G12 = , H12 =

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10	Bisectiemethode voor het oplossen van $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:							
11	a	b	middelpunt	f(a)	f(b)	f(middelpunt)	error (b - a)	0,0001
12	1,9470	1000,0000	500,9735	7,5815	-1,9949E+10	-2501856076,6971	998,0530	0
13								

Stap 3) Bisectiemethode opstellen 2^{de} iteratie rij 13:

Rij Excel formule
A13 = ALS(F12>0;C12;A12)
B13 = ALS(F12>0;B12;C12)
C13 = (A13+B13)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10	Bisectiemethode voor het oplossen van $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:							
11	a	b	middelpunt	f(a)	f(b)	f(middelpunt)	error (b - a)	0,0001
12	1,9470	1000,0000	500,9735	7,5815	-1,9949E+10	-2501856076,6971	998,0530	0
13	1,9470	500,9735	251,46025					
14								

Voor de cellen D13 t/m H13:

Selecteer de cellen D12 t/m H12 en sleep het kleine vierkantje rechtsonder bij de geselecteerde cellen 1 rij naar beneden.

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10	Bisectiemethode voor het oplossen van $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:							
11	a	b	middelpunt	f(a)	f(b)	f(middelpunt)	error (b - a)	0,0001
12	1,9470	1000,0000	500,9735	7,5815	-1,9949E+10	-2501856076,6971	998,0530	0
13	1,9470	500,9735	251,46025					
14								

Stap 4) Bisectiemethode uitvoeren:

Om de bisectiemethode uit te voeren moeten de cellen A13 t/m H13 worden geselecteerd. Vervolgens kan de iteratie worden uitgevoerd door net als bij stap 3 het kleine vierkantje rechtsonder naar beneden te slepen. De iteratie stopt wanneer in kolom H een 1 verschijnt. Op dat moment is het stopcriterium bereikt. Dus voor de iteratie sleep de geselecteerde cellen naar beneden totdat in kolom H een 1 verschijnt.

Zie ook de screenshot hiernaast.

Een reële oplossing van de derdegraadsvergelijking is nu gevonden. (Cel C29)

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10	Bisectiemethode voor het oplossen van $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:							
11	a	b	middelpunt	f(a)	f(b)	f(middelpunt)	error (b - a)	0,0001
12	1,9470	1000,0000	500,9735	7,5815	-1,9949E+10	-2501856076,6971	998,0530	0
13	1,9470	500,9735	251,46025	7,5815	-2501856077	-314791832,3854	499,0265	0
14								
15	1,9470	126,7036	64,3253125	7,5815	-39866201,5	-5113711,7000	124,7566	0
16	1,9470	64,3253	33,13615625	7,5815	-5113711,7	-672386,0500	62,3783	0
17	1,9470	33,1362	17,54157813	7,5815	-672386,05	-92620,2703	31,1892	0
18	1,9470	17,5416	9,744289063	7,5815	-92620,2703	-13857,5457	15,5946	0
19	1,9470	9,7443	5,845644531	7,5815	-13857,5457	-2368,2127	7,7973	0
20	1,9470	5,8456	3,896322266	7,5815	-2368,21273	-485,5521	3,8986	0
21	1,9470	3,8963	2,921661133	7,5815	-485,552062	-120,8480	1,9493	0
22	1,9470	2,9217	2,434330566	7,5815	-120,847996	-34,0431	0,9747	0
23	1,9470	2,4343	2,190665283	7,5815	-34,0431307	-8,4513	0,4873	0
24	1,9470	2,1907	2,068832642	7,5815	-8,45131564	0,6515	0,2437	0
25	2,0688	2,1907	2,129748962	0,6515	-8,45131564	-3,6148	0,1218	0
26	2,0688	2,1297	2,099290802	0,6515	-3,6147719	-1,4121	0,0609	0
27	2,0688	2,0993	2,084061722	0,6515	-1,41206256	-0,3631	0,0305	0
28	2,0688	2,0841	2,076447182	0,6515	-0,36311508	0,1484	0,0152	0
29	2,0764	2,0841	2,080254452	0,1484	-0,36311508	-0,1063	0,0076	1
30								
31								

Stap 5) Overige twee oplossingen berekenen:

Kolom Excel-formule of verwijzing
B32 η_1 = C29
B35 α = E2
B36 β = -(E4-B37)/B31
B37 γ = -E5/B31
B39 η_2 = (-B36-WORTEL(B36^2-4*B35*B37))/(2*B35)
B40 η_3 = (-B36+WORTEL(B36^2-4*B35*B37))/(2*B35)

	A	B	C
30			
31	η_1 =	2,0803	
32			
33	$(\eta - \eta_1)(\alpha\eta^2 + \beta\eta + \gamma) = 0$		
34			
35	α =	-20,0000	
36	β =	9,3594	
37	γ =	0,0000	
38			
39	η_2 =	0,467971042	
40	η_3 =	0	
41			

Stap 6) Knockdownfactor berekenen:

Aan de hand van het teken van de discriminant kan gekeken worden welke oplossingen (η) gebruikt moeten worden:

Discriminant > 0 → alleen η_1 , 1 knockdownfactor

Discriminant < 0 → η_1 , η_2 , η_3 , 3 knockdownfactors

	A	B	C	D
41				
42	Discriminant:	393212,3828		
43				
44	Discriminant > 0		Discriminant < 0	
45	C1 =	0,21940	C1 =	0,21940
46			C2 =	-2,43515
47			C3 =	#####
48				

Kolom Excel-formule of verwijzing
B45/D45 C1 = (((B6/B7)-1-2*B31*(B2/B3))^2)/(4*((B6/B7)-(B5/B4)-3*B31*(B2/B3))*((B6/B7)-2*B31*(B2/B3)))
D46 C2 = (((B6/B7)-1-2*B39*(B2/B3))^2)/(4*((B6/B7)-(B5/B4)-3*B39*(B2/B3))*((B6/B7)-2*B39*(B2/B3)))
D47 C3 = (((B6/B7)-1-2*B40*(B2/B3))^2)/(4*((B6/B7)-(B5/B4)-3*B40*(B2/B3))*((B6/B7)-2*B40*(B2/B3)))
B42 = 18*E2*E3*E4*E5-4*E3^3*E5+E3^2*E4^2-4*E2*E4^3-27*E2^2*E5^2

Hoofdstuk 4 Resultaten van de verschillende methodes

In het vorige hoofdstuk zijn vijf verschillende methodes beschreven voor het bepalen van de knockdownfactor. In dit hoofdstuk zullen de verschillende methodes worden gecontroleerd om te kijken of de methode altijd werkt. Dit wordt gedaan aan de hand van de opgestelde Maple modellen (Bijlage 2, 3 en 4) en voor de Excel methode in Microsoft Excel. Voor de controle wordt eerst een stappenplan opgesteld (4.1). Daarna zal eerst de analytische methode (algebraïsche en goniometrische methode) worden gecontroleerd (4.2). Vervolgens de numerieke methode, waarbij alleen de bisectiemethode zal worden gecontroleerd (4.3) en als laatste de Excel methode (4.4).

4.1 Stappenplan controle

In vergelijking (1) is te zien dat de knockdownfactor afhankelijk is van de volgende drie verhoudingen:

$$\frac{k_{xx}}{k_{yy}} \quad \frac{n_{xx}}{n_{yy}} \quad \frac{d}{t}$$

Voor de controle worden daarom verschillende waarden aangenomen voor de drie verhoudingen waarmee de methode gecontroleerd kan worden. De verhoudingen zullen niet op alle waarden worden gecontroleerd, maar alleen op realistische waarden die ook in de praktijk voor kunnen komen. Voor de controle zullen daarom de waarden die binnen de volgende intervallen liggen gecontroleerd worden:

$$-10 < \frac{k_{xx}}{k_{yy}} < 10 \quad -3 < \frac{n_{xx}}{n_{yy}} < 3 \quad \frac{1}{1000} < \frac{d}{t} < 5$$

De intervallen zijn in ongeveer 10 waarden opgedeeld. De stapgrootte is hierbij zo gekozen dat de meest realistische waarden vaker voorkomen dan waarden die minder realistisch zijn. In tabel 1 is te zien hoe de intervallen zijn opgedeeld.

$\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$:	-10	-3	-1	-1/2	-1/10	1/10	1/2	1	3	10
$\frac{n_{xx}}{n_{yy}}$:	-3	-2	-1	-1/2	-1/10	1/10	1/2	1	3	10
$\frac{d}{t}$:	1/1000	1/500	1/100	1/50	1/10	1/5	1/2	1	3	10

Tabel 1. Realistische waarden voor de verhoudingen waarvan de knockdownfactor afhankelijk is

Voor de controle van de opgestelde methodes uit hoofdstuk 3 is het volgende stappenplan opgesteld:

- Stap 1)** Een van de verhoudingen wordt gecontroleerd met de verschillende waarden uit tabel 1. Hierbij worden de andere twee verhoudingen als constant aangenomen met een verhouding van 1. Voor de Poisson's ratio ν wordt een waarde van 0.35 aangenomen.
- Stap 2)** Voor de verschillende waarden van de verhouding wordt eerst gecontroleerd wat het teken van de discriminant is. Op basis hiervan wordt de juiste methode gekozen:
- $\Delta > 0$, algebraïsche methode
 - $\Delta < 0$, goniometrische methode
- Voor de numerieke methode en de Excel methode maakt het teken van de discriminant niet uit, omdat voor zowel negatieve als positieve waarden de methode gebruikt kan worden.
- Stap 3)** Nadat de juiste methode is gekozen kan η berekend worden met de modellen in Maple (bijlage 2 en 3) en Microsoft Excel.
- Stap 4)** Vervolgens kunnen de knockdownfactors bepaald worden met vergelijking (1).
- Stap 5)** In deze stap wordt er gekeken of een van de knockdownfactor een realistisch waarde heeft. Dit wordt gedaan door te kijken of de knockdownfactor in het volgende interval valt: $\frac{1}{6} < C < 1$. Hierbij is 1 een perfecte schaal zonder imperfecties en 1/6 de ondergrens die gebaseerd is op experimenten. (Dit is uitgelegd in paragraaf 2.3 Vormimperfecties en ook te zien in figuur 3)
- Stap 6)** Ten slotte worden de stappen herhaald voor de andere twee verhoudingen.

4.2 Controle: Analytische methode

In deze paragraaf wordt de analytische methode die in hoofdstuk 3 is opgesteld gecontroleerd. De methode bestaat uit een algebraïsche methode en een goniometrische methode afhankelijk van het teken van de discriminant. Voor de controle wordt gebruik gemaakt van de in Maple opgestelde modellen, deze zijn te vinden in bijlage 2 en 3. In tabellen 2, 3 en 4 zijn de verschillende resultaten van de controle van de analytische methode weergegeven.

4.2.1 verhouding k_{xx}/k_{yy}

Stap 1) Verhouding $\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
-10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	1.4840	1.3231	0.2349	ja
-3	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	2.3692	2.0360	0.2267	ja
-1	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	4.6092	3.3466	0.2229	ja
-1/2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	8.0750	4.1880	0.2219	ja
-1/10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	36.0164	5.3874	0.2211	ja
1/10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-33.8914	6.3790	0.2208	ja
1/2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-5.9450	10.7200	0.2201	ja
1	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	2.4644	-	0.2195	ja
3	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.2011	-1.3803	0.2327	ja
10	$\Delta > 0 \rightarrow$ Algebraïsch	0.6777	-	-	ja

Tabel 2. Controle verhouding k_{xx}/k_{yy}

4.2.2 verhouding n_{xx}/n_{yy}

Stap 1) Verhouding $\frac{n_{xx}}{n_{yy}}$	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
-3	$\Delta > 0 \rightarrow$ Algebraïsch	0.2690	-	-	ja
-2	$\Delta > 0 \rightarrow$ Algebraïsch	0.2761	-	-	ja
-1	$\Delta > 0 \rightarrow$ Algebraïsch	0.2987	-	-	ja
-1/2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-1.3483	-1.8677	0.3485	ja
-1/10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.1600	-2.2057	0.6782	ja
1/10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	2.2786	1.4882	0.08626	nee
1/2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-2.3792	5.8113	0.1904	ja
1	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-2.4644	-	0.2195	ja
2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-8.6397	-2.5768	0.2365	ja
3	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	6.1358	-2.6530	0.2426	ja

Tabel 3. Controle verhouding n_{xx}/n_{yy}

4.2.3 verhouding d/t

Stap 1) Verhouding $\frac{d}{t}$	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
1/1000	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.0005	-	0.9973	ja
1/500	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.0011	-	0.9946	ja
1/100	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.0056	-	0.9731	ja
1/50	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.0114	-	0.9465	ja
1/10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.0723	-	0.7478	ja
1/5	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.1973	-	0.5483	ja
1/2	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-0.9173	-	0.2948	ja
1	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-2.4644	-	0.2195	ja
3	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-8.9170	-	0.1820	ja
10	$\Delta < 0 \rightarrow$ Goniometrisch	-31.6205	-	0.1710	ja

Tabel 4. Controle verhouding d/t

4.3 Controle: Numerieke methode

In deze paragraaf wordt de numerieke methode die in hoofdstuk 3 is opgesteld gecontroleerd. Hierbij wordt alleen de bisectiemethode gecontroleerd. Voor de bisectiemethode moet een interval $[a, b]$ gekozen worden als startwaarde. Voor de keuze van a en b zijn de uiterste grenzen gekozen van de waarde van de variabele η waarvoor de knockdownfactor in het interval $\frac{1}{6} < C < 1$ valt. Hieruit volgt het volgende interval: $[1.9470, \infty]$ (afleiding in bijlage 6). Met dit interval kunnen geen iteraties worden gedaan omdat b oneindig is. Er wordt daarom voor b een waarde van 1000 gekozen. Deze waarde is groot genoeg om realistische waarden voor C te creëren. Verder is er een stopcriterium gekozen met een tolerantie fout van 10^{-5} . Voor de controle wordt gebruik gemaakt van de in Maple opgestelde model, deze is te vinden in bijlage 4. In tabellen 5, 6 en 7 zijn de verschillende resultaten van de controle van de numerieke methode weergegeven.

4.3.1 verhouding k_{xx}/k_{yy}

Stap 1) Verhouding k_{xx}/k_{yy}	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) C1	C2	C3	(iteraties) n	Stap 5) Realistisch?
-10	$\Delta < 0$	0.2349	1.4841	1.3253	26	ja
-3	$\Delta < 0$	0.2267	2.3692	2.0360	26	ja
-1	$\Delta < 0$	0.2229	4.6091	3.3459	26	ja
-1/2	$\Delta < 0$	0.2219	8.0749	4.1876	26	ja
-1/10	$\Delta < 0$	0.2211	36.0165	5.3884	26	ja
1/10	$\Delta < 0$	0.2208	-33.8914	6.3791	26	ja
1/2	$\Delta < 0$	0.2201	-5.9450	10.7205	26	ja
1	$\Delta < 0$	0.2195	-2.4645	-	26	ja
3	$\Delta < 0$	0.2327	-0.2011	-1.3804	26	ja
10	$\Delta > 0$	0.6777	-	-	26	ja

Tabel 5. Controle verhouding k_{xx}/k_{yy}

4.3.2 verhouding n_{xx}/n_{yy}

Stap 1) Verhouding n_{xx}/n_{yy}	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) C1	C2	C3	(iteraties) n	Stap 5) Realistisch?
-3	$\Delta > 0$	0.2690	-	-	26	ja
-2	$\Delta > 0$	0.2761	-	-	26	ja
-1	$\Delta > 0$	0.2987	-	-	26	ja
-1/2	$\Delta < 0$	0.3485	-1.8675	-1.3483	26	ja
-1/10	$\Delta < 0$	0.6782	-2.2054	-0.1600	26	ja
1/10	$\Delta < 0$	0.08626	-0.5179	3.3889	26	nee
1/2	$\Delta < 0$	0.1904	-2.3792	5.8115	26	ja
1	$\Delta < 0$	0.2195	-2.4645	-	26	ja
2	$\Delta < 0$	0.2365	-2.5767	-8.6391	26	ja
3	$\Delta > 0$	0.2426	-2.6530	-6.1358	26	ja

Tabel 6. Controle verhouding n_{xx}/n_{yy}

4.3.3 verhouding d/t

Stap 1) Verhouding d/t	Stap 2) $\Delta > 0$ of $\Delta < 0$	Stap 4) C1	C2	C3	(iteraties) n	Stap 5) Realistisch?
1/1000	$\Delta < 0$	0.9973	-0.0005	-	26	ja
1/500	$\Delta < 0$	0.9946	-0.0011	-	26	ja
1/100	$\Delta < 0$	0.9731	-0.0056	-	26	ja
1/50	$\Delta < 0$	0.9465	-0.0114	-	26	ja
1/10	$\Delta < 0$	0.7478	-0.0723	-	26	ja
1/5	$\Delta < 0$	0.5483	-0.1973	-	26	ja
1/2	$\Delta < 0$	0.2948	-0.9173	-	26	ja
1	$\Delta < 0$	0.2195	-2.4645	-	26	ja
3	$\Delta < 0$	0.1820	-8.9170	-	26	ja
10	$\Delta < 0$	0.1710	-31.6205	-	26	ja

Tabel 7. Controle verhouding d/t

4.4 Controle: Excel methode

In deze paragraaf wordt de Excel methode die in hoofdstuk 3 is opgesteld gecontroleerd. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de invoegtoepassing Oplosser in Excel. Voor de startwaarde wordt een waarde van 2.0 gekozen. Deze startwaarde is gebaseerd op het interval waarin η zou moeten vallen, namelijk $[1.9470, \infty]$. In tabellen 8, 9 en 10 zijn de verschillende resultaten van de controle van de Excel methode weergegeven.

4.4.1 verhouding k_{xx}/k_{yy}

Stap 1) Verhouding $\frac{k_{xx}}{k_{yy}}$	Stap 3) Oplosser oplossing η_1	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
-10	2.1206	0.2349	1.4840	1.3231	ja
-3	2.0982	0.2267	2.3692	2.0360	ja
-1	2.0880	0.2229	4.6092	3.3466	ja
-1/2	2.0853	0.2219	8.0750	4.1880	ja
-1/10	2.0831	0.2211	36.0164	5.3874	ja
1/10	2.0821	0.2208	-33.8914	6.3790	ja
1/2	2.0803	0.2201	-5.9450	10.7200	ja
1	2.0787	0.2195	-2.4644	-	ja
3	2.1145	0.2327	-0.2011	-1.3803	ja
10	geen oplossing gevonden	-	-	-	nee

Tabel 8. Controle verhouding k_{xx}/k_{yy}

4.4.2 verhouding n_{xx}/n_{yy}

Stap 1) Verhouding $\frac{n_{xx}}{n_{yy}}$	Stap 2) Oplosser oplossing η_1	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
-3	2.2195	0.2690	-	-	ja
-2	2.2414	0.2761	-	-	ja
-1	2.3135	0.2987	-	-	ja
-1/2	2.4903	0.3485	-1.8677	-1.3483	ja
-1/10	0.5061	-2.2057	-0.1600	0.6782	ja
1/10	0.4949	-2.2786	0.08626	1.4882	nee
1/2	0.4801	-2.3792	0.1904	5.8113	ja
1	2.0787	0.2195	-2.4644	-	ja
2	2.1251	0.2365	-2.5768	-8.6397	ja
3	2.1421	0.2426	-2.6530	-6.1358	ja

Tabel 9. Controle verhouding n_{xx}/n_{yy}

4.4.3 verhouding d/t

Stap 1) Verhouding $\frac{d}{t}$	Stap 2) Oplosser oplossing η_1	Stap 4) Knockdown factor C			Stap 5) Realistisch?
		C1	C2	C3	
1/1000	1.6216	-0.0005	0.9973	-	ja
1/500	1.6207	-0.0011	0.9946	-	ja
1/100	1.6135	-0.0056	0.9731	-	ja
1/50	1.6042	-0.0114	0.9465	-	ja
1/10	1.5131	-0.0723	0.7478	-	ja
1/5	1.3552	-0.1973	0.5483	-	ja
1/2	0.8462	-0.9173	0.2948	-	ja
1	0.4683	-2.4644	0.2195	-	ja
3	0.1636	-8.9170	0.1820	-	ja
10	geen oplossing gevonden	-	-	-	nee

Tabel 10. Controle verhouding d/t

Hoofdstuk 5 Toepassing: Uiterste kniklast van een zweefvliegtuigvleugel

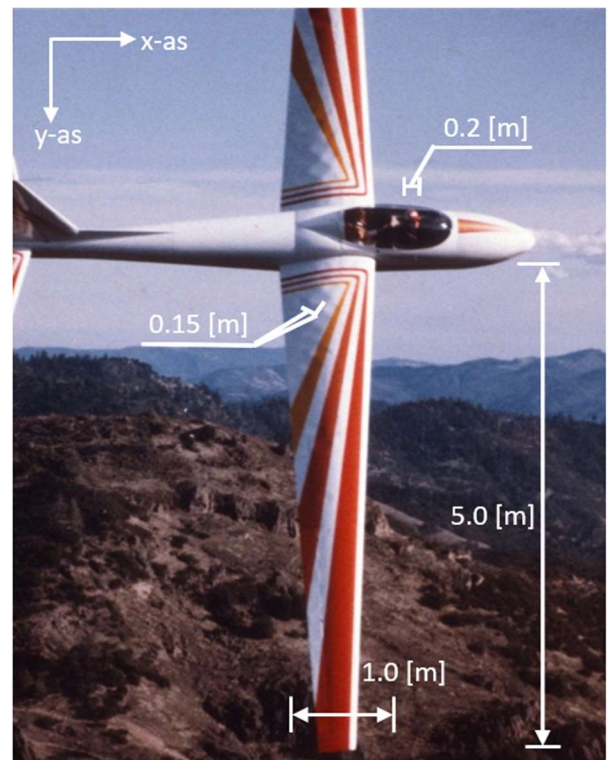
In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar een interessante toepassing om de uiterste kniklast van een bepaald type schaalvorm te bepalen, waarbij rekening wordt gehouden met vormimperfecties aan de hand van één van de opgestelde modellen uit voorgaande hoofdstukken. Er wordt hierbij gekeken naar de toepassing van schalen in de vleugels van zweefvliegtuigen. In figuur 9 is een initiële knikvorm te zien aan de bovenkant van beide vleugels van een zweefvliegtuig. Om de uiterste kniklast van dit zweefvliegtuig te berekenen worden eerst alle dimensies en eigenschappen van het vliegtuig bepaald (5.1). Vervolgens wordt de methode beschreven voor het berekenen van de uiterste kniklast (5.2) en aan de hand hiervan kan de uiterste kniklast worden berekend (5.3).

5.1 Belangrijke dimensies en eigenschappen van het zweefvliegtuig

In figuur 9 is een afbeelding te zien van een zweefvliegtuig die rond een bergtop vliegt. Aan de bovenzijde van beide vleugels is een initiële knikvorm te zien. De knikvorm is ontstaan in het materiaal van de vleugels (de huid) tussen de interne verstevigingen. De huid van de vleugels is hierbij nog niet zo ver vervormd dat het bezwijkt. Dit komt doordat de interne verstevigen nog sterk genoeg zijn om de belastingen op te kunnen nemen waarbij deze initiële knikvorm ontstaat. Alleen zal het niet lang meer duren voordat de vleugels wel bezwijken. Voor het berekenen van de uiterste kniklast waarbij deze initiële knikvorm ontstaat zijn verschillende dimensies (5.1.1) en eigenschappen (5.1.2) van het zweefvliegtuig nodig. Dit kan worden gedaan aan de hand van figuur 9.



Figuur 9. Afbeelding van een zweefvliegtuig die rond een bergtop vliegt, waarbij in beide vleugels aan de bovenzijde een initiële knikvorm te zien is (Indrebo)



Figuur 10. Afbeelding van een zweefvliegtuig die rond een bergtop vliegt, waarin de dimensies van het zweefvliegtuig zijn aangegeven (Indrebo)

5.1.1 Belangrijke dimensies van het zweefvliegtuig

De belangrijkste dimensies die nodig zijn voor het berekenen van de uiterste kniklast van de vleugels zijn weergegeven in tabel 11 en in figuur 10. De dimensies zijn bepaald aan de hand van figuur 9 en door verschillende aannames te maken. Hierbij is eerst een schatting gemaakt van het hoofd van de piloten en aan de hand hiervan zijn verschillende dimensies bepaald. De gemiddelde lengte van het hoofd van een volwassen man is 0.2 m (Motmans, 2005). Ook zijn de kniklengtes van de initiële knikvorm bepaald in x en y richting door het knikpatroon 45 graden te draaien, waardoor er alleen belastingen en krommingen in twee richtingen werken, namelijk x en y. Door deze aanname worden de berekeningen versimpeld. In figuur 10 is het gekozen assenstelsel te zien.

Belangrijke dimensies zweefvliegtuig			
symbool	naam		
l_x	kniklengte in x-richting	=	0.15 m
l_y	kniklengte in y-richting	=	0.15 m
t	schaaldikte	=	0.0060 m (Wijnen)
vl_b	vleugelbreedte	=	1.0 m
vl_l	vleugellengte	=	5.0 m

Tabel 11. Belangrijkste dimensies zweefvliegtuig bepaald aan de hand van figuur 9

5.1.2 Belangrijke eigenschappen van het zweefvliegtuig

Voor de belangrijkste eigenschappen van het zweefvliegtuig worden verschillende aannames gedaan. Zo wordt er aangenomen dat de vleugels uit een composiet bestaan van unidirectionele koolstofvezels. Dit materiaal heeft verschillende eigenschappen die weergegeven zijn in tabel 12 (Ltd., 2009). Verder heeft een zweefvliegtuig meestal een massa tussen de 250 en 500 kg (Groenewegen, 2022). Voor het zweefvliegtuig in figuur 9 wordt een massa van 450 kg aangenomen, omdat het een zweefvliegtuig is voor twee personen. Voor de totale massa inclusief de twee piloten (aanname 80 kg per persoon) wordt een massa aangenomen van 610 kg. Vervolgens kan het gewicht worden berekend door de massa te vermenigvuldigen met de valversnelling op de aarde (9.81 m/s^2). Alle belangrijke eigenschappen zijn weergegeven in tabel 12.

Belangrijke eigenschappen zweefvliegtuig			
symbool	naam		
E	elasticiteitsmodulus	=	$135 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
F_G	eigengewicht zweefvliegtuig	=	4414.5 N
F_{TG}	totaal gewicht zweefvliegtuig + piloten	=	5984.1 N
ν	Poisson's ratio	=	0.30

Tabel 12. Belangrijkste eigenschappen zweefvliegtuig (Ltd., 2009) (Groenewegen, 2022)

5.2 Methode om de uiterste kniklast van de vleugel te bepalen

Voor het bepalen van de uiterste kniklast van de zweefvliegtuigvleugel uit figuur 9 kan de vergelijking voor de kritische kniklast factor λ_{cr} (3) gebruikt worden. De vergelijking is in paragraaf 2.3 al toegelicht en is hieronder nog een keer weergegeven:

$$\lambda_{cr} = \frac{-Et}{\frac{n_{xx}}{l_x^2} + \frac{n_{yy}}{l_y^2}} \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (3)$$

Als er wordt aangenomen dat de mebraankracht in x-richting n_{xx} gelijk is aan 0 N/m kan de kritische membraankracht n_{yycr} worden bepaald door vergelijking (3) om te schrijven tot de volgende vergelijking (31):

$$n_{yycr} = -Et l_y^2 \left(\frac{\pi^2 t^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{k_{xx}}{l_y^2} + \frac{k_{yy}}{l_x^2} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right)^2} \right) \quad (31)$$

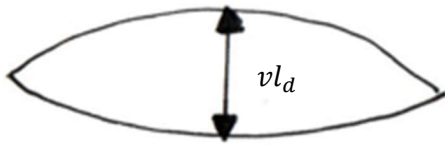
De uiterste membraankracht n_{yyult} kan vervolgens worden berekend door vergelijking (31) te vermenigvuldigen met de knockdownfactor C. Hierbij ontstaat de volgende vergelijking (32):

$$n_{yyult} = n_{yycr} \cdot C \quad (32)$$

De knockdownfactor C kan worden bepaald aan de hand van de opgestelde methodes uit hoofdstuk 3. De berekening voor het bepalen van de knockdownfactor is te vinden in bijlage 7.

Vervolgens kan het moment in de vleugel worden bepaald door de vleugeldikte vl_d te vermenigvuldigen met de uiterste membraankracht n_{yyult} . Voor de vleugeldikte is een waarde aangenomen van 10 cm. In figuur 11 is een doorsnede van de vleugel te zien waarbij de vleugeldikte is aangegeven. Het moment in de vleugel kan met de volgende vergelijking worden berekend (33):

$$M_{vleugel} = n_{yyult} \cdot vl_d \quad (33)$$



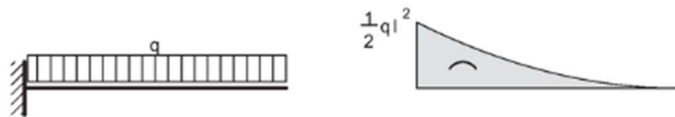
Figuur 11. Schets van de doorsnede van de vleugel

In figuur 12 is een schets te zien van de momentenlijn van de vleugel. Hierbij is de vleugel geschematiseerd als een uitkragende ligger die ingeklemd is aan de romp van het vliegtuig.



Figuur 12. Schets van de momentenlijn van de vleugel

Uit het moment $M_{vleugel}$ en de vleugellengte vl_l kan de knikbelasting op de vleugel worden bepaald. Dit kan worden gedaan met behulp van de vergeet-me-nietjes uit het vak Constructiemechanica. Hiervoor wordt het vergeet-me-nietje gebruikt van een uitkragende ligger met een verdeelde belasting q . Het vergeet-me-nietje is ook te zien in figuur 13.

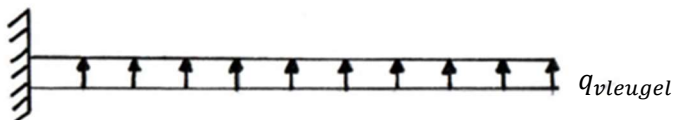


Figuur 13. Vergeet-me-nietje uitkragende ligger met een verdeelde belasting q (Hartsuiker, 2005)

De belasting op de vleugel, ook wel de knikbelasting waarbij deze initiële knikvorm ontstaat, kan worden berekend aan de hand van de volgende vergelijking (34):

$$q_{vleugel} = \frac{M_{vleugel}}{\frac{1}{2}(vl_l)^2} \quad (34)$$

In figuur 13 is een schets te zien van hoe de verdeelde belasting op de vleugel werkt. Hierbij is de vleugel geschematiseerd als een uitkragende ligger die geklemd is aan de romp van het vliegtuig.



Figuur 13. Schets van de verdeelde belasting op de vleugel

Voor de berekening van de uiterste kniklast zijn nog een aantal andere parameters nodig. Zo is er aangenomen dat in y-richting geen kromming is dus: $a_y = 0$ m en $k_{yy} = 0$ m⁻¹. Verder is er voor de imperfectie amplitude d een waarde aangenomen van: $d = 5$ mm. De kromtestraal in x-richting kan worden bepaald aan de hand van de volgende vergelijking (35):

$$a_x = \frac{Vleugelbreedte(vlb)^2}{Vleugeldikte(vld) * 8} \quad (35)$$

Vervolgens kan de kromming in x-richting worden bepaald met de volgende vergelijking (36):

$$k_{xx} = \frac{1}{a_x} \quad (36)$$

De parameters zijn weergegeven in tabel 13. De berekeningen en aannames die hiervoor zijn gedaan zijn te vinden in bijlage 7.

Grootheid/coëfficiënt		Waarde	Eenheid
symbool	naam		symbool
a_x	kromtestraal x-richting	= 1.3	m
a_y	kromtestraal y-richting	= 0	m
d	amplitude van de imperfectie	= 0.0050	m
k_{xx}	kromming in x-richting	= 0.80	m ⁻¹
k_{yy}	kromming in y-richting	= 0	m ⁻¹
n_{xx}	membraankracht in x-richting	= 0	N/m

Tabel 13. Benodigde parameters voor het berekenen van de uiterste kniklast van het zweefvliegtuig

5.3 Resultaten bepaling uiterste kniklast van de vleugel

In de vorige paragraaf is de methode beschreven voor het bepalen van de uiterste kniklast van de vleugels van het zweefvliegtuig. In bijlage 7 zijn alle berekeningen te vinden die zijn uitgevoerd voor het bepalen van de uiterste kniklast. Dit is gedaan met behulp van het computerprogramma Maple. In tabel 14 zijn alle resultaten van de berekeningen weergegeven. Hierin is de volgorde van de tabel hetzelfde als de volgorde van de resultaten.

Grootheid/coëfficiënt		Waarde	Eenheid (per meter vleugelbreedte)
symbool	naam		symbool
n_{yycr}	kritische membraankracht in y-richting	= -4.98*10 ⁶	N/m
C	knockdownfactor	= 0.7253	-
n_{yyult}	uiterste membraankracht in y-richting	= -3.61*10 ⁶	N/m
$M_{vleugel}$	moment vleugel	= -361248.69	Nm
$q_{vleugel}$	belasting vleugel	= -28899.89	N/m

Tabel 14. Resultaten bepaling uiterste kniklast van de vleugel

Uit tabel 14 kan dus worden gehaald dat de uiterste kniklast waarbij in de vleugel de initiële knikvorm ontstaat die in figuur 9 te zien is, gelijk is aan:

$$q_{vleugel} = -28899.89 \text{ N/m per meter vleugelbreedte}$$

Hoofdstuk 6 Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk zal er worden gekeken of de doelstelling van het rapport behaald is. Hieruit zullen enkele conclusies worden getrokken (6.1) en zullen aanbevelingen worden gedaan (6.2).

6.1 Conclusies

Doel van dit rapport was het vinden van een eenvoudige methode om het model van niet-lineaire vergelijkingen, waarmee gecontroleerd kan worden of een schaalconstructie knikt, op te lossen, zodanig dat constructeurs op een begrijpelijke en eenvoudige manier een oplossing kunnen vinden. Hierbij is het volgende tot stand gekomen:

Het is gebleken dat het model analytische opgelost kan worden, doordat het omgeschreven kan worden tot een derdegraadsvergelijking. Vervolgens zijn er 5 verschillende methodes opgesteld om deze derdegraadsvergelijking op eenvoudige en snelle manier op te lossen. Dit is gedaan door voor de verschillende methodes stroomdiagrammen en stappenplannen op te stellen en door te kijken of de methodes altijd werken. Hieruit is het volgende gebleken:

- Als we kijken naar de stroomdiagrammen blijkt dat er voor de analytische methode (Algebraïsch en goniometrisch) een stuk minder stappen nodig zijn dan voor de numerieke methode. Ook zijn er voor de numerieke methode iteraties nodig, terwijl er bij de analytische methode alleen vergelijkingen ingevuld moet worden. Hieruit kan de conclusie worden getrokken dat de analytische methode sneller en eenvoudiger toe te passen is dan de numerieke methode.
- Verder is er ook een stappenplan in Excel gemaakt voor de bisectiemethode en is de Excel methode uitgevoerd met de invoegtoepassing Oplosser in Excel. Hieruit is gebleken dat er voor de bisectiemethode een aantal lastige stappen nodig zijn zoals het uitvoeren van een iteratie in Excel. Voor de Excel methode wordt de Oplosser functie gebruikt in Excel die gemakkelijk toe te passen is door een paar eenvoudige handelingen. Hieruit wordt de conclusie getrokken dat de Excel methode eenvoudiger en sneller toe te passen is dan de bisectiemethode in Excel.

- Uit de controle in Maple en Excel is gebleken dat er voor alle gecontroleerde methodes bijna altijd een realistische waarde voor de knockdownfactor uitkomt. Bij een paar gevallen is dit alleen niet het geval. Zo valt bij alle methodes de verhouding $\frac{n_{xx}}{n_{yy}} = 10$ de knockdownfactor buiten het interval $\frac{1}{6} < C < 1$.

Hieruit blijkt een lagere knockdownfactor te komen dan verwacht, namelijk $C = 0.08626$. Het zou kunnen zijn dat dit dus wel een goede knockdownfactor is, omdat bij alle methodes dezelfde waarde uitkomt en dat het interval misschien niet juist is gekozen. Verder blijkt uit de controle dat erbij de Excel methode voor een verhouding van $\frac{k_{xx}}{k_{yy}} = 10$ en $\frac{d}{t} = 10$ geen oplossing uit komt. De Oplosser in Excel geeft hiervoor een foutmelding aan. Hieruit kan dus worden geconcludeerd dat alle methodes, behalve de Excel methodes, voor alle realistische belastinggevallen en schaalvormen werkt.

Uit bovenstaande punten kan dus worden geconcludeerd dat de analytische methode en de Excel methode het meest eenvoudig zijn om een oplossing voor het model te vinden, omdat hiervoor het minst aantal stappen nodig is en er hoeven geen iteraties uitgevoerd te worden. Echter geeft de analytische methode voor bijna alle realistische belastinggevallen en schaalvormen een realistische oplossing, terwijl de Excel methode voor sommige verhoudingen geen oplossing geeft. Voor de constructeurs wordt hierom geadviseerd om de analytische methode toe te passen.

6.2 Aanbevelingen

Uit de conclusie kunnen verschillende aanbevelingen worden gedaan voor verder onderzoek:

- Het omschrijven van de niet-lineaire vergelijkingen kan op twee manieren worden gedaan. In dit verslag is dit maar voor 1 manier gedaan. Voor verder onderzoek zou dit ook uitgezocht kunnen worden voor de tweede manier, waarbij direct een oplossing voor de knockdownfactor C wordt verkregen.
- Voor de controle is een interval opgesteld waartussen de oplossing van de knockdownfactor C zou moeten liggen op basis van experimenten. Alleen uit de resultaten blijkt dat dit niet altijd het geval is. Er zou dus verder onderzoek gedaan kunnen worden of het interval juist gekozen is.
- Het is gebleken dat de Excel methode voor een aantal realistische waardes voor de belastinggevallen en schaalvormen geen oplossing vindt. In een verder onderzoek zou kunnen worden uitgezocht waarom dit zo is en welke methode er achter de invoegtoepassing Oplosser van Excel zit.

- Ten slotte zouden de opgestelde stroomdiagrammen en stappenplan op een betere manier met elkaar kunnen worden vergeleken door bijvoorbeeld het te laten beoordelen door andere personen. Waarbij de beoordeling bijvoorbeeld uit de volgende criteria bestaat: snelheid, gebruiksvriendelijkheid en complexiteit. Hieruit kan vervolgens een betrouwbaardere conclusie worden getrokken over welke methode het meest eenvoudigst toe te passen is om het model op te lossen.

Literatuurlijst

- Cubic equation*. (2022). Opgeroepen op mei 2, 2022, van Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation
- Groenewegen, H. (2022). *Algemeen zweefvliegen*. Opgeroepen op juni 10, 2022, van Gelderse Zweefvliegclub: <https://www.gezc.org/veel-gestelde-vragen/#:~:text=Hoeveel%20weegt%20een%20zweefvliegtuig%3F,de%20250%20en%20500%20kg>.
- Hartsuiker, C. (2005). *Toegepaste mechanica deel 2 Spanningen, vervormingen, verplaatsingen*. Nootdorp: Academic Service.
- Hoogenboom, P. (2022). Handout 1. In P. Hoogenboom, *Shell structures*. Delft: Reader Delft University of Technology. Opgeroepen op mei 30, 2022, van https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_handout_1_lockdown.pdf
- Hoogenboom, P. (2022). Handout 12. In P. Hoogenboom, *Shell structures*. Delft: Reader Delft University of Technology. Opgeroepen op mei 30, 2022, van https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_handout_12_lockdown.pdf
- Hoogenboom, P. (2022). Handout 13. In P. Hoogenboom, *Shell structures*. Delft: Reader Delft University of Technology. Opgeroepen op April 27, 2022, van https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_schedule.html
- Indrebo, C. (sd). *Crazy Creek Air Adventures*. Middletown, California. Opgeroepen op mei 15, 2022, van <https://shellbuckling.com/index.php>
- Khan, S. H. (2021, november 3). *Solving equations in Excel (polynomial, cubic, quadratic, & linear)*. Opgeroepen op juni 11, 2022, van exceldemy: https://www.exceldemy.com/solving-equations-in-excel/#Solve_Cubic_Equation_in_Excel_using_Solver
- Leaninfo. (2022). *Stroomdiagram*. Opgeroepen op mei 15, 2022, van Leaninfo.
- Ltd., P. C. (2009, juli). *Mechanical Properties of Carbon Fibre Composite Materials, Fibre / Epoxy resin (120°C Cure)*. Opgeroepen op juni 1, 2022, van Performance Composites: http://www.performance-composites.com/carbonfibre/mechanicalproperties_2.asp
- Motmans, R. (2005). *Lichaamsafmetingen van de Belgische bevolking*. Leuven: Ergonomie RC. Opgeroepen op mei 25, 2022, van <http://www.dinbelg.be/volwassenentotaal.htm>
- Vuik, C., Vermolen, F. J., van Gijzen, M. B., & Vuik, M. J. (2018). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Delft: Delft Academic Press.
- WebWings. (2021, juli 21). *Solver Excel*. Opgeroepen op juni 11, 2022, van Bouwmeester Consultancy: <https://hulpbijexcel.nl/solver-excel/>
- Wijnen, J. (sd). *Theorieboek voor zweefvliegtechnici constructie*. ELZC. Opgeroepen op mei 26, 2022, van http://www.civ.zweefportaal.nl/docs/constructie_hoofdstuk_4.pdf

Bijlage 1: Afleiding derdegraadsvergelijkingen in Maple

In deze bijlage zijn de berekeningen te vinden voor de afleiding van de derdegraadsvergelijkingen van het model dat bestaat uit vergelijkingen (1 en 2). Dit is op twee manieren gedaan:

1. De vergelijking voor C (1) in de vergelijking voor η (2) stoppen of;
2. De vergelijking voor η (2) in de vergelijking voor C (1) stoppen.

De vergelijkingen van het model zijn:

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t}\right)\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t}\right)} \quad (1) \quad \eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} \quad (2)$$

Methode 1:

De eerste stap is de vergelijking voor C in de vergelijking voor η te stoppen:

$$\eta \quad (1)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} : C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t}\right)\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t}\right)} :$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1 - \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t}\right)\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t}\right)}}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{-3v^2+3}}{1 - \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - \frac{2\eta d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - \frac{3\eta d}{t}\right)\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{2\eta d}{t}\right)}} \quad (2)$$

cross multiply

$$\eta k_{yy}^2 t^2 \left(20 d^2 \eta^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 16 d \eta t k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 4 d \eta t k_{yy}^2 n_{xx} + 8 d \eta t k_{yy}^2 n_{yy} + 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \right. \\ \left. + 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} - t^2 k_{yy}^2 n_{xx} \right) = 4 \sqrt{-3v^2+3} k_{yy}^2 t^2 \left(3 \eta d k_{yy} n_{xx} - k_{xx} n_{xx} t \right. \\ \left. + n_{yy} k_{yy} t \right) \left(2 \eta d k_{yy} - k_{xx} t \right) \quad (3)$$

Door vergelijking (2) kruislings te vermenigvuldigen ontstaat vergelijking (3). Hierdoor zijn de breuken verdwenen. Met de expand command kunnen de producten over de sommen worden verdeeld (4). Vervolgens wordt alles naar rechts gehaald waardoor vergelijking (5) ontstaat.

$$\begin{aligned}
& \text{expand}\left(\eta k_{yy}^2 t^2 \left(20 d^2 \eta^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 16 d \eta t k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 4 d \eta t k_{yy}^2 n_{xx} + 8 d \eta t k_{yy}^2 n_{yy} + 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} - t^2 k_{yy}^2 n_{xx}\right) = 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^2 t^2 \left(3 \eta d k_{yy} n_{xx} - k_{xx} n_{xx} t \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n_{yy} k_{yy} t\right) \left(2 \eta d k_{yy} - k_{xx} t\right)\right) \\
& 20 d^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^3 - 16 d t^3 k_{xx}^3 k_{yy} n_{xx} \eta^2 - 4 d t^3 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^2 + 8 d t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \eta^2 + 3 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} \eta \quad (4) \\
& \quad + 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} \eta - 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} \eta - t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \eta = 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^2 d^2 n_{xx} \eta^2 \\
& \quad - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^3 d k_{xx} n_{xx} \eta + 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^3 d n_{yy} \eta + 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^2 t^4 \\
& \quad k_{xx}^2 n_{xx} - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^4 k_{xx} n_{yy}
\end{aligned}$$

move to right

$$\begin{aligned}
0 = & -20 d^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^3 + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^2 d^2 n_{xx} \eta^2 + 16 d t^3 k_{xx}^3 k_{yy} n_{xx} \eta^2 + 4 d t^3 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^2 \quad (5) \\
& - 8 d t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \eta^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^3 d k_{xx} n_{xx} \eta + 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^3 d n_{yy} \eta - 3 t^4 \\
& k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} \eta - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} \eta + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} \eta + t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \eta + 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^2 t^4 k_{xx}^2 n_{xx} \\
& - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^4 k_{xx} n_{yy}
\end{aligned}$$

Nu kan met de sort command de variabele η van de polynoom in aflopende volgorde worden verdeeld (6):

$$\begin{aligned}
& \text{sort}\left(0 = 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^2 d^2 \eta^2 n_{xx} - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^3 d \eta k_{xx} n_{xx} + 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} \right. \\
& \quad k_{yy}^4 t^3 d \eta n_{yy} + 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^2 t^4 k_{xx}^2 n_{xx} - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^4 k_{xx} n_{yy} - 20 d^2 \eta^3 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} \\
& \quad + 16 d \eta^2 t^3 k_{xx}^3 k_{yy} n_{xx} + 4 d \eta^2 t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 d \eta^2 t^3 k_{yy}^4 n_{yy} - 3 \eta t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 \eta t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} \\
& \quad \left. + 4 \eta t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + \eta t^4 k_{yy}^4 n_{xx}\right) \\
0 = & -20 d^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^3 + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^2 d^2 n_{xx} \eta^2 + 16 d t^3 k_{xx}^3 k_{yy} n_{xx} \eta^2 + 4 d t^3 k_{yy}^4 n_{xx} \eta^2 \quad (6) \\
& - 8 d t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \eta^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^3 d k_{xx} n_{xx} \eta + 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^4 t^3 d n_{yy} \eta - 3 t^4 \\
& k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} \eta - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} \eta + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} \eta + t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \eta + 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^2 t^4 k_{xx}^2 n_{xx} \\
& - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} k_{yy}^3 t^4 k_{xx} n_{yy}
\end{aligned}$$

Hieruit blijkt dus dat de uitkomst van het herschrijven van de twee niet lineaire vergelijkingen leidt tot de volgende algemene derdegraadsvergelijking:

$$\begin{aligned}
f := & -20 d^2 k_{yy}^2 n_{xx} \eta^3 + \left(16 d k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 d k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} d^2 n_{xx} k_{yy}^2 - 8 d \right. \\
& k_{yy}^2 n_{yy} t \left. \right) \eta^2 + \left(8 \sqrt{-3 v^2 + 3} d t n_{yy} k_{yy}^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} d t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} + t^2 \right. \\
& k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \left. \right) \eta + 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{xx} k_{xx}^2 t^2 \\
& - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 :
\end{aligned}$$

Method 2:

De eerste stap is de vergelijking voor η in de vergelijking voor C te stoppen. Hiervoor wordt de wortel in de vergelijking voor η vervangen door een nieuwe variabele s , dit is gedaan om de berekeningen te versimpelen.

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} : C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2\eta \frac{d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3\eta \frac{d}{t}\right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2\eta \frac{d}{t}\right)} : s = \sqrt{3(1-v^2)} :$$

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \left(\frac{s}{1-C}\right) \frac{d}{t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \left(\frac{s}{1-C}\right) \frac{d}{t}\right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \left(\frac{s}{1-C}\right) \frac{d}{t}\right)}$$

$$C = \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - \frac{2sd}{(1-C)t}\right)^2}{4\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - \frac{3sd}{(1-C)t}\right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{2sd}{(1-C)t}\right)} \quad (1)$$

cross multiply

$$4Ck_{yy}^2(-1+C)^2t^2(tk_{xx}n_{xx}C - tk_{yy}n_{yy}C + 3sdk_{yy}n_{xx} - k_{xx}n_{xx}t + n_{yy}k_{yy}t)(k_{xx}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t) = (k_{xx}tC - k_{yy}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t + k_{yy}t)^2k_{yy}^2n_{xx}(-1+C)^2t^2 \quad (2)$$

Door vergelijking (1) kruislings te vermenigvuldigen ontstaat vergelijking (2). Hierdoor zijn de breuken verdwenen. Nu kan aan beide kanten de term $(-1+C)^2$ worden weggestreept, hierdoor ontstaat vergelijking (3). Met de expand command kunnen de producten over de sommen worden verdeeld (4). Vervolgens wordt alles naar rechts gehaald waardoor vergelijking (5) ontstaat.

$$4Ck_{yy}^2t^2(tk_{xx}n_{xx}C - tk_{yy}n_{yy}C + 3sdk_{yy}n_{xx} - k_{xx}n_{xx}t + n_{yy}k_{yy}t)(k_{xx}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t) = (k_{xx}tC - k_{yy}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t + k_{yy}t)^2k_{yy}^2n_{xx}t^2$$

$$4Ck_{yy}^2t^2(tk_{xx}n_{xx}C - tk_{yy}n_{yy}C + 3sdk_{yy}n_{xx} - k_{xx}n_{xx}t + n_{yy}k_{yy}t)(k_{xx}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t) = (k_{xx}tC - k_{yy}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t + k_{yy}t)^2k_{yy}^2n_{xx}t^2 \quad (3)$$

$$\text{expand}(4Ck_{yy}^2t^2(tk_{xx}n_{xx}C - tk_{yy}n_{yy}C + 3sdk_{yy}n_{xx} - k_{xx}n_{xx}t + n_{yy}k_{yy}t)(k_{xx}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t) = (k_{xx}tC - k_{yy}tC + 2sdk_{yy} - k_{xx}t + k_{yy}t)^2k_{yy}^2n_{xx}t^2)$$

$$4C^3t^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} - 4C^3t^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} + 20C^2ds^2t^3k_{xx}^3k_{yy}n_{xx} - 8C^2ds^2t^3k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} + 24C^2d^2s^2t^2k_{xx}^4n_{yy} - 8C^2t^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} + 8C^2t^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} - 20Cds^2t^3k_{xx}^3k_{yy}n_{xx} + 8Cds^2t^3k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} + 4Ct^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} - 4Ct^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} = C^2t^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} - 2C^2t^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} + C^2t^4k_{xx}^4n_{yy} + 4Cds^2t^3k_{xx}^3k_{yy}n_{xx} - 4Cds^2t^3k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} + 4d^2s^2t^2k_{xx}^4n_{yy} - 2Ct^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} + 4Ct^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} - 2Ct^4k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} - 4ds^2t^3k_{xx}^3k_{yy}n_{xx} + 4ds^2t^3k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} + t^4k_{xx}^2k_{yy}^2n_{xx} - 2t^4k_{xx}k_{yy}^3n_{yy} + t^4k_{xx}^4k_{yy}n_{yy} \quad (4)$$

move to right

$$\begin{aligned}
 0 = & -4 C^3 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 C^3 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 20 C^2 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 8 C^2 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \\
 & - 24 C d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} + 9 C^2 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 8 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + C^2 t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \\
 & + 24 C d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 4 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} + 4 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} - 6 C t^4 k_{xx}^2 \\
 & k_{yy}^2 n_{xx} + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 2 C t^4 k_{yy}^4 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 d s t^3 \\
 & k_{yy}^4 n_{xx} + t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Nu kan met de sort command de variabele η van de polynoom in aflopende volgorde worden verdeeld (6):

$$\begin{aligned}
 \text{sort}(0 = & -4 C^3 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 C^3 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 20 C^2 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 8 C^2 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \\
 & - 24 C d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} + 9 C^2 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 8 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + C^2 t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \\
 & + 24 C d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 4 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} + 4 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} - 6 C t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} \\
 & + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 2 C t^4 k_{yy}^4 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} + t^4 k_{xx}^2 \\
 & k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx}, \eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -4 C^3 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 C^3 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 20 C^2 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 8 C^2 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} \\
 & - 24 C d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} + 9 C^2 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 8 C^2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + C^2 t^4 k_{yy}^4 n_{xx} \\
 & + 24 C d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 4 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 C d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} + 4 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} - 6 C t^4 k_{xx}^2 \\
 & k_{yy}^2 n_{xx} + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 C t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 2 C t^4 k_{yy}^4 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 d s t^3 \\
 & k_{yy}^4 n_{xx} + t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Hieruit blijkt dus dat de uitkomst van het herschrijven van de twee niet lineaire vergelijkingen leidt tot de volgende algemene derdegraadsvergelijking:

$$\begin{aligned}
 f := & (-4 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy}) C^3 + (20 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 8 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} + 9 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} \\
 & - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} - 8 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} + t^4 k_{yy}^4 n_{xx}) C^2 + (-24 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} + 24 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} \\
 & - 4 d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} - 8 d s t^3 k_{yy}^4 n_{yy} - 6 t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{yy} - 2 t^4 k_{yy}^4 n_{xx}) \\
 & C + 4 d^2 s^2 t^2 k_{yy}^4 n_{xx} - 4 d s t^3 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + 4 d s t^3 k_{yy}^4 n_{xx} + t^4 k_{xx}^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^4 k_{xx} k_{yy}^3 n_{xx} + t^4 \\
 & k_{yy}^4 n_{xx} :
 \end{aligned}$$

Bijlage 2: Voorbeeld berekening algebraïsche methode in Maple

In deze bijlage is een voorbeeld berekening gedaan met de algebraïsche methode. Hiervoor is het computerprogramma Maple gebruikt.

Maple code:

In maple zijn de volgende waarden voor de parameters aangenomen: (Hierbij is d de amplitude van de imperfectie vervangen door z)

$$z := 2 : t := 1 : n_{xx} := 10 : n_{yy} := 1 : k_{xx} := 10 : k_{yy} := 1 : v := 0.5 :$$

De waarden a, b, c, d van de derdegraads vergelijking zijn:

$$a := -20 z^2 k_{yy}^2 n_{xx} \quad a := -800 \quad (1)$$

$$b := 16 z k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 z k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} z^2 n_{xx} k_{yy}^2 - 8 z k_{yy}^2 n_{yy} t \quad b := 4704.000000 \quad (2)$$

$$c := 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{yy} k_{yy}^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} + t^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \quad c := -9126.000000 \quad (3)$$

$$d := 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{xx} k_{xx}^2 t^2 - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 \quad d := 5940.000000 \quad (4)$$

De derdegraadsvergelijking wordt voor de berekeningen in gereduceerde vorm geschreven door een verandering van variabele $\eta = w - \frac{b}{3a}$ en vervolgens te delen door a:

$$w^3 + pw + q = 0 :$$

Waarbij:

$$w := \eta - \frac{b}{3a} \quad p := \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad p := -0.1173000000 \quad (5)$$

$$q := \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad q := -0.1253720052 \quad (6)$$

De discriminant Δ kan aan de hand van de volgende vergelijking worden bepaald:

$$\Delta := 4p^3 + 27q^2 \quad \Delta := 0.4179339127 \quad (7)$$

Uit de discriminant is te halen dat de vergelijking 1 reële oplossing en twee complex geconjugeerde oplossingen bestaat, omdat $\Delta > 0$. De oplossingen kunnen daarom algebraïsch worden bepaald met de formule van Cardano:

Reële oplossing is:

$$w1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ w1 := 0.5780800518 \quad (8)$$

$$\eta1 := w1 - \frac{b}{3a} \\ \eta1 := 2.538080052 \quad (9)$$

De twee complex geconjugeerde oplossingen zijn:

$$w2 := w1 \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \\ w2 := -0.2890400259 + 0.2890400259 \text{ I} \sqrt{3} \quad (10)$$

$$\eta2 := w2 - \frac{b}{3a} \\ \eta2 := 1.670959974 + 0.2890400259 \text{ I} \sqrt{3} \quad (11)$$

$$w3 := w1 \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \\ w3 := -0.2890400259 - 0.2890400259 \text{ I} \sqrt{3} \quad (12)$$

$$\eta3 := w3 - \frac{b}{3a} \\ \eta3 := 1.670959974 - 0.2890400259 \text{ I} \sqrt{3} \quad (13)$$

Nu de drie oplossingen voor η bekend zijn kan met de reële oplossing de knockdownfactor bepaald worden aan de hand van de volgende vergelijking:

$$C := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right)} \\ C_{_} := 0.4090020372 \quad (14)$$

Controle:

$$-\frac{\sqrt{-3v^2 + 3}}{\eta1} + 1 \\ 0.4090020924 \quad (15)$$

Bijlage 3: Voorbeeld berekening goniometrische methode in Maple

In deze bijlage is een voorbeeld berekening gedaan met de goniometrische methode. Hiervoor is het computerprogramma Maple gebruikt.

Maple code:

In maple zijn de volgende waarden voor de parameters aangenomen: (Hierbij is d de amplitude van de imperfectie vervangen door z)

$$z := 1 : t := 1 : n_{xx} := 1 : n_{yy} := 1 : k_{xx} := -10 : k_{yy} := 1 : v := 0.5 :$$

De waarden a, b, c, d van de derdegraads vergelijking zijn:

$$a := -20 z^2 k_{yy}^2 n_{xx} \quad a := -20 \quad (1)$$

$$b := 16 z k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 z k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} z^2 n_{xx} k_{yy}^2 - 8 z k_{yy}^2 n_{yy} t \quad b := -128.0000000 \quad (2)$$

$$c := 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{yy} k_{yy}^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} + t^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \quad c := -7.0000000 \quad (3)$$

$$d := 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{xx} k_{xx}^2 t^2 - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 \quad d := 660.0000000 \quad (4)$$

De derdegraadsvergelijking wordt voor de berekeningen in gereduceerde vorm geschreven door een verandering van variabele $\eta = w - \frac{b}{3a}$ en vervolgens te delen door a:

$$w^3 + pw + q = 0 :$$

Waarbij:

$$w := \eta - \frac{b}{3a} \quad p := \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad p := -13.30333333 \quad (5)$$

$$q := \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad q := -14.32859259 \quad (6)$$

De discriminant Δ kan aan de hand van de volgende vergelijking worden bepaald:

$$\Delta := 4p^3 + 27q^2 \quad \Delta := -3874.294097 \quad (7)$$

Uit het teken van de discriminant is te halen dat de oplossingen van de vergelijking bestaat uit 3 verschillende reële oplossingen. De oplossingen kunnen daarom door de goniometrische methode worden gevonden:

$$w_k = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{3} \right) \text{ voor } k=0, 1, 2.$$

$$w1 := 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} \right)$$

$$w1 := -1.210350209 \quad (8)$$

$$\eta1 := w1 - \frac{b}{3a}$$

$$\eta1 := -3.343683542 \quad (9)$$

$$w2 := 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} \right)$$

$$w2 := -2.888336398 \quad (10)$$

$$\eta2 := w2 - \frac{b}{3a}$$

$$\eta2 := -5.021669731 \quad (11)$$

$$w3 := 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{3} \right)$$

$$w3 := 4.098686606 \quad (12)$$

$$\eta3 := w3 - \frac{b}{3a}$$

$$\eta3 := 1.965353273 \quad (13)$$

$$C1 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta1 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

$$C1 := 1.448607061 \quad (14)$$

$$C2 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta2 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta2 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta2 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

$$C2 := 1.298705568 \quad (15)$$

$$C3 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta3 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta3 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta3 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

$$C3 := 0.2367784352 \quad (16)$$

Bijlage 4: Voorbeeld berekening numerieke methode in Maple

In deze bijlage is een voorbeeld berekening gedaan met de numerieke methode: Newton-Rapshon methode en bisectiemethode. Hiervoor is het computerprogramma Maple gebruikt.

Maple code:

In maple zijn de volgende waarden voor de parameters aangenomen: (Hierbij is d de amplitude van de imperfectie vervangen door z)

$$z := 1 : t := 1 : n_{xx} := 1 : n_{yy} := 1 : k_{xx} := -10 : k_{yy} := 1 : v := 0.5 :$$

De waarden a, b, c, d van de derdegraads vergelijking zijn:

$$a := -20 z^2 k_{yy}^2 n_{xx} \quad a := -20 \quad (1)$$

$$b := 16 z k_{xx} k_{yy} n_{xx} t + 4 z k_{yy}^2 n_{xx} t + 24 \sqrt{-3 v^2 + 3} z^2 n_{xx} k_{yy}^2 - 8 z k_{yy}^2 n_{yy} t \quad b := -128.0000000 \quad (2)$$

$$c := 8 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{yy} k_{yy}^2 - 20 \sqrt{-3 v^2 + 3} z t n_{xx} k_{yy} k_{xx} + 4 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{yy} + t^2 k_{yy}^2 n_{xx} - 2 t^2 k_{xx} k_{yy} n_{xx} - 3 t^2 k_{xx}^2 n_{xx} \quad c := -7.0000000 \quad (3)$$

$$d := 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{xx} k_{xx}^2 t^2 - 4 \sqrt{-3 v^2 + 3} n_{yy} k_{yy} k_{xx} t^2 \quad d := 660.0000000 \quad (4)$$

De derdegraadsvergelijking wordt voor de berekeningen in gereduceerde vorm geschreven door een verandering van variabele $\eta = w - \frac{b}{3a}$ en vervolgens te delen door a:

$$w^3 + pw + q = 0 :$$

Waarbij:

$$w := \eta - \frac{b}{3a} \quad p := \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad p := -13.30333333 \quad (5)$$

$$q := \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad q := -14.32859259 \quad (6)$$

De discriminant Δ kan aan de hand van de volgende vergelijking worden bepaald:

$$\Delta := 4p^3 + 27q^2 \quad \Delta := -3874.294097 \quad (7)$$

Bisectiemethode

Voor het bepalen van de oplossingen met de Newton-Rapshon methode moet eerst een startwaarde worden gekozen. Ligt deze startwaarde in de buurt van de juiste oplossing dan zal de methode snel convergeren. Het is daarom van belang om een goede initiele gok te doen. Dit kan aan de hand van de bisectiemethode. De bisectiemethode is uitgelegd in paragraaf 2.4. In maple kan de bisectiemethode uitgevoerd worden door de command `Bisection`. Hierbij moet nog wel een interval $[a,b]$ gekozen worden en een stopcriterium:

$$a = -5$$

$$b = 5$$

stopcriterium = tolerantie van de fout is 10^{-1}

`with(Student[NumericalAnalysis]) :`

$$f := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d :$$

`Bisection(f, x = [-10, 10], tolerance =  $10^{-1}$ , stoppingcriterion = absolute)`

$$1.953125000 \quad (8)$$

assign to a name →

$$\text{Startwaarde} \quad (9)$$

Newton-Rapshon methode

Nu kan de Newton-Rapshon methode worden uitgevoerd. Deze methode is uitgelegd in paragraaf 2.4. In maple kan dit worden uitgevoerd door de command `NewtonsMethod` hierbij moet een functie en een startwaarde worden gedefinieerd waarnaar er een sequence van iteraties uitkomt totdat het is geconvergeerd.

`with(Student[CalculusI]) :`

`NewtonsMethod(f, x = Startwaarde, output = sequence)`

$$1.953125000, 1.965403144, 1.965353273, 1.965353272, 1.965353272, 1.965353272 \quad (10)$$

`with(Student[CalculusI]) :`

`NewtonsMethod(f, x = Startwaarde)`

$$1.965353272 \quad (11)$$

assign to a name →

$$\eta l \quad (12)$$

Zoals hierboven te zien is, is na 5 iteraties een reële oplossing van de vergelijking bepaald.

De andere twee oplossingen kunnen nu worden verkregen door:

$$(\eta - \eta l) \cdot (\alpha \cdot \eta^2 + \beta \cdot \eta + \delta) = 0$$

waarbij:

$$\alpha := a :$$

$$\delta := -\frac{d}{\eta l} :$$

$$\beta := -\frac{c - \delta}{\eta l} :$$

$$\eta l := \eta l$$

$$\eta l := 1.965353272 \quad (13)$$

$$\eta_2 := \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \delta}}{2 \cdot \alpha}$$

$$\eta_2 := -3.343683532 \quad (14)$$

$$\eta_3 := \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \delta}}{2 \cdot \alpha}$$

$$\eta_3 := -5.021669740 \quad (15)$$

Nu de drie oplossingen voor η bekend zijn kunnen de knockdownfactors bepaald worden aan de hand van de volgende vergelijking:

$$C1 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta_1 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta_1 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

$$C1 := 0.2367784350 \quad (16)$$

$$C2 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta_2 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta_2 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta_2 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

$$C2 := 1.448607020 \quad (17)$$

$$C3 := \frac{\left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 1 - 2 \cdot \eta_3 \cdot \frac{z}{t} \right)^2}{4 \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - \frac{n_{yy}}{n_{xx}} - 3 \cdot \eta_3 \cdot \frac{z}{t} \right) \cdot \left(\frac{k_{xx}}{k_{yy}} - 2 \cdot \eta_3 \cdot \frac{z}{t} \right)}$$

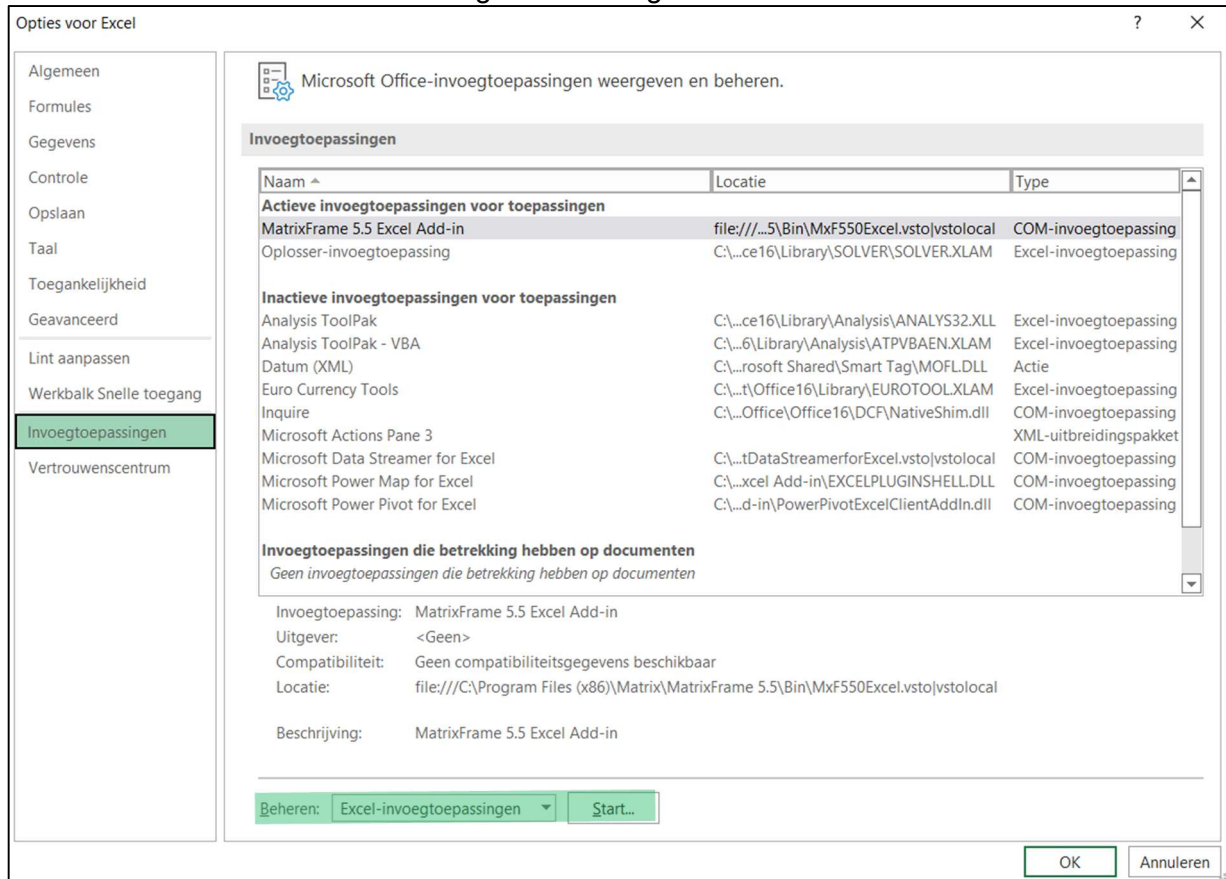
$$C3 := 1.298704905 \quad (18)$$

In het geval dat $\Delta > 0$ is, dan is de reële oplossing de knockdownfactor. In het geval dat $\Delta < 0$ zijn er 3 reële oplossingen en zal er een keuze tussen de drie knockdownfactors gemaakt moeten worden.

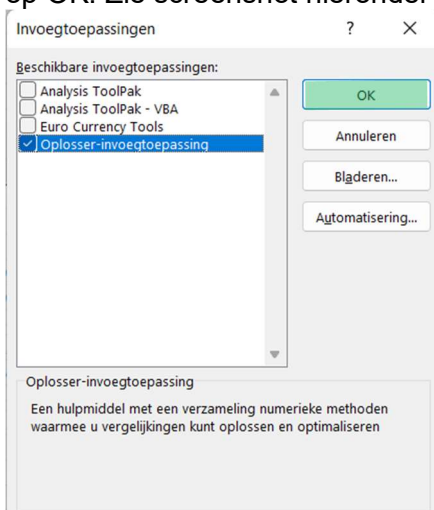
Bijlage 5: Toevoegen Oplosser in Microsoft Excel

In deze bijlage zal worden beschreven hoe de invoegtoepassing Oplosser in het computerprogramma Microsoft Excel kan worden toegevoegd. Hiervoor moeten de volgende stappen worden uitgevoerd (WebWings, 2021):

- Ga naar bestand en kies voor opties, het menu voor Opties voor Excel komt nu tevoorschijn
- In het menu voor Opties voor Excel kies voor Invoegtoepassingen
- Kies vervolgens bij de optie Beheren voor Excel-invoegtoepassingen en klik hierbij op start. Zie screenshot hieronder met de benodigde markeringen:



- Hierna volgt het Invoegtoepassingen menu, voeg hierbij de Oplosser-invoegtoepassing toe en klik op OK. Zie screenshot hieronder met de benodigde markeringen:



- De oplosser kan nu worden gevonden bij de Analyse optie in de Gegevens tabblad.

Bijlage 6: Bepaling realistisch interval voor η

In hoofdstuk 4 moet voor de controle van de bisectiemethode een interval $[a, b]$ gekozen worden die dient als startwaarde. Dit interval moet zo gekozen worden dat de uiteindelijke benaderde oplossing voor η in dit interval valt. Om dit te laten gebeuren worden de uiterste grenzen van η bepaald, omdat er dan altijd een oplossing kan ontstaan met de bisectiemethode.

Om de uiterste grenzen te bepalen is de volgende vergelijking gebruikt (1) :

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} \quad (1)$$

Voor de controle waren de volgende waardes aangenomen:

- $v = 0.35$
- $C =$ Realistische waardes voor C liggen in het interval $\frac{1}{6} < C < 1$

Het interval waarbinnen de waarde van η ligt is dan:

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} = \frac{\sqrt{3(1-0.35^2)}}{1-\frac{1}{6}} = 1.9470 \quad (2)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} = \frac{\sqrt{3(1-0.35^2)}}{1-1} = \infty \quad (3)$$

$$1.9470 < \eta < \infty$$

Met dit interval kunnen geen iteraties worden gedaan omdat b oneindig is. Er wordt daarom voor η een waarde van 1000 gekozen. De waarde voor C is dan:

$$\eta = \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{1-C} \rightarrow \quad (4)$$

$$1000 = \frac{\sqrt{3(1-0.35^2)}}{1-C} \rightarrow \quad (5)$$

$$1-C = \frac{\sqrt{3(1-0.35^2)}}{\eta} \rightarrow \quad (6)$$

$$C = 0.9984 \quad (7)$$

Het interval $[a, b]$ wordt dan:

$$1.9470 < \eta < 1000$$

Bijlage 7: Berekeningen voor het bepalen van de uiterste kniklast van de zweefvliegtuigvleugel

In deze bijlage zijn de berekeningen te vinden voor het bepalen van de knikbelasting van de zweefvliegtuigvleugel.

Berekening van de uiterste kniklast in Maple:

Er is aangenomen dat in y-richting geen kromming is dus:

$$a_y := 0 \quad a_y := 0 \quad (1)$$

$$k_{yy} := 0 \quad k_{yy} := 0 \quad (2)$$

Verder is er voor de amplitude imperfectie een waarde van 5 mm aangenomen dus:

$$d := 0.005 \quad d := 0.005 \quad (3)$$

De kromtestraal in x-richting kan worden bepaald met de volgende formule:

$$a_x = \frac{vleugelbreedte(vlb)^2}{vleugeldikte(vld) \cdot 8}$$

De vleugelbreedte = 1.0 m, de vleugeldikte = 0.1 m

$$a_x := \frac{vlb^2}{vld \cdot 8} \quad a_x := 1.250000000 \quad (4)$$

De kromming in x-richting kxx wordt dan:

$$k_{xx} := \frac{1}{a_x} \quad k_{xx} := 0.8000000000 \quad (5)$$

$$lx := 0.15 : ly := 0.15 : vlb := 1 : vll := 5 : vld := 0.1 : v := 0.30 : E := 135 \cdot 10^9 : Ftg := 5984.1 : \\ d := 0.005 : ax := 1.3 : kxx := 0.8 : kyy := 0 : t := 0.006 :$$

De kritische membraankracht kan worden berekend met behulp van de volgende vergelijking:

$$nyycr := -E t ly^2 \left(\frac{\pi^2 t^2 \left(\frac{1}{lx^2} + \frac{1}{ly^2} \right)^2}{-12 v^2 + 12} + \frac{\left(\frac{kxx}{ly^2} + \frac{kyy}{lx^2} \right)^2}{\pi^2 \left(\frac{1}{lx^2} + \frac{1}{ly^2} \right)^2} \right) \\ nyycr := -4.980803232 \times 10^6 \quad (6)$$

Vervolgens kan de uiterste mebraankracht worden berekend met de volgende formule waarbij de knockdownfactor is berekend met behulp van de analytische methode dit is gedaan met het Maple model uit bijlage 3. Hieruit is een knockdownfactor gekomen van:

$$C := 0.7252819850 :$$

$$nyyult := nyycr \cdot C \quad nyyult := -3.612486855 \times 10^6 \quad (7)$$

Vervolgens kan het moment in de vleugel worden bepaald door de volgende vergelijking:

$$Mvleugel := nyyult \cdot vld \quad Mvleugel := -361248.6855 \quad (8)$$

Met de vleugellengte kan de knikbelasting worden bepaald waarbij de initiële knikvorm ontstaat op de zweefvliegtuigvleugel. Dit is gedaan aan de hand van vergeet-me-nietjes:

$$qvleugel := \frac{Mvleugel}{\frac{1}{2} \cdot vlt^2} \quad qvleugel := -28899.89484 \quad (9)$$

Dus de knikbelasting is -28899.89 [kN/m per meter vleugelbreedte]