

De wringvervormings- theorie van Vlasov

Geldigheid voor massieve en kokervormige
doorsneden



De wringvervormingstheorie van Vlasov

Geldigheid voor massieve en kokervormige doorsneden
door

T.B. Raaphorst

Begeleiders: Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Dr. ir. C.B.M. Blom

Voorwoord

Na een aantal mooie jaren als civiele techniek student aan de TU Delft komt het einde in zicht. Om dit af te ronden heb ik dit onderzoek geschreven als bachelor eind project. Na het lezen over de wringingstheorie van Vlasov leek het me een interessant onderwerp om nader onderzoek over te doen.

Voor het bedenken van het onderzoek is Dr.ir. Pierre Hoogenboom verantwoordelijk en daar wil ik hem ook erg voor bedanken. Daarnaast heeft ook met name het dictaat over wringing van Dr.ir. Hoogenboom erg geholpen met het eigen maken van de benodigde kennis. Samen met de goede begeleiding van ook Dr.ir. Kees Blom is dit verslag tot stand gekomen, dus wil ik hem ook graag bedanken hiervoor. Ik hoop dat het verslag enige nieuwe inzichten kan geven aan de werking van de theorie van Vlasov.

Tomas Raaphorst
20-06-2020

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
Samenvatting.....	5
1 Introductie.....	6
1.1 Theorie van Vlasov	6
1.2 Probleemstelling.....	6
1.3 Doelstelling	6
1.4 Opzet	7
2 Methode.....	8
2.1 Bepalen parameters	8
2.2 Berekenen met theorie van Vlasov.....	8
2.3 Berekenen met eindige-elementen methode (EEM)	9
2.4 Vergelijken resultaten	9
3 Massieve doorsneden.....	10
3.1 Rechthoekige massieve doorsnede.....	10
3.2 Ronde massieve doorsnede	13
4 Kokerdoorsneden.....	16
4.1 Rechthoekige kokerdoorsnede	16
4.2 Ronde kokerdoorsnede.....	21
5. Resultaten overzicht.....	24
6. Conclusies	25
7. Toepassingsvoorbeeld.....	26
Literatuur.....	28
Bijlagen	29
Bijlage 1: Berekeningen van een rechthoekige massieve doorsnede in Maple.....	29
Bijlage 2: Berekeningen van een ronde massieve doorsnede in Maple	31
Bijlage 3: Berekeningen van een rechthoekige kokerdoorsnede in Maple	33
Bijlage 4: Berekeningen van een ronde kokerdoorsnede in Maple.....	35
Bijlage 5: Berekeningen van het toepassingsvoorbeeld in Maple.....	37

Samenvatting

Naast buiging en extensie kan een balk ook wringing (ook wel torsie genoemd) ondervinden. Bij een wringend moment kan er ook welving ontstaan in een balk. Welving is de vervorming van een initieel vlakke normaaldoorsnede. Als welving verhinderd wordt door bijvoorbeeld een inklemming ontstaan extra vervormingen en spanningen in een doorsnede. Vasiliy Vlasov heeft een vergelijking gemaakt die deze vervormingen en spanningen kan berekenen. Echter is deze vergelijking alleen afgeleid voor dunwandige open doorsnedes. Voor minder vaak gebruikte doorsnedes als massieve- en kokerdoorsnedes is het onduidelijk of de vervormingen en spanningen met de Vlasov theorie nauwkeurig kunnen worden bepaald.

In dit onderzoek zullen de vervormingen en spanningen van verschillende massieve en kokerdoorsnedes met de theorie van Vlasov berekend worden. Daarna wordt de nauwkeurigheid van deze berekeningen bepaald. De nauwkeurigheid kan worden bepaald door handberekeningen te vergelijken met een nauwkeurige eindige-elementen methode.

De opzet van dit onderzoek is een aan één kant ingeklemde ligger met een wringend moment op het vrije uiteinde. Hierdoor is welving aan de kant van de inklemming verhinderd maar kan het vrije uiteinde vrij vervormen. Er zijn in totaal 4 verschillende doorsnedes op deze manier op nauwkeurigheid getest.

De rechthoekige massieve doorsnede is de eerste doorsnede die is getest. Als eerst worden de benodigde parameters voor de Vlasov vergelijking bepaald. Hierna wordt met de Vlasov vergelijking de vervorming in de vorm van de horizontale verplaatsing van het vrije uiteinde van de ligger bepaald. Hierna is door gebruik te maken van een eindige-elementen methode dezelfde verplaatsing bepaald. De nauwkeurigheid is hierna bepaald door deze twee berekende verplaatsingen door elkaar te delen en zo een nauwkeurigheid te berekenen. Hieruit volgt ook de procentuele fout. In het geval van de rechthoekige massieve doorsnede komt hier een perfect nauwkeurigheid van 1,00 uit. Voor de normaalspanning wordt hetzelfde gedaan. Hier komt een nauwkeurigheid van 0,776 uit.

Naast de rechthoekige massieve doorsnede zijn ook de ronde massieve doorsnede, de rechthoekige kokerdoorsnede en de ronde kokerdoorsnede op dezelfde manier getest. Hier kwamen voor de horizontale verplaatsing nauwkeurigheden uit van respectievelijk 0,998, 1,037 en 1,015.

Voor de ronde doorsnedes kan alleen de nauwkeurigheid van de vervorming bepaald worden aangezien ronde doorsnedes de eigenschap hebben niet te welven waardoor er geen normaalspanningen in de ligger ontstaan. Voor de rechthoekige kokerdoorsnede is wel nog de nauwkeurigheid van de normaalspanning bepaald. Deze heeft een nauwkeurigheid van 1,284.

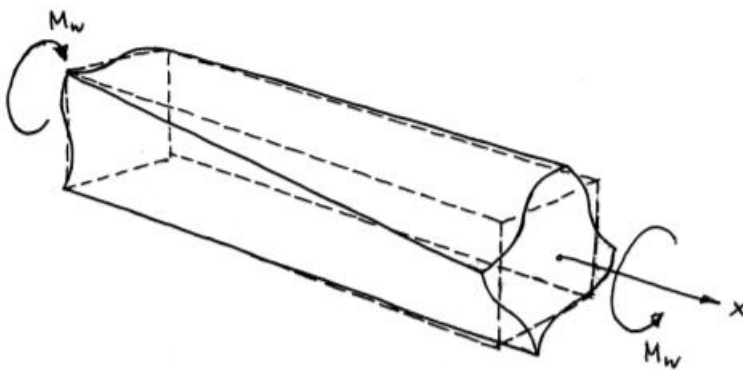
Er kan na deze onderzoeken dus geconcludeerd worden dat voor alle geteste doorsnedes de vervorming slechts een kleine afwijking heeft en dus als nauwkeurig gezien kunnen worden. Voor de normaalspanningen is de afwijking wat groter dan bij de vervorming. Door de manier waarop de eindige-elementen deze spanningen berekend zijn deze afwijkingen nog steeds acceptabel en dus kunnen deze doorsnedes dus ook op dit vlak als nauwkeurig worden gezien.

Nadat geconcludeerd is dat de methode als nauwkeurig gezien kan worden is een toepassingsvoorbeeld gedaan door een wegwijzer met een kolom met een kokerdoorsnede door te rekenen met de theorie van Vlasov.

1 Introductie

1.1 Theorie van Vlasov

Naast buiging en extensie kan een balk ook wringing (ook wel torsie genoemd) ondervinden. Dit kan bijvoorbeeld ontstaan als een balk belast wordt door een excentrische kracht. Deze wringing veroorzaakt een spanning en een vervorming in de balk die meegenomen moeten worden in de veiligheidsberekeningen. Bij een wringend moment kan er ook welving ontstaan in een balk. Welving is de vervorming van een initieel vlakke normaaldoorsnede.[1] Een schematisch voorbeeld hiervan is te zien in figuur 1. Als welving verhinderd wordt door bijvoorbeeld een inklemming ontstaan er extra axiale spanningen. Hierdoor neemt ook de weerstand tegen wringingsvervorming toe.



Figuur 1: Welving in een balk [1]

Een theorie die wringing en welving beschrijft over het verloop van een balk komt van Aldémar Barré de Saint-Venant.[2] Deze theorie houdt er echter geen rekening mee dat welving verhinderd kan worden in de inklemming. De theorie is dan ook alleen geldig vanaf een bepaalde afstand van de inklemming. Daarom kwam Vasiliy Vlasov met een nieuwe theorie waarbij de verhinderde welving wel werd meegenomen. Deze vergelijking maakt gebruik van het zogenaamde bi-moment. Het bi-moment ontstaat in een doorsnede wanneer welving gehinderd wordt. [1]

1.2 Probleemstelling

Om wringingsvervorming en spanningen te berekenen kan bij niet uniforme welving, zoals verhinderde welving, de theorie van Vlasov gebruikt worden. Deze theorie is afgeleid voor dunwandige open doorsneden, maar het is nog onzeker of deze theorie ook nauwkeurig is voor andere vormen van doorsneden. In dit onderzoek wordt gefocust op het testen van de nauwkeurigheid van massieve en kokervormige doorsneden.

1.3 Doelstelling

Het doel is om het inzicht in het gebruik van de theorie van Vlasov over wringvervorming te vergroten door te bepalen of de theorie nauwkeurig is voor massieve en kokervormige doorsneden.

1.4 Opzet

Om de nauwkeurigheid te testen wordt een vaste opzet gekozen waarbij verschillende doorsnedes via theoretische methodes getest worden. De opzet bestaat uit een vrij uitkragende ligger met een vaste oplegging aan het andere uiteinde die welving verhindert. Hierdoor kan wringing optreden aan het vrije uiteinde van de ligger als een wringend moment wordt aangebracht op de ligger.

Hiernaast zijn ook een aantal materiaaleigenschappen nodig. Voor dit onderzoek wordt voor alle doorsnedes constructiestaal gebruikt met een stijfheid van $E = 200000 \text{ MPa}$ en een Poisson ratio van $\nu = 0,3$. Met [Vergelijking 1] kan de glijdingsmodulus berekend worden. Hier komt uit: $G = 76923 \text{ MPa}$. De lengte van de ligger is 2540 mm. Het wringend moment (T) op het vrije uiteinde heeft een grootte van 226,0 kNm.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ [Vergelijking 1] Bepaling glijdingsmodulus}$$

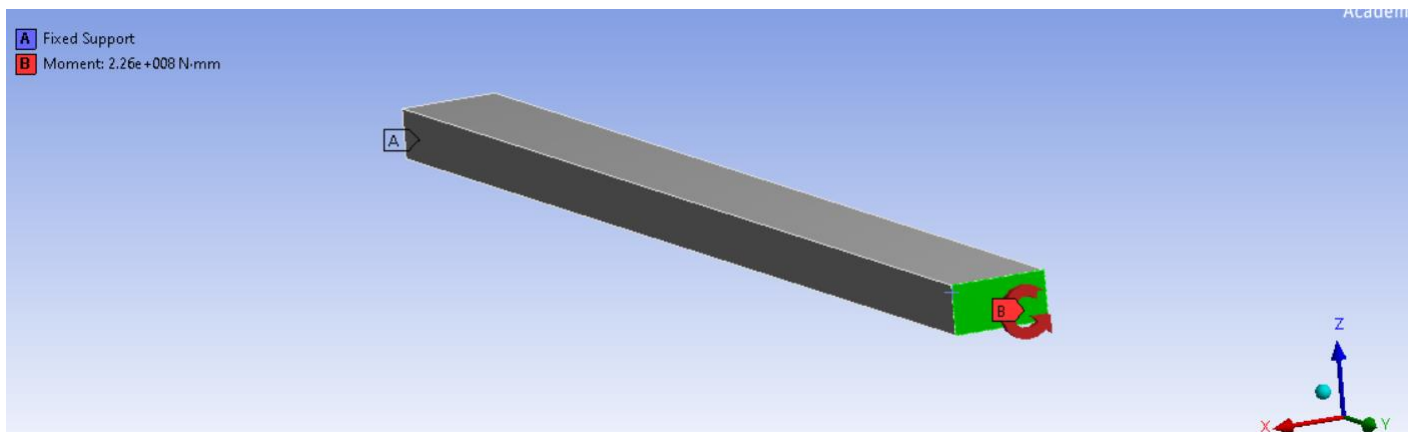
Met hierin:

G = glijdingsmodulus (MPa)

E = Youngs elasticiteitsmodulus (MPa)

ν = Poissons ratio (-)

Een schematische overzicht van de opzet is te zien in figuur 2. Alle geteste doorsnedes zullen met deze opzet getest worden.



Figuur 2: Opzet

2 Methode

In dit hoofdstuk zal de methode beschreven worden waarmee de nauwkeurigheid van de Vlasov vergelijking bepaald wordt. Deze methode zal daarna in de volgende hoofdstukken toegepast worden op verschillende doorsneden.

2.1 Bepalen parameters

Om de modellen te kunnen maken worden eerst van elke doorsnede de afmetingen bepaald. Deze afmetingen worden op een handige verhouding gekozen, maar vrijwel willekeurig. Dit gebeurt willekeurig omdat de theorie voor alle afmetingen zou moeten gelden. Met de afmetingen kan in het programma SCIA Engineering een 2D model gemaakt worden van de doorsnede. Voor dit onderzoek wordt SCIA Engineering 19.1 gebruikt. Het programma kan een aantal parameters berekenen die van belang zijn in het onderzoek. Deze parameters zijn het wringtraagheidsmoment, de welvingsconstante en de extreme waarde van de welvingsfunctie. De welvingsconstante is een waarde die aangeeft in hoeverre welving kan optreden in een doorsnede. Een welvingsconstante van 0 geeft aan dat welving niet mogelijk is. De welvingsfunctie is de verdeling van de welving over de doorsnede.

2.2 Berekenen met theorie van Vlasov

Na het bepalen van de parameters worden deze gebruikt om het verloop van de hoekverdraaiing (φ) van de ligger te vinden. Hiervoor wordt de theorie van Vlasov gebruikt. De differentiaalvergelijking voor wringing van Vlasov is als volgt:

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = m_x \quad \text{[Vergelijking 2] Differentiaalvergelijking van Vlasov}$$

Met hierin:

E = Youngs stijfheidsmodulus (MPa)

C_w = Welvingsconstante (mm^6)

φ = Maximale hoekverdraaiing (rad)

G = Glijdingsmodulus (MPa)

I_w = Wringtraagheidsmoment (mm^4)

m_x = Waarde van het wringend moment op x (Nmm)

x = Afstand vanaf de oplegging (mm)

Met het berekende hoekverdraaiingsverloop kan de maximale vervorming van de ligger bepaald worden. Met name de maximale horizontale verplaatsing bij de uiterste vezels (u_x) is van belang.

Hierna wordt het verloop van het bi-moment in de doorsnede bepaald. Dit wordt gedaan met de volgende differentiaalvergelijking:

$$B = -EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad \text{[Vergelijking 3] Differentiaalvergelijking voor het bepalen van het bi – moment}$$

Met hierin:

B = Bi-moment (Nmm^2)

Uit het verloop van het bi-moment over de ligger kan het maximale bi-moment in de ligger bepaald worden. Dit bi-moment wordt gebruikt in de volgende vergelijking om de maximale axiale normaalspanning in de doorsnede te berekenen:

$$\sigma_{xx} = -\frac{B_{max}}{C_w} \psi \quad \text{[Vergelijking 4] Bepalen grootste normaalspanning}$$

Met hierin:

σ_{xx} = maximale axiale normaalspanning in de doorsnede (N/mm²)

B_{max} = Maximale Bi-moment in de doorsnede (Nmm²)

ψ = Extreme waarde van de welvingsfunctie (mm²)

2.3 Berekenen met eindige-elementen methode (EEM)

Na de evaluatie van de gekozen ligger met de theorie van Vlasov wordt een eindige-elementen model gemaakt van de ligger. In dit onderzoek wordt het programma *Ansys Workbench 17.2* gebruikt. Met dit programma wordt een 3D model gemaakt van de gekozen ligger met de gekozen doorsnede. Als daarna de gekozen wringbelasting ook is aangebracht berekent het programma de vervorming en het verloop van de normaalspanningen in de ligger. Een EEM rekent dit uit door het model in kleine elementen te verdelen. Hoe kleiner deze elementen gekozen worden hoe nauwkeuriger de resultaten zijn. Dit wordt ook wel de grootte van de mesh genoemd en in dit verslag wordt bij elke EEM berekening deze grootte erbij gezet.

2.4 Vergelijken resultaten

Als laatste worden de resultaten uit de berekeningen met de Vlasov vergelijking vergeleken met de resultaten uit de eindige-elementen methode. Het vergelijken wordt gedaan door de twee resultaten door elkaar te delen en waardoor een mate van nauwkeurigheid (UC) tussen 0 en 1 berekend wordt. Als blijkt dat een lage nauwkeurigheid gevonden wordt kan er gekeken worden naar de nauwkeurigheid op andere punten van de ligger om te kijken of de theorie bijvoorbeeld wel voor een deel van de ligger nauwkeurig is. Omdat de lengte van de ligger invloed kan hebben op de nauwkeurigheid wordt hierna gekeken wat de welvingsconstante zou moeten zijn om de nauwkeurigheid naar 1 te krijgen als dit nodig is. Daarmee wordt dus de nauwkeurigheid van de welvingsconstante bepaald. Dit wordt gedaan door de C_w variabele te maken in de berekeningen en op te lossen voor $UC = 1$.

3 Massieve doorsneden

De eerste doorsneden waarvan de nauwkeurigheid van de Vlasov theorie voor wringing bepaald gaan worden zijn massieve doorsneden. Deze zullen op nauwkeurigheid getest worden door de stappen te doorlopen die beschreven zijn in de methode van het vorige hoofdstuk. In dit hoofdstuk zullen een rechthoekige en een ronde massieve doorsnede bekeken worden.

3.1 Rechthoekige massieve doorsnede

Parameters

De eerst geteste doorsnede is de rechthoekige massieve doorsnede. Voor de afmetingen van de gekozen doorsnede worden in dit voorbeeld een hoogte (h) van 100 mm en een breedte (b) van 200 mm gekozen. Wat betreft verdere afmetingen en materiaaleigenschappen worden de waarden uit 1.4 gebruikt. Uit het SCIA Engineering model volgen de onderstaande benodigde resultaten:

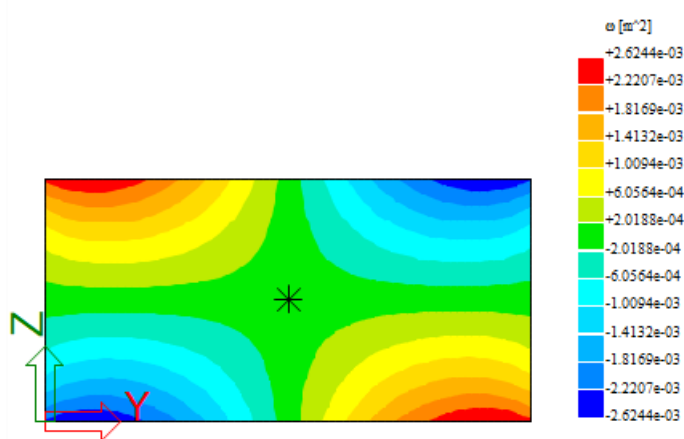
Afmetingen: 100x200

$$I_w = 4,565 * 10^7 \text{ mm}^4$$

$$C_w = 2,007 * 10^{10} \text{ mm}^6$$

$$\psi = -2,624 * 10^3 \text{ mm}^2$$

De welvingsfunctie voor deze doorsnede is hieronder te zien in figuur 3.



Figuur 3: Welvingsfunctie rechthoekige massieve doorsnede

Berekeningen Vlasov methode

Om de vervorming van de doorsnede te kunnen berekenen met de Vlasov differentiaalvergelijking zijn enkele randvoorwaarden nodig. Hieronder zijn de gebruikte randvoorwaarden voor een rechthoekige doorsnede beschreven:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$$

$$GI_w * \frac{d\varphi}{dx}(l) - EC_w * \frac{d^3\varphi}{dx^3}(l) = T$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(l) = 0$$

Als alle gegevens worden ingevuld in [Vergelijking 2] volgt een maximale hoekverdraaiing aan het vrije uiteinde van de ligger van $\varphi(2540) = 0,1613$ rad.

Om de resultaten te kunnen vergelijken is het nodig om met deze hoekverdraaiing de maximale horizontale verplaatsing van de uiterste vezel te berekenen. In een rechthoekige doorsnede kan dit door middel van de volgende vergelijking:

$$\varphi(x) * \frac{1}{2}h = u_x \text{ [Vergelijking 5] Bepaling vervorming}$$

Met hierin:

u_x = Horizontale verplaatsing van de uiterste vezel (mm)

h = hoogte van de doorsnede

De berekende hoekverdraaiing op $x = 2540$ geeft een maximale horizontale verplaatsing in de uiterste vezel van $u_x = 8,064$ mm.

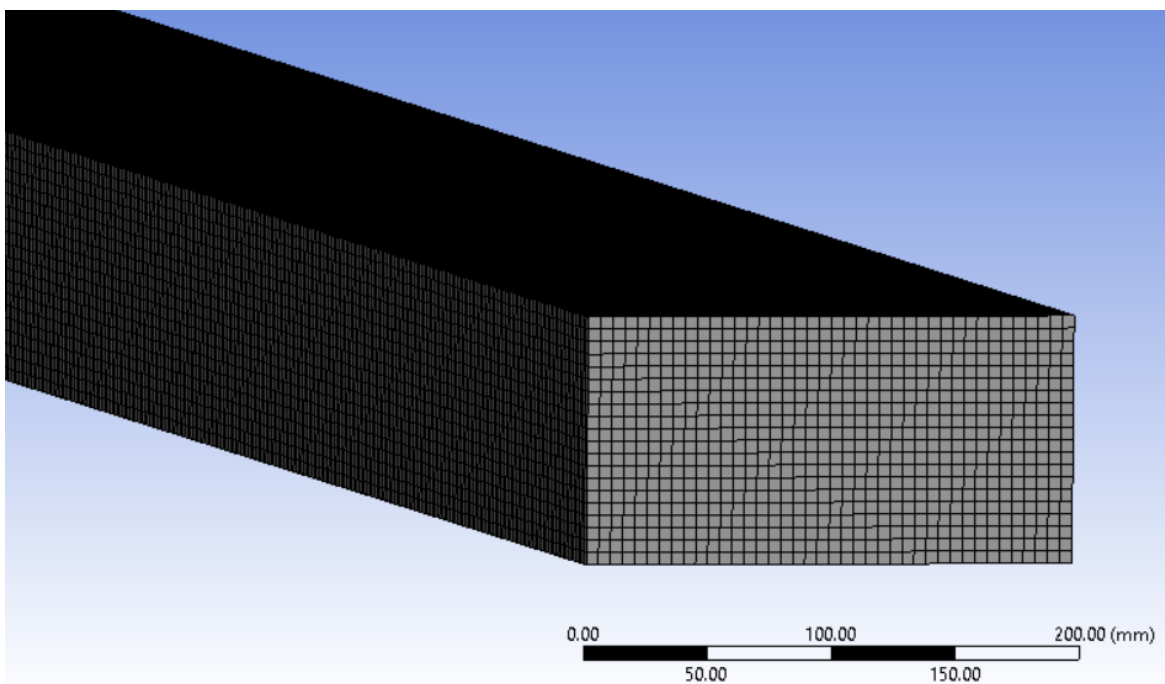
Hierna wordt de normaalspanning berekend. De extreme waarden van de normaalspanning bevinden zich in de linker- en rechterbovenhoek van de doorsnede aan de kant van de inklemming. Deze kan worden berekend door het bi-moment op $x = 0$ in te voeren in [Vergelijking 4] samen met de extreme waarde van de welvingsfunctie voor de rechthoekige massieve doorsnede.

Hier komt een normaalspanning uit van $\sigma_{xx} = -999,2$ N/mm².

Alle berekeningen zijn gemaakt in Maple. De Maple sheets zijn te vinden in bijlage 1.

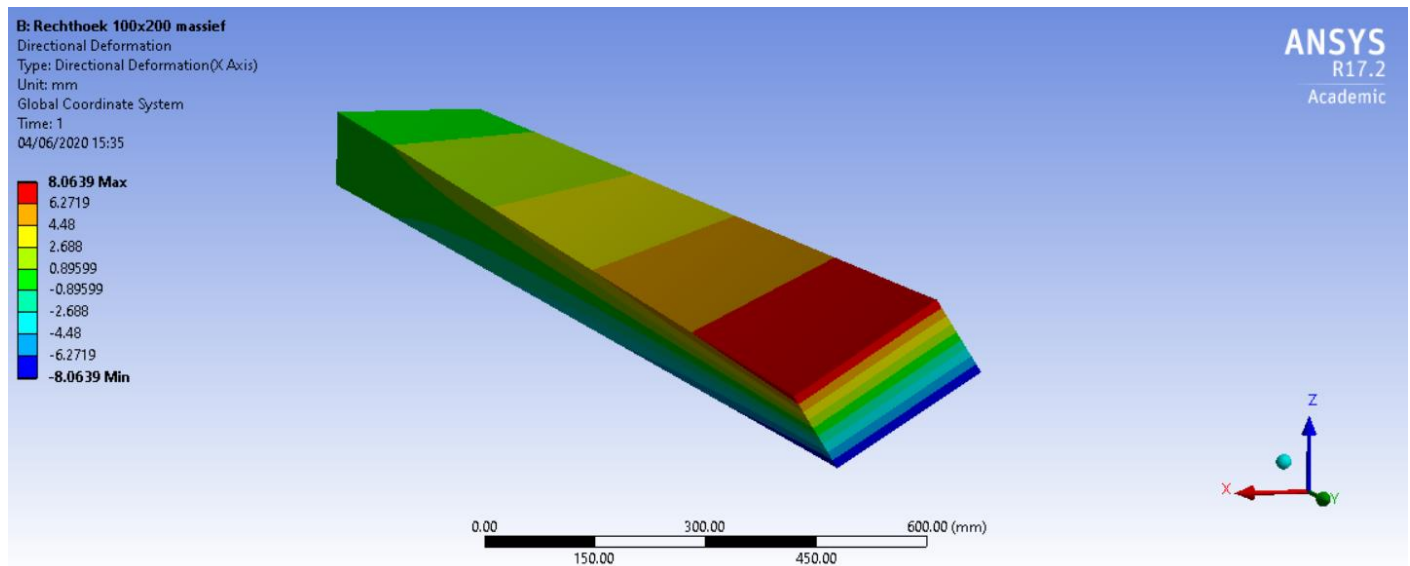
Resultaten eindige-elementen methode

De elementen in de gebruikte mesh voor dit model hebben een grootte van 5 mm. De mesh is te zien in figuur 4.



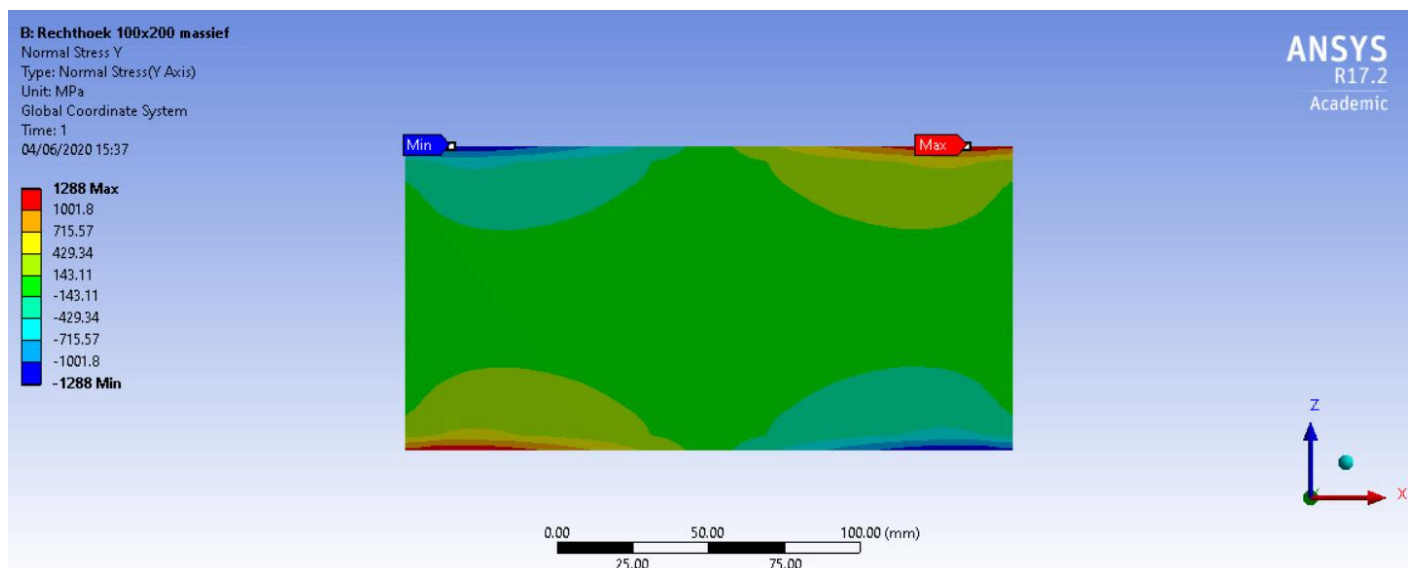
Figuur 4: 3D Zicht van de gebruikte mesh in de EEM (Rechthoekige massieve doorsnede)

Het vervormde model waarmee de extreme horizontale verplaatsing wordt berekend is te zien in figuur 5. Hierin is te vinden dat de extreme waarde van de verplaatsing 8,064 mm is en plaats vindt aan de boven en onderkant van de doorsnede.



Figuur 5: Horizontale verplaatsing in de ligger volgens de EEM

De extreme waarde van de axiale normaalspanning die hier gevonden wordt is $\sigma_{xx} = 1288,0 \text{ N/mm}^2$. In figuur 6 is de locatie van deze waarde aangegeven met het 'max' en 'min' vinkje.



Figuur 6: Ansys model van de axiale normaalspanning

Nauwkeurigheid verplaatsing

Zoals bij Methode vermeld is, wordt de vergelijking gedaan door een mate van nauwkeurigheid te vinden tussen 0 en 1. Voor de extreme waarden van de verplaatsing komt daar een waarde van uit van:

$$UC_u = \frac{\text{horizontale verplaatsing Vlasov}}{\text{horizontale verplaatsing EEM}} = \frac{8,064 \text{ mm}}{8,064 \text{ mm}} = 1,000$$

Dat wil zeggen dat er een foutmarge is van 0 %.

Nauwkeurigheid normaalspanning

Voor de extreme waarden van de normaalspanning komt er een waarde van de mate van nauwkeurig uit van:

$$UC_{\sigma} = \frac{\text{Normaalspanning Vlasov}}{\text{Normaalspanning EEM}} = \left| \frac{-999,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1288,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right| = 0,776$$

Hierbij zit dus een foutmarge van ongeveer 22,4%. De methode van Vlasov lijkt dus de normaalspanning te onderschatten.

Conclusie rechthoekige massieve doorsnede

Voor de rechthoekige massieve doorsnede is een overzicht van de resultaten te zien in tabel 1. Te zien is dat de verplaatsing als nauwkeurig kan worden beschouwd. Voor de normaalspanning is de foutmarge wat groter, maar een foutmarge van 22,3% bij de normaalspanning is nog steeds acceptabel omdat de normaalspanning veel meer beïnvloed wordt door de mesh grootte.

	Verplaatsing (u)	Normaalspanning (σ_{xx})
Vlasov	8,064 mm	-999,2 N/mm ²
Ansys (EEM)	8,064 mm	1288,8 N/mm ²
UC	1,00	0,776
Foutmarge	0%	22,4%

Tabel 1: Overzicht van de resultaten voor de rechthoekige massieve doorsnede

Er hoeft in dit geval niet gezocht te worden naar een C_w die de nauwkeurigheid zou verbeteren aangezien de nauwkeurigheid al 1 is.

3.2 Ronde massieve doorsnede

Parameters

De tweede doorsnede die op nauwkeurigheid getest zal worden is de ronde massieve doorsnede. In deze test wordt een doorsnede met een diameter (d) van 100 mm gebruikt. Daarbij zullen verdere afmetingen en de materiaaleigenschappen uit 1.4 gebruikt worden. Uit het SCIA Engineering model volgen de onderstaande benodigde resultaten:

$$d = 100 \text{ mm}$$

$$I_w = 0,9837 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$C_w = 0$$

$$\psi = 0$$

Dat de welvingsconstante en de extreme waarde van de welvingsfunctie beide 0 zijn is een bekende eigenschap van ronde doorsnedes.

Berekeningen Vlasov methode

Zoals hierboven vermeld hebben zowel de welvingsconstante als de extreme waarde van de welvingsfunctie een waarde van 0. Dit komt door de ronde vorm van de doorsnede. Ronde doorsnedes laten namelijk geen welving toe. Een gevolg hiervan is dat er daarom ook geen bi-moment of normaalspanningen in de ligger zitten.

De vervorming kan daarentegen wel berekend en vergeleken worden. Met de waarden uit 1.4 en bovenstaande parameters verandert de formule van Vlasov in een 2^e-graads differentiaal vergelijking. De differentiaal vergelijking ziet er dan als volgt uit:

$$-GI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = m_x \text{ [Vergelijking 6] Differentiaalvergelijking van Vlasov (C_w = 0)}$$

De randvoorwaarden die nodig zijn om deze differentiaalvergelijking op te lossen zijn als volgt:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ GI_w * \frac{d\varphi}{dx}(l) &= T \end{aligned}$$

Als alle gegevens worden ingevuld in [Vergelijking 6] volgt een maximale hoekverdraaiing aan het vrije uiteinde van de ligger van $\varphi(2540) = 0,7586$ rad.

In een ronde doorsnede kan de maximale vervorming op de x-as berekend worden door middel van de volgende vergelijking:

$$\varphi(x) * r = u_x \text{ [Vergelijking 7] Bepaling vervorming (ronde doorsnede)}$$

Met hierin:

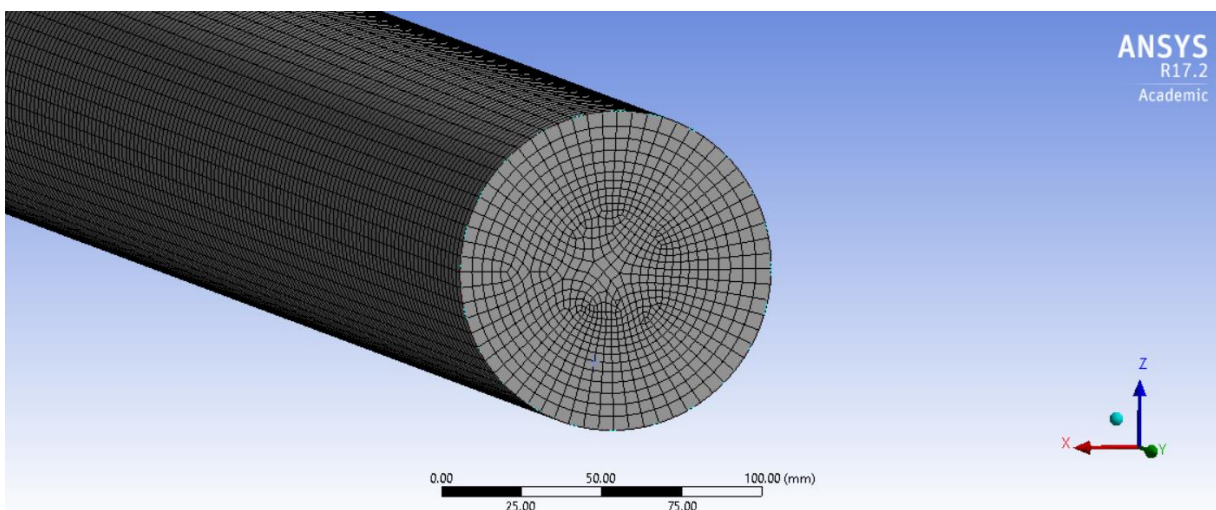
r = Straal van de doorsnede (mm)

De berekende hoekverdraaiing op $x = 2540$ geeft een maximale horizontale verplaatsing in de uiterste vezel van $u_x = 37,932$ mm.

Alle berekeningen zijn gemaakt in Maple. De Maple sheets zijn te vinden in bijlage 2.

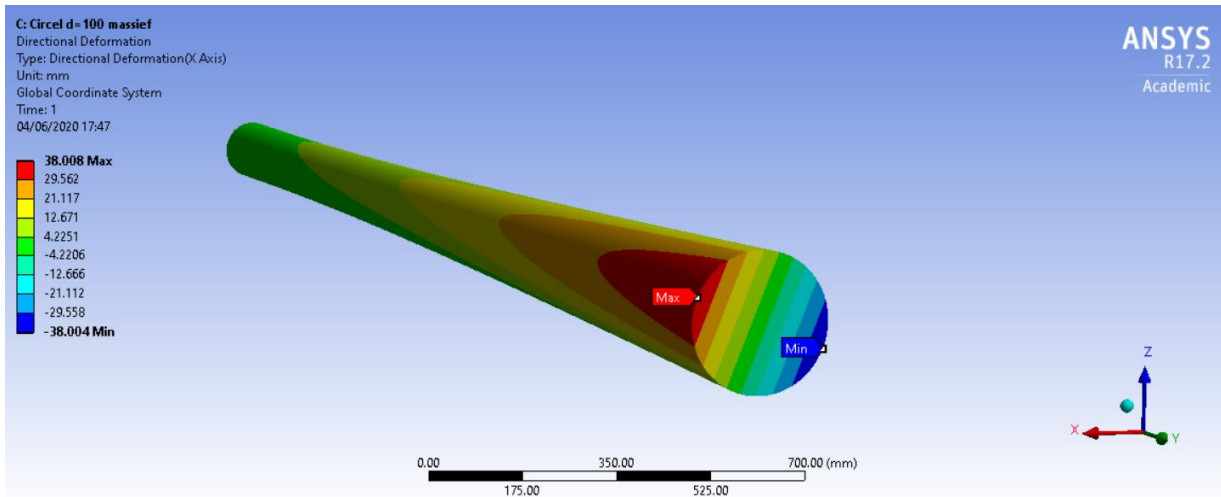
Resultaten eindige-elementen methode

De elementen in de gebruikte mesh voor dit model hebben een grootte van 5 mm. De mesh is te zien in figuur 7.



Figuur 7: 3D Zicht van de gebruikte mesh in de EEM (Ronde massieve doorsnede)

Het vervormde model waarmee de extreme horizontale verplaatsing wordt berekend is te zien in figuur 8. Hierin is te vinden dat de extreme waarde van de horizontale verplaatsing 38,008 mm is. Deze bevindt zich aan het vrije uiteinde van de ligger.



Figuur 8: Horizontale verplaatsing in de ligger volgens de EEM

Nauwkeurigheid

Ook voor de massieve ronde doorsnede doen we de vergelijking op de manier zoals bij het hoofdstuk 2 Methode is beschreven. De nauwkeurigheid van de normaalspanning kan alleen niet bepaald worden gezien er geen normaalspanningen in de ligger zijn.

De nauwkeurigheid van de verplaatsing in de doorsnede is als volgt:

$$UC_u = \frac{\text{horizontale verplaatsing Vlasov}}{\text{horizontale verplaatsing EEM}} = \frac{37,932 \text{ mm}}{38,008 \text{ mm}} = 0,9980$$

Hier zit dus een foutmarge in van 0,2%.

De nauwkeurigheid van de welvingsconstante is hier niet relevant aangezien deze 0 is.

Conclusie ronde massieve doorsnede

Voor de massieve ronde doorsnede is een overzicht van de resultaten te vinden in tabel 2. Met een kleine foutmarge van 0,2% voor de verplaatsing kan geconcludeerd worden dat de nauwkeurigheid van de methode acceptabel is.

	Verplaatsing (u)
Vlasov	37,932 mm
Ansys (EEM)	38,008 mm
UC	0,9980
Foutmarge	0,2%

Tabel 2: Overzicht van de resultaten voor de ronde massieve doorsnede

4 Kokerdoorsnedes

Na de massieve doorsnedes getest te hebben zijn de kokerdoorsnedes getest. Hierbij zijn de dezelfde doorsnede vormen gebruikt, namelijk een rechthoekige en een ronde doorsnede. Ook deze doorsnedes zullen op nauwkeurigheid getest worden. In dit hoofdstuk zullen ook weer een rechthoekige en een ronde doorsnede bekeken worden.

4.1 Rechthoekige kokerdoorsnede

Parameters

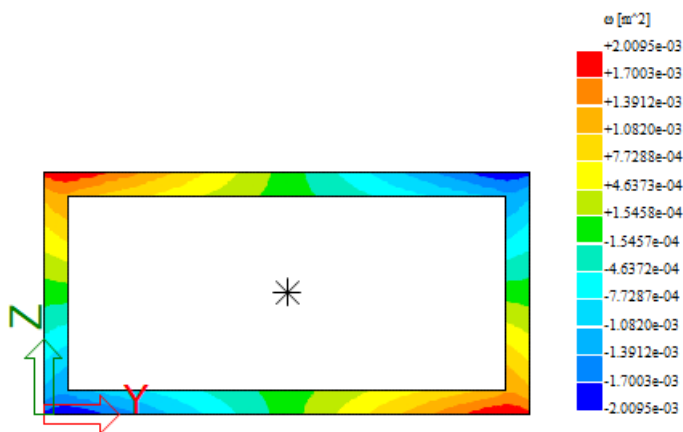
Voor de rechthoekige doorsnede zijn een hoogte van 100 mm en een breedte van 200 mm gekozen. Daarnaast hebben de wanden een dikte van 10 mm. Daarbij zullen verdere afmetingen en de materiaaleigenschappen uit 1.4 gebruikt worden. Uit het SCIA Engineering model volgen de onderstaande benodigde resultaten:

$$I_w = 2,071 * 10^7 \text{ mm}^4$$

$$C_w = 0,5098 * 10^{10} \text{ mm}^6$$

$$\psi = -2009,5 \text{ mm}^2$$

De welvingsfunctie voor deze doorsnede is hieronder te zien in figuur 9.



Figuur 9: Welvingsfunctie rechthoekige kokerdoorsnede

Berekening Vlasov methode

De berekening voor een rechthoekige kokerdoorsnede is vergelijkbaar met de berekening van een rechthoekige massieve doorsnede. Voor deze berekening met de Vlasov differentiaalvergelijking zijn weer enkele randvoorwaarden nodig. Hieronder zijn de gebruikte randvoorwaarden voor een rechthoekige doorsnede beschreven:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0$$

$$GI_w * \frac{d\varphi}{dx}(l) - EC_w * \frac{d^3\varphi}{dx^3}(l) = T$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(l) = 0$$

Als alle gegevens worden ingevuld in [Vergelijking 2] volgt een maximale hoekverdraaiing aan het vrije uiteinde van de ligger van $\varphi(2540) = 0,3567 \text{ rad}$.

Om de resultaten te kunnen vergelijken is het nodig om met deze hoekverdraaiing de maximale horizontale verplaatsing van de uiterste vezel te berekenen. In een rechthoekige doorsnede kan dit door middel van de volgende vergelijking:

$$\varphi(x) * \frac{1}{2} h = u_x \quad \text{[Vergelijking 4] Bepaling vervorming}$$

De berekende hoekverdraaiing op $x = 2540$ geeft een maximale horizontale verplaatsing in de uiterste vezel van $u_x = 17,834$ mm.

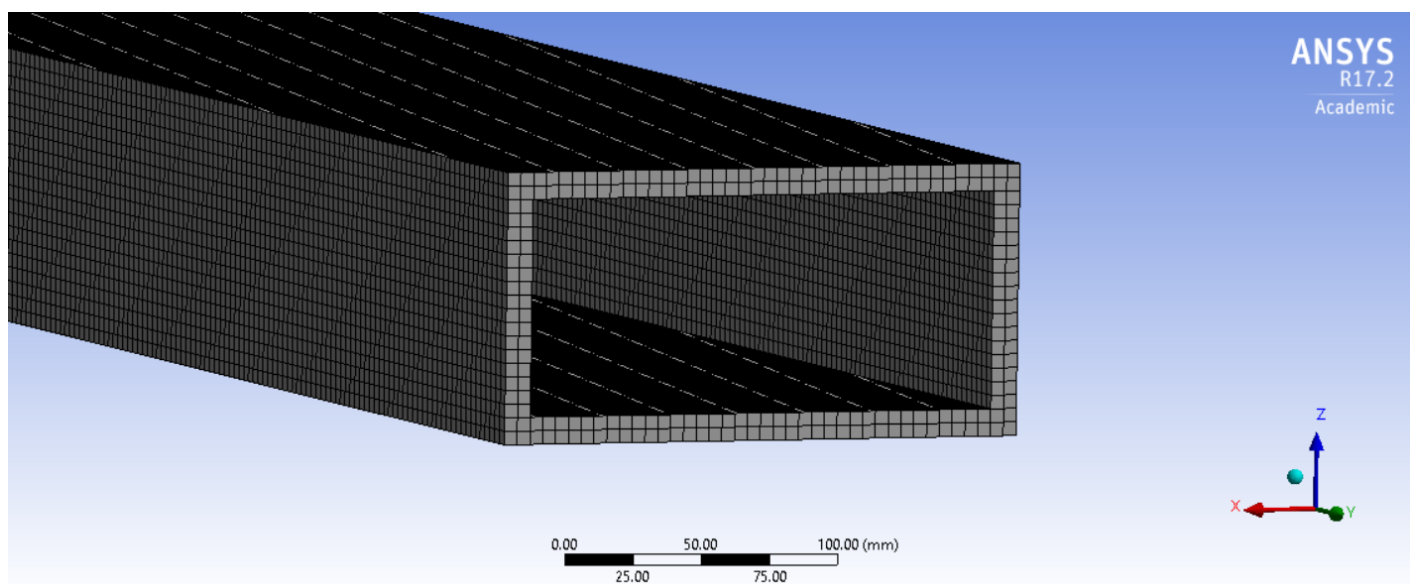
Hierna wordt weer de normaalspanning ter hoogte van de inklemming berekend. Deze kan worden berekend door het bi-moment op $x = 0$ in te voeren in [Vergelijking 4] samen met de extreme waarde van de welvingsfunctie voor de rechthoekige kokerdoorsnede die te vinden is bij parameters.

Hier komt een normaalspanning uit van $\sigma_{xx} = -2253,5$ N/mm².

Alle berekeningen zijn gemaakt in Maple. De Maple sheets zijn te vinden in bijlage 3.

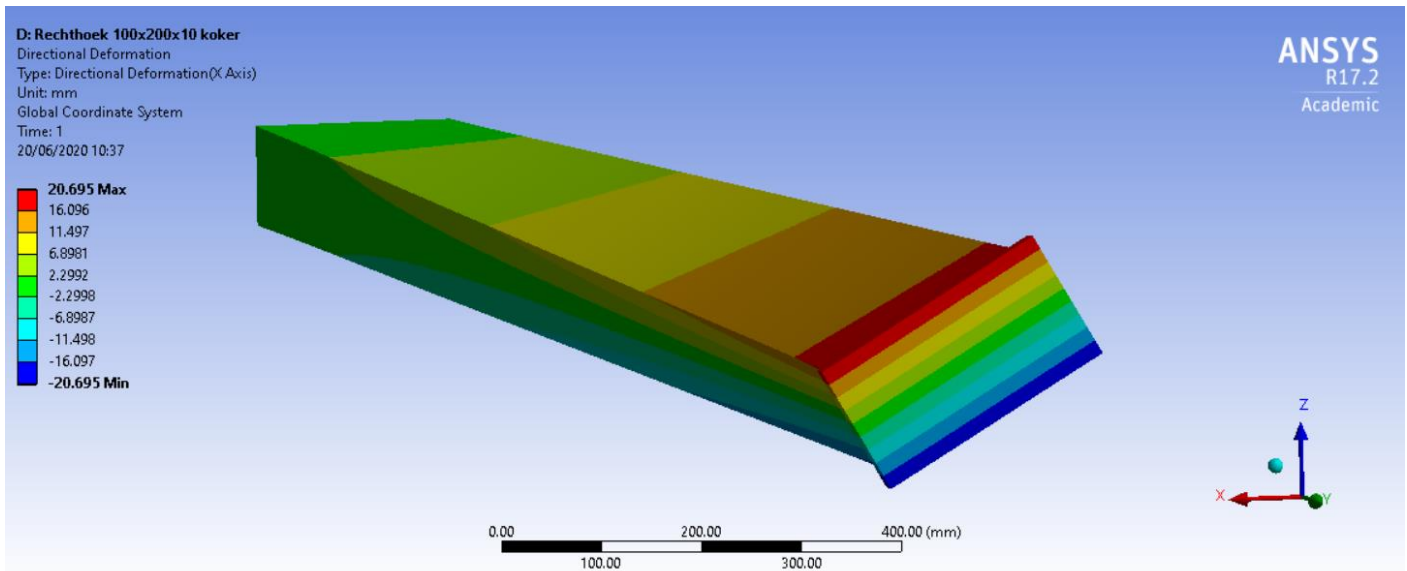
Resultaten eindige-elementen methode

De elementen in de gebruikte mesh voor dit model hebben een grootte van 5 mm. De mesh is te zien in figuur 10.

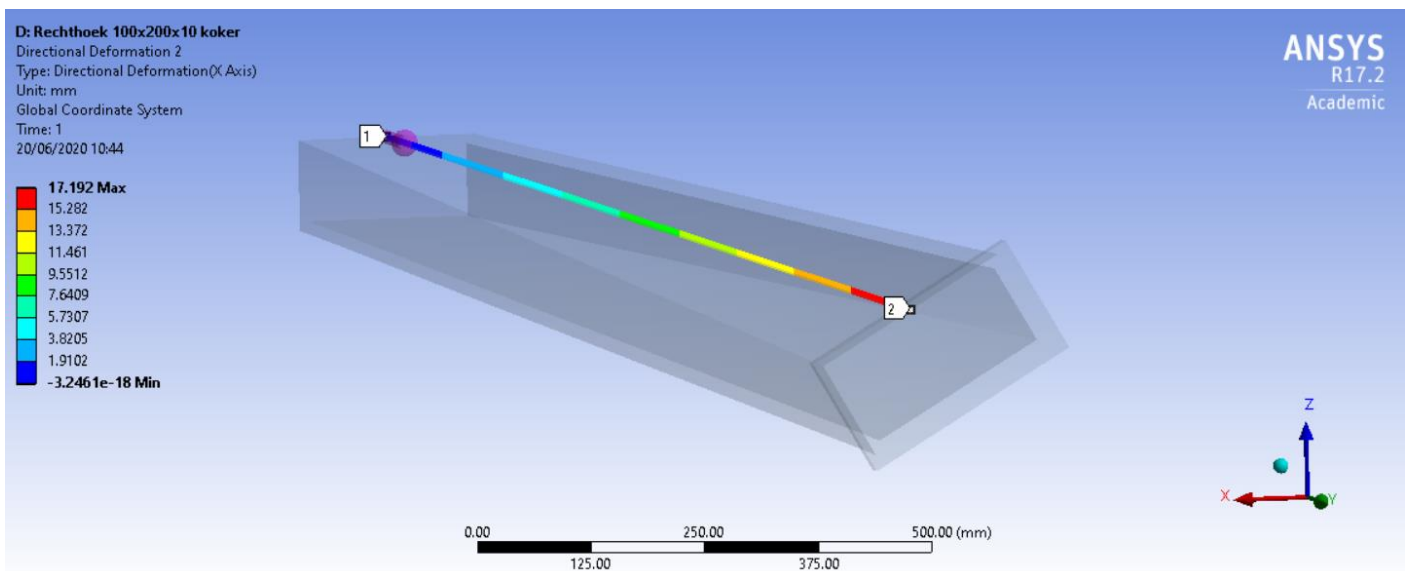


Figuur 10: 3D Zicht van de gebruikte mesh in de EEM (Rechthoekige kokerdoorsnede)

Het vervormde model waarmee de extreme horizontale verplaatsing wordt berekend is te zien in figuur 11. In de figuur is ook te zien dat op het vrije uiteinde van de ligger een plaat is bevestigd. Deze plaat is nodig om het wringende moment op de juiste manier op de ligger te laten werken. Ook is te zien dat de maximale horizontale verplaatsing een waarde van 20,695 mm heeft, deze waarde is echter gevestigd in de plaat. De maximale verplaatsing in alleen de ligger is te zien in figuur 12. Deze heeft een waarde van 17,192 mm.

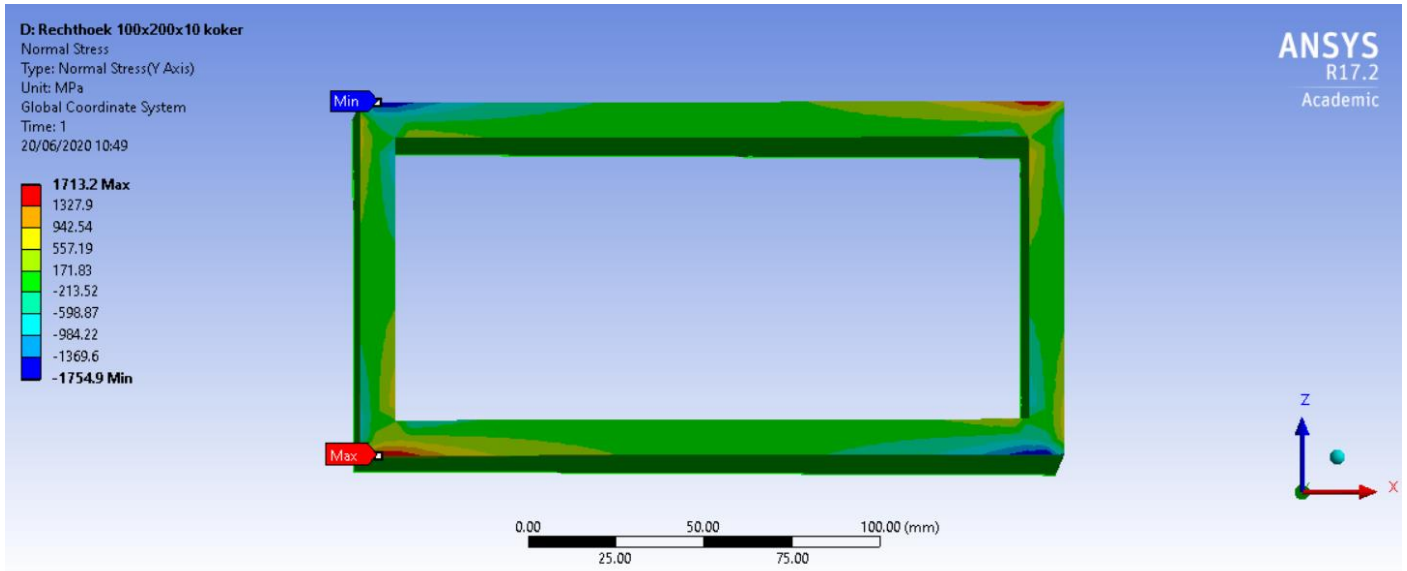


Figuur 11: Horizontale verplaatsing in de ligger volgens de EEM



Figuur 12: Horizontale verplaatsing aan de bovenkant van de ligger volgens de EEM (eindplaat niet meegenomen)

De extreme waarde van de axiale normaalspanning die hier gevonden wordt is $\sigma_{xx} = -1754,9 \text{ N/mm}^2$. In figuur 13 is de locatie van deze waarde aangeven met het 'min' vinkje. Deze waarde wordt gevonden ter hoogte van de inklemming op $x = 0$.



Figuur 13: Axiale normaalspanning in ligger volgens de EEM

Nauwkeurigheid verplaatsing

Voor de rechthoekige kokerdoorsnede berekenen we de nauwkeurigheid ook op de manier zoals bij het hoofdstuk 2 Methode is beschreven.

De waarde voor de nauwkeurigheid ter plaatse van het vrije uiteinde van de ligger ($x = 2540$) is daarna als volgt berekend:

$$UC_u = \frac{\text{horizontale verplaatsing Vlasov}}{\text{horizontale verplaatsing EEM}} = \frac{17,834 \text{ mm}}{17,192 \text{ mm}} = 1,037$$

Hier overschat de Vlasov theorie de horizontale verplaatsing dus met 3,7%.

Nauwkeurigheid normaalspanning

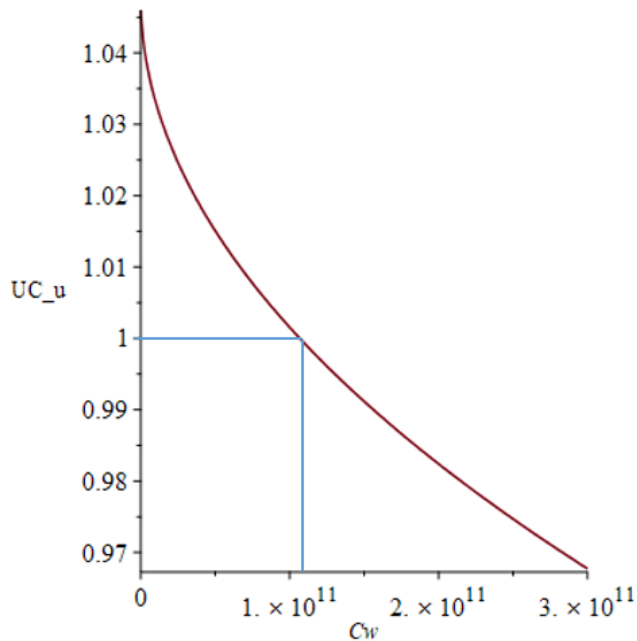
De nauwkeurigheid op $x = 0$ wordt als volgt berekend:

$$UC_\sigma = \frac{\text{Normaalspanning Vlasov}}{\text{Normaalspanning EEM}} = \left| \frac{-2253,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{-1754,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right| = 1,284$$

Hier volgt dus uit dat Vlasov methode de normaalspanning 28,4% overschat.

Nauwkeurigheid C_w

Er wordt hierna gekeken naar hoe de welvingsconstante gewijzigd moet worden om een nauwkeurigheid van 1 te krijgen. Dit wordt alleen gedaan voor het hiervoor bepaalde nauwkeurige deel van de ligger. In figuur 14 is een grafiek te zien waarin voor verschillende waarden van C_w de nauwkeurigheid van de verplaatsing berekend wordt. Uit de Maple berekeningen komt een waarde van $C_w = 1,068 * 10^{11} \text{ mm}^6$ uit waarbij de nauwkeurigheid 1 is.



Figuur 14: Nauwkeurigheidscures verplaatsing

Conclusie rechthoekige kokerdoorsnede

Voor de rechthoekige kokerdoorsnede is een overzicht van de resultaten te vinden in tabel 3. Met een kleine foutmarge van 3,7% voor de verplaatsing kan geconcludeerd worden dat de nauwkeurigheid van de methode acceptabel is. Voor normaalspanning kan hetzelfde gezegd worden over de nauwkeurigheid als bij de rechthoekige massieve doorsnede. De foutmarge is namelijk groter dan bij de verplaatsing, maar dat komt omdat de normaalspanning veel gevoeliger is voor de grootte van de mesh. Een foutmarge van 28,4% is daarom acceptabel.

	Verplaatsing (u)	Normaalspanning (σ_{xx})
Vlasov	17,834 mm	-2253,5 N/mm ²
Ansys (EEM)	17,192 mm	-1754,9 N/mm ²
UC	1,037	1,284
Foutmarge	3,7%	28,4%
Nauwkeurige C_w	$1,068 \cdot 10^{11} \text{ mm}^6$	-

Tabel 3: Overzicht van de resultaten voor de rechthoekige kokerdoorsnede

Voor de nauwkeurigheid van de C_w is in dit geval wel een resultaat uitgekomen. Bij een C_w van $1,068 \cdot 10^{11} \text{ mm}^6$ heeft de verplaatsing een foutmarge van 0%. Deze C_w is echter ongeveer 20 maal zo groot als de door SCIA Engineering berekende C_w voor deze doorsnede. In figuur 14 is te zien dat zelfs voor een C_w van 0 een redelijk goede UC uitkomt, dus de waarde van C_w heeft weinig invloed in de berekening van de verplaatsing. Hierdoor kan weer gezegd worden dat de Vlasov methode nauwkeurig is ondanks een de C_w in plaats van dankzij de C_w .

4.2 Ronde kokerdoorsnede

Parameters

De laatste doorsnede die op nauwkeurigheid getest zal worden is de ronde kokerdoorsnede. In deze test wordt een doorsnede met een diameter (d) van 100 mm gebruikt. Dikte van de wanden (t_f) is 10 mm. Daarbij zullen verdere afmetingen en de materiaaleigenschappen uit 1.4 gebruikt worden. Uit het SCIA Engineering model volgen de onderstaande benodigde resultaten:

$$d = 100 \text{ mm}$$

$$t_f = 10 \text{ mm}$$

$$I_w = 0.8506 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$C_w = 0$$

$$\psi = 0$$

Dat de welvingsconstante en de extreme waarde van de welvingsfunctie beide 0 zijn is een bekende eigenschap van ronde doorsnedes.

Berekeningen Vlasov methode

Zoals hierboven vermeld hebben zowel de welvingsconstante als de extreme waarde van de welvingsfunctie een waarde van 0. Dit komt door de ronde vorm van de doorsnede. Ronde doorsnedes laten namelijk geen welving toe. Een gevolg hiervan is dat er daarom ook geen bi-moment of normaalspanningen in de ligger zitten.

De vervorming kan daarentegen wel berekend en vergeleken worden. Met de waarden uit 1.4 en bovenstaande parameters kan eenzelfde differentiaalvergelijking opgesteld worden als bij de ronde massieve doorsnede, namelijk [Vergelijking 6].

Ook zijn de randvoorwaarden hetzelfde die nodig zijn om deze differentiaalvergelijking op te lossen. Namelijk:

$$\varphi(0) = 0$$

$$GI_w * \frac{d\varphi}{dx}(l) = T$$

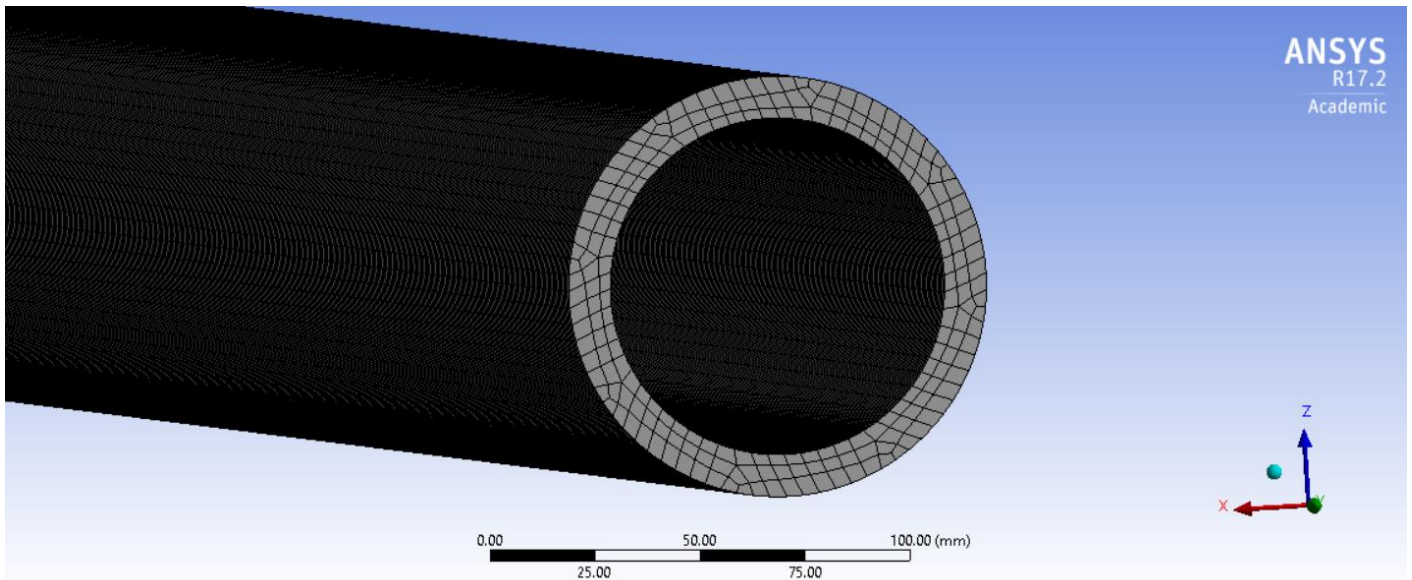
Als alle gegevens worden ingevuld in [Vergelijking 6] volgt een maximale hoekverdraaiing aan het vrije uiteinde van de ligger van $\varphi(2540) = 1,307 \text{ rad}$.

In een ronde doorsnede kan de maximale vervorming op de x-as berekend worden door middel van [Vergelijking 7]. De berekende hoekverdraaiing op $x = 2540$ geeft een maximale horizontale verplaatsing in de uiterste vezel van $u_x = 65,356 \text{ mm}$.

Alle berekeningen zijn gemaakt in Maple. De Maple sheets zijn te vinden in bijlage 2.

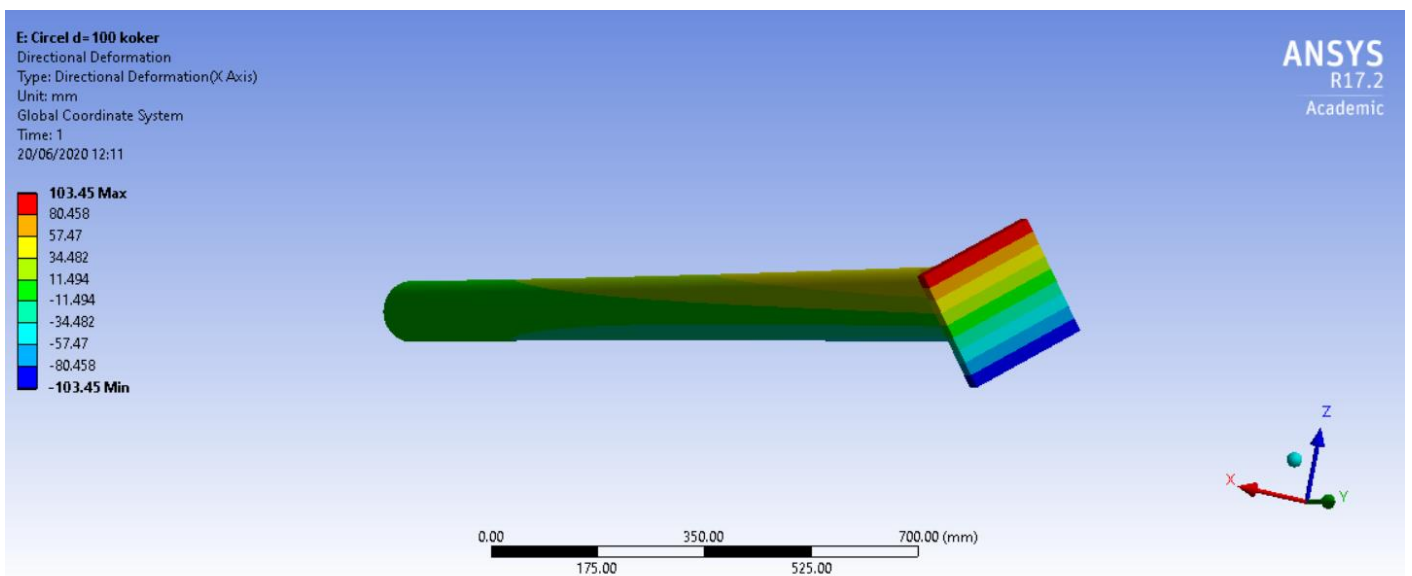
Resultaten eindige-elementen methode

De elementen in de gebruikte mesh voor dit model hebben een grootte van 5 mm. De mesh is te zien in figuur 15.

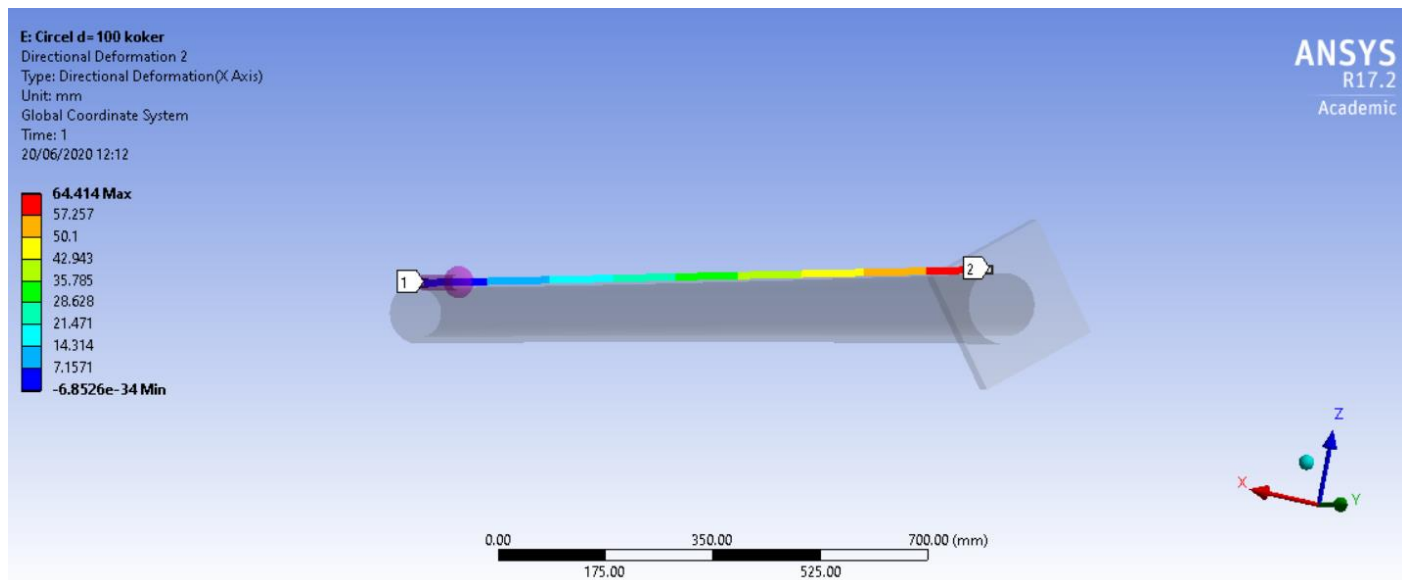


Figuur 15: 3D Zicht van de gebruikte mesh in de EEM (Ronde kokerdoorsnede)

Het vervormde model waarmee de extreme horizontale verplaatsing wordt berekend is te zien in figuur 16. Ook hier is aan het vrije uiteinde een plaat bevestigd om het wringend moment op de juiste manier aan te kunnen brengen. In figuur 17 is de verplaatsing te vinden van de kokerdoorsnede. Hierin is te vinden dat de extreme waarde van de horizontale verplaatsing 64,414 mm is. Deze bevindt zich aan het vrije uiteinde van de ligger.



Figuur 16: Horizontale verplaatsing in de ligger volgens de EEM



Figuur 17: Horizontale verplaatsing aan de bovenkant van de ligger (zonder plaat)

Nauwkeurigheid

Ook voor de ronde kokerdoorsnede doen we de vergelijking op de manier zoals bij het hoofdstuk 2 Methode is beschreven. De nauwkeurigheid van de normaalspanning kan alleen niet bepaald worden gezien er geen normaalspanningen in de ligger zijn.

De nauwkeurigheid van de verplaatsing in de doorsnede is als volgt:

$$UC_u = \frac{\text{horizontale verplaatsing Vlasov}}{\text{horizontale verplaatsing EEM}} = \frac{65,356 \text{ mm}}{64,414 \text{ mm}} = 1,015$$

Hier zit dus een foutmarge in van 1,5%.

De nauwkeurigheid van de welvingsconstante is hier niet relevant aangezien deze 0 is.

Conclusie ronde kokerdoorsnede

In tabel 4 is een overzicht van de resultaten voor de ronde kokerdoorsnede te vinden. Ook in dit geval is te concluderen dat het berekenen van de horizontale verplaatsing met de methode van Vlasov nauwkeurig is met slechts een kleine foutmarge van 1,5%.

	Verplaatsing (u)
Vlasov	65,356 mm
Ansyes (EEM)	64,414 mm
UC	1,015
Foutmarge	1,5%

Tabel 4: Overzicht van de resultaten van de ronde kokerdoorsnede

5. Resultaten overzicht

Omdat in de vorige hoofdstukken veel berekeningen gedaan zijn is dit hoofdstuk ervoor om een duidelijk overzicht van de resultaten te geven.

	Verplaatsing Vlasov (mm)	Verplaatsing EEM (mm)	Nauwkeurigheid (-)	Foutmarge (%)
Rechthoekige massieve doorsnede	8,064	8,064	1,00	0
Ronde massieve doorsnede	37,932	38,008	0,998	0,2
Rechthoekige kokerdoorsnede	17,834	17,192	1,037	3,7
Ronde kokerdoorsnede	65,356	64,414	1,015	1,5

Tabel 5: Overzicht horizontale verplaatsingen

	Normaalspanning Vlasov (N/mm ²)	Normaalspanning EEM (N/mm ²)	Nauwkeurigheid (-)	Foutmarge (%)
Rechthoekige massieve doorsnede	-999,2	1288,0	0,776	22,4
Ronde massieve doorsnede	-	-	-	-
Rechthoekige kokerdoorsnede	-2253,5	-1754,9	1,284	28,4
Ronde kokerdoorsnede	-	-	-	-

Tabel 6: Overzicht normaalspanningen

6. Conclusies

Het doel van onderzoek was om te bepalen of de wringingsvervorming en de spanningen van massieve doorsnedes en kokerdoorsnedes bij niet uniforme welving te bepalen waren door de methode van Vlasov te gebruiken. Dat is gedaan door de resultaten van de Vlasov wringingsvergelijking te vergelijken met de resultaten van een eindige elementen methode voor verschillende doorsnedes. Op basis van de nauwkeurigheid kunnen er conclusies getrokken worden. De resultaten van de berekeningen voor de horizontale verplaatsing zijn hierboven te vinden in tabel 5 en de resultaten van de normaalspanning in tabel 6.

De foutmarges van de verplaatsing zijn acceptabel te noemen als ze kleiner zijn dan ongeveer 10%. Met een maximale foutmarge van slechts 3,7% bij de rechthoekige kokerdoorsnede kan geconcludeerd worden dat voor de verplaatsing de methode van Vlasov nauwkeurig is. Deze methode zou dus gebruikt kunnen worden om in vergelijkbare gevallen de vervorming te kunnen berekenen.

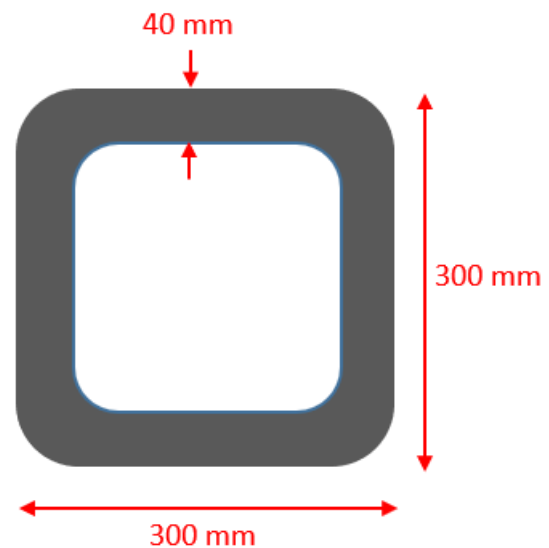
Bij de axiale normaalspanningen zijn de foutmarges wat groter. Dit is echter niet ongebruikelijk aangezien deze erg beïnvloedbaar zijn door de grootte van de gebruikte mesh in de EEM. Daarnaast zullen in een profiel in de werkelijkheid andere spanningen zoals bijvoorbeeld walsspanningen een veel grotere rol betekenen, dus is in dit geval een foutmarge kleiner dan 30% als acceptabel geaccepteerd. Dus in het geval van de normaalspanningen kan ook geconcludeerd worden dat de Vlasov methode gebruikt kan worden om in vergelijkbare gevallen de normaalspanningen te berekenen. Ondanks de positieve resultaten kan echter nog niet gezegd worden dat alle massieve en kokerdoorsnedes nauwkeurig berekend kunnen worden

7. Toepassingsvoorbeeld

Om dit onderzoek naar de praktijk te vertalen wordt in dit hoofdstuk een toepassingsvoorbeeld gegeven. Als voorbeeld is gekozen voor een wegwijzer aan de Schoemakerstraat in Delft. Het bord is gevestigd aan een horizontale balk die daarna weer bevestigd is aan een kolom met een rechthoekige kokerdoorsnede. De kolom is op een betonnen fundering gebout en is dus volledig ingeklemd en welving is verhinderd. Alle afmetingen zijn geschat en te vinden in figuur 18 en figuur 19. De windbelasting op het bord veroorzaakt een wringend moment in de kolom.



Figuur 18: Wegwijzer met afmetingen



Figuur 19: Doorsnede kolom wegwijzer

De kolom is van staal en zowel de elasticiteitsmodulus als de glijdingsmodulus worden geschat en hebben een waarde van:

$$E = 200000 \text{ MPa}$$

$$G = 76923 \text{ MPa}$$

Als belasting wordt slechts de windbelasting op het bord meegenomen. Windbelasting op de kolom, windbelasting op de balk en het eigen gewicht worden in deze berekening verwaarloosd. De windbelasting tijdens een hevige storm heeft een waarde van $1,0 \text{ kN/m}^2$. De oppervlakte van het bord is $1,5 \cdot 0,8 = 1,2 \text{ m}^2$. Dit geeft een kracht van $1,2 \cdot 1,0 = 1,2 \text{ kN}$ en deze vind plaats in het midden van het bord. Door dit te vermenigvuldigen met de afstand tot de kolom komt hier een wringend moment (T) uit van $2,4 \text{ kNm}$.

Met SCIA Engineering zijn hierna weer de welvingsconstante, het wringtraagheidsmoment en de extreme waarde van de welvingsfunctie van de doorsnede bepaald.

$$C_w = 2,9787 * 10^{10} \text{ mm}^6$$

$$I_w = 7,4410 * 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\psi = 2590,5 \text{ mm}^2$$

Nu kan de hoekverdraaiing ter hoogte van de balk berekend worden met de Vlasov vergelijking. Er wordt alleen gekeken naar het onderste gedeelte van de kolom (tot aan de hoogte van de balk), omdat na de locatie waar het wringend aangrijpt de hoekverdraaiing niet meer verandert. Deze berekening is gedaan in Maple en is te vinden in bijlage 5.

De uitkomst is dat in de kolom een hoekverdraaiing van $0,1254 * 10^{-3}$ rad ontstaat ter hoogte van de balk. Met deze hoekverdraaiing kan de verplaatsing van het bord berekend worden. Het uiteinde van het bord zit op 2,75 m van de kolom dus de verplaatsing als gevolg van een storm van dit uiteinde is dan $2,75 * 0,1254 * 10^{-3} = 0,345 * 10^{-3}$ m oftewel 0,345 mm.

Na de verplaatsing is de normaalspanning als gevolg van de storm in de oplegging op de grond berekend. Deze berekening is ook gemaakt in Maple en is te vinden in bijlage 5.

De uitkomst hiervan is dat in de oplegging van de wegwijzer een normaalspanning als gevolg van de storm ontstaat van 2,13 N.

Zoals in het onderzoek beschreven kunnen deze waardes een kleine afwijking hebben maar over het algemeen zou met deze waardes gerekend kunnen worden.

Bij een hevige storm zal de wringing als gevolg van de windbelasting op het bord dus niet een heel groot aandeel hebben in zowel de verplaatsing als de normaalspanning in de inklemming.

Literatuur

[1] Hoogenboom, P.C.J. (2019). *"Aantekeningen over wringing"*, 5^{de} verbeterde druk

[2] Barré de Saint-Venant, A.J.C. (1856) *"Mémoire sur la torsion des prismes"*, Mémoires présentés par divers savants a L'Académie des Sciences de L'Institut impérial de France et imprimés par son ordre: Sciences, Mathématiques et Physiques, Volume 14, pp. 233-560

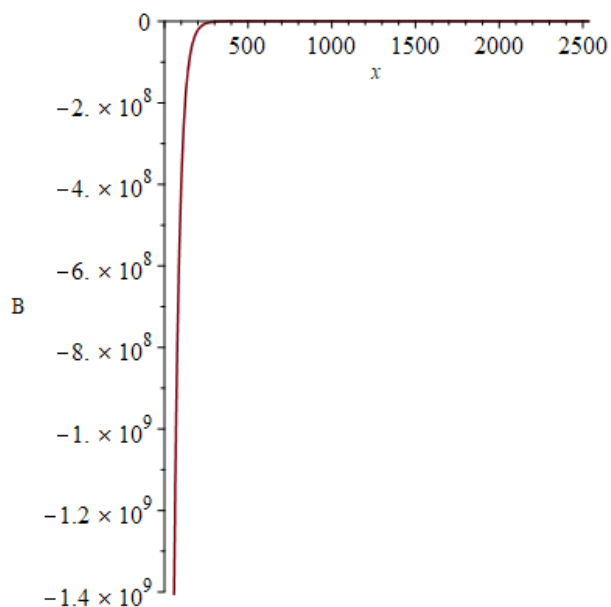
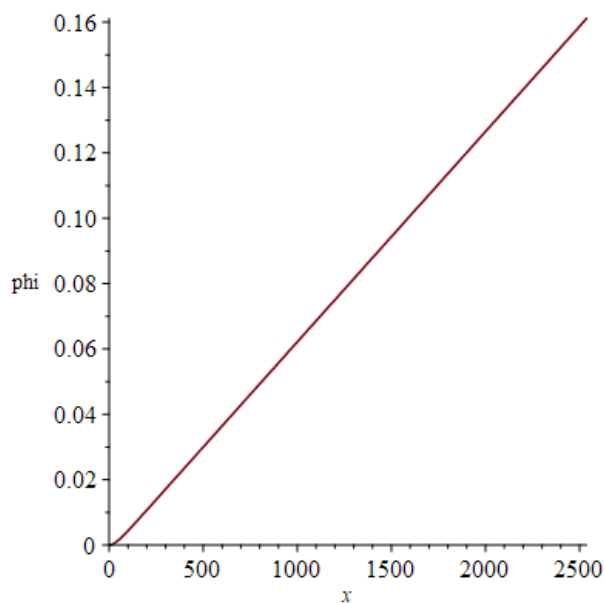
Bijlagen

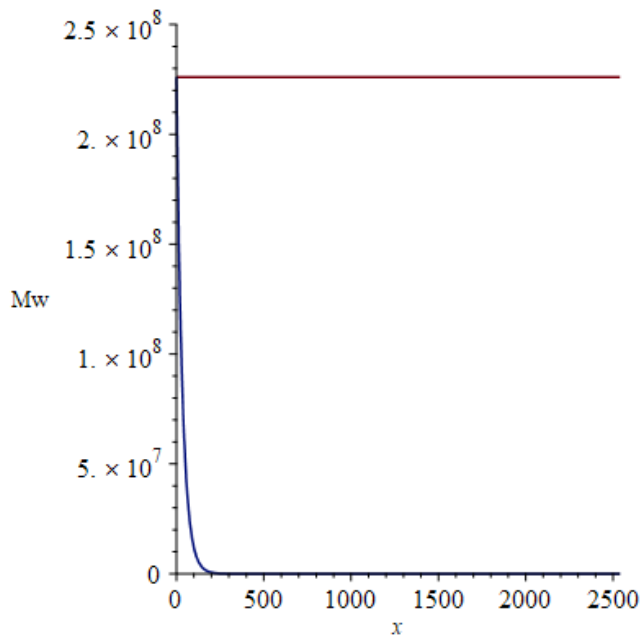
Bijlage 1: Berekeningen van een rechthoekige massieve doorsnede in Maple

```

> Massieve rechthoek: h * b = 100x200
> restart :
> E := 200000 : nu := 0.3 : G :=  $\frac{E}{2(1 + \nu)}$  : Hv := 4.5653E7 : Cw := 2.0066E10 : psi := -2624.4 : h := 100 : b := 200 :
>
> l := 2540 : T := 2.26E8 :
> ECw := E * Cw : GHv := G * Hv :
> mx := 0 :
> with(DEtools) :
> Vlasov := ECw * diff(phi(x), x, x, x, x) - GHv * diff(phi(x), x, x) = mx;
Vlasov :=  $4.013200000 \cdot 10^{15} \frac{d^4}{dx^4} \phi(x) - 3.511769231 \cdot 10^{12} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0$ 
> bound_con := phi(0) = 0, D(phi)(0) = 0, GHv * D(phi)(l) - ECw * (D@@3)(phi)(l) = T, (D@@2)(phi)(l) = 0;
bound_con :=  $\phi(0) = 0, D(\phi)(0) = 0, 3.511769231 \cdot 10^{12} D(\phi)(2540) - 4.013200000 \cdot 10^{15} D^{(3)}(\phi)(2540) = 2.26 \cdot 10^8, D^{(2)}(\phi)(2540) = 0$ 
> Sol := evalf(dsolve({Vlasov, bound_con}, {phi(x)}));
Sol :=  $\phi(x) = -0.002175529050 + 0.00006435502595 x - 1.187898478 \cdot 10^{-68} e^{0.02958132227 x} + 0.002175529050 e^{-0.02958132227 x}$ 
> assign(Sol); phi := phi(x)
phi :=  $-0.002175529050 + 0.00006435502595 x - 1.187898478 \cdot 10^{-68} e^{0.02958132227 x} + 0.002175529050 e^{-0.02958132227 x}$ 
> B := -ECw * diff(phi, x, x);
B :=  $4.171625324 \cdot 10^{-56} e^{0.02958132227 x} - 7.639955977 \cdot 10^9 e^{-0.02958132227 x}$ 
> Mv1 := GHv * diff(phi, x);
Mv1 :=  $2.260000000 \cdot 10^8 - 1.234021931 \cdot 10^{-57} e^{0.02958132227 x} - 2.260000000 \cdot 10^8 e^{-0.02958132227 x}$ 
> Mv2 := diff(B, x);
Mv2 :=  $1.234021931 \cdot 10^{-57} e^{0.02958132227 x} + 2.259999999 \cdot 10^8 e^{-0.02958132227 x}$ 
> mx := Mv1 + Mv2 :
> plot(phi, x = 0 .. 2540); plot(B, x = 0 .. l); plot({mx, Mv2}, x = 0 .. l);

```





> $\sigma_{max} := -\frac{B}{C_w} \cdot \psi$; $\sigma_{max_ansys} := -1288$;

> $x := l$; $\phi_{max_l} := \phi$; $u_{max_l} := \phi_{max_l} \cdot 0.5 \cdot h$; $u_{max_ansys} := 8.0639$;

$\phi_{max_l} := 0.1612862368$

$u_{max_l} := 8.064311840$

$u_{max_ansys} := 8.0639$

> $x := 0$; $\sigma_{max_0} := \sigma_{max}$; $\sigma_{max_ansys} := -1288$

$\sigma_{max_0} := -999.2176053$

$\sigma_{max_ansys} := -1288$

> $UC_u := \frac{u_{max_l}}{u_{max_ansys}}$; $UC_{\sigma} := \frac{\sigma_{max_0}}{\sigma_{max_ansys}}$;

$UC_u := 1.000051072$

$UC_{\sigma} := 0.7757900662$

Bijlage 2: Berekeningen van een ronde massieve doorsnede in Maple

> Massieve cirkel: D = 100

=
> restart:

> $E := 200000 : \nu := 0.3 : G := \frac{E}{2(1+\nu)} : I_w := 9.8368E6 : C_w := 0 : \text{psi} := 0 : d := 100 : r := \frac{d}{2} :$

=
> $l := 2540 : T := 2.26E8 :$

=
> $EC_w := E \cdot C_w : GH_w := G \cdot I_w :$

=
> $mx := 0 :$

=
> with(DEtools) :

> $Vlasov := EC_w * \text{diff}(\text{phi}(x), x, x, x, x) - GH_w * \text{diff}(\text{phi}(x), x, x) = mx;$

$$Vlasov := -7.566769230 \cdot 10^{11} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0$$

=
> $\text{bound_con} := \text{phi}(0) = 0, GH_w * D(\text{phi})(l) = T;$

$$\text{bound_con} := \phi(0) = 0, 7.566769230 \cdot 10^{11} D(\phi)(2540) = 2.26 \cdot 10^8$$

=
> $\text{Sol} := \text{evalf}(\text{dsolve}(\{Vlasov, \text{bound_con}\}, \{\text{phi}(x)\}));$

$$\text{Sol} := \phi(x) = 0.0002986743657 x$$

=
> $\text{assign}(\text{Sol}); \text{phi} := \text{phi}(x)$

$$\phi := 0.0002986743657 x$$

=
>

=
> $B := -EC_w * \text{diff}(\text{phi}, x, x);$

$$B := 0$$

=
> $Mw1 := GH_w * \text{diff}(\text{phi}, x);$

$$Mw1 := 2.260000000 \cdot 10^8$$

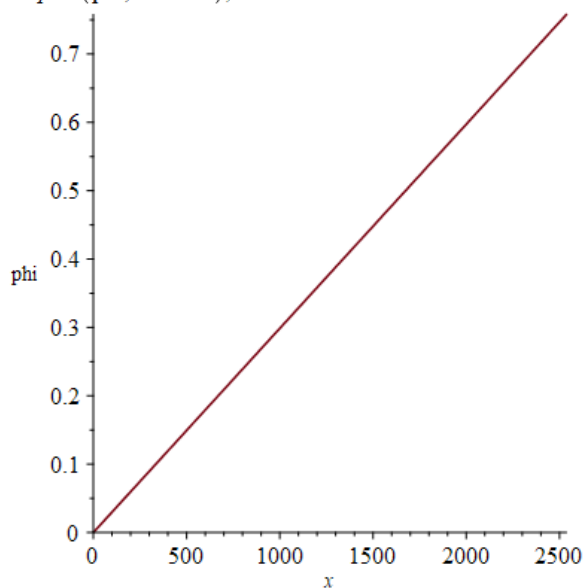
=
> $Mw2 := \text{diff}(B, x);$

$$Mw2 := 0$$

=
> $mx := Mw1 + Mw2;$

$$mx := 2.260000000 \cdot 10^8$$

=
> $\text{plot}(\text{phi}, x = 0 .. l);$



```

-
> x := l : phi_max_l := phi; ux_max_l := phi_max_l·r; ux_max_ansys := 38.008;
                                     phi_max_l := 0.7586328889
                                     ux_max_l := 37.93164444
                                     ux_max_ansys := 38.008
=
> x := 0 : sigma_max_0 := 0;
                                     sigma_max_0 := 0
=
> UC_u :=  $\frac{ux\_max\_l}{ux\_max\_ansys}$ ;
                                     UC_u := 0.9979910661
=

```

Bijlage 3: Berekeningen van een rechthoekige kokerdoorsnede in Maple

> **Kokervormige rechthoek: h * b = 100x200x10**

> restart :

> $E := 200000$: $\nu := 0.3$: $G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$: $H_V := 2.0714E7$: $C_W := 5.098E9$: $\psi := -2009.5$: $h := 100$: $b := 200$: $t := 10$:

> $l := 2540$: $T := 2.26E8$:

> $EC_W := E \cdot C_W$: $GH_V := G \cdot H_V$:

> $mx := 0$:

> with(DEtools) :

> $Vlasov := EC_W \cdot diff(\phi(x), x, x, x, x) - GH_V \cdot diff(\phi(x), x, x) = mx$;

$$Vlasov := 1.019600000 \cdot 10^{15} \frac{d^4}{dx^4} \phi(x) - 1.593384615 \cdot 10^{12} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0$$

> $bound_con := \phi(0) = 0, D(\phi)(0) = 0, GH_V \cdot D(\phi)(l) - EC_W \cdot (D@@@3)(\phi)(l) = T, (D@@@2)(\phi)(l) = 0$;

$$bound_con := \phi(0) = 0, D(\phi)(0) = 0, 1.593384615 \cdot 10^{12} D(\phi)(2540) - 1.019600000 \cdot 10^{15} D^{(3)}(\phi)(2540) = 2.26 \cdot 10^8, D^{(2)}(\phi)(2540) = 0$$

> $Sol := evalf(dsolve(\{Vlasov, bound_con\}, \{\phi(x)\}))$;

$$Sol := \phi(x) = -0.003587917292 + 0.0001418364392 x - 2.184709317 \cdot 10^{-90} e^{0.03953169139 x} + 0.003587917292 e^{-0.03953169139 x}$$

> assign(Sol); $\phi := \phi(x)$

$$\phi := -0.003587917292 + 0.0001418364392 x - 2.184709317 \cdot 10^{-90} e^{0.03953169139 x} + 0.003587917292 e^{-0.03953169139 x}$$

> $B := -EC_W \cdot diff(\phi, x, x)$;

$$B := 3.481082214 \cdot 10^{-78} e^{0.03953169139 x} - 5.716932211 \cdot 10^9 e^{-0.03953169139 x}$$

> $M_{v1} := GH_V \cdot diff(\phi, x)$;

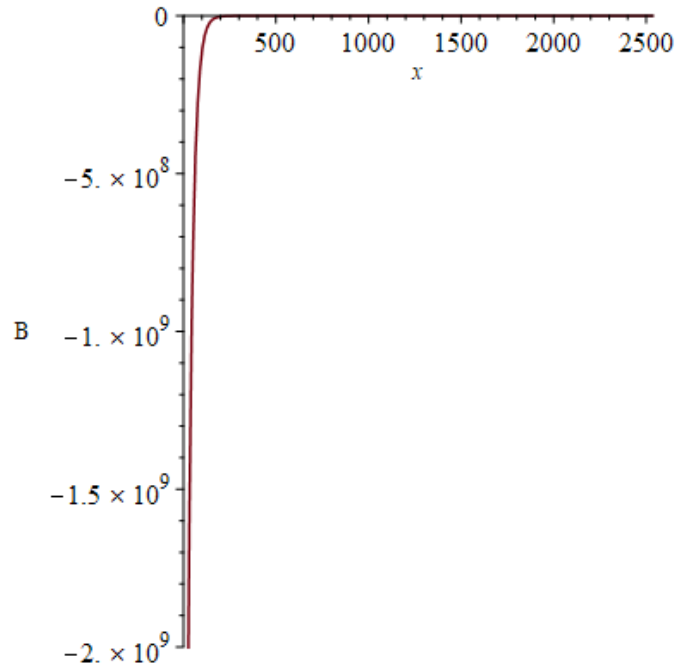
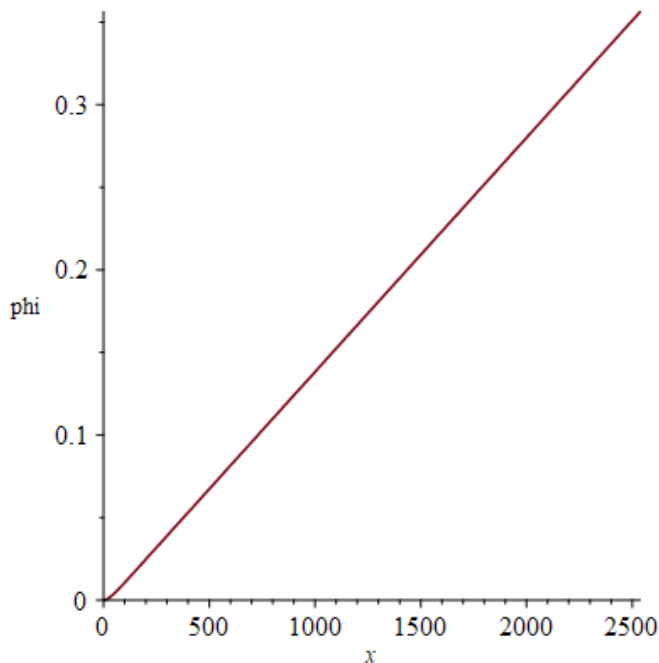
$$M_{v1} := 2.260000001 \cdot 10^8 - 1.376130678 \cdot 10^{-79} e^{0.03953169139 x} - 2.259999999 \cdot 10^8 e^{-0.03953169139 x}$$

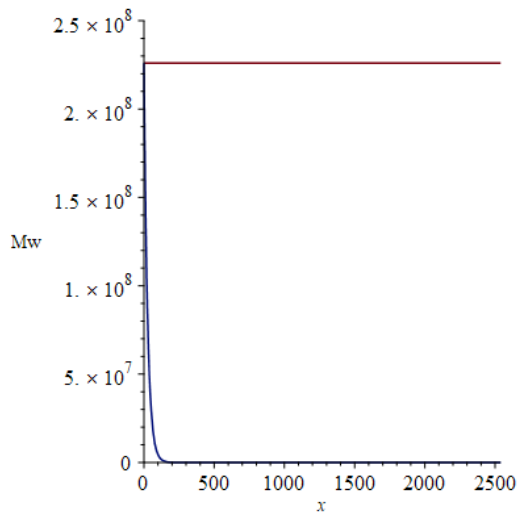
> $M_{v2} := diff(B, x)$;

$$M_{v2} := 1.376130678 \cdot 10^{-79} e^{0.03953169139 x} + 2.259999999 \cdot 10^8 e^{-0.03953169139 x}$$

> $mx := M_{v1} + M_{v2}$:

> $plot(\phi, x = 0 .. l); plot(B, x = 0 .. l); plot(\{mx, M_{v2}\}, x = 0 .. l)$;





```
> x := l : phi_max_l := phi; ux_max_l := phi_max_l * 0.5 h; ux_max_ansys_l := 17.192;
```

```
phi_max_l := 0.3566766383
ux_max_l := 17.83383192
ux_max_ansys_l := 17.192
```

```
> x := 0 : sigma_max_0 := - B / Cw * psi; sigma_max_ansys_0 := -1754.9;
```

```
sigma_max_0 := -2253.467101
sigma_max_ansys_0 := -1754.9
```

```
>
```

```
> UC_u_l := ux_max_l / ux_max_ansys_l; UC_sigma_0 := abs( sigma_max_0 / sigma_max_ansys_0 );
```

```
UC_u_l := 1.037333174
UC_sigma_0 := 1.284100006
```

Bijlage 4: Berekeningen van een ronde kokerdoorsnede in Maple

> **Kokervormige cirkel: D = 100, t=20**

> restart :

> $E := 200000$: $\nu := 0.3$: $G := \frac{E}{2(1+\nu)}$: $H_v := 5.7091E6$: $C_v := 0$: $\psi := 0$: $d := 100$: $r := \frac{d}{2}$:

> $l := 2540$: $T := 2.26E8$:

> $EC_v := E \cdot C_v$: $GH_v := G \cdot H_v$:

> $mx := 0$:

> with(DEtools) :

> $Vlasov := EC_v * diff(phi(x), x, x, x, x) - GH_v * diff(phi(x), x, x) = mx$;

$$Vlasov := -4.391615384 \cdot 10^{11} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0$$

> $bound_con := phi(0) = 0, GH_v * D(phi)(l) = T$;

$$bound_con := \phi(0) = 0, 4.391615384 \cdot 10^{11} D(\phi)(2540) = 2.26 \cdot 10^8$$

> $Sol := evalf(dsolve(\{Vlasov, bound_con\}, \{phi(x)\}))$;

$$Sol := \phi(x) = 0.0005146170150 x$$

> assign(Sol); phi := phi(x)

$$\phi := 0.0005146170150 x$$

>

> $B := -EC_v * diff(phi, x, x)$;

$$B := 0$$

> $M_v1 := GH_v * diff(phi, x)$;

$$M_v1 := 2.260000000 \cdot 10^8$$

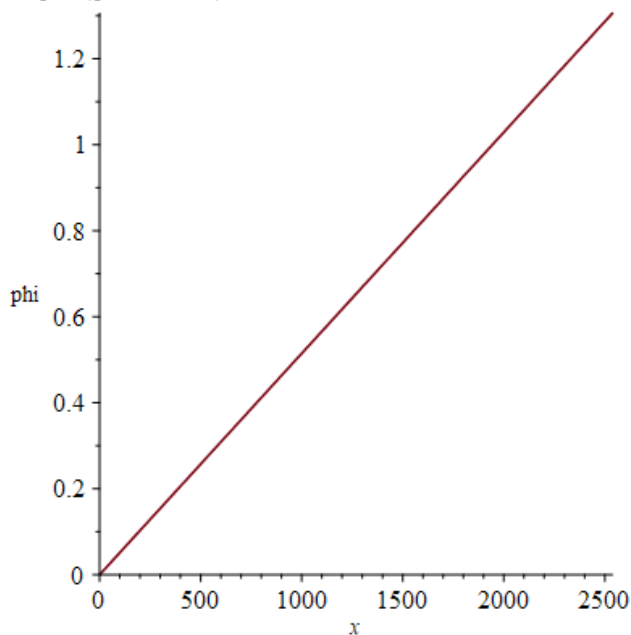
> $M_v2 := diff(B, x)$;

$$M_v2 := 0$$

> $mx := M_v1 + M_v2$;

$$mx := 2.260000000 \cdot 10^8$$

> plot(phi, x = 0 .. l);



```

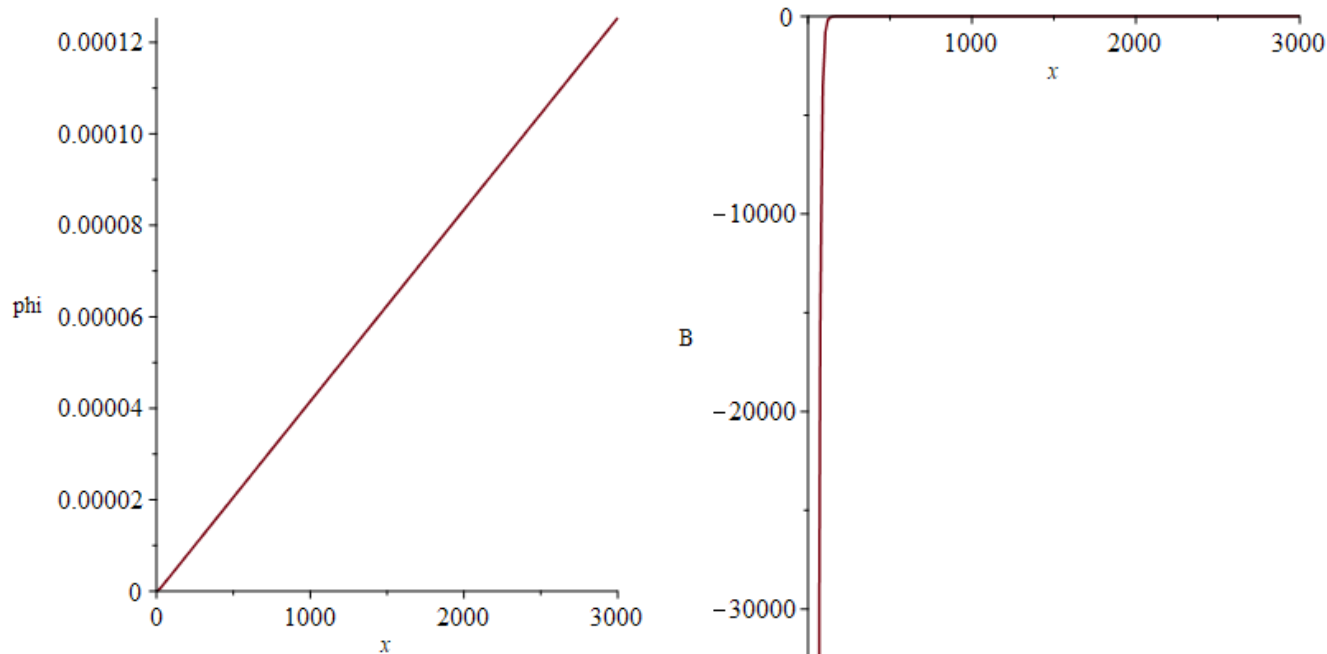
> x := l : phi_max_l := phi; ux_max_l := phi_max_l·r; ux_max_ansys := 64.414;
                                     phi_max_l := 1.307127218
                                     ux_max_l := 65.35636090
                                     ux_max_ansys := 64.414
=
> x := 0 : sigma_max_0 := 0; sigma_max_ansys := 1.2191;
                                     sigma_max_0 := 0
                                     sigma_max_ansys := 1.2191
=
> UC_u :=  $\frac{ux\_max\_l}{ux\_max\_ansys}$ ;
                                     UC_u := 1.014629753
=
>

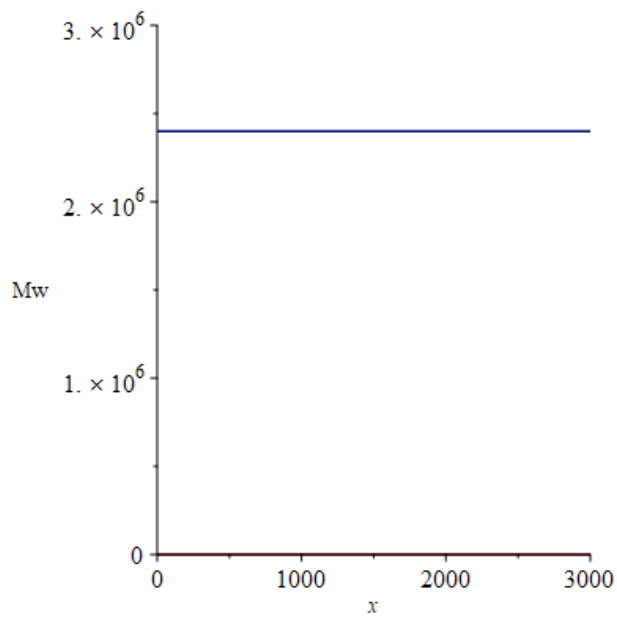
```

Bijlage 5: Berekeningen van het toepassingsvoorbeeld in Maple

> **Kokervormige rechthoek: $h * b = 300 \times 300 \times 40$**

```
> restart :
> E := 200000 : nu := 0.3 : G :=  $\frac{E}{2(1 + \nu)}$  : Hv := 7.4410E8 : Cv := 2.9787E10 : psi := 2590.5 : h := 300 : b := 300 : t = 40 :
> l := 3000 : T := 2.4E6 :
> ECv := E * Cv : GHv := G * Hv :
> mx := 0 :
> with(DEtools) :
> Vlasov := ECv * diff(phi(x), x, x, x, x) - GHv * diff(phi(x), x, x) = mx;
Vlasov :=  $5.957400000 \cdot 10^{15} \frac{d^4}{dx^4} \phi(x) - 5.723846154 \cdot 10^{13} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0$ 
> bound_con := phi(0) = 0, D(phi)(0) = 0, GHv * D(phi)(l) - ECv * (D@@3)(phi)(l) = T, (D@@2)(phi)(l) = 0;
bound_con :=  $\phi(0) = 0, D(\phi)(0) = 0, 5.723846154 \cdot 10^{13} D(\phi)(3000) - 5.957400000 \cdot 10^{15} D^{(3)}(\phi)(3000) = 2.4 \cdot 10^6, D^{(2)}(\phi)(3000) = 0$ 
> Sol := evalf(dsolve({Vlasov, bound_con}, {phi(x)}));
Sol :=  $\phi(x) = -4.277674099 \cdot 10^{-7} + 4.192984814 \cdot 10^{-8} x - 1.634591524 \cdot 10^{-262} e^{0.09802020252 x} + 4.277674098 \cdot 10^{-7} e^{-0.09802020252 x}$ 
> assign(Sol); phi := phi(x)
phi :=  $-4.277674099 \cdot 10^{-7} + 4.192984814 \cdot 10^{-8} x - 1.634591524 \cdot 10^{-262} e^{0.09802020252 x} + 4.277674098 \cdot 10^{-7} e^{-0.09802020252 x}$ 
>
> B := -ECv * diff(phi, x, x);
B :=  $9.356150400 \cdot 10^{-249} e^{0.09802020252 x} - 2.448474842 \cdot 10^7 e^{-0.09802020252 x}$ 
> Mv1 := GHv * diff(phi, x);
Mv1 :=  $2.400000000 \cdot 10^6 - 9.170917577 \cdot 10^{-250} e^{0.09802020252 x} - 2.400000000 \cdot 10^6 e^{-0.09802020252 x}$ 
> Mv2 := diff(B, x);
Mv2 :=  $9.170917570 \cdot 10^{-250} e^{0.09802020252 x} + 2.399999999 \cdot 10^6 e^{-0.09802020252 x}$ 
> Mv := Re(GHv * diff(phi, x) + diff(B, x)) :
> plot(phi, x = 0 .. l); plot(B, x = 0 .. l); plot({mx, Mv}, x = 0 .. l);
```





```
> x := l : phi := phi; u_bord := phi·2750;
```

$\phi := 0.0001253617770$

$u_{bord} := 0.3447448868$

```
> x := 0 : sigma_max_0 := -  $\frac{B}{C_w}$  · psi;
```

$\sigma_{max_0} := 2.129376600$