

Bachelor Eindproject

Sanders-Koiter Vergelijkingen

Beschrijving van het gedrag van schalen



S.G. Reith

4460200

Bachelor Civiele Techniek
Technische Universiteit Delft

15-06-2020

Eerste begeleider: Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom

Tweede begeleider: Ir. C. Kasbergen

Voorwoord

Voor u ligt mijn Bachelor Eindproject “De Sanders-Koiter vergelijkingen” voor de afronding van de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Dit rapport is geschreven ter voorbereiding op de master Structural Engineering..

Ik wil graag mijn twee begeleiders voor hun uitleg en inzet bedanken. Mijn eerste begeleider Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom heeft mij dit onderwerp aangereikt. In het begin voelde een resultaat ver weg, maar uiteindelijk ben ik tevreden met het eindresultaat. Ir. C. Kasbergen heeft mij als tweede begeleider bijgestaan. Hij gaf mij altijd uitgebreid antwoord op vragen. De antwoorden waren soms wat te ver buiten de casus, maar hierdoor heeft hij mij wel nieuwsgierig gemaakt naar het vak Continuum Mechanics.

Ik wens u veel leesplezier,

Sophie Reith

Delft, 15 juni 2020

Logo voorblad: (Delft)

Samenvatting

De Sanders-Koiter vergelijkingen beschrijven het gedrag van schalen. De Sanders-Koiter vergelijkingen bestaan uit 21 vergelijkingen. Voor de vergelijkingen is het van essentieel belang dat de vergelijkingen onafhankelijk zijn van het gekozen assenstelsel. Voorafgaand aan dit onderzoek was dit nog niet bekend. De hoofdvraag luidt daarom als volgt:

Zijn de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk?

Een wiskundige bewijs is gegeven om antwoord te kunnen geven op de hoofdvraag. In dit bewijs zijn twee assenstelsels geïntroduceerd; x,y,z -assenstelsel en r,s,t -assenstelsel. Als de vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn dan moeten deze twee assenstelsel hetzelfde resultaat geven. Het tweede assenstelsel kan worden gevonden door een rotatie van het x,y,z -assenstelsel om de z -as. Zodoende is het mogelijk om de coördinaten van ene assenstelsel uit te drukken in het andere assenstelsel middels een rotatiematrix. Het is hierdoor ook mogelijk om elke grootte in de Sanders-Koiter vergelijkingen te roteren met een rotatiematrix. Deze rotatiematrices zijn nodig om de resultaten van de twee assenstelsel met elkaar te kunnen vergelijken.

Het bewijs bestaat uit een aantal stappen. Als eerste zijn de vergelijkingen ingevuld in het x,y,z -assenstelsel. Daarna is elke grootte uit het x,y,z -assenstelsel geroteerd naar het r,s,t -assenstelsel. In deze stap is dus van elke grootte op een wiskundige manier een rotatiematrix bepaald. Vervolgens zijn deze geroteerde grootheden ingevuld in Sanders-Koiter vergelijkingen in het r,s,t -assenstelsel. Daaropvolgend zijn deze resultaten terug geroteerd naar x,y,z -assenstelsel. Dit is gedaan om het mogelijk te maken de resultaten met elkaar te vergelijken. Nu zijn de twee resultaten, berekend via twee wegen, bekend. Door deze twee uitdrukkingen van elkaar af te trekken kan worden aangetoond dat de twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn.

Bij elke van de 21 vergelijkingen is aangetoond dat de resultaten via de twee wegen aan elkaar gelijk zijn. Hiermee is bewezen dat de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn.

Inhoud

1.	Inleiding.....	5
2.	Theorie.....	6
2.1.	Sanders-Koiter vergelijkingen.....	6
2.1.1.	Basisbetrekkingen	7
2.1.2.	Grootheden	8
2.2.	Tensoren & Tensortransformaties	11
2.2.1.	Definitie tensor	11
2.2.2.	Rotatie van tensoren	11
2.2.3.	Cirkel van Mohr	12
2.2.4.	Asymmetrische-Tensor.....	13
3.	Bewijs.....	14
3.1.	x,y,z-assenstelsel	15
3.2.	Roteren met een positieve hoek.....	15
3.3.	r,s,t-assenstelsel	20
3.4.	Roteren met negatieve hoek	20
3.5.	Toetsing.....	21
4.	Conclusie & Aanbevelingen.....	22
5.	Discussie.....	24
6.	Bibliografie.....	25
Bijlage A:	Bewijsvoeringen	26
Bijlage B:	Alternatief bewijs voor vergelijking 1, 2 en 3.....	35
Bijlage C:	Discussiepunt	37
Bijlage D:	Potentiële tensoren.....	39
Bijlage E:	Beeldverslagen	40
Bijlage F:	Startnotitie	42

1. Inleiding

In de architectuur gaat het gebruik van schalen ver terug in de tijd. Het pantheon in Rome heeft de oudste koepel en dateert van meer dan 2000 jaar geleden. Het is nog steeds de grootste betonnen koepel zonder wapening. De koepel werd opgebouwd uit laagjes. De laagjes vormen cirkels die een steeds kleinere diameter hebben. Daarnaast werd er bovenin gebruik gemaakt van lichter materiaal en werd een dunnere wanddikte toegepast. Dit wordt tegenwoordig nog steeds gezien als een civieltechnische hoogstandje en was het begin van de schaalconstructie. (Pantheon (Rome), 2020) (Concrete shell, 2020)

Tegenwoordig kan met veel meer kennis van materialen en krachtenafdracht de constructie van een schaal veel nauwkeuriger bepaald worden. Daardoor beperken schaalconstructies zich al lang niet meer alleen tot koepels. Een voorbeeld hiervan is het treinstation Arnhem centraal. Augustus Love kwam in 1888 als eerste met basis vergelijkingen voor het beschrijven van schalen. Er was veel discussie over de vergelijkingen en enkele inconsistenties werden gevonden door wetenschappers. Het was pas in 1959 dat Lyell Sanders en Warner Koiter de vergelijkingen ontdekten die tot op de van vandaag gebruikt worden. (Hoogenboom, 2019) Deze vergelijkingen werden later de Sanders-Koiter vergelijkingen genoemd. Deze vergelijkingen bestaan uit 21 vergelijkingen, die grootheden uit de constructiemechanica bevatten, zoals spanningen en rekken.

Bij de Sanders-Koiter vergelijkingen is het van essentieel belang dat de vergelijkingen onafhankelijk zijn van het gekozen assenstelsel. Het is bekend dat natuurkundige formules niet mogen afhangen van het gekozen assenstelsel. Een eenvoudige voorbeeld hiervan is de tweede wet van Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Als de formule in twee willekeurige assenstelsels afwijkende resultaten geeft, klopt onmiskenbaar de formule niet. Voor de Sanders-Koiter vergelijkingen zou ook moeten gelden dat bij het gebruik van twee willekeurig gekozen assenstelsels het resultaat hetzelfde moet zijn. Als voorbeeld is hieronder de Sanders-Koiter vergelijking voor de rek weergegeven. De vergelijking is geschreven in twee verschillende assenstelsels. Er moet dus gelden dat de vergelijking hetzelfde resultaat opleveren.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_{xx}u_z + k_xu_y$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} - k_{rr}u_t + k_ru_s$$

Het doel van dit rapport is om antwoord te geven op de vraag of de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn. Dit gebeurt met wiskundige berekeningen waarbij de resultaten niet afhankelijk mogen zijn van het gekozen assenstelsel. In dit rapport wordt er met een wiskundige oog naar de vergelijkingen gekeken. Er zal daarom niet uitgebreid ingegaan worden op het toepassingsgebied van de vergelijkingen en wat de betekenis is van elke individuele vergelijking.

De structuur is als volgt. Hoofdstuk 2 richt zich op de theorie die nodig is om aan te tonen dat de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn. Hoofdstuk 3 is gewijd aan uitleg van de bewijzen. Elke stap die doorlopen is tijdens het onderzoek komt aan bod in dit hoofdstuk. Hoofdstuk 4 bevat de conclusie en aanbevelingen. Hoofdstuk 5 gaat in op de discussie. Hoofdstuk 6 geeft de bibliografie weer. Het rapport wordt afgesloten met de bijlagen.

2. Theorie

Voor dat gezocht kan worden naar een antwoord op de hoofdvraag is het belangrijk om het onderwerp te verkennen. In dit hoofdstuk is vastgelegd wel kennis nodig is om later in het rapport alle stappen te kunnen begrijpen. Ten eerste is het van belang dat er enige kennis is van de Sanders-Koiter vergelijkingen. Bijvoorbeeld de definitie van een grootheid. Ten tweede is het cruciaal dat de wiskundige kennis paraat is, die is vereist om te kunnen aantonen dat de Sanders-Koiter vergelijking rotatieonafhankelijk zijn.

2.1. Sanders-Koiter vergelijkingen

De Sanders-Koiter vergelijkingen beschrijven het gedrag van schalen. Schalen zijn terug te vinden in veel gebouwen om ons heen. Twee bekende voorbeelden zijn de Taj Mahal in India en het Opera House in Australië. Deze gebouwen horen allebei thuis op een lijstje met iconische gebouwen. Het is voor te stellen dat het complex is om het gedrag van deze schalen te bepalen. De Sanders-Koiter vergelijking bestaan dan ook uit 21 vergelijkingen. Om beter inzicht te krijgen in de vergelijkingen wordt in deze paragraaf ingegaan op de basisbetrekkingen en de grootheden die voorkomen in de vergelijkingen. In de onderstaande tabellen zijn de Sanders-Koiter vergelijkingen weergegeven.

Tabel 1 Evenwichtsvergelijking van de Sanders-Koiter vergelijkingen (Hoogenboom, 2019)

Evenwichtsvergelijkingen	$k_{xx}n_{xx} + k_{xy}(n_{xy} + n_{yx}) + k_{yy}n_{yy} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + k_y v_x + k_x v_y + p_z = 0$	1
	$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + k_y(n_{xx} - n_{yy}) + k_x(n_{xy} + n_{yx}) - k_{xx}v_x - k_{xy}v_y + p_x = 0$	2
	$\frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + k_x(n_{yy} - n_{xx}) + k_y(n_{xy} + n_{yx}) - k_{yy}v_y - k_{xy}v_x + p_y = 0$	3
	$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + k_y(m_{xx} - m_{yy}) + 2k_x m_{xy} - v_x = 0$	4
	$\frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + k_x(m_{yy} - m_{xx}) + 2k_y m_{xy} - v_y = 0$	5
	$k_{xy}(m_{xx} - m_{yy}) - (k_{xx} - k_{yy})m_{xy} + n_{xy} - n_{yx} = 0$	6

Tabel 2 Constitutieve vergelijkingen (Hoogenboom, 2019)

Constitutieve vergelijkingen	$n_{xx} = \frac{Et}{1 - \nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy})$	7
	$n_{yy} = \frac{Et}{1 - \nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx})$	8
	$\frac{n_{xy} + n_{yx}}{2} = \frac{Et}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$	9
	$m_{xx} = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy})$	10
	$m_{yy} = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_{yy} + \nu \kappa_{xx})$	11
	$m_{xy} = \frac{Et^3}{24(1 + \nu)} \rho_{xy}$	12

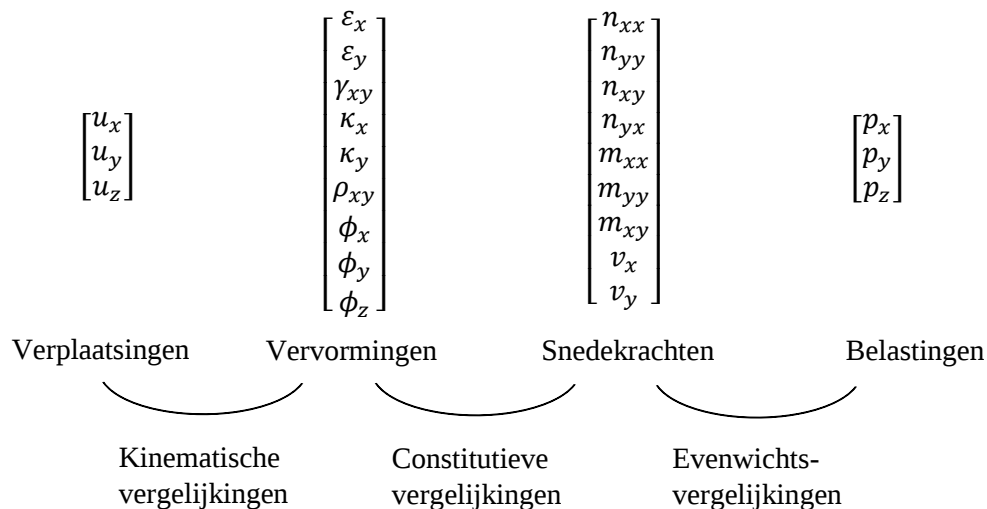
Tabel 3 Kinematische vergelijkingen (Hoogenboom, 2019)

Kinematische vergelijkingen	$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_{xx}u_z + k_x u_y$	13
	$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} - k_{yy}u_z + k_y u_x$	14
	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2k_{xy}u_z - k_x u_x - k_y u_y$	15
	$\varphi_x = -\frac{\partial u_z}{\partial x} - k_{xx}u_x - k_{xy}u_y$	16
	$\varphi_y = -\frac{\partial u_z}{\partial y} - k_{yy}u_y - k_{xy}u_x$	17
	$\varphi_z = \frac{1}{2}(-\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - k_x u_x + k_y u_y)$	18
	$\kappa_{xx} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - k_{xy}\varphi_z + k_x \varphi_y$	19
	$\kappa_{yy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + k_{xy}\varphi_z + k_y \varphi_x$	20
	$\rho_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + (k_{xx} - k_{yy})\varphi_z - k_x \varphi_x - k_y \varphi_y$	21

2.1.1. Basisbetrekkingen

In tabel Tabel 1 t/m Tabel 3 is te zien dat de vergelijkingen zijn verdeeld over drie delen. In de eerste tabel zijn de evenwichtsvergelijkingen weergegeven. Deze vergelijkingen volgen uit het evenwicht tussen belastingen en snedekrachten. Het verband tussen de snedekrachten en vervormingen wordt vastgelegd in de constitutieve vergelijkingen en is afhankelijk van het gedrag van het materiaal. De kinematische vergelijkingen zijn gebaseerd op het feit dat er geen gaten vallen in een schaal. Hiermee wordt het verband tussen vervormingen en verplaatsingen vastgelegd. (Hartsuijker, 2015)

In figuur 1 staat een stroomdiagram waarin de verbanden grafische verduidelijkt zijn. De diagram geeft een goed beeld van de onafhankelijke en afhankelijke variabelen. In de diagram worden alleen de belastingen vermeld, als invoer. De kromming, de dikte en elasticiteitsmodulus behoren ook tot de onafhankelijke variabelen. De afhankelijk variabele bestaan uit de snedekrachten, vervormingen en verplaatsingen en hangen af van de onafhankelijk variabelen.



Figuur 1 Schema voor verbanden tussen de grootheden. *Een bewerking van (Blaauwendraad & Hoefakker, 2014)

2.1.2. Grootheden

De Sanders-Koiter vergelijkingen bestaan uit veel termen, daarom is in tabel 4 een overzicht gecreëerd van alle termen. Niet alle termen in de tabel komen voor in de vergelijkingen, maar hebben wel direct verband met grootheden die wél voorkomen in de vergelijkingen.

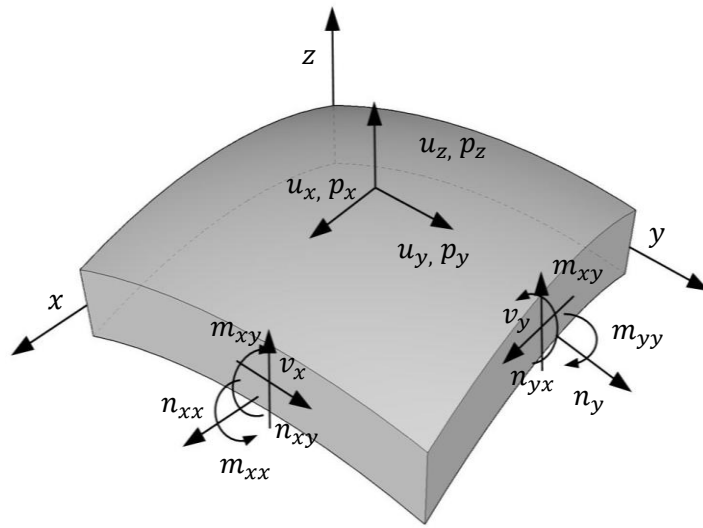
Tabel 4 Grootheden in de Sanders-Koiter vergelijkingen (Hoogenboom, 2019)

Grootheid	Eenheid	Uitleg
<i>Coördinaten</i>		
$\bar{x}, \bar{y}$ en $\bar{z}$	[m]	Globale cartesische assenstelsel
x, y en z	[m]	Lokale cartesische assenstelsel
u en v	[m]	Kromlijng assenstelsel
<i>Onafhankelijke variabelen</i>		
E	[N/m ²]	Elasticiteitsmodulus
ν	[-]	Poisson ratio; wanneer een materiaal in een richting wordt uitgerekt zal de andere richting worden verkort. De verhouding tussen uitrekking en verkorting wordt gepresenteerd door de Poisson ratio.
t	[m]	Dikte van de schaal
p_x, p_y, p_z	[N/m]	Verdeelde belasting
k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}	[m ⁻¹]	Kromming van schaal uit het vlak
k_x, k_y	[m ⁻¹]	Kromming van schaal in het vlak
α_x, α_y	[-]	Lamé parameters
<i>Afhankelijke variabelen</i>		
m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}	[Nm/m]	Momenten
$n_{xx}, n_{yy}, n_{xy}, n_{yx}$	[N/mm]	Membraan krachten
v_x, v_y	[N/mm]	Schuifkrachten
$\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \rho_{xy}$	[m ⁻¹]	Kromming door vervormingen
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$	[m/m]	Rekken
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	[rad]	Hoekverdraaiing
u_x, u_y, u_z	[m]	Verplaatsingen

Op de volgende bladzijde is Figuur 2 een klein deel van een schaal te zien, hierin staat hoe enkele grootheden zich presenteren in de 3D-ruimte. In het vervolg van deze paragraaf worden enkele grootheden nader verklaard.

Rotatieonafhankelijke grootheden

Niet alle variabelen veranderen bij een rotatie van het assenstelsel. In de Sanders-Koiter vergelijkingen wordt aangenomen dat de elasticiteitsmodulus en Poisson ratio onafhankelijk zijn van de oriëntatie van het assenstelsel. Hetgeen inhoudt dat de Sanders-Koiter vergelijkingen alleen toepasbaar zijn bij isotrope materialen, waarbij de materiaaleigenschappen in alle richtingen gelijk zijn (Isotropie, 2018). Hout is een orthotroop materiaal, de materiaal eigenschappen verschillen per richting, en kan dus niet worden gebruikt in combinatie met de Sanders-Koiter vergelijkingen (Orthotroop, 2019). De materiaaleigenschappen komen voor in de constitutieve vergelijkingen in tabel 2.

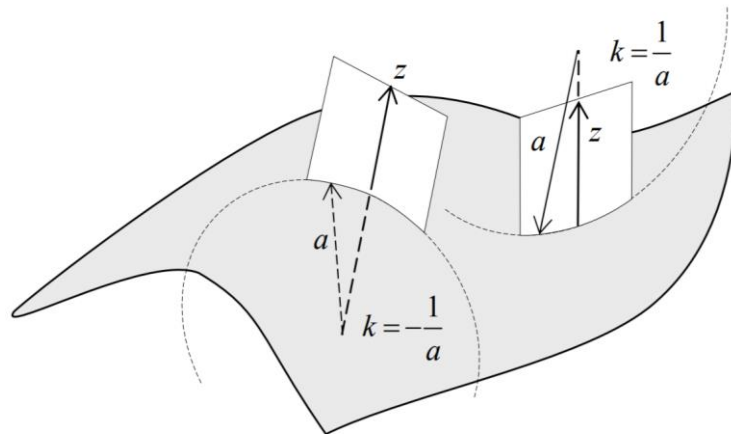


Figuur 2 Deel van schaal * bewerking van (Hoogenboom, 2019) & (Blaauwendraad & Hoefakker, 2014)

Kromming van schaal uit het vlak

De geometrie van een schaal wordt beschreven door de krommingstensor. De kromming is op een bepaalde manier gedefinieerd. Figuur 3 is bijgevoegd ter verduidelijking van de kromming. Om te beginnen wordt een tangentieel vlak getekend in richting van de te bepalen kromming op het betreffende punt. Dan wordt in het getekende vlak een normaalvector getekend door het betreffende punt. Het snijvlak van de schaal en het tangentiële vlak zorgt voor een gekromde lijn. Deze lijn kan lokaal rondom het betreffende punt worden gezien als een cirkel. Van deze cirkel kan de straal a worden bepaald. k kan dan worden berekend met $1/a$. Als de cirkel aan de positieve zijde van de z -as ligt dan is de kromming positieve en vice versa. k_{xx} wordt bepaald door een tangentiële vlak met daarin een vector met x -as richting. Hetzelfde geldt voor k_{yy} maar dan een vector met als richting de y -as. Krommingen kunnen ook beschreven worden door partiële afgeleiden. Dat is hieronder weergegeven. k_{xy} is gedefinieerd als de torsie van het vlak. (Hoogenboom, 2019)

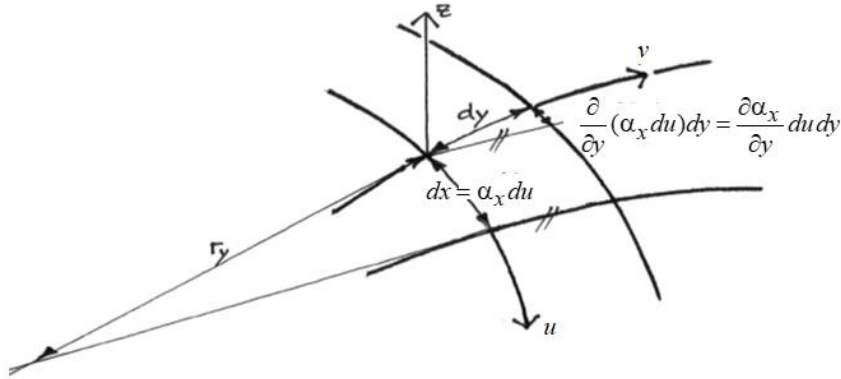
$$k_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$



Figuur 3 Definitie van kromming van schaal (Hoogenboom, 2019)

Kromming van schaal in het vlak

Door de kromming van een schaal kan de vorm niet eenvoudig worden vastgelegd met een cartesische coördinatensysteem. De coördinaten van een schaal worden vastgelegd door kromlijnige assen u en v die over het vlak lopen. In de Sanders-Koiter vergelijkingen wordt echter gebruik gemaakt van een lokaal cartesische coördinatensysteem. In figuur 4 is goed te zien dat het lokale cartesische coördinaten en het kromlijnige coördinaten verschillen van elkaar. Dit betekent dat een lengte dx niet gelijk is aan een lengte du .



Figuur 4 Kromming in het vlak (Hoogenboom, 2019)

Om dit verschil te corrigeren zijn de Lamé parameters, α_x en α_y , geïntroduceerd. Het verband tussen de dx en du is hieronder in tensorvorm weergegeven.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

De Lamé parameters komen niet voor in de Sanders-Koiter vergelijkingen, maar zitten verwerkt in de k_x en k_y die wel voorkomen in de vergelijkingen.

$$k_x = \frac{1}{r_y} = \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y}, \quad k_y = \frac{1}{r_x} = \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial \alpha_y}{\partial x}$$

De kromlijnige assen kunnen lokaal worden beschreven door de parameters r_x en r_y . Deze parameters leggen k_x en k_y vast. (Hoogenboom, 2019)

Membraamkrachten

Tot in het vlak normaalkrachten behoren vier spanningen; n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} en n_{yx} . Hoe de spanningen werken op een klein stukje van een schaal is te vinden in figuur 2. n_{xx} en n_{yy} zijn de twee normaalspanningen die haaks op de snede staan. n_{xy} en n_{yx} zijn de twee normaalspanningen die parallel lopen aan de snede. Dikwijls wordt aangenomen dat deze twee krachten gelijk zijn aan elkaar. Echter in het geval van een schaal kunnen deze spanningen verschillen. (Hoogenboom, 2019)

Schuifkrachten worden veroorzaakt door momenten op een snede. De kromming van een schaal zorgt ervoor dat de lengte aan boven- en onderzijde verschillen. De schuifkrachten werken over de lengte van de boven- en onderzijde. Door het lengteverschil ontstaat een resultante; n_{xy} en n_{yx} . De resultante hangt mede af van de kromming. Aangezien de kromming in x- en y-richting kan verschillen, kunnen n_{xy} en n_{yx} ook verschillen.

2.2. Tensoren & Tensortransformaties

2.2.1. Definitie tensor

Tensoren zijn de verzamelnaam voor scalars, vectoren en matrices. Tot welke definitie een tensor behoort, hangt af van de orde van een tensor. De orde wordt weergegeven door het aantal indices van een tensor. Zo heeft een scalar geen indices en is dus een nulde orde tensor. Een vector heeft één index en is logischerwijs een eerste orde tensor. Een matrices heeft twee indices en is dus een tweede orde tensor. Dit systeem kan in theorie tot in de oneindigheid doorgaan. Echter eindigen we hier met de tweede orde tensoren, omdat de hogere orde tensoren niet relevant zijn in dit rapport.

Wanneer een tensor wordt getransformeerd zijn er een aantal waarden die invariant zijn voor de transformatie. Dit houdt in dat deze specifieke waarden niet veranderen bij een ander assenstelsel. Een voorbeeld hiervan zijn de lengte van een vector of de eigenwaarden van een matrix.

2.2.2. Rotatie van tensoren

De transformatie van het assenstelsel kan worden beschreven door een transformatiematrix. Het assenstelsel kan op twee manieren transformeren; translateren en roteren. Met betrekking tot de casus in dit rapport zal alleen naar het roteren van een assenstelsel worden gekeken. Wanneer een assenstelsel wordt gerooteerd zal elke tensor worden geprojecteerd op het gerooteerde assenstelsel. Hiervoor moet wel bekend zijn hoe elke tensor transformeert en zal er dus voor elke tensor een rotatiematrix moeten worden opgesteld.

Een rotatie in de 3D-ruimte bestaat feitelijk uit drie basis rotaties; rotatie om de z-as, y-as en x-as. Voor elk van de drie rotaties is een relatief simpele matrix op te stellen. De vermenigvuldiging van deze drie matrices geeft een rotatie in 3D. Hieronder wordt in de eerste regel het product van de drie matrices weergegeven. Van links naar rechts representeren de drie matrices de rotatie om de z-as, y-as en de x-as. Deze drie matrices kunnen ook los van elkaar gebruikt worden voor een rotatie om een enkele as. Deze matrices moeten in deze volgorde worden toegepast. Wanneer de rotaties in een andere volgorde worden uitgevoerd geeft dit een ander resultaat. (Continuum mechanics, sd)

$$\mathbf{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{rotatie om de z-as}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}}_{\text{rotatie om de y-as}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}}_{\text{rotatie om de x-as}}$$

Bij een assenrotatie veranderen vectoren en matrices elk op een andere manier. Dit is hieronder weergegeven in formulevorm. $\mathbf{F}$ is een vector en $\mathbf{K}$ een matrix. (Welleman J. , 2017)

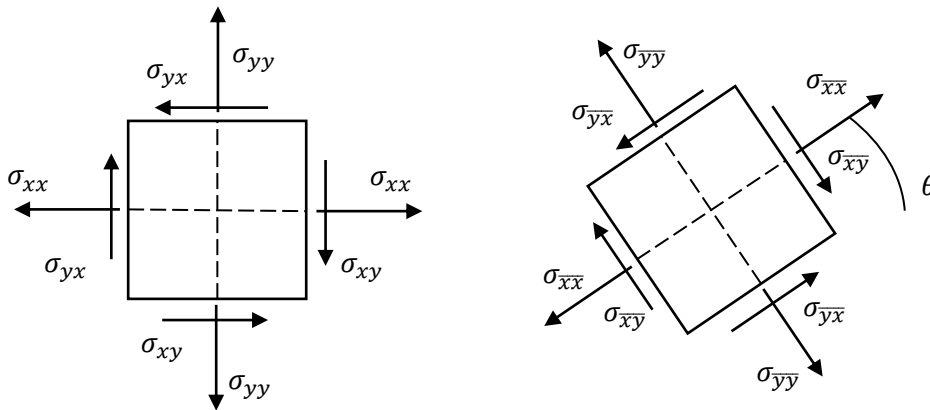
$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}^T$$

$\mathbf{F}$ en $\mathbf{K}$ moeten een bepaalde vorm hebben om aan de bovenstaande formules te voldoen. matrix Voor deze tensoren zijn als voorbeeld de belastings- en krommingstensor hieronder weergegeven. Dit kan met elke grootte worden toegepast zolang wordt voldaan aan deze representatie.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

2.2.3. Cirkel van Mohr

De hoofdspansingen en -richtingen kunnen worden bepaald met de cirkel van Mohr. Dit is de grafische aanpak om de hoofdspansingen en -richtingen te bepalen. Het bepalen van de hoofdspansingen en -richting is synoniem voor het bepalen van de eigenwaarden en -vectoren. De grafische methode komt voort uit een analytische methode die veel breder kan worden toegepast. Met de analytische methode kunnen ook de hoofdspansingen en -richtingen maar ook de normaal- en schuifspansingen onder een willekeurig hoek worden bepaald. Dus wanneer een bepaalde spanningstoestand wordt geroteerd met een hoek θ dan kunnen eenvoudig de nieuwe normaal- en schuifspansingen worden berekend. In figuur 5 worden de twee spanningstoestanden weergegeven. (Gramoll, sd)



Figuur 5 Spanningstoestanden met rechts het geroteerde assenstelsel. *Een bewerking van (Gramoll, sd)

Deze transformatie kan worden beschreven met een drietal transformatieregels. In dit voorbeeld is sprake van een spanningstensor. Deze transformatieregels kunnen bij elke symmetrische tensor worden toegepast.

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} = \sigma_{\bar{y}\bar{x}} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

Herleiden transformatieregels

Bij dit voorbeeld wordt de lineaire relatie gebruikt tussen twee 1^{ste} orde tensoren. De relatie tussen belastingen en verplaatsingen kan worden vast gelegd in stijfheidsrelatie zoals hieronder genoteerd:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad F = K \cdot u$$

Wanneer het assenstelsel wordt geroteerd geeft de rotatiematrix R het verband tussen de twee vectoren in verschillende assenstelsels.

$$\bar{F} = R \cdot F \quad \bar{u} = R \cdot u \quad \text{met } R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

De inverse van de rotatiematrix is gelijk aan de getransponeerde matrix. Dit komt doordat de kolommen van de rotatiematrix loodrecht op elkaar staan en de vectoren lengte 1 hebben. De rotatiematrix wordt ook wel een orthogonale matrix genoemd. (Orthogonale matrix, 2019) Dus de relatie tussen u en $\bar{u}$ kan worden herschreven worden zoals hieronder genoteerd.

$$u = R^{-1} \cdot \bar{u} = R^T \cdot \bar{u}$$

Vervolgens kan een uitdrukking van $\bar{F}$ en $\bar{K}$ worden afgeleid.

$$\bar{F} = R \cdot F = R \cdot K \cdot u = \underbrace{R \cdot K \cdot R^T}_{\bar{K}} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} k_{\bar{x}\bar{x}} & k_{\bar{x}\bar{y}} \\ k_{\bar{y}\bar{x}} & k_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Uit $\bar{K}$ volgen de transformatieregels voor een 2^{de} orde tensor, zoals die eerder in de paragraaf zijn gegeven voor een spanningstensor. (Welleman & Hartsuijker, 2018)

$$\begin{aligned} k_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\theta + k_{xy} \sin 2\theta \\ k_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\theta - k_{xy} \sin 2\theta \\ k_{\bar{x}\bar{y}} &= k_{\bar{y}\bar{x}} = -\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\theta + k_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

2.2.4. Asymmetrische-Tensor

In de vorige paragraaf wordt de transformatieregels van de cirkel van Mohr uitgelegd. Bij deze uitleg werd alleen gekeken naar symmetrische tensoren. Dit heeft te maken met het feit dat symmetrische altijd reële hoofdspanningen en -richtingen geven. De eigenwaarden van een symmetrische tensor zijn immers altijd reël. Asymmetrische tensoren hebben, in tegenstelling tot symmetrische tensoren, bijna altijd complexe eigenwaarden. Hetgeen ook complexe hoofdspanningen en -richtingen oplevert. Uitzonderingen hierop zijn onder- en bovendiaagonaalmatrices. De methode van de cirkel van Mohr kan bij een asymmetrische tensor niet op dezelfde manier toegepast worden als bij een symmetrische tensor. Er is wel een alternatieve manier om de cirkel van Mohr ook op asymmetrische tensor toe te passen. Deze methode gaat echter buiten de casus van dit rapport. Voor een uitleg van de methode wordt verwezen naar de volgende bron: (Brannon, 2003).

De rotatie met een willekeurig hoek φ van een asymmetrische tensor kan wel op dezelfde manier worden vast gelegd. Dit is hieronder voor de membraamtensor weergegeven. Daarnaast zijn de transformatieregels voor de membraamtensor weergegeven.

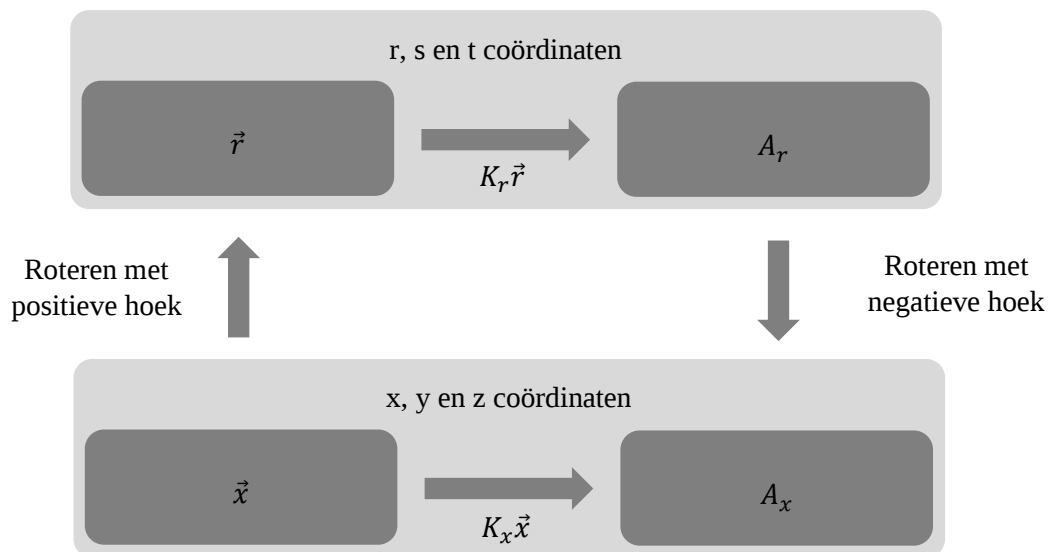
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_{rr} & n_{rs} \\ n_{sr} & n_{ss} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{xy} \\ n_{yx} & n_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ n_{rr} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) + \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\ n_{ss} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\ n_{rs} &= \frac{1}{2}(n_{xy} - n_{yx}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi \\ n_{sr} &= \frac{1}{2}(n_{yx} - n_{xy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi \end{aligned}$$

3. Bewijs

De Sanders-Koiter vergelijkingen moeten worden getoetst op het feit dat ze onafhankelijk zijn van een het gekozen assenstelsel. Dit betekent dat twee willekeurig gekozen assenstelsel hetzelfde resultaat moet geven.

Voor het bewijs worden twee assenstelsel geïntroduceerd; het x,y,z-assenstelsel en r,s,t-assenstelsel. Het tweede assenstelsel komt voort uit het eerste assenstelsel door een rotatie φ om de z-as. De resultaten in de twee assenstelsel kunnen met elkaar worden vergeleken, doordat de r,s,t-coördinaten eenvoudig uit te drukken zijn x,y,z-coördinaten. Het is daarom ook mogelijk om van elke grootheid die voorkomt in een van de 21 vergelijkingen te bepalen hoe deze roteert. Als alle rotatiematrices bekend zijn dan kan elke grootheid in het ene assenstelsel geprojecteerd worden op het andere assenstelsel.

In het stroomdiagram hieronder is grafisch weergegeven hoe de berekeningen eruit zien. De berekening start linksonder met de invoer van elke vergelijking in het x,y,z-assenstelsel. Vanuit dit punt wordt de invoer gebruikt om de resultaten te berekenen in het x,y,z-assenstelsel. Daarnaast wordt de grootheden, met behulp van de opgestelde rotatiematrices, geroteerd met hoek φ . Dan kunnen ook de resultaten in het r,s,t-assenstelsel berekend worden. Deze resultaten representeren A_r . A_r kan met de rotatiematrices worden geroteerd naar het x,y,z-assenstelsel. Nu kunnen de twee resultaten verkregen via de twee wegen met elkaar vergeleken worden. In het vervolg van dit hoofdstuk wordt elke stap nader verklaart.



Figuur 6 Stroomdiagram van berekeningen

3.1. x,y,z-assenstelsel

De 21 vergelijkingen zijn verdeeld in 7 sets. De sets zijn op deze manier gekozen, omdat de vergelijkingen bij rotatie afhankelijk zijn van elkaar. Per set zal nagegaan worden of elke vergelijking rotatieonafhankelijk is. In bijlage A zijn alle Maple scripten van de bewijzen terug te vinden. De aanpak is in grote delen bij elke set gelijk. Elke stap zal dus voor alle vergelijkingen in een keer behandeld worden. Waar nodig is wordt er een voorbeeld uitgepakt om de berekening verduidelijken.

De evenwichtsvergelijkingen zijn herschreven, zodat een uitdrukking ontstaat voor een grootte. De evenwichtsvergelijkingen zijn terug te vinden tabel 1. Zie als voorbeeld hieronder de eerste evenwichtsvergelijking. De vergelijking is zo herschreven dat een uitdrukking ontstaat voor p_z .

$$p_z = -k_{xx}n_{xx} - k_{xy}(n_{xy} + n_{yx}) - k_{yy}n_{yy} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - k_y v_x - k_x v_y$$

Maple heeft een aantal beperkingen waarvan is dat $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$ en $n_{xy} - n_{yx}$ niet als linkerlid kunnen worden ingevoerd. Daarom is N_{xy} geïntroduceerd. Van dit probleem is sprake bij vergelijking 6 en 9. Dit is terug te vinden in bijlage A onder het bewijs voor vergelijking 4,5 en 6 en bewijs voor vergelijking 7,8 en 9.

In alle gevallen wordt als eerste stap de vergelijkingen ingevuld in het x,y,z-assenstelsel. De uitkomst van deze vergelijkingen wordt aan het eind van elk bewijs vergeleken met de uitkomst in het r,s,t-assenstelsel. Bij een groot aantal bewijzen moeten echter eerst nog een voorbereidende stap gezet worden. In veel vergelijkingen komen partiële afgeleiden voor. Om de afgeleide te kunnen nemen moet de betreffende grootte uitgedrukt worden in x, y en z. De grootte is daarom benaderd met een Taylorpolynoom. Zo wordt n_{xx} uit de eerste evenwichtsvergelijking met het onderstaande polynoom benaderd.

$$n_{xx} = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot z$$

Normaliter bestaat een Taylorpolynoom uit een groter aantal termen. In dit geval wordt alleen de eerste twee termen meegenomen, omdat x, y en z een kleine waarde hebben. Bij machten worden deze waarden nog vele malen kleiner en zijn dus te verwaarlozen. Het resultaat van deze stap is dat elke vergelijking is ingevuld in het x,y,z-assenstelsel.

3.2. Roteren met een positieve hoek

Om te kunnen bewijzen dat de Sanders-Koiter vergelijkingen onafhankelijk zijn van rotatie wordt er met twee assenstelsels gewerkt, het x,y,z-assenstelsel en r,s,t-assenstelsel. Het r,s,t-assenstelsel kan worden gevonden door een rotatie φ om de z-as van het x,y,z-assenstelsel.

Het is van belang dat elke grootte in het r,s,t-assenstelsel wordt uitgedrukt in grootheden in het x,y,z-assenstelsel. Hieronder is de eerste evenwichtsvergelijking weergegeven in het r,s,t-assenstelsel. Voor elke grootte in het rechterlid moet een uitdrukking in x,y,z-assenstelsel gevonden worden. Dit wordt gevonden door rotatie van het x,y,z-assenstelsel naar het r,s,t-assenstelsel. Ditzelfde kan gedaan worden met elke grootte.

$$p_t = -k_{rr}n_{rr} - k_{rs}(n_{rs} + n_{sr}) - k_{ss}n_{ss} - \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_s}{\partial s} - k_s v_r - k_r v_s$$

Om het eenvoudiger te maken om een rotatie te vinden van elke grootte zijn alle grootheden herschreven als tensor. Niet elke grootte wordt op dezelfde manier herschreven. Er zijn vectoren met 2 en 3 rijen en matrices. Logischerwijs verschilt de rotatiematrix in formaat bij de verschillende tensoren. Daarnaast roteert een matrix anders dan een vector. De verschillende formules zijn hieronder weergegeven. F is een vector en K is een matrix. Deze formules komen uit paragraaf 2.2.2. De rotatie van een grootte hangt tevens af van hoe de grootte zich presenteert in de 3D-ruimte.

$$\bar{F} = R \cdot F \quad \bar{K} = R \cdot K \cdot R^T$$

In het vervolg van deze paragraaf worden ingegaan op alle rotatiematrices, de partiële afgeleiden en nog een keer kort op de transformatieregels van de cirkel van Mohr.

Onafhankelijke variabelen

Hieronder staan de rotaties weergegeven van de onafhankelijk variabelen. Deze vormen de invoer voor de Sanders-Koiter vergelijkingen. Niet alle onafhankelijke variabelen veranderen bij een rotatie van het assenstelsel. De variabele E , v en t veranderen niet bij een rotatie. Van de eerste vergelijking is dit al in paragraaf 2.1.2 onder het kopje rotatieonafhankelijke variabele uitgelegd. t verandert logischerwijs ook niet bij een rotatie om de z-as. t is immers op de plaats van het draaipunt gedefinieerd en in de z-richting. Deze drie variabelen komen voor in de constitutieve vergelijkingen. De vergelijkingen zijn terug te vinden in tabel 2.

$$\begin{bmatrix} p_r \\ p_s \\ p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{rr} & k_{rs} \\ k_{rs} & k_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_s \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_y \\ k_x \end{bmatrix}$$

Als er naar deze drie tensornotaties wordt gekeken dan valt er een ding op; de tensor voor k_x en k_y . Normaliter wordt een vector als volgt gepresenteerd $[k_x \quad k_y]^T$, op de bovenste rij staat de x-coördinaat en op de tweede rij de y-coördinaat. Bij deze tensor moet het echter worden omgedraaid. Om dit uit te leggen wordt een stapje teruggezet. Binnen elke vergelijkingen zijn stukjes te onderscheiden die samen invariant zijn voor rotatie om de z-as. Zo bestaat de onderstaande vergelijking voor de hoekverdraaiing in z-richting twee stukjes die invariant zijn.

$$\varphi_z = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad -k_x u_x + k_y u_y \right)$$

Buiten k_x en k_y kan eenvoudig worden achterhaalt hoe elke grootheid roteert. Van k_x en k_y is als laatste bepaald hoe ze roteren. Van de grootheden is het eerste stukje van de bovenstaande vergelijking waren de rotatiematrix al bekend. De rotatiematrix voor de verplaatsingstensor wordt onder het volgende kopje besproken. Dan is het voor te stellen dat door de vergelijking op te splitsen in kleinere stukjes het eenvoudigere wordt om op een wiskundige manier de rotatie van k_x en k_y te achterhalen. Door naar de onderstaande versimpelde vergelijking te kijken. De rotatie van de hoekverdraaiing en verplaatsingen waren al bekend, dus kan met Maple een rotatiematrix van k_x en k_y worden afgeleid.

$$\varphi_z = \frac{1}{2} (-k_x u_x + k_y u_y)$$

Uiteindelijk werd dus het onderstaande resultaat gevonden; k_x en k_y moeten met een negatieve hoek worden geroteerd. Terwijl alle andere grootheden met een positieve hoek naar het r,s,t-assenstelsel moeten worden geroteerd. Dit levert een nieuwe vraag op; waarom roteren k_x en k_y met een negatieve hoek? In het geval van rotatie van een negatieve hoek geeft de getransponeerde rotatiematrix hetzelfde resultaat. Echter geeft de rotatie met de getransponeerde matrix nog geen antwoord op de vraag.

$$\begin{bmatrix} k_r \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos -\varphi & \sin -\varphi \\ -\sin -\varphi & \cos -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix}$$

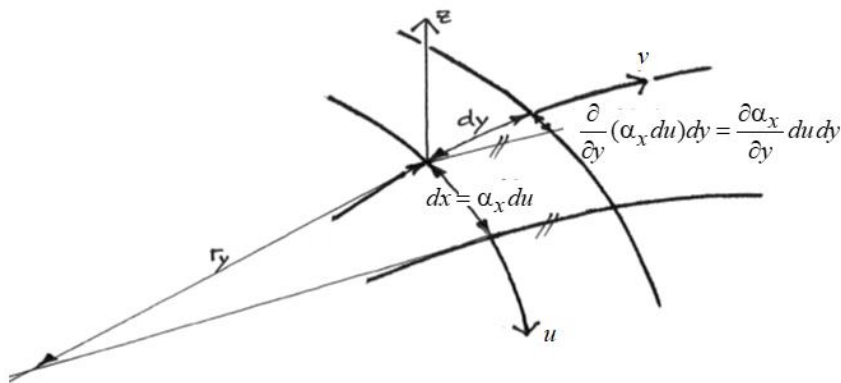
In paragraaf 2.1.2 onder het kopje kromming in het vlak worden de onderstaande formules ook weergegeven. Met behulp van deze uitdrukkingen kan misschien worden afgeleid waarom k_x en k_y met een negatieve hoek roteren. Aanvankelijk is geprobeerd om de Lamé parameters of de stralen van de kromming als vector te laten roteren. Dit leverde helaas niet het gewenste resultaat.

$$k_x = \frac{1}{r_y} = \frac{1}{\alpha_x} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y}, \quad k_y = \frac{1}{r_x} = \frac{1}{\alpha_y} \frac{\partial \alpha_y}{\partial x}$$

Het resultaat ligt veel simpeler. In de bovenstaande uitdrukking is te zien dat k_x afhankelijk is van r_y en k_y van r_x . Dat betekent dat de veronderstelling dat k_x zich in x-richting bevindt en dat k_y in y-richting niet klopt. Er moet worden aangenomen dat k_x zich in y-richting bevindt en k_y zich in x-richting. Dan kan de volgende rotatie worden gevonden. Deze tensorrotatie levert het gewenste resultaat.

$$\begin{bmatrix} k_s \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_y \\ k_x \end{bmatrix}$$

Nu resten er twee vragen, waarom moeten de richting anders worden aangenomen en waarom werd er eerder al een ander juist antwoord gevonden. In figuur 7 is nogmaals de afbeelding uit paragraaf 2.1.2 weergegeven. In de afbeelding is te zien dat r_y de kromming van u beschrijft. Echter is u de as die correleert met de lokale x-as. Kortom r_y geeft de correctie van het verschil tussen x en u . k_x hangt af van r_y , omdat die de correctie geeft tussen x en u . Hetzelfde kan worden verklaard met k_y en r_x . Zoals eerder gezegd kan de rotatie met een negatieve ook worden uitgevoerd met de getransponeerde rotatiematrix. Door de posities van de krommingstensor te verschillen wordt dezelfde berekening gedaan als met de getransponeerde matrix.



Figuur 7 Kromming in het vlak (Hoogenboom, 2019)

Afhankelijke variabelen

$$\begin{bmatrix} n_{rr} & n_{rs} \\ n_{sr} & n_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{xy} \\ n_{yx} & n_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & m_{rs} \\ m_{rs} & m_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{xy} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_r \\ \phi_s \\ \phi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \frac{1}{2}\gamma_{rs} \\ \frac{1}{2}\gamma_{rs} & \varepsilon_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_{rr} & \frac{1}{2}\rho_{rs} \\ \frac{1}{2}\rho_{rs} & \kappa_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \frac{1}{2}\rho_{xy} \\ \frac{1}{2}\rho_{xy} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Bovenstaand zijn de rotaties van de afhankelijk variabelen weergegeven. Hier valt een ding op dat de membraantensor een asymmetrische tensor is. Waarom n_{xy} en n_{yx} ongelijk zijn is al eerder in paragraaf 2.1.2 uitgelegd. Hieronder worden de transformatieregels weergegeven die gevonden worden met de rotatie van de asymmetrische membraantensor. Er is dus een verschil tussen de transformatie van n_{sr} en n_{rs} .

$$\begin{aligned} n_{rr} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) + \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\ n_{ss} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\ n_{rs} &= \frac{1}{2}(n_{xy} - n_{yx}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi \\ n_{sr} &= \frac{1}{2}(n_{yx} - n_{xy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Als goed wordt gekeken naar de Sanders-Koiter vergelijkingen in tabel 1 en 2. Dan is te zien dat n_{xy} en n_{yx} in verschillende vormen voorkomen. In vergelijking 6 worden ze gepresenteerd als $n_{xy} - n_{yx}$ en in vergelijking 9 als $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$. Voor deze expressies zijn ook transformatieregels af te leiden door de bovenstaande regels bij elkaar op te tellen of af te trekken.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} \times & n_{rs} = \frac{1}{2}(n_{xy} - n_{yx}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi & \\
\frac{1}{2} \times & n_{sr} = \frac{1}{2}(n_{yx} - n_{xy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi & + \\
\hline
\frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr}) = & -\frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi & \\
\\
n_{rs} = \frac{1}{2}(n_{xy} - n_{yx}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi & & \\
n_{sr} = \frac{1}{2}(n_{yx} - n_{xy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi & & - \\
\hline
n_{rs} + n_{sr} = & n_{xy} - n_{yx} &
\end{array}$$

In de bovenstaande vergelijkingen zijn de transformatieregels voor de twee expressies weergegeven. Uit de transformatieregel van $n_{rs} - n_{sr}$ is af te lezen dat deze expressie invariant is bij een rotatie van de z-as. De transformatieregel voor $\frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr})$ kan ook worden berekend met de onderstaande tensor. Bij deze tensor is het belangrijk dat het gemiddelde van n_{xy} en n_{yx} wordt genomen, anders worden niet de juiste transformatieregels gevonden. De transformatieregel voor $n_{rs} + n_{sr}$ wordt gebruikt in vergelijking 6 en voor $\frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr})$ bij vergelijking 9. Dit is terug te vinden in bijlage onder respectievelijk bewijs voor vergelijking 4, 5 en 6 en bewijs voor vergelijking 7, 8 en 9.

$$\begin{bmatrix} n_{rr} & \frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr}) \\ \frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr}) & n_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} & \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \\ \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) & n_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
n_{rr} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) + \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\
n_{ss} &= \frac{1}{2}(n_{xx} + n_{yy}) - \frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \cos 2\varphi - \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \sin 2\varphi \\
\frac{1}{2}(n_{rs} + n_{sr}) &= -\frac{1}{2}(n_{xx} - n_{yy}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \cos 2\varphi
\end{aligned}$$

Partiële afgeleiden

Wederom hebben alle vergelijkingen met partiële afgeleide een aanvullende stap nodig. Zoals eerder gezegd moeten de grootheden in de partiële afgeleiden worden uitgedrukt in coördinaten. Om de afgeleiden te kunnen nemen in r,s,t-assenstelsel moet de grootheden worden uitgedrukt in r, s en t. Daarom moet x, y en z uitgedrukt worden in r, s en t. De tensor $[r \ s \ t]^T$ moet geroteerd worden met de getransponeerde rotatiematrix.

$$x = R^T \cdot r \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

Zo ontstaat de onderstaande uitdrukking voor v_x en v_y in de eerste evenwichtsvergelijking.

$$\begin{aligned}
v_x &= a_1 + a_2 \cdot (r \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi) + a_3 \cdot (r \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi) + a_4 \cdot t \\
v_y &= b_1 + b_2 \cdot (r \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi) + b_3 \cdot (r \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi) + b_4 \cdot t
\end{aligned}$$

Vervolgens moeten v_r en v_s bepaald worden met de rotatiematrix van de schuifkrachten tensor. De berekening is hieronder weergegeven. v_r en v_s staan nu in termen r , s en t . Zodat de partiële afgeleide genomen kan worden naar x en y .

$$\begin{aligned}v_r &= v_x \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \sin \varphi \\v_s &= v_x \cdot \sin \varphi + v_y \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$

Samenvattend de grootheden waarvan niet de partiële afgeleiden moet worden genomen zijn uitgedrukt in grootheden uit het x,y,z -assenstelsel. De grootheden waarvan de partiële afgeleide wordt genomen zijn uitgedrukt in r , s en t . Echter vallen die eruit bij het nemen van de afgeleide bij de stap in de volgende paragraaf, maar blijven sinussen en cosinussen staan. Deze vallen weg de stap in paragraaf 3.4.

Transformatieregels van cirkel van Mohr

Niet bij elke grootheid kan de transformatieregels van de cirkel van Mohr rechtstreeks worden toegepast. In die gevallen is het nodig een tussenstap te nemen. Te zien is dat in rek- en krommingstensor de termen $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ en $\frac{1}{2}\rho_{xy}$ worden gebruikt. Terwijl in de Sanders-Koiter vergelijkingen de termen γ_{xy} en ρ_{xy} terugkomen. Daarom moet voordat de transformatieregels van de cirkel van Mohr kunnen worden toegepast de termen γ_{xy} en ρ_{xy} gedeeld worden door 2. Na de transformatie moet weer vermenigvuldigd worden met 2, zodat de Sanders-Koiter vergelijkingen weer gebruikt kunnen worden. Deze tussenstap is bijvoorbeeld terug te vinden in het bewijs voor vergelijking 7, 8 en 9.

3.3. r,s,t -assenstelsel

In deze stap worden de vergelijkingen ingevuld. De uitkomst worden dus geleverd in het r,s,t -assenstelsel, maar is uitgedrukt in termen van het x,y,z -assenstelsel. Dit is nodig zodat in de laatste stap de resultaten van de verschillende assenstelsel eenvoudig met elkaar vergeleken kunnen worden.

3.4. Roteren met negatieve hoek

In voorgaande paragraaf zijn de resultaten berekend in het r,s,t -assenstelsel eerder zijn de resultaten in x,y,z -assenstelsel berekend. Om een conclusie te geven moeten de resultaten in r,s,t -assenstelsel getransformeerd worden naar het x,y,z -assenstelsel. Dit kan wederom gedaan worden met de rotatiematrices die in paragraaf 1.2 naar voren zijn gekomen. Echter wordt er nu niet met de positieve hoek geroteerd, maar met de negatieve hoek. De rotatie gaat immers de andere kant op.

Nu twee resultaten zijn vastgelegd in het x,y,z -assenstelsel kan in de volgende stap twee resultaten met elkaar vergeleken worden.

3.5. Toetsing

Nu de berekening zijn afgerond kan worden geverifieerd of de resultaten daadwerkelijk aan elkaar gelijk zijn. Dit is gedaan door van elke vergelijking de twee resultaten van elkaar af te trekken, wanneer het antwoord gelijk is aan 0 dan kan worden gezegd dat de Sanders-Koiter vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn. Hieronder is het laatste stuk van het Maple script van het bewijs voor vergelijking 1, 2 en 3 weergegeven. De toetsing van de andere bewijzen is terug te vinden in bijlage A. In het script zijn px , py en pz de resultaten verkregen via het x,y,z -assenstelsel en p_{xt} , p_{yt} en p_{zt} via het r,s,t -assenstelsel.

```
[> Toetsing resultaten
> simplify(px - pxt);                                0                                (1)
> simplify(py - pyt);                                0                                (2)
> simplify(pz - pzt);                                0                                (3)
```

Figuur 8 Toetsing van resultaten van vergelijking 1, 2 en 3. (Maple script)

4. Conclusie & Aanbevelingen

Conclusie

Dit rapport staat in het teken van de Sanders-Koiter vergelijkingen. Er is nagegaan of de vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn. Dat wil zeggen dat de vergelijkingen onafhankelijk zijn van het gekozen assenstelsel. De hoofdvraag is als volgt:

Zijn de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk?

Om antwoord te kunnen geven op de bovenstaande vraag is een wiskundig bewijs opgesteld. In dat bewijs zijn de resultaten van twee verschillende assenstelsel met elkaar vergeleken. Als voorbeeld is hieronder vergelijking 13 voor de rek weergegeven. De andere Sanders-Koiter vergelijkingen zijn terug te vinden in tabel 1, 2 en 3. Elke vergelijking is net als de onderstaande vergelijking uitgedrukt in twee coördinatensysteem. In het bewijs is de onderste vergelijking uitgedrukt in grootheden van de bovenste vergelijking. Hierdoor is het mogelijk de twee resultaten met elkaar te vergelijken. Door de resultaten met elkaar te vergelijken is aangetoond dat de twee vergelijkingen hetzelfde resultaat geven.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_{xx}u_z + k_x u_y$$
$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} - k_{rr}u_t + k_r u_s$$

Doordat is aangetoond dat de twee resultaten aan elkaar gelijk zijn is bewezen dat de Sanders-Koiter vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn.

Om het mogelijk te maken dat de twee resultaten met elkaar vergeleken kunnen worden, is er een verband tussen de twee assenstelsel vastgelegd. Het r,s,t-assenstelsel kan worden gevonden door een rotatie om de z-as van het x,y,z-assenstelsel. Om de vergelijking in het ene assenstelsel uit te drukken in grootheden uit het andere assenstelsel is van belang om te weten hoe elke grootheid roteert. Daarop is elke grootheid herschreven in een tensor, zodat een rotatiematrix kan worden bepaald. Hieronder staan twee voorbeelden van tensoren en hun rotaties.

Uit het proces om de rotatiematrices te vinden, zijn twee opvallende dingen naar voren gekomen. De rotatie van de krommingstensor in het vlak bleek anders te roteren dan verwacht. De richtingen van de krommingen moesten anders worden aangenomen. In de onderstaande krommingstensor is dat goed te zien. k_y moet in x-richting worden aangenomen en k_x in y-richting. Dit was van te voren niet geanticipeerd.

Daarnaast in uitgebreider gekeken naar de membraamtensor. De rotatie van de asymmetrische membraamtensor is bepaald. Dat is hieronder weergegeven. Tevens is gekeken naar een symmetrische membraam tensor met $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$. De transformatieregels van deze symmetrische matrix kunnen ook gevonden worden met de asymmetrische tensor. Met de transformatieregels van de asymmetrische tensor is ook gebleken dat $n_{xy} - n_{yx}$ invariant bij een rotatie om de z-as.

$$\begin{bmatrix} k_s \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_y \\ k_x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} n_{rr} & n_{rs} \\ n_{sr} & n_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{xy} \\ n_{yx} & n_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Het bewijs geeft dus niet alleen antwoord op de vraag of de vergelijkingen rotatieonafhankelijk zijn, maar ook op de vraag hoe elke matrix roteert.

Aanbevelingen

Om elke grootheid te kunnen roteren is de tensornotatie geïntroduceerd. Hierdoor is het overzichtelijker hoe een grootheid roteert. Het is alleen niet eenvoudig om de Sanders-Koiter vergelijkingen te herschrijven in tensoren. Dit heeft te maken met twee zaken. Ten eerste zijn de grootheden te herschrijven als verschillende tensoren; vectoren met drie rijen of matrices van 2 bij 2. Dit maakt het lastig om de Sanders-Koiter vergelijkingen als geheel te herschrijven in tensoren. Ten tweede komen in een groot aantal vergelijkingen een bepaalde combinatie van termen voor. Neem bijvoorbeeld vergelijk 7, de vergelijking voor de normaalkracht in het x-vlak, hier komen de termen ε_{xx} en ε_{yy} voor. De vergelijking is terug te vinden in tabel 3. Een vermenigvuldig van een tensor met de rektensor geeft met de huidige kennis deze twee termen op dezelfde rij.

Desalniettemin moet het op een of andere manier wel mogelijk zijn om de Sanders-Koiter vergelijkingen wel te herschrijven in tensoren. Het antwoord ligt waarschijnlijk in het gebruik van hogere orde tensoren. Echter gaat dit te ver om in dit rapport te bestuderen en uit te voeren.

Aan het begin van dit rapport is gesteld dat er in dit rapport niet wordt gekeken naar hoe de Sanders-Koiter vergelijkingen kunnen worden herleid. Nu alle rotatiematrices bekend zijn, is toch wel interessant gebleken om te weten waarom een grootheid nou op een bepaalde manier roteert. Zo is naar voren gekomen dat $n_{xy} - n_{yx}$ invariant is bij een rotatie om de z-as. Nu is wiskundig bekend waarom dit zo is, maar het ook interessant om de fysische betekenis van $n_{xy} - n_{yx}$ te achterhalen. Daarmee kan misschien fysische gezien herleid worden waarom $n_{xy} - n_{yx}$ invariant bij een rotatie om de z-as is.

5. Discussie

Aan het eind van elk bewijs worden de twee resultaten met elkaar vergeleken. Deze twee resultaten zijn gedefinieerd als dat ze zich in het x,y,z -assenstelsel bevinden. Ze zouden dus alleen uit termen met x , y en z moeten bestaan. Wanneer een vergelijking uit een partiële afgeleide bestaat, moet de grootheid waarvan de afgeleide wordt genomen uitgedrukt worden in x , y en z . Om vervolgens ook de afgeleide in het tweede assenstelsel te kunnen nemen moet deze grootheid worden uitgedrukt in r , s en t . Dit gebeurt door x , y en z uit te drukken in r , s en t . Dit levert aan het eind een probleem op.

Als de afgeleide van een grootheid wordt genomen wordt dan vallen r , s en t eruit. Echter wordt niet van dezelfde grootheid in elke vergelijking de afgeleide genomen. In deze termen blijven dus r , s en t staan. Maple legt de beperking op dat r , s en t niet kunnen worden uitgedrukt in x , y en z . Dit komt doordat dit al eerder andersom is vastgelegd, om de partiële afgeleide te kunnen nemen in het r , s en t assenstelsel.

Toch is zijn de twee resultaten aan het eind hetzelfde. Om de rede dat het resultaat uit het x,y,z -assenstelsel nogmaals wordt berekend en hierin x , y en ook zijn uitgedrukt in r , s en t . Het is wiskundig niet helemaal correct om dit als eindresultaat te leveren. Immers moeten de resultaten volledig zijn uitgedrukt in termen met x , y en z . Het t eenvoudigst zou zijn als r , s en t uitgedrukt worden in x , y en z . Echter legt Maple hier een beperking op. Dit komt doordat x , y , z eerder als zijn uitgedrukt in r , s en t . Andersom is hierdoor niet mogelijk en geeft een foutmelding.

Dit zou wel opgelost kunnen worden door restart toe te voegen aan eind van het bewijs. Dan worden alle berekende waarden gewist. Hetgeen betekend dat de voorgaande resultaten gekopieerd moeten worden en r , s en t uit te drukken in x , y en z . Wat nu wel mogelijk is, omdat Maple als het voorgaande vergeet. Nu staan beide resultaten volledig in x , y en z termen. Alleen is dit niet een hele nette manier om het Maple-script te schrijven. Zonder deze extra stap wordt ook het juiste resultaat gevonden. Het dus niet nodig bevonden om dit voor elk bewijs te doen.

6. Bibliografie

- Blaauwendraad, J., & Hoefakker, J. H. (2014). *Structural Shell Analysis*. Delft: Springer Science+Business Media Dordrecht.
- Brannon, R. (2003, oktober 29). *Mohr's Circle and more circles*.
- Concrete shell. (2020, januari 24). Opgeroepen op mei 9, 2020, van Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Concrete_shell
- Continuum mechanics. (sd). *Continuum mechanics*. Opgeroepen op mei 10, 2020, van Rotation Matrices: <https://www.continuummechanics.org/rotationmatrix.html>
- Delft, T. (sd). Logo TU Delft. *Logo TU Delft*. Technische Universiteit Delft, Delft.
- Gramoll, K. (sd). *Mechanics - theory*. Opgeroepen op mei 12, 2020, van ecourses: https://www.ecourses.ou.edu/cgi-bin/eBook.cgi?doc=&topic=me&chap_sec=07.1&page=theory
- Hartsuijker, C. (2015). *Toegepaste Mechanica* (Vol. Deel 2 Spanningen, vervormingen, verplaatsingen). Amsterdam: Boom uitgevers.
- Hoogenboom, P. (2019). *CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application Handouts*.
- Isotropie. (2018, juli 18). Opgeroepen op juni 7, 2020, van Wikipedia: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Isotropie>
- Orthogonale matrix. (2019, mei 18). Opgeroepen op mei 10, 2020, van Wikipedia: https://nl.wikipedia.org/wiki/Orthogonale_matrix
- Orthotroop. (2019, september 9). Opgeroepen op juni 7, 2020, van Wikipedia: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Orthotroop#:~:text=Een%20materiaal%20is%20orthotroop%20wanneer,een%20bijzondere%20vorm%20van%20anisotropie>
- Pantheon (Rome). (2020, april 26). Opgeroepen op mei 9, 2020, van Wikipedia: [https://nl.wikipedia.org/wiki/Pantheon_\(Rome\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Pantheon_(Rome))
- Welleman, H., & Hartsuijker, C. (2018, Januari). *Module: Spanningsleer en Bezwijkmodellen*. TU Delft, Faculteit Civiele Techniek.
- Welleman, J. (2017, Januari). CTB2210 : Elasticiteitsleer.

Bijlage A: Bewijsvoeringen

Bewijs voor vergelijking 1, 2 en 3

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> nx := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> ny := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> nx := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> ny := d1 + d2·x + d3·y + d4·z :
> vx := e1 + e2·x + e3·y + e4·z :
> vy := f1 + f2·x + f3·y + f4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> px := -diff(nxx, x) - diff(nyx, y) - ky·(nxx - nyy) - kx·(nxy + nyx) + kxx·vx + kxy·vy :
> py := -diff(nyy, y) - diff(nxy, x) - kx·(nyy - nxx) - ky·(nxy + nyx) + kyy·vy + kxy·vx :
> pz := -kxx·nxx - kxy·(nxy + nyx) - kyy·nyy - diff(vx, x) - diff(vy, y) - ky·vx - kx·vy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> vr := vx·cos(varphi) + vy·sin(varphi) :
> vs := -vx·sin(varphi) + vy·cos(varphi) :
> krr :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) + \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> kss :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) - \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> krs :=  $-\frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> nrr :=  $\frac{1}{2} \cdot (nxx + nyy) + \frac{1}{2} \cdot (nxx - nyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + \frac{nxy + nyx}{2} \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> nss :=  $\frac{1}{2} \cdot (nxx + nyy) - \frac{1}{2} \cdot (nxx - nyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - \frac{nxy + nyx}{2} \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> nrs :=  $\frac{nxy - nyx}{2} - \frac{1}{2} \cdot (nxx - nyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + \frac{nxy + nyx}{2} \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> nsr :=  $\frac{nyx - nxy}{2} - \frac{1}{2} \cdot (nxx - nyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + \frac{nxy + nyx}{2} \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := -ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> pr := -diff(nrr, r) - diff(nsr, s) - ks·(nrr - nss) - kr·(nrs + nsr) + krr·vr + krs·vs :
> ps := -diff(nss, s) - diff(nrs, r) - kr·(nss - nrr) - ks·(nrs + nsr) + kss·vs + krs·vr :
> pt := -krr·nrr - krs·(nrs + nsr) - kss·nss - diff(vr, r) - diff(vs, s) - ks·vr - kr·vs :
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> pxt := pr·cos(-varphi) + ps·sin(-varphi) :
> pyt := -pr·sin(-varphi) + ps·cos(-varphi) :
> pzt := pt :
> Toetsing resultaten
> simplify(px - pxt);

```

$$\left[\begin{array}{l} \textcolor{red}{> \textit{simplify}(py - pyt);} \\ \textcolor{blue}{0} \end{array} \right. \quad \textbf{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \textcolor{red}{> \textit{simplify}(pz - pzt);} \\ \textcolor{blue}{0} \end{array} \right. \quad \textbf{(3)}$$

Bewijs voor vergelijking 4, 5 en 6

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> mxx := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> myy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> mxy := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> Nxy = nxy-nyx
> vx := diff(mxx, x) + diff(mxy, y) + ky·(mxx - myy) + 2·kx·mxy :
> vy := diff(myy, y) + diff(mxy, x) + kx·(myy - mxx) + 2·ky·mxy :
> Nxy := -kxy·(mxx - myy) + (kxx - kyy)·mxy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> mrr := 1/2 · (mxx + myy) + 1/2 · (mxx - myy) · cos(2·varphi) + mxy·sin(2·varphi) :
> mss := 1/2 · (mxx + myy) - 1/2 · (mxx - myy) · cos(2·varphi) - mxy·sin(2·varphi) :
> mrs := - 1/2 · (mxx - myy) · sin(2·varphi) + mxy·cos(2·varphi) :
> krr := 1/2 · (kxx + kyy) + 1/2 · (kxx - kyy) · cos(2·varphi) + kxy·sin(2·varphi) :
> kss := 1/2 · (kxx + kyy) - 1/2 · (kxx - kyy) · cos(2·varphi) - kxy·sin(2·varphi) :
> krs := - 1/2 · (kxx - kyy) · sin(2·varphi) + kxy·cos(2·varphi) :
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := - ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> vr := diff(mrr, r) + diff(mrs, s) + ks·(mrr - mss) + 2·kr·mrs :
> vs := diff(mss, s) + diff(mrs, r) + kr·(mss - mrr) + 2·ks·mrs :
> Nrs := -krs·(mrr - mss) + (krr - kss)·mrs :
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> vxt := vr·cos(-varphi) + vs·sin(-varphi) :
> vyt := -vr·sin(-varphi) + vs·cos(-varphi) :
> Nxyt := Nrs :
> Toetsing resultaten
> simplify(vx - vxt);
0 (1)
> simplify(vy - vyt);
0 (2)
> simplify(Nxy - Nxyt);
0 (3)

```

Bewijs voor vergelijking 7, 8 en 9

```

[> restart;
[> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
[> Nxy = 1/2 (nxy + nyx)
[=
[> nxx :=  $\frac{E \cdot t}{1 - v^2} (exx + v \cdot eyy)$  :
[=
[> nyy :=  $\frac{E \cdot t}{1 - v^2} (eyy + v \cdot exx)$  :
[=
[> Nxy :=  $\frac{E \cdot t}{2(1 + v)} \cdot gxy$  :
[> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
[=
[> exy :=  $\frac{gxy}{2}$  :
[=
[> err :=  $\frac{1}{2} \cdot (exx + eyy) + \frac{1}{2} \cdot (exx - eyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + exy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
[=
[> ess :=  $\frac{1}{2} \cdot (exx + eyy) - \frac{1}{2} \cdot (exx - eyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - exy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
[=
[> ers :=  $-\frac{1}{2} \cdot (exx - eyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + exy \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
[=
[> grs := 2 · ers ;
[> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
[=
[> nrr :=  $\frac{E \cdot t}{1 - v^2} (err + v \cdot ess)$  :
[=
[> nss :=  $\frac{E \cdot t}{1 - v^2} (ess + v \cdot err)$  :
[=
[> Nrs :=  $\frac{E \cdot t}{2(1 + v)} \cdot grs$  :
[> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
[=
[> nxxt :=  $\frac{1}{2} \cdot (nrr + nss) + \frac{1}{2} \cdot (nrr - nss) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) + Nrs \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
[=
[> nyxt :=  $\frac{1}{2} \cdot (nrr + nss) - \frac{1}{2} \cdot (nrr - nss) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) - Nrs \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
[=
[> Nxyt :=  $-\frac{1}{2} \cdot (nrr - nss) \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) + Nrs \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi})$  :
[> Toetsing resultaten
[> simplify(nxx - nxxt);
[=
[> simplify(nyy - nyxt);
[=
[> simplify(Nxy - Nxyt);
[=

```

0

(1)

0

(2)

0

(3)

Bewijs voor vergelijking 10, 11 en 12

```

> restart :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
=
>  $m_{xx} := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot K_{xx} + \nu \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} K_{yy} :$ 
=
>  $m_{yy} := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot K_{yy} + \nu \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} K_{xx} :$ 
=
>  $m_{xy} := \frac{E \cdot t^3}{24(1 + \nu)} \cdot p_{xy} :$ 
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
>  $K_{xy} := \frac{p_{xy}}{2} :$ 
=
>  $K_{rr} := \frac{1}{2} \cdot (K_{xx} + K_{yy}) + \frac{1}{2} \cdot (K_{xx} - K_{yy}) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + K_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) :$ 
=
>  $K_{ss} := \frac{1}{2} \cdot (K_{xx} + K_{yy}) - \frac{1}{2} \cdot (K_{xx} - K_{yy}) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - K_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) :$ 
=
>  $K_{rs} := -\frac{1}{2} \cdot (K_{xx} - K_{yy}) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + K_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) :$ 
>  $pr_s := 2 \cdot K_{rs} :$ 
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
=
>  $m_{rr} := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot K_{rr} + \nu \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} K_{ss} :$ 
=
>  $m_{ss} := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot K_{ss} + \nu \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} K_{rr} :$ 
=
>  $m_{rs} := \frac{E \cdot t^3}{24(1 + \nu)} \cdot pr_s :$ 
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
>  $m_{xxt} := \frac{1}{2} \cdot (m_{rr} + m_{ss}) + \frac{1}{2} \cdot (m_{rr} - m_{ss}) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) + m_{rs} \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) :$ 
=
>  $m_{yyt} := \frac{1}{2} \cdot (m_{rr} + m_{ss}) - \frac{1}{2} \cdot (m_{rr} - m_{ss}) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) - m_{rs} \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) :$ 
=
>  $m_{xyt} := -\frac{1}{2} \cdot (m_{rr} - m_{ss}) \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) + m_{rs} \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) :$ 
> Toetsing resultaten
>  $\text{simplify}(m_{xx} - m_{xxt})$ 
0 (1)
>  $\text{simplify}(m_{yy} - m_{yyt})$ 
0 (2)
>  $\text{simplify}(m_{xy} - m_{xyt})$ 
0 (3)

```

Bewijs voor vergelijking 13, 14 en 15

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> ux := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> uy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> uz := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> exx := diff(ux, x) - kxx·uz + kx·uy :
> eyy := diff(uy, y) - kyy·uz + ky·ux :
> gxy := diff(ux, y) + diff(uy, x) - 2 kxy·uz - kx·ux - ky·uy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> ur := ux·cos(varphi) + uy·sin(varphi) :
> us := -ux·sin(varphi) + uy·cos(varphi) :
> ut := uz :
> krr :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) + \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> kss :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) - \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> krs :=  $-\frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := -ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> err := diff(ur, r) - krr·ut + kr·us :
> ess := diff(us, s) - kss·ut + ks·ur :
> grs := diff(ur, s) + diff(us, r) - 2 krs·ut - kr·ur - ks·us :
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> ers :=  $\frac{grs}{2}$  :
> exxt :=  $\frac{1}{2} \cdot (err + ess) + \frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) + ers \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> eyyt :=  $\frac{1}{2} \cdot (err + ess) - \frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) - ers \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> exyt :=  $-\frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) + ers \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> gxyt := 2·exyt :
> Toetsing resultaten
> simplify(exx - exxt);
0 (1)
> simplify(eyy - eyyt);
0 (2)
> simplify(gxy - gxyt);
0 (3)

```

Bewijs voor vergelijking 16, 17 en 18

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> ux := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> uy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> uz := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> fx := -diff(uz, x) - kxx·ux - kxy·uy :
> fy := -diff(uz, y) - kyy·uy - kxy·ux :
> fz :=  $\frac{1}{2} (-diff(ux, y) + diff(uy, x) - kx·ux + ky·uy) :$ 
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> ur := ux·cos(varphi) + uy·sin(varphi) :
> us := -ux·sin(varphi) + uy·cos(varphi) :
> ut := uz :
> krr :=  $\frac{1}{2} · (kxx + kyy) + \frac{1}{2} · (kxx - kyy) · \cos(2·varphi) + kxy·\sin(2·varphi) :$ 
> kss :=  $\frac{1}{2} · (kxx + kyy) - \frac{1}{2} · (kxx - kyy) · \cos(2·varphi) - kxy·\sin(2·varphi) :$ 
> krs :=  $-\frac{1}{2} · (kxx - kyy) · \sin(2·varphi) + kxy·\cos(2·varphi) :$ 
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := -ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> fr := -diff(ut, r) - krr·ur - krs·us :
> fs := -diff(ut, s) - kss·us - krs·ur :
> ft :=  $\frac{1}{2} (-diff(ur, s) + diff(us, r) - kr·ur + ks·us) :$ 
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> fxt := fr·cos(-varphi) + fs·sin(-varphi) :
> fyt := -fr·sin(-varphi) + fs·cos(-varphi) :
> fzt := ft :
> Toetsing resultaten
> simplify(fx - fxt);
0 (1)
> simplify(fy - fyt);
0 (2)
> simplify(fz - fzt);
0 (3)

```

Bewijs voor vergelijking 19, 20 en 21

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> fx := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> fy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> fz := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> Kxx := diff(fx, x) - kxy·fz + kx·fy :
> Kyy := diff(fy, y) + kxy·fz + ky·fx :
> pxy := diff(fx, y) + diff(fy, x) + (kxx - kyy)·fz - kx·fx - ky·fy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> fr := fx·cos(varphi) + fy·sin(varphi) :
> fs := -fx·sin(varphi) + fy·cos(varphi) :
> ft := fz :
> krr :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) + \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> kss :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) - \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> krs :=  $-\frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := -ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> Krr := diff(fr, r) - krs·ft + kr·fs :
> Kss := diff(fs, s) + krs·ft + ks·fr :
> prs := diff(fr, s) + diff(fs, r) + (krr - kss)·ft - kr·fr - ks·fs :
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> Krs :=  $\frac{prs}{2}$  :
> Kxxt :=  $\frac{1}{2} \cdot (Krr + Kss) + \frac{1}{2} \cdot (Krr - Kss) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) + Krs \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> Kyyt :=  $\frac{1}{2} \cdot (Krr + Kss) - \frac{1}{2} \cdot (Krr - Kss) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) - Krs \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> Kxyt :=  $-\frac{1}{2} \cdot (Krr - Kss) \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) + Krs \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> pxyt := 2·Kxyt :
> Toetsing resultaten
> simplify(Kxx - Kxxt);
0 (1)
> simplify(Kyy - Kyyt);
0 (2)
> simplify(pxy - pxyt);

```

L

0

(3)

Bijlage B: Alternatief bewijs voor vergelijking 1, 2 en 3

Bij dit bewijs van vergelijking 1, 2 en 3 is zijn n_{xy} en n_{yx} vervangen door $\frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx})$ en $n_{xy} - n_{yx}$.

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> Nxy1 = 1/2 (nxy + nyx)
> Nxy2 = nxy - nyx
> nxx := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> nyy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> Nxy1 := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Nxy2 := d1 + d2·x + d3·y + d4·z :
> vx := e1 + e2·x + e3·y + e4·z :
> vy := f1 + f2·x + f3·y + f4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> px := -diff(nxx, x) - diff((Nxy1 - 1/2 · Nxy2), y) + kxx·vx + kxy·vy - ky·(nxx - nyy) - kx
·2 Nxy1 :
> py := -diff(nyy, y) - diff((Nxy1 + 1/2 · Nxy2), x) + kyy·vy + kxy·vx - kx·(nyy - nxx) - ky·2
· Nxy1 :
> pz := -kxx·nxx - kxy·2 · Nxy1 - kyy·nyy - diff(vx, x) - diff(vy, y) - ky·vx - kx·vy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> vr := vx·cos(varphi) + vy·sin(varphi) :
> vs := -vx·sin(varphi) + vy·cos(varphi) :
> krr := 1/2 · (kxx + kyy) + 1/2 · (kxx - kyy) · cos(2·varphi) + kxy·sin(2·varphi) :
> kss := 1/2 · (kxx + kyy) - 1/2 · (kxx - kyy) · cos(2·varphi) - kxy·sin(2·varphi) :
> krs := -1/2 · (kxx - kyy) · sin(2·varphi) + kxy·cos(2·varphi) :
> nrr := 1/2 · (nxx + nyy) + 1/2 · (nxx - nyy) · cos(2·varphi) + Nxy1·sin(2·varphi) :
> nss := 1/2 · (nxx + nyy) - 1/2 · (nxx - nyy) · cos(2·varphi) - Nxy1·sin(2·varphi) :
> Nrs1 := -1/2 · (nxx - nyy) · sin(2·varphi) + Nxy1·cos(2·varphi) :
> Nrs2 := Nxy2 :
> ks := ky·cos(varphi) + kx·sin(varphi) :
> kr := -ky·sin(varphi) + kx·cos(varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> pr := -diff(nrr, r) - diff((Nrs1 - 1/2 · Nrs2), s) + krr·vr + krs·vs - ks·(nrr - nss) - kr·2
·Nrs1 :
> ps := -diff(nss, s) - diff((Nrs1 + 1/2 · Nrs2), r) + kss·vs + krs·vr - kr·(nss - nrr) - ks·2

```

```

|      ·Nrs1 :
|> pt := -krr·nrr - krs·2·Nrs1 - kss·nss - diff(vr, r) - diff(vs, s) - ks·vr - kr·vs :
|> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
|> pxt := pr·cos(-varphi) + ps·sin(-varphi) :
|> pyt := -pr·sin(-varphi) + ps·cos(-varphi) :
|> pzt := pt :
|> Toetsing resultaten
|> simplify(px - pxt);
|                                     0                                     (1)
|> simplify(py - pyt);
|                                     0                                     (2)
|> simplify(pz - pzt);
|                                     0                                     (3)

```

Bijlage C: Discussiepunt

Bij bewijs voor vergelijking 13, 14 en 15 is er aan het restart toegevoegd om de resultaten in x, y en z coördinaten te hebben.

```

> restart :
> Taylorpolynoom voor partiële afgeleiden
> ux := a1 + a2·x + a3·y + a4·z :
> uy := b1 + b2·x + b3·y + b4·z :
> uz := c1 + c2·x + c3·y + c4·z :
> Vergelijking invullen in x,y,z-assenstelsel
> exx := diff(ux, x) - kxx·uz + kx·uy :
> eyy := diff(uy, y) - kyy·uz + ky·ux :
> gxy := diff(ux, y) + diff(uy, x) - 2 kxy·uz - kx·ux - ky·uy :
> Rotatie x, y en z voor partiële afgeleiden
> x := r·cos(varphi) - s·sin(varphi) :
> y := r·sin(varphi) + s·cos(varphi) :
> z := t :
> Rotatie grootheden naar r,s,t-coördinaten
> ur := ux·cos(varphi) + uy·sin(varphi) :
> us := -ux·sin(varphi) + uy·cos(varphi) :
> ut := uz :
> krr :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) + \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> kss :=  $\frac{1}{2} \cdot (kxx + kyy) - \frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi}) - kxy \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi})$  :
> krs :=  $-\frac{1}{2} \cdot (kxx - kyy) \cdot \sin(2 \cdot \text{varphi}) + kxy \cdot \cos(2 \cdot \text{varphi})$  :
> kr := kx·cos(-varphi) + ky·sin(-varphi) :
> ks := -kx·sin(-varphi) + ky·cos(-varphi) :
> Vergelijking invullen in r,s,t-assenstelsel
> err := diff(ur, r) - krr·ut + kr·us :
> ess := diff(us, s) - kss·ut + ks·ur :
> grs := diff(ur, s) + diff(us, r) - 2 krs·ut - kr·ur - ks·us :
> Rotatie grootheden naar x,y,z-coördinaten
> ers :=  $\frac{grs}{2}$  :
> exxt :=  $\frac{1}{2} \cdot (err + ess) + \frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) + ers \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> eyyt :=  $\frac{1}{2} \cdot (err + ess) - \frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi}) - ers \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> exyt :=  $-\frac{1}{2} \cdot (err - ess) \cdot \sin(-2 \cdot \text{varphi}) + ers \cdot \cos(-2 \cdot \text{varphi})$  :
> gxyt := 2·exyt :
> Toetsing resultaten
> simplify(exx - exxt);
0 (1)
> simplify(eyy - eyyt);
0 (2)
> simplify(gxy - gxyt);
0 (3)

```

```

> restart :
> Alle resultaten staan in r,s en t
> exx := ((-c2 r - c3 s) kxx + kx (b2 r + b3 s)) cos(φ) + ((c2 s - c3 r) kxx + kx (-b2 s
+ b3 r)) sin(φ) + (-c4 t - c1) kxx + (b4 t + b1) kx + a2 :
> eyy := ((-c2 r - c3 s) kyy + ky (a2 r + a3 s)) cos(φ) + ((c2 s - c3 r) kyy + ky (-a2 s
+ a3 r)) sin(φ) + (-c4 t - c1) kyy + (a4 t + a1) ky + b3 :
> gxy := ((-2 c2 r - 2 c3 s) kxy + (-a2 r - a3 s) kx - ky (b2 r + b3 s)) cos(φ) + ((2 c2 s
- 2 c3 r) kxy + (a2 s - a3 r) kx - ky (-b2 s + b3 r)) sin(φ) + (-2 c4 t - 2 c1) kxy + (-a4 t - a1) kx + (-b4 t - b1) ky + a3 + b2 :
> exxt := ((-c2 r - c3 s) kxx + kx (b2 r + b3 s)) cos(φ) + ((c2 s - c3 r) kxx + kx (-b2 s
+ b3 r)) sin(φ) + (-c4 t - c1) kxx + (b4 t + b1) kx + a2 :
> eyyt := ((-c2 r - c3 s) kyy + ky (a2 r + a3 s)) cos(φ) + ((c2 s - c3 r) kyy + ky (-a2 s
+ a3 r)) sin(φ) + (-c4 t - c1) kyy + (a4 t + a1) ky + b3 :
> gxyt := ((-2 c2 r - 2 c3 s) kxy + (-a2 r - a3 s) kx - ky (b2 r + b3 s)) cos(φ) + ((2 c2 s
- 2 c3 r) kxy + (a2 s - a3 r) kx - ky (-b2 s + b3 r)) sin(φ) + (-2 c4 t - 2 c1) kxy + (-a4 t - a1) kx + (-b4 t - b1) ky + a3 + b2 :
> Rotatie r,s en t, zodat resultaten in x, y en z zijn
> r := x*cos(varphi) + y*sin(varphi) :
> s := -x*sin(varphi) + y*cos(varphi) :
> t := z :
> Toetsing resultaten
> simplify(exx - exxt);
0 (4)
> simplify(eyy - eyyt);
0 (5)
> simplify(gxy - gxyt);
0 (6)

```

Bijlage D: Potentiële tensoren

In deze bijlage staan de potentiële tensoren weergegeven. Dit was de eerste stap in de route om het bewijs te vinden dat de Sanders-Koiter vergelijking rotatieonafhankelijk zijn. In het vervolg van de berekeningen is gebleken, dat ze niet nodig bleken te zijn.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ k_{xy} & k_{yy} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} - k_y & -\frac{\partial}{\partial y} - k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ n_{xy} - n_{yx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} - k_y & k_y & -\frac{\partial}{\partial y} - 2k_x \\ k_x & -\frac{\partial}{\partial y} - k_x & -\frac{\partial}{\partial x} - 2k_y \\ -k_{xx} & -k_{yy} & -2k_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ n_{xy} - n_{yx} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + k_y & -k_y & \frac{\partial}{\partial y} + 2k_x \\ -k_x & \frac{\partial}{\partial y} + k_x & \frac{\partial}{\partial x} + 2k_y \\ -k_{xy} & k_{xy} & (k_{xx} - k_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ \frac{1}{2}(n_{xy} + n_{yx}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Et}{1-v^2} & v \frac{Et}{1-v^2} & 0 \\ v \frac{Et}{1-v^2} & \frac{Et}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et}{2(1+v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-v^2)} & v \frac{Et^3}{12(1-v^2)} & 0 \\ v \frac{Et^3}{12(1-v^2)} & \frac{Et^3}{12(1-v^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et^3}{24(1+v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \rho_{xy} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & k_x & -k_{xx} \\ k_y & \frac{\partial}{\partial y} & -k_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial y} - k_x & \frac{\partial}{\partial x} - k_y & -2k_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_{xx} & -k_{xy} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -k_{xy} & -k_{yy} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y} + k_x) & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + k_y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \rho_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -k_x & -k_{xy} \\ k_y & \frac{\partial}{\partial y} & k_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y} - k_x & \frac{\partial}{\partial x} - k_y & k_{xx} - k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bijlage E: Beeldverslagen

28-04-2020 (Startvergadering)

Op 28-04-2020 stond de start meeting gepland. Er waren wat opstart problemen, omdat het gesprek via skype moest worden gedaan. Uiteindelijk hebben we toch met zijn drieën een startvergadering kunnen houden. De begeleiders waren overwegend tevreden. Er was een opmerking over de tijdsplanning. De tip was om de start van de berekeningen wat meer naar voren te schuiven om aan het eind tijdnoed te voorkomen. Daarnaast is was er in het plan van aanpak nog ruimte voor verbetering met betrekking tot de uit te voeren berekeningen. Echter zal zich ook vanzelf meer wijzen naarmate meer materiaal is bestudeerd en er meer kennis is van het onderwerp. De student heeft ook al wat inhoudelijke vragen gesteld over waar de kandidaat al tegen aanliep. Bijvoorbeeld wat er bedoeld wordt met; ‘Aantonen dat potentiële tensoren inderdaad tensoren zijn’. De eerste begeleider heeft aangegeven nog wat extra materiaal op te sturen. De praktische zaken zijn ook nog even aanbod gekomen. Zoals hoe de eindpresentatie wordt gehouden in deze tijden van coronacrisis. Er is afgesproken om elke week een skype vergadering in te plannen. De eerstvolgende vergadering is ingepland voor 04-05-2020.

04-05-2020

Aan de hand van het extra materiaal had de student een aantal vragen. Zo waren er verschillende vragen over de grootheden die voorkomen in de formules. De vragen waren onder andere waarom zijn n_{xy} en n_{yx} ongelijk en wat zijn de Lamé parameters. Er waren ook een aantal vragen over begrippen die voorkwamen in het extra materiaal. Mogelijke aanpakken zijn ook besproken; de student vroeg of het mogelijk was eigenwaarden te berekenen te kijken of ze onafhankelijk zijn van het gekozen assenstelsel. De betekenis van de transformatieregels van de cirkel van Mohr is besproken. Als de transformatieregels op een tensor kunnen worden toegepast dan is het daadwerkelijk een tensor. Er zijn wat tips gegeven hoe te beginnen met het verslag en meer structuur te krijgen; begin bijvoorbeeld met kleine stukjes en probeer niet te veel tegelijk. De volgende vergadering is weer voor de volgende maandag ingepland.

11-05-2020

De week voor deze vergadering zijn de Sanders-Koiter vergelijkingen herschreven naar tensoren. Er is tussentijds contact geweest tussen de student en de begeleiders of de tensoren juist zijn. Er was enige verwarring over of het tensoren met 2 of 3 rijen moeten worden. Er was de voorkeur voor tensoren met 3 rijen i.v.m. met het feit dat de een aantal van de tensoren in 3D is. Er was nog steeds wat onduidelijkheid over k_x en k_y , de kromming in het vlak. Deze tensoren zijn mede afhankelijk de Lamé parameters waar voorgaande week al vragen over waren. Daarnaast was het een vergadering waar veel besproken is over de toekomstige berekeningen. De student gaf aan dat ze nog steeds geen volledig beeld had bij de aanpak. Aan de hand daarvan kwam naar voren dat de eerste begeleider wel een werkwijze in de gedachte had. Er is afgesproken om na de vergaderingen hierover nog contact te hebben. Daarnaast zijn er veel begrippen met betrekking tot tensoren aangehaald, zoals orthonormale matrix en coaxiale matricen. Dit was ter verbreding van de kennis en het had niet altijd direct verband met de onderzoeksvraag. Er is afgesproken om het tussenrapport op 15-05-2020 in te leveren. De volgende vergadering staat gepland op 18-05-2020 voor de tussenpeiling.

18-05-2020 (Tussenpeiling)

Tijdens deze vergadering zijn aan de hand van het tussenrapport een paar belangrijke zaken besproken. Als eerste is benadrukt dat er meer gebruikt moeten worden gemaakt van literatuurverwijzingen. Er kan beter te veel verwijzingen gebruikt dan te weinig. Anders is sprake van plagiaat en dat kan absoluut niet. Ten tweede is gekeken hoe bepaalde stellingen beter geformuleerd kunnen worden. Zo mag niet worden gezegd dat de dit onderzoek nog nooit is uitgevoerd, omdat dat niet zeker is. Ten derde zijn zaken met betrekking tot de figuren besproken. Waar moeten bepaalde figuren komen te staan; bij tekst in het hoofddeel of kan een figuur in de bijlage gezet worden. Na de vergadering moet gestart worden met het leveren van bewijs. Begin met de vergelijkingen die het eenvoudigst te bewijzen zijn, zoals de constitutieve vergelijkingen. De volgende vergadering is gepland voor 25-05-2020.

25-05-2020

In de week voorafgaand aan deze vergadering heeft de student alle bewijzen kunnen oplossen. Van elke grootheid is nu bekend hoe de roteert en is aangetoond dat de vergelijkingen onafhankelijk zijn van rotatie. Uit deze berekeningen zijn een aantal vragen naar voren gekomen. De student heeft de week zogenaamde potentiële tensoren opgesteld. Deze bleken uiteindelijk niet van nut te zijn voor de bewijzen. De vraag was dan ook wat te doen met deze tensoren. Het antwoord was dat ze in het rapport moeten blijven staan, zodat elke stap zichtbaar is en ook die misschien niet nuttig leek te zijn. Nu wiskundige gezien bekend is hoe elke grootheid roteert kan eventueel nog gekeken worden waarom een grootheid op die manier roteert. Dat is zeker voor de tensor van de kromming in het vlak een interessante vraag. Daarnaast kaartte de student aan dat ze het lastig vond hoe ze de hoofdvraag kon formuleren. Als tip werd gegeven om het woord rotatieonafhankelijk of objectief te gebruiken.

05-06-2020

Voor de vergadering had de student geschreven materiaal gestuurd, waarin stond hoe de tekst rondom de bewijsvoering eruit moet komen te zien en de conclusie. Een van de begeleiders gaf aan dat de tekst rondom de bewijsvoeringen beter moest aansluiten op de rest van het rapport. Het advies was om niet overbodig dingen op te schrijven en hou het bondig. Een van de begeleiders gaf aan dat de conclusie er anders uit moest komen te zien. Er moest niet alleen antwoord worden gegeven op de hoofdvraag, maar ook subvragen die beantwoord konden worden. Daarnaast moest aanbevelingen worden toegevoegd en mogelijk een discussie. Daarnaast is er nog inhoudelijk ingegaan op de tekst rondom de bewijsvoeringen. Er kwamen twee belangrijke dingen aan de orde; de tensor voor de normaalkrachten tensor en rotatie van de tensor van de kromming in het vlak. Dit zijn nog twee vraagstukken die moeten worden bekeken. Ten eerste klopt op dit moment de normaalkrachten tensor niet. Er wordt op dit moment een asymmetrische normaalkrachtentensor aangenomen, maar dit klopt volgens de wiskunde niet. Een asymmetrische tensor kan niet op dezelfde manier geroteerd worden als een symmetrische tensor. Hier moet na de vergadering nog verder na gekeken worden. Ten tweede nogmaals gekeken worden naar de rotatie van k_x en k_y . Het antwoord kan mogelijk worden door de grootheden uit te drukken in andere parameters en van deze parameters de rotatie te bepalen. De student had ook nog een aantal vragen over de planning met betrekking het inleveren en de presentatie. Het inleveren staat gepland voor 15 juni een week voor de presentatie. De begeleiders hebben nog de mogelijkheid om hier feedback op te geven, zodat de student het vóór de presentatie kan verbeteren. De presentatie is gepland voor 22 juni 10 uur met alléén de twee begeleiders. Dit kan nog veranderen als wordt besloten studenten toch gaan meekijken met andermans presentatie.

Dit was de laatste vergadering voor het inleveren van de BEP en het geven van de presentatie.

Bijlage F: Startnotitie

Sanders-Koiter vergelijkingen

Onderzoeksvraag

Zijn de Sanders-Koiter vergelijkingen wel juist?

Probleemstelling

De Sanders-Koiter vergelijkingen worden gebruikt om het gedrag van schalen te beschrijven. Schalen worden gedefinieerd als platen die een kromming hebben. Door deze kromming is het veel complexer om schalen te modelleren. Er zijn daarom 21 vergelijkingen nodig het gedrag van een gekromd vlak te beschrijven. Met de vergelijkingen wordt kennis verschaft van de optredende spanningen en vervormingen. De vergelijkingen zijn een model voor het assenstelsel met als assen de principiële richtingen. Maar wat gebeurt als het assenstelsel wordt getransleerd of geroteerd? Geven de vergelijkingen nog steeds het hetzelfde resultaat in een ander assenstelsel?

Doel

Er wordt bewijs geleverd dat de Sanders-Koiter vergelijkingen kloppen. De vergelijkingen worden getoetst op het feit dat geldt dat de resultaten niet mogen afhangen van het assenstelsel. De resultaten moeten voor elk willekeurig assenstelsel gelijk zijn. Als dit niet het geval is dan is zijn de vergelijkingen niet juist.

Plan van aanpak

- 1) Inleiding
 - a) Onderzoeksvraag
 - b) Probleemstelling
 - c) Doel
- 2) Schalentheorie bestuderen
 - a) Uitleg van Sanders-Koiter vergelijkingen
 - b) Toepassingsgebied van Sanders-Koiter vergelijkingen
- 3) Tensoren en tensortransformaties opfrissen/bestuderen
- 4) Transformatieformules
 - a) Grafische methode (Cirkel van Mohr)
 - b) Analytische methode
- 5) (Maple T.A. opfrissen)
- 6) Vergelijkingen herschrijven in tensoren
- 7) Rotatiematrix opstellen
- 8) Tensoren transformeren middels rotatiematrix.
- 9) Berekening uitvoeren met getransformeerde vergelijkingen
- 10) Berekening uitvoeren met niet-getransformeerde vergelijkingen
- 11) Het resultaat van de niet-getransformeerde vergelijkingen transformeren middels rotatiematrix
- 12) Resultaten vergelijken van de twee berekeningen
- 13) Conclusie
- 14) Zelfevaluatie

Tijdsplanning

Week 4.1	• Startnotitie schrijven • Onderwerp verkennen • Kennis opfrissen met betrekking tot onderwerp • Literatuuronderzoek uitvoeren (loopt door in week 2)	
Week 4.2	• Vergelijkingen verder bestuderen • Informatie verwerken en structureren • Informatie verwerken voor eindrapport	
Week 4.3	• Vergelijkingen herschrijven in tensoren en matrices	
Week 4.4	• Rotatiematrix opstellen	Tussenrapport inleveren: 15 mei (eind van de week)
Week 4.5	• Tensoren transformeren middels rotatiematrix	
Week 4.6	• Berekeningen met getransformeerde en niet-getransformeerde tensoren uitvoeren • Het resultaat van de niet-getransformeerde vergelijkingen transformeren middels rotatiematrix • Resultaten leveren	
Week 4.7	• Resultaten afronden • Conclusie	
Week 4.8	• Zelfevaluatie • Voorwoord, inleiding en samenvatting • Afronden verslag	
Week 4.9	• Presentatie voorbereiden	Eindrapport inleveren: 15 juni (begin van de week)
Week 4.10		Presentatie: 22/23 juni (begin van de week)