

De Optimale Koepel

Kris Riemens 1365924

CT 3000-09 Bachelor Eindwerk
21-10-2011

Eindverslag



Begeleiders:

Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom

Ir. S. Pasterkamp

Inhoudsopgave

1. Voorwoord.....	4
2. Inleiding.....	5
3. Een stukje geschiedenis.....	6
4. Theorie en aanpak.....	8
4.1 Krachten in een koepel.....	8
4.2 Eisen voor optimale koepel.....	8
4.3 Aannames en randvoorwaarden.....	9
4.4 Knik.....	9
4.5 Kromtestraal.....	10
4.6 Aanpak berekening optimale koepel.....	11
5. Vorm van de koepel.....	14
5.1 Paraboloïde koepelvorm.....	14
5.2 Kettinglijn koepelvorm.....	16
5.3 Ellipsoïde koepelvorm.....	19
5.4 Aangepaste bolvormige koepelvorm.....	22
6. Variëren van de dikte van de koepel.....	24
6.1 Dikte lineair laten toenemen.....	24
6.2 Dikte kwadratisch laten toenemen.....	26
7. Conclusie.....	28
7.1 Effect andere koepelvorm kiezen.....	28
7.2 Effect dikte variëren.....	29
7.3 Toepassing praktijk.....	30
7.4 Aanbevelingen.....	31
Bijlage 1 - Literatuurlijst.....	32
Bijlage 2 - Paraboloïde koepel.....	33
Bijlage 3 - Kettinglijn koepel.....	35
Bijlage 4 - Ellipsoïde koepel.....	38
Bijlage 5 - Aangepaste bolvormige koepel.....	41
Bijlage 6 - Dikte variëren.....	43

1. Voorwoord

Voor u ligt het Bachelor Eindwerk verslag van mij, Kris Riemens, dat is geschreven in het kader van het vak CT3000-09 aan de Technische Universiteit Delft. Het onderwerp, ‘de optimale koepel’ heb ik gekozen omdat het mij een uitdagend onderwerp leek en er blijkbaar nog geen meest optimale oplossing voor was.

Eenvoudig was het zeker niet, regelmatig moest ik langs mijn begeleiders gaan om mijn resultaten te controleren en vaak bleek dat ik toch iets over het hoofd had gezien. Graag wil ik dan ook begeleiders dhr. P.C.J. Hoogenboom en dhr. S. Pasterkamp bedanken voor hun uitleg, commentaar en suggesties. Uiteindelijk was het gelukt om op een optimaler resultaat te komen dan uit reeds eerdere pogingen volgde.

Het was voor mij dan ook een uitdagend onderzoek waar ik bovendien ook veel van geleerd heb. Hopende dat u dit een interessant verslag gaat vinden en het met plezier gaat lezen.

2. Inleiding

Van een boog is bekend dat de minste hoeveelheid materiaal nodig is als de hoogte 40% van de overspanning bedraagt. Voor een koepel is dergelijke optimale hoogte bij een bepaalde overspanning, minder eenvoudig te bepalen en afhankelijk van gekozen randvoorwaarden en wat de maatgevende eis zal zijn. Dit zal het onderwerp zijn van dit verslag.

Het doel is het bepalen van de optimale koepelhoogte bij variabele overspanning, (zodanig dat het benodigde materiaal minimaal is en de koepel zijn eigen gewicht nog kan dragen). Om er voor te zorgen dat het onderzoek meer gefocust en niet te uitgebreid wordt, zullen diverse aannames gedaan worden die in hoofdstuk 4 staan uitgelegd.

Reeds zijn er eerdere pogingen gedaan met behulp van numerieke en analytische methodes om de optimale koepelvorm te bepalen[1] [3] [4]. De vraag is of deze pogingen hebben geleid tot de echte optimale oplossing en of er geen ruimte is voor verbetering. (Door bijvoorbeeld met bepaalde randvoorwaarden te ‘spelen’.)

Concreet zal onderzocht worden of de analytische oplossing voorgesteld door Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom in zijn ‘*Notes on Shell Structures*’ (blz. 27-29) [1] verbeterd kan worden door de vorm van de koepel aan te passen of de dikte variabel te maken. In de conclusie worden de gevonden resultaten samengevat.

3. Een stukje geschiedenis

Als sinds de oudheid hebben mensen koepels gebouwd. Het zijn opmerkelijke bouwconstructies aangezien koepels grote overdekte ruimtes creëren zonder kolommen onder de koepel zelf daarbij nodig te hebben.

Een van de meest bekende koepels is de koepel van het Pantheon. Deze is in het jaar 126 na Chr. gebouwd in Rome. De koepel is gemaakt van een licht soort beton en heeft een diameter van 43,4m en een hoogte van 21,6m.



Figure 1 Koepel van het Pantheon van bovenaf en van binnen

Een ander voorbeeld is de koepel van de Hagia Sophia in Istanboel gemaakt in het jaar 536. Dit is een voormalige kathedraal en moskee en tegenwoordig een museum. De koepel heeft een diameter van 31,4m en de top bevindt zich op een hoogte van ongeveer 54m.



Figure 2 Hagia Sophia

In het jaar 1675 werd 'St. Paul's Cathedral' in Londen gemaakt. Dit gebouw heeft een indrukwekkende koepel met een diameter van 35m en een hoogte van 15,25m.



Figure 3 St. Paul's Cathedral

Een wat modernere koepel is de zogenaamde Tacoma Dome in Tacoma (Washington, Amerika) gebouwd in 1981-1983. Opmerkelijk aan deze koepel is dat hij van hout gemaakt is, hij heeft maar liefst een diameter van 161,5m en een hoogte van 48m.

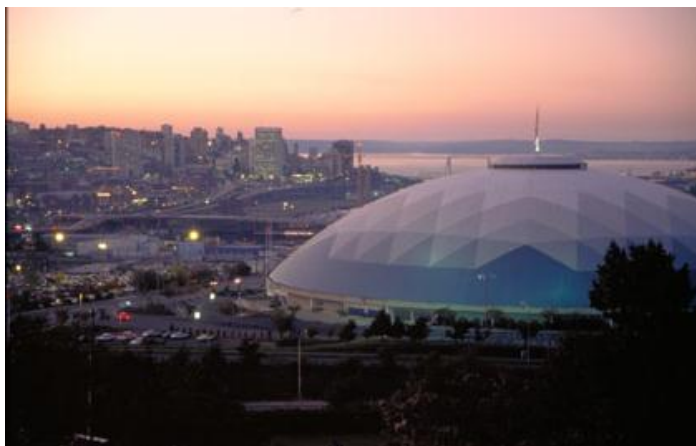


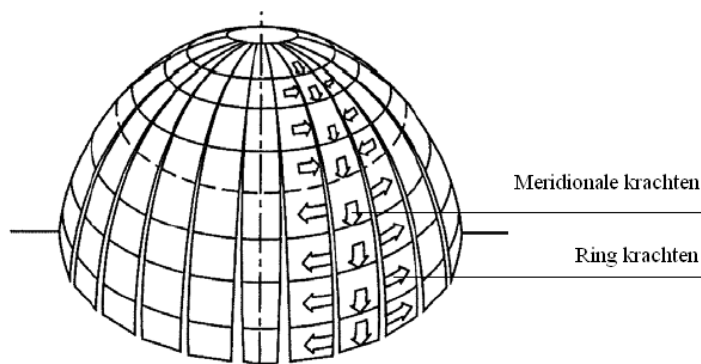
Figure 4 Tacoma Dome

De voorbeelden laten zien dat grote koepels mogelijk zijn. Niet alleen zijn ze architectonisch gezien fascinerend om naar te kijken, ze bieden functioneel gezien ook veel voordelen. Het blijft echter een uitdaging om grote koepels te bouwen en een belangrijk aspect hierbij is het zo het benodigde materiaal zo klein mogelijk te houden. Hier zal dieper op in worden gegaan.

4. Theorie en aanpak

4.1 Krachten in een koepel

In een koepelconstructie wordt de belasting afgedragen door schijfkrachten. Er zijn 2 soorten schijfkrachten, ‘meridionale’ krachten (van boven naar onder) en ‘ring’ krachten in de horizontale richting. In een goed ontworpen koepelconstructie zijn er geen momenten nodig om de belasting af te dragen omdat deze door de ring krachten worden ‘teruggetrokken’ [1].



**Figure 5 Krachten in een koepel (fig. afkomstig uit:
Notes on Shell Structures (2011) en bewerkt)**

Aan de onderkant van de koepel zullen echter alsnog momenten optreden als de koepel aan de onderkant is ingeklemd. Dit komt omdat de koepel door de normaalkrachten wilt vervormen terwijl de opleggingen niet van plek kunnen veranderen.

4.2 Eisen voor optimale koepel

Belangrijk is de vraag wat precies onder ‘optimaal’ wordt verstaan. In eerste instantie zou men misschien denken aan een koepel die zijn eigen gewicht draagt zodanig dat de druk op elke plek even groot is (een zogenaamde ‘*fully stressed dome*’) [2]. Zo’n koepel is echter niet optimaal als men bij een gegeven overspanning een koepel wil verkrijgen, waarbij het benodigde materiaal zo klein mogelijk is. Dit komt omdat een koepel met een grotere verhouding tussen hoogte en overspanning $\left(\frac{s}{l}\right)$ leidt tot lagere spanningen en veel kleinere diktes, wat in minder materiaal volume resulteert [1]. In dit verslag wordt een koepel optimaal genoemd als deze zich zelf nog net kan dragen en het volume van het benodigd materiaal zo klein mogelijk is.

4.3 Aannames en randvoorwaarden

Om er voor te zorgen dat het onderzoek meer gefocust en niet te uitgebreid wordt, zullen enkele aannames / randvoorwaarden gemaakt worden zoals:

- dat er alleen rekening hoeft worden gehouden met het eigen gewicht van de koepel
- dat het geen GNL (geometrisch niet-lineair) berekening wordt en het materiaal waar de koepel van gemaakt zal worden zich lineair elastisch gedraagt¹
- dat de koepel aan de onderkant zit ingeklemd (momentvast)²
- dat de koepel symmetrisch is en vanaf bovenaf gezien rond is
- dat knik in de meridionale richting de maatgevende eis is³
- dat er geen rekening gehouden hoeft te worden met de praktische uitvoering (zoals dat er bijvoorbeeld voldoende dekking is op de wapening) Het theoretisch optimum kan worden toegepast op verschillende materialen.

4.4 Knik

In de constructieleer wordt knik gezien als een vorm van instabiliteit die tot bezwijken leidt.

Zoals eerder vermeld, zal knik in de meridionale richting als de maatgevende eis worden beschouwd (zie Fig. 6). Er wordt uitgegaan van de volgende formule voor de kritische normaal spanning [1] [2]:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{C \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{E \cdot t}{a}$$

$$\text{Met: } C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \approx 10$$

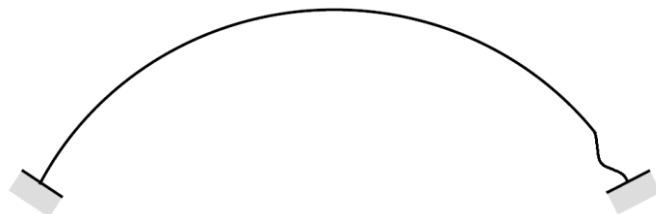


Figure 6 Knik in koepel in meridionale richting (in Paint gemaakt)

Hierin is:

σ_{cr} de kritische normaalspanning waarvoor de koepel (bijna) zal knikken [N/m²]

E de elasticiteitsmodulus van het materiaal [N/m²]

t de dikte van de koepel [m]

a de kromtestraal (zie volgende pagina voor meer uitleg) [m]

C de zogenaamde 'knock down factor' voor de imperfectie gevoeligheid [-]

ν de dwarscontractiecoëfficiënt (ook wel Poisson-factor genoemd) [-]

¹ Dit betekent dat het materiaal zich aan de wet van Hooke houdt: $\sigma = E\varepsilon$

² Deze aanname wordt gemaakt omdat de formule voor knik die later gebruikt gaat worden, alleen van toepassing is bij ingeklemde koepels en er geen formule bekend is voor koepels met scharnierende/rol-opleggingen.

³ Volgens Hoogenboom (2011) [1] kan worden aangetoond dat dunne koepels door eigen gewicht eerst zullen knikken voordat ze scheuren. Daarnaast kan naar aanleiding van de resultaten van het onderzoek van M. El Marini (2011) [4] worden aangenomen dat de meridionale richting i.p.v. de horizontale richting maatgevend is bij knik.

4.5 Kromtestraal

De kromtestraal a speelt een belangrijke rol bij het analyseren van koepels, het is een maat voor de kromming van een bepaalde lijn of een vlak. De kromtestraal die in de formule voor de knik bedoeld is, is voor de onderkant van de koepel en voor punten die tussen de top en de onderkant liggen, gedefinieerd als de lengte van de lijn loodrecht op dat punt naar de middellijn van de koepel (zie Fig.7).

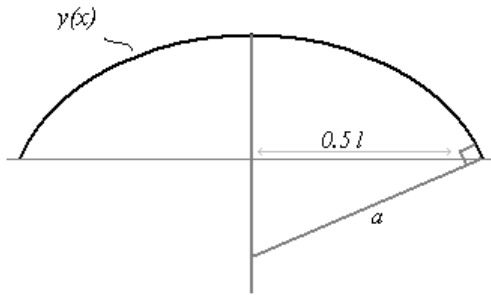


Figure 7 Bepaling kromtestraal (in Paint gemaakt)

Als men de kromtestraal op een bepaald punt wilt bepalen dient de afgeleide $y'(x)$ in dat punt bepaald te worden, vervolgens kan a berekend worden met de formule:

$$a = x \cdot \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{-(y'(x))}$$

Indien men de kromtestraal aan de onderkant van de koepel wilt bepalen hoeft men voor x alleen $\frac{1}{2} l$ in te vullen:

$$a = \left(\frac{1}{2} l\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(y'\left(\frac{1}{2} l\right)\right)^2}}{-\left(y'\left(\frac{1}{2} l\right)\right)}$$

Met deze methode blijft de kromtestraal in de top echter niet gedefinieerd terwijl deze toch een waarde heeft. Hiervoor gebruiken we een andere formule[1]:

$$a_{top} = -\frac{1}{k} \quad \text{met} \quad k = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

4.6 Aanpak berekening optimale koepel

In zijn ‘*Notes on Shell Structures*’ (blz. 27-29) stelt Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom een analytische oplossing voor, om de optimale koepelhoogte te bepalen. Bij deze oplossing was echter aangenomen dat de vorm van de koepel een *bolvormige kap* is en de dikte van de koepel constant bleef.

Onderzocht gaat worden of het toepassen van een andere vorm voor de koepel of het toepassen van een variabele dikte kan leiden tot een ‘*optimalere*’ oplossing waarbij dus minder materiaal volume nodig is terwijl de koepel zijn eigen gewicht nog wel kan dragen. Op basis van het benodigd materiaal volume zullen de resultaten die hieruit volgen worden vergeleken met de eerder gevonden oplossing van Hoogenboom. Hiervoor is het belangrijk de methode van Hoogenboom toe te lichten, omdat dezelfde methode zal worden gebruikt voor het berekenen van de ‘nieuwe’ koepelvormen.

Allereerst wordt de vorm van de koepel 2-dimensionaal beschreven met een functie voorschrift. Het is alsof men kijkt tegen een dwarsdoorsnede in het midden van de koepel. Door deze vorm om de y-as te draaien verkrijgt men de gewenste koepel. In dit verslag wordt gekozen om te werken met het volgende assenstelsel waarbij de oorsprong het punt in het midden van de koepel aan de onderkant is:

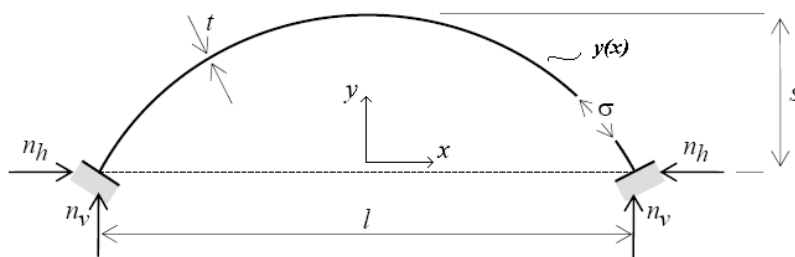


Figure 8 Koepelvorm beschreven als functie van x
(fig. afkomstig uit *Notes on Shell Structures* (2011) en bewerkt)

De vorm van de koepel wordt bepaald door het functievoorschrift. Zo zal bijvoorbeeld voor een parabolische vorm het functievoorschrift $y = cx^2 + s$ horen (dit zal ook een van de nieuwe vormen zijn die zal geanalyseerd worden).

Vervolgens dient het oppervlakte van de koepel bepaald te worden. Dit kan men doen door de zogenaamde ‘*area of surface of revolution*’ (oppervlakte van omwentelingslichaam) te bepalen[5]. Als de koepel beschreven wordt met de functie $y(x)$ in het eerder genoemde assenstelsel, geldt voor de oppervlakte van de koepel:

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}l} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Hierna dienen de oplegreacties n_v en n_h t.g.v. de normaalspanning berekend te worden. Voor de verticale oplegreactie geldt dat deze gelijk is aan het gewicht van de koepel gedeeld door de omtrek aan de onderkant van de koepel. De horizontale oplegreactie is afhankelijk van hoe groot n_v is en hoe steil de koepel is aan de onderkant⁴. Er geldt:

$$n_v = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{\pi \cdot l} = \frac{A \cdot t \cdot \rho \cdot g}{\pi \cdot l}$$

$$n_h = - \frac{n_v}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{1}{2}l}}$$

Hierin is:

n_v	de verticale oplegreactie [N/m]
n_h	de horizontale oplegreactie [N/m]
V	het volume van de koepel [m ³]
A	de oppervlakte van de koepel [m ²]
ρ	de dichtheid van het materiaal [kg/m ³]
g	de zwaartekrachtversnelling [m/s ²]
t	de dikte van de koepel [m]
l	de overspanning [m]

Als de oplegreacties bekend zijn kan de optredende normaal spanning (de meridionale spanning) bepaald worden met de formule:

$$\sigma = \frac{1}{t} \sqrt{n_v^2 + n_h^2}$$

⁴ Hoewel er aan de onderkant van de koepel momenten zullen ontstaan zoals in 4.1 is uitgelegd, hebben deze geen invloed op de richting van de horizontale oplegreactie t.g.v. de normaalspanning.

Hoewel t in de formule staat voor de normaal spanning, zal blijken dat die spanning toch niet afhangt van de dikte aangezien de t wegvalt tegen de t uit de oplegreacties. Uit de eerder genoemde formule voor de kritische normaal spanning blijkt echter wel dat er een dikte t is waarvoor de koepel bijna zal knikken:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{C \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{E \cdot t}{a} \Rightarrow t = C \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\sigma \cdot a}{E}$$

Men kan nu de formule voor de optredende normaal spanning substitueren in de formule voor t . Voor het volume V van de koepel geldt uiteraard:

$$V = A \cdot t$$

Voor de meeste functievoorschriften zal nu een bepaalde verhouding tussen hoogte en overspanning (s/l) bestaan waarvoor het volume minimaal is en de spanning onderin de koepel net niet groter is dan de kritische normaal spanning. De bedoeling is deze optimale verhouding te bepalen. Als deze bekend is, kan men van die specifieke koepelvorm de optimale koepelhoogte bepalen bij elke gegeven overspanning.

Bij een koepel in de vorm van een *bolvormige kap* (die in ons gekozen assenstelsel kan beschreven worden met de functie: $y = \sqrt{a^2 - x^2} + s - a$) en met constante dikte, zoals is voorgesteld door Hoogenboom, blijkt de optimale verhouding tussen hoogte en overspanning als volgt te zijn:

$$\frac{s}{l} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.289$$

Voor deze verhouding zal (gegeven de voorwaardes) de koepel ‘optimaal’ zijn en dus het volume benodigd materiaal zo klein mogelijk zijn. De formule voor het volume van deze ‘*bolvormige kap*’ koepel blijkt uit alle formules en vergelijkingen als volgt te zijn:

$$V = \frac{2}{27} \cdot C \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot l^4}{E}$$

Hier worden nieuwe koepelvormen en koepels met variabele diktes die onderzocht zullen worden mee vergeleken.

5. Vorm van de koepel

5.1 Paraboloïde koepelvorm

De eerste nieuwe koepelvorm die onderzocht zal worden is een koepel in de vorm van een paraboloïde⁵ en kan beschreven worden met de volgende formule:

$$y = cx^2 + s$$

met:

y = hoogte

$x = 0$ is het midden van de koepel

s = hoogte van de top van de koepel

$$c = -\frac{4 \cdot s}{l^2}$$

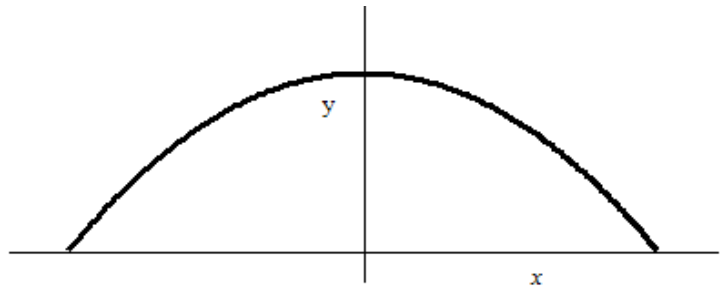


Figure 9 Voorbeeld van een grafiek van $y(x)$

Uit de berekeningen volgt dat er een bepaalde verhouding $\frac{s}{l}$ bestaat waarvoor de koepel zijn eigen gewicht nog net kan dragen en het volume minimaal is⁶:

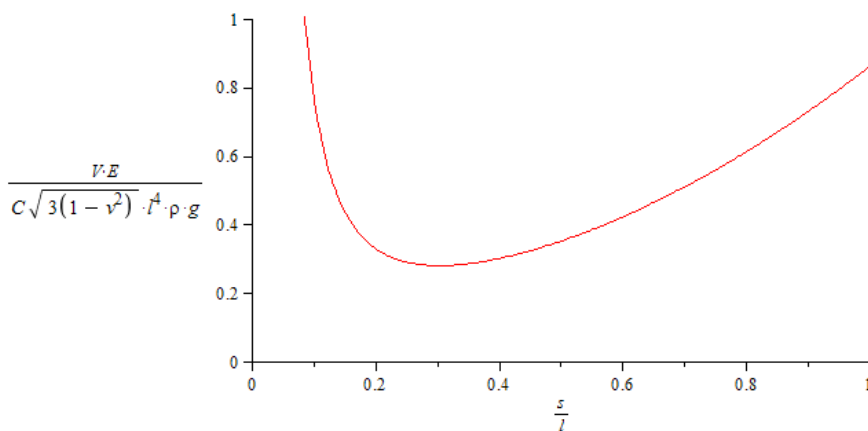


Figure 10 Materiaal volume V als functie van verhouding s/l

Deze optimale verhouding blijkt te zijn: $\frac{s}{l} \approx 0.303$ en hangt niet af van het materiaal E , v , ρ , de overspanning l of de gravitatie versnelling g . Daarnaast volgt ook uit de berekeningen dat de spanning in de top niet groter is dan de kritische spanning in de top⁷.

⁵ Naast de paraboloïde vorm zijn ook vormen onderzocht met functievoorschriften $y = cx^n + s$ (met $n > 2$), hoewel in eerste instantie optimaler, bleken deze achteraf toch af te vallen omdat de kromtestraal in de top naar oneindig ging. Vervolgens zijn ook vormen met functievoorschriften $y = cx^n + bx^2 + s$ (waarbij de a_{top} niet naar oneindig gaat) onderzocht, bij deze bleek echter dat σ_{cr} overschreden werd tussen de top en de onderkant en dus ook af vielen.

⁶ Zie Bijlage 2.1 Berekening optimale koepelhoogte

⁷ Zie Bijlage 2.2 Controle spanning top

De uiteindelijke vorm van de optimale paraboloid koepel ziet er als volgt uit:

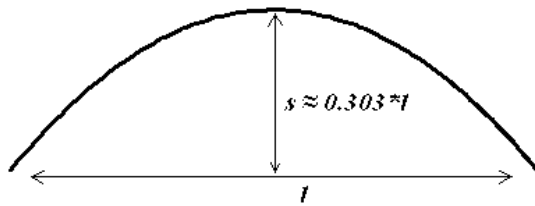


Figure 11 Optimale paraboloid vorm

Deze paraboloid koepelvorm is echter niet minder materiaal nodig dan de optimale bolvormige koepelvorm aangezien bij voor elke overspanning blijkt te gelden⁸:

$$\frac{V_{\text{optimale paraboloid}}}{V_{\text{optimaal bolvormig}}} \cdot 100\% = 121.09\%$$

Als men voor deze paraboloid koepelvorm kiest, zal men dus ongeveer 21.09% meer materiaal nodig hebben dan als men voor de optimale bolvormige koepelvorm kiest. Samengevat volgt uit de berekeningen dat de paraboloid koepel de volgende eigenschappen heeft:

Functie voorschrift	$y = -\frac{1.212}{l}x^2 + 0.303 l$
Optimale verhouding hoogte en overspanning	$\frac{s}{l} \approx 0.303$
Oppervlakte koepel	$A = \frac{\pi(l^2c^2 + 1)^{3/2} - 1}{6c^2}$ met $c = -\frac{4s}{l^2}$
Spanning onderkant	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{(l^2c^2 + 1)}}{\pi c l}$
Kromtestraal onderkant	$a = \frac{1}{8} \frac{l^2 \sqrt{1 + \frac{16s^2}{l^2}}}{s}$
Dikte	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$
Materiaal volume t.o.v bolvormige koepelvorm	121,09%

⁸ Zie Bijlage 2.3 Volume percentage

5.2 Kettinglijn koepelvorm

Een homogene kabel die hangt tussen 2 punten zal een zogenaamde ‘kettinglijn’ vorm aannemen. Dit is een bijzondere vorm aangezien er op die manier geen buigende momenten optreden, alleen trekkrachten. In een boog in de vorm van een omgekeerde kettinglijn zouden op dezelfde manier geen buigende momenten optreden, slechts drukkrachten. De vraag is hoe optimaal een koepel zou zijn met een omgekeerde kettinglijn vorm. Een dergelijke koepel kan met de volgende functie⁹ worden beschreven:

$$y = -a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a_{top}}\right) + a_{top} + s$$

Met:

y = de hoogte

$x = 0$ is het midden van de koepel

s = hoogte koepel bij de top

a_{top} = kromtestraal van de top

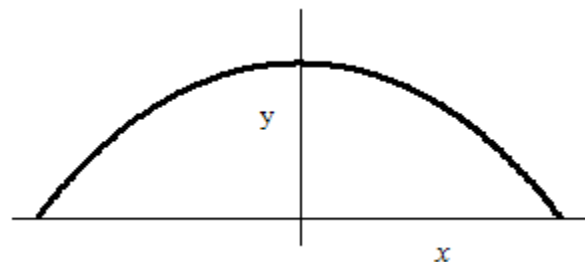


Figure 12 Voorbeeld van een grafiek van $y(x)$

Aan de uiteindes van de koepel is de hoogte uiteraard nul. Als het midden van de koepel zich bij $x = 0$ bevindt, dan bevindt het uiteinde zich bij $x = \frac{l}{2}$. Zodoende moet er aan de volgende vergelijking worden voldaan:

$$-a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{\frac{l}{2}}{a_{top}}\right) + a_{top} + s = 0$$

Het probleem is dat de parameter a_{top} (de kromtestraal in de top) niet analytisch kan worden uitgedrukt in de rest van de vergelijking. Hierdoor zal eerst moeten worden bepaald bij welke kromtestraal in de top de koepelvorm optimaal is en kan pas daarna bepaald worden welke hoogte s en verhouding s/l bij deze optimale vorm horen. Wel is bekend dat de kromtestraal in de top recht evenredig moet zijn met de overspanning. Zodoende is er een constante c waarvoor geldt: $a_{top} = c \cdot l$

⁹ ‘cosh’ staat voor de ‘cosinus hyperbolicus’ functie. Er geldt: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Uit de berekeningen volgt dat er een bepaalde waarde voor c bestaat waarvoor de koepel zijn eigen gewicht nog net kan dragen en het volume minimaal is¹⁰:

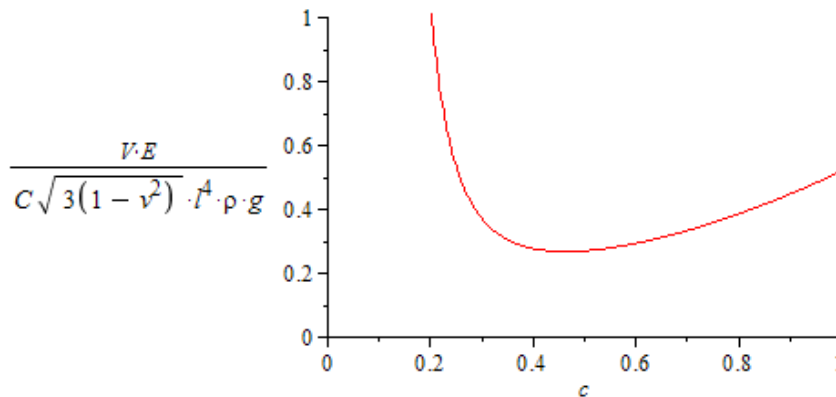


Figure 13 Materiaal volume V als functie van c

Deze waarde blijkt: $c \approx 0.463$ Hierdoor is bij de optimale vorm: $a_{top} \approx 0.463 \cdot l$

Invullen in:

$$-a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{\frac{1}{2}l}{a_{top}}\right) + a_{top} + s = 0$$

geeft:

$$-0.463 \cdot l \cdot \cosh\left(\frac{\frac{1}{2}l}{0.463 \cdot l}\right) + 0.463 \cdot l + s = -0.2972575815 \cdot l + s$$

$$\Rightarrow s \approx 0.297 \cdot l$$

De optimale verhouding blijkt te zijn: $s/l \approx 0.297$ en hangt niet af van het materiaal E , v , ρ , de overspanning l of de gravitatie versnelling g . Daarnaast volgt uit de berekeningen ook dat de spanning in de top niet de kritische spanning overschrijdt¹¹. De uiteindelijke vorm van de optimale 'kettinglijn' koepel ziet er als volgt uit:

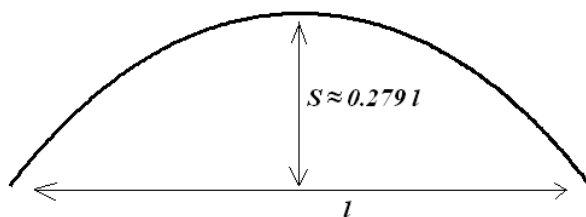


Figure 14 Optimale kettinglijn koepelvorm

¹⁰ Zie Bijlage 3.1 Berekening optimale koepelhoogte

¹¹ Zie Bijlage 3.2 Controle spanning in de top

Hoewel deze ‘kettinglijn’ koepelvorm beter blijkt dan de paraboloïde koepelvorm, is deze koepelvorm echter alsnog niet beter dan de optimale bolvormige koepelvorm. Er blijkt voor elke overspanning te gelden¹²:

$$\frac{V_{\text{optimale kettinglijn}}}{V_{\text{optimaal bolvormig}}} \cdot 100\% = 115.26\%$$

Als men voor deze ‘kettinglijn’ koepelvorm kiest, zal men dus 15.26% meer materiaal nodig hebben dan als men voor de optimale bolvormige koepelvorm kiest. Samengevat volgt uit de berekeningen dat de *kettinglijn* koepelvorm de volgende eigenschappen heeft:

Functie voorschrift	$y = -0.463 l \cosh\left(\frac{2.160 x}{l}\right) + 0.760 l$
Optimale verhouding	$\frac{s}{l} \approx 0.297$
Oppervlakte koepel	$A = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}l} x \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{x}{c}\right)^2} dx$ met $c \approx 0.463$
Spanning onderkant	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)^2 + 1\right)}}{\pi l \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)}$
Kromtestraal onderkant	$a = \frac{1}{2} \frac{l \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)^2}}{\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)}$
Dikte	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$
Materiaal volume t.o.v bolvormige koepelvorm	115,26%

¹² Zie Bijlage 3.3 Volume percentage

5.3 Ellipsoïde koepelvorm

De volgende koepelvorm die onderzocht wordt is die van een halve ellipsoïde. Bijzonder aan deze koepelvorm is dat de onderkant van de koepel loodrecht op de grond staat. Deze vorm kan beschreven worden met de functie:

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{c}$$

Met:

y = hoogte

$x = 0$ is het midden van de koepel

a = kromtestraal onderkant van de koepel

s = hoogte van de top van de koepel

$$c = \frac{\sqrt{a^2}}{s}$$

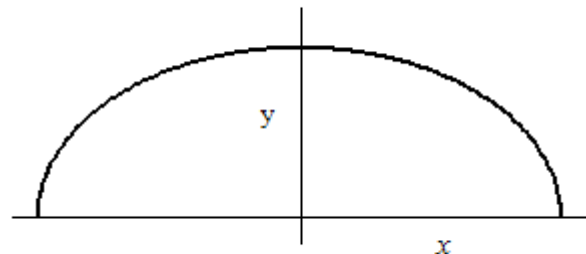


Figure 15 Voorbeeld van een grafiek van $y(x)$

Uit de berekeningen¹³ volgt dat als men kijkt naar de spanningen aan de onderkant van de koepel, er geen optimale verhouding s/l bestaat waarbij het volume minimaal is. Dit komt omdat naarmate de verhouding s/l kleiner wordt, het benodigd volume materiaal ook kleiner wordt terwijl de kritieke spanning onder in de koepel niet wordt overschreden.

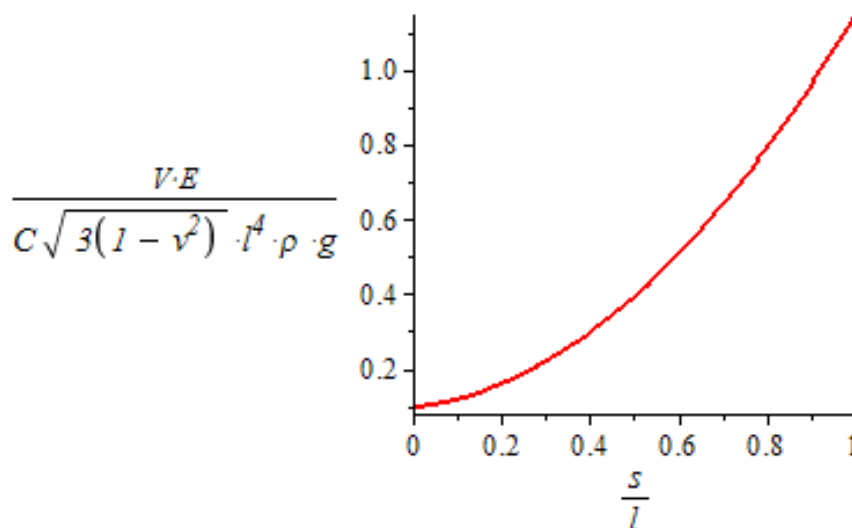


Figure 16 Materiaal volume V als functie van s/l

¹³ Zie Bijlage 4.1 Berekening optimale koepelhoogte

Op een gegeven moment zal echter de optredende spanning in de top groter worden dan de kritieke spanning in de top. Dit komt omdat de kromtestraal van de top toeneemt naarmate de verhouding s/l kleiner wordt. Het blijkt dus dat de spanning in de top maatgevend is.

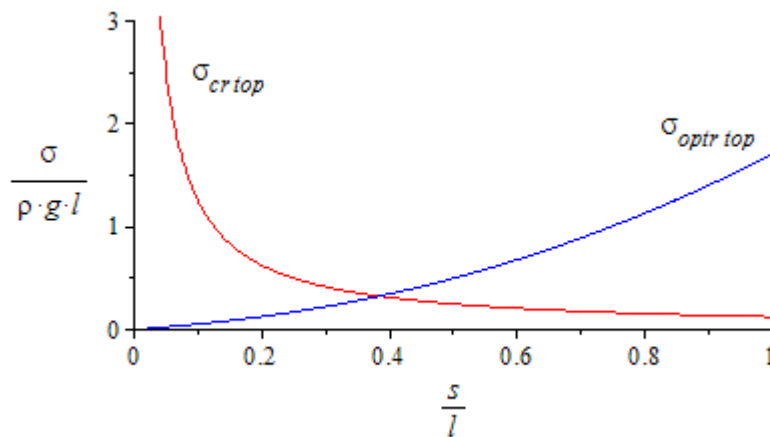


Figure 17 Optredende en kritieke spanning als functie van s/l

Het punt waarbij de optredende spanning in de top nog net niet de kritieke spanning overschrijdt is bij $s/l \approx 0.384$. Dit is de optimale verhouding voor deze ellipsoïde vorm en hangt niet af van het materiaal E , ν , ρ , de overspanning l of de gravitatie versnelling g . De uiteindelijke optimale koepelvorm ziet er dan als volgt uit:

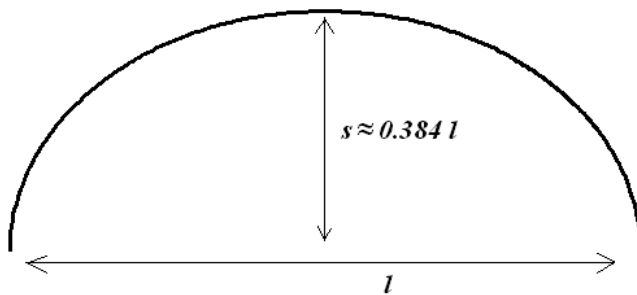


Figure 19 Optimale ellipsoïde koepelvorm

Helaas blijkt echter dat ook deze koepelvorm niet optimaler is dan de optimale bolvormige koepelvorm. Er blijkt voor elke overspanning te gelden¹⁴:

$$\frac{V_{\text{optimale ellipsoïde}}}{V_{\text{optimaal bolvormig}}} \cdot 100\% \approx 121.77\%$$

¹⁴ Zie Bijlage 4.2 Volume percentage

Als men voor deze *ellipsoïde* koepelvorm kiest, zal men dus 21.77 % meer materiaal nodig hebben dan als men voor de optimale bolvormige koepelvorm kiest. Samengevat volgt uit de berekeningen dat de optimale *ellipsoïde* koepelvorm de volgende eigenschappen heeft:

Functie voorschrift	$y = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 - x^2}}{1.303 l}$
Optimale verhouding	$\frac{s}{l} \approx 0.384$
Oppervlakte koepel	$A = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}l} x \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(l^2 - 4x^2)^2 c^2}} dx \quad \text{met } c = 1.303 l$
Spanning onderkant	$\sigma = \frac{A \rho g}{\pi l}$
Kromtestraal onderkant	$a = \frac{1}{2}l$
Dikte	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$
Materiaal volume t.o.v bolvormige koepelvorm	121.77%

5.4 Aangepaste bolvormige koepelvorm

Als laatste poging wordt een koepelvorm onderzocht die gebaseerd is op de bolvormige koepelvorm met de volgende formule:

$$y = c\sqrt{b^2 - x^2} - cb + s$$

Met:

y = hoogte als functie van x

x = afstand t.o.v. het midden van de koepel

s = hoogte koepel bij top

c = constante

$$b = \frac{1}{8} \frac{l^2 c^2 + 4s^2}{cs}$$

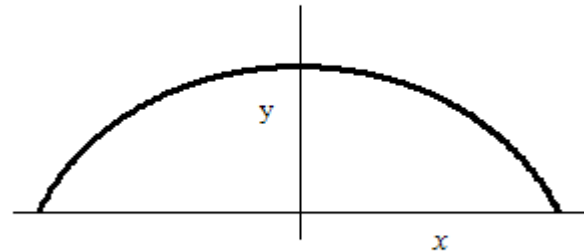


Figure 20 Voorbeeld van grafiek van $y(x)$

Hoewel deze vorm lijkt op de oorspronkelijke bolvormige koepelvorm, is deze toch wezenlijk anders. Het verschil is de factor c in de functie, deze kan de vorm als het ware naar boven of onder ‘uitrekken’. Dit maakt het echter wel lastiger gezien er nu geoptimaliseerd moet worden naar 2 waarden (s en c).

Als men kijkt naar de spanningen aan de onderkant van de koepel, blijkt dat er geen optimale verhouding s/l bestaat waarbij het volume minimaal is. Dit komt omdat naarmate de verhouding s/l kleiner wordt, de waarde van de factor c steeds zodanig gekozen kan worden dat de kritieke spanning onder in de koepel toch niet wordt overschreden. Dit terwijl het volume blijft afnemen. Op een gegeven moment wordt echter de spanning in de top maatgevend en uit berekeningen en ‘uitproberen’ blijkt dat bij de volgende waarden van c en s de optredende spanning in de top ongeveer gelijk is aan de kritische spanning in de top¹⁵.

$$c = 0.839 \quad \text{en} \quad s = 0.282 \cdot l$$

Hiermee is de waarschijnlijk de optimale vorm bereikt. $c = 0.838$ is een vaste constante en $s/l \approx 0.282$ is dan de optimale verhouding voor deze aangepaste bolvormige koepelvorm en hangt niet af van het materiaal E , ν , ρ , de overspanning l of de gravitatie versnelling g .

¹⁵ Zie Bijlage 5.1 Berekening optimale koepelhoogte

Deze koepelvorm blijkt nu minder materiaal volume nodig te hebben dan de oorspronkelijke optimale bolvormige koepelvorm en is dus ‘optimaler’¹⁶:

$$\frac{V_{\text{nieuw}}}{V_{\text{optimaal bolvormige}}} \cdot 100\% = 93,7\%$$

Als men voor deze optimale *aangepaste bolvormige* koepelvorm kiest, zal men dus ongeveer 6,3% minder materiaal nodig hebben dan als men voor de oorspronkelijke optimale bolvormige koepelvorm kiest. De uiteindelijke optimale koepelvorm ziet er dan als volgt uit:

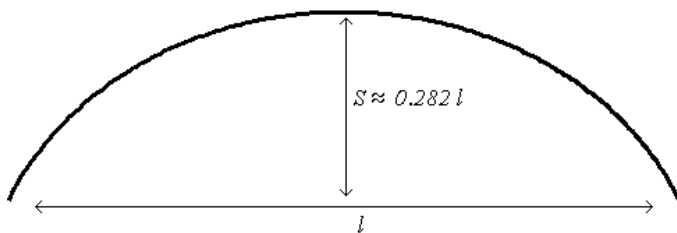


Figure 21 Optimale aangepaste bolvormige koepel

Samengevat heeft deze optimale aangepaste bolvormige koepelvorm de volgende eigenschappen heeft:

Functie voorschrift	$y = 0.839 \sqrt{0.292 l^2 - x^2} - 0.171 l$
Optimale verhouding	$\frac{s}{l} \approx 0.282$
Oppervlakte koepel	$A = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}l} x \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2}{b^2 - x^2}} dx$ met $c = 0.839$ en $b = \frac{1}{8} \frac{l^2 c^2 + 4 s^2}{c s}$
Spanning onderkant	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{l^2 c^2 + 4 b^2 - l^2}}{\pi l^2 c}$
Kromtestraal onderkant	$a = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4 b^2 - l^2 + l^2 c^2}}{c}$
Dikte	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$
Materiaal volume t.o.v bolvormige koepelvorm	93,7%

¹⁶ Zie Bijlage 5.2 Volume percentage

6. Variëren van de dikte van de koepel

6.1 Dikte lineair laten toenemen

Bij het vinden van de optimale koepel is bij het vorige hoofdstuk aangenomen dat de dikte constant bleef. Dit hoeft uiteraard niet het geval te zijn en in dit hoofdstuk zal onderzocht worden of het variëren van de dikte tot een vermindering van het benodigd materiaal kan leiden zonder dat de koepel zal knikken. In eerste instantie wordt gekeken naar de optimale bolvormige koepelvorm gevonden door Hoogenboom [1] die beschreven kan worden met het functie voorschrift:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} + s - a \quad \text{waarbij} \quad \frac{s}{l} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Bij deze optimale bolvormige koepelvorm met constante dikte blijkt uit berekeningen¹⁷ dat hoewel de spanning onder in de koepel gelijk is aan de kritische spanning, de spanning in de top 25% lager is dan de kritische spanning. De dikte in de top zou daardoor ook 25% kleiner kunnen zijn, oftewel:

$$t_{top} = \frac{3}{4} \cdot t_{onderkant} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{C \cdot \sqrt{3(1-v^2)}}{E} \cdot \rho \cdot g \cdot l^2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{C \sqrt{3-3v^2}}{E} \cdot \rho \cdot g \cdot l^2$$

Onderzocht zal worden wat voor invloed dit heeft op het totale volume van de koepel. Hiervoor moet eerst bepaald worden hoe de dikte zal toenemen van de top naar de onderkant. Er zal in eerste instantie uitgegaan worden van een lineair verband tussen t en x zodanig dat:

$$t(x) = t_{top} + x \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\frac{1}{2}l}$$

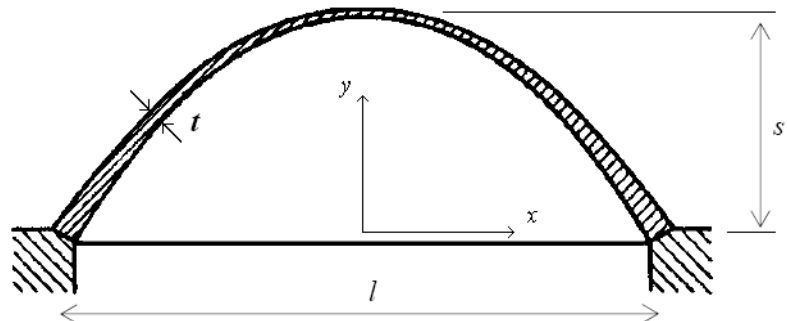


Figure 22 Koepel met variërende dikte (fig. afkomstig uit *Notes on Cell Structures* (2011) en bewerkt)

¹⁷ Zie Bijlage 6.1 *Spanning in de top*

Het volume van de koepel als functie van x kan als volgt berekend worden:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} t(x) \cdot x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Voor een optimale bolvormige koepel met $s = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot l$ en $a = \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot s}$ geldt voor het volume van de bolvormige koepel met constante dikte, respectievelijk het volume van de bolvormige koepel met variabele dikte¹⁸:

$$V_{const.dikte} = \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3 - 3v^2} \rho g l^4 \pi}{E}$$

$$V_{variabele\ dikte} = \left(\frac{10}{216} + \frac{2}{486} \sqrt{3} \pi \right) \cdot \frac{C \sqrt{3 - 3v^2} \rho g l^4 \pi}{E}$$

$$\frac{V_{variabele\ dikte}}{V_{const.dikte}} \cdot 100\% \approx 92.73\%$$

Te zien is dat er ongeveer 7,27% minder volume materiaal nodig is als men deze variabele dikte toepast. Het veranderen van de dikte over de gehele koepel heeft echter het gevolg dat de kritieke spanning in elk punt van de koepel ook mee verandert. Er dient dus gecontroleerd te worden of de kritieke spanning nergens wordt overschreden. De optredende spanning en de kritieke spanning kunnen als functie van x worden bepaald.¹⁹ Zodoende kan men aantonen dat de kritieke spanning nergens wordt overschreden.

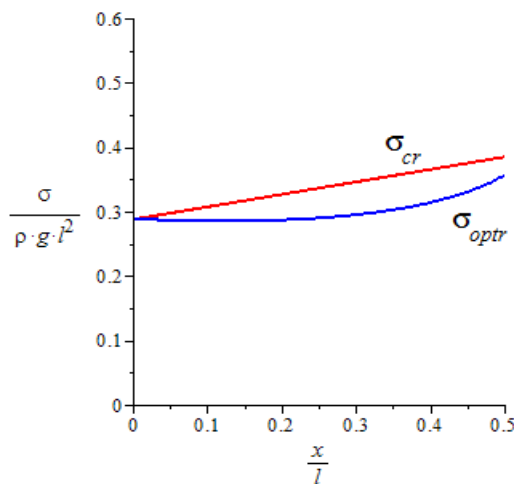


Figure 23 Optredende en kritieke spanning als functie van x/l

¹⁸ Zie Bijlage 6.2 *Effect dikte lineair laten toenemen*

¹⁹ Zie Bijlage 6.3 *Optredende en kritieke spanning bij dikte lineair laten toenemen*

6.2 Dikte kwadratisch laten toenemen

Uit de grafiek volgt dat er nog ruimte is voor verbetering. Doordat het totale volume door het toepassen van een variabele dikte verandert, zal de spanning in de onderkant van de koepel niet meer hetzelfde zijn als daarvoor maar kleiner. Daarom kan $t_{onderkant}$ nog wat kleiner worden gekozen in de formule van $t(x)$. De dikte in de top (t_{top}) kan niet meer kleiner gekozen worden aangezien deze nu al zodanig gekozen is dat de optredende spanning gelijk is aan de kritieke spanning en de kritieke spanning niet verandert in de top. Daarnaast kan de mate waarin de dikte toeneemt van de top naar de onderkant nog aangepast worden. Na uitproberen blijkt dat de koepel nog optimaler kan worden gemaakt door de dikte kwadratisch te laten toenemen en de $t_{onderkant}$ kleiner te kiezen. Zodoende komt men op²⁰:

$$t_{top} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{C \sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} = 0.813 \cdot t_{onderkant}$$

$$t(x) = t_{top} + x^2 \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}$$

Ook deze functie van $t(x)$ kan nu in de formule voor het volume worden gezet:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} t(x) \cdot x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Tevens kunnen de kritische spanning en de optredende spanning uitgezet worden in een grafiek als functie van x . Dit geeft:

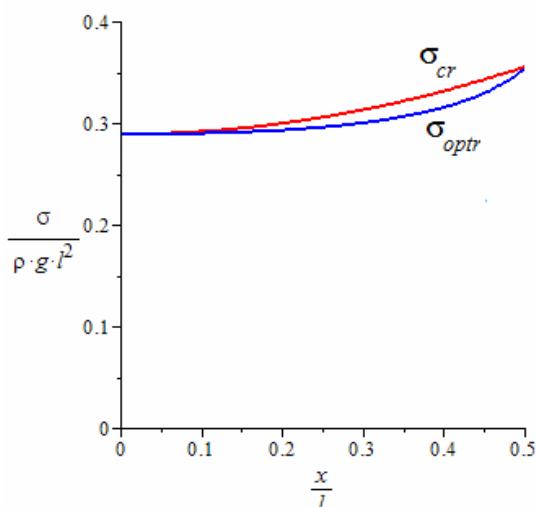


Figure 24 Optredende en kritieke spanning

²⁰ Zie Bijlage 6.4 Dikte kwadratisch laten toenemen

De kritische spanning blijkt op geen enkele plek te worden overschreden. Het benodigd materiaal volume is nu in vergelijking met de optimale bolvormige koepel met constante dikte²¹:

$$\frac{V_{\text{variabele dikte}}}{V_{\text{constante dikte}}} \cdot 100 \% \approx 84.6 \%$$

Er is dus ongeveer 15,4% minder materiaal nodig voor deze optimale bolvormige koepelvorm met variabele dikte.

²¹ Zie Bijlage 6.5 *Volume percentage bij dikte kwadratisch laten toenemen*

7. Conclusie

7.1 Effect andere koepelvorm kiezen

Uit het onderzoek blijkt dat het aanpassen van de vorm inderdaad kan leiden tot vermindering in benodigd materiaal volume. Dit was echter slechts bij één geval van de onderzochte koepelvormen. De *paraboloïde*-, *kettinglijn*- en *ellipsoïde* koepelvormen bleken substantieel meer materiaal volume nodig te hebben dan de oorspronkelijke *bolvormige kap* koepel. De koepelvorm die wel optimaler bleek te zijn was de *aangepaste bolvormige* koepelvorm. Met deze koepelvorm is er ongeveer 6,3% minder volume materiaal nodig. De hierbij horende koepelhoogte van $s \approx 0.282 \cdot l$ verschilt echter niet veel met die van de oorspronkelijke oplossing.

Desalniettemin hoeft dit nog niet de meest optimale vorm te zijn. Er zijn slechts enkele vormen geanalyseerd, vermoedelijk zijn er nog andere vormen die nog gunstigere resultaten geven. Veel meer volume reductie zal echter waarschijnlijk niet meer worden bereikt door alleen de vorm aan te passen. In fig.25 hieronder volgt een overzicht van de onderzochte koepels met hun eigenschappen:

Soort koepel	Bolvormige kap	Paraboloïde	Kettinglijn	Ellipsoïde	Aangepast bolvormig
Functie voorschrift	$y = \sqrt{a^2 - x^2} + s - a$ $a = \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8s}$	$y = cx^2 + s$ $c = -\frac{4s}{l^2}$	$y = -a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a_{top}}\right) + a_{top} + s$ $a_{top} = c \cdot l \approx 0.463 \cdot l$	$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{c}$ $a = \frac{1}{2} \cdot l \quad c = \frac{l}{2 \cdot s}$	$y = c\sqrt{b^2 - x^2} - cb + s$ $c = 0.839$ $b = \frac{1}{8} \frac{l^2 c^2 + 4s^2}{cs}$
Optimale verhouding	$\frac{s}{l} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.289$	$\frac{s}{l} \approx 0.303$	$\frac{s}{l} \approx 0.297$	$\frac{s}{l} \approx 0.384$	$\frac{s}{l} \approx 0.282$
Oppervlakte koepel	$A = \pi a (2a - \sqrt{4a^2 - l^2})$	$A = \frac{\pi((l^2 c^2 + 1)^{3/2} - 1)}{6c^2}$	$A = 2\pi \int_0^{\frac{l}{2}} x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} dx$	$A = 2\pi \int_0^{\frac{l}{2}} x \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(l^2 - 4x^2)^2}} dx$	$A = 2\pi \int_0^{\frac{l}{2}} x \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2}{b^2 - x^2}} dx$
$\sigma_{onderkant}$	$\sigma = 2 \frac{a^2 \rho g}{l^2} (2a - \sqrt{4a^2 - l^2})$	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{(l^2 c^2 + 1)}}{\pi c l}$	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)^2 + 1\right)}}{\pi l \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)}$	$\sigma = \frac{A \rho g}{\pi l}$	$\sigma = A \rho g \frac{\sqrt{l^2 c^2 + 4b^2 - l^2}}{\pi l^2 c}$
Kromtestraal onderkant: a	$a = \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8s}$	$a = \frac{l^2}{8} \sqrt{1 + \frac{16s^2}{l^2}}$	$a = \frac{1}{2} \frac{l \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)}}{\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{c}\right)}$	$a = \frac{1}{2} l$	$a = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4b^2 - l^2 + l^2 c^2}}{c}$
Dikte	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$	$t = C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\sigma a}{E}$
Materiaal volume t.o.v. bolvormige kap	100%	121,09%	115,26%	121,77%	93,7%

Figure 25 Overzicht van onderzochte koepelvormen en hun eigenschappen

7.2 Effect dikte variëren

Geconcludeerd kan worden dat het variëren van de dikte ook tot een optimaler resultaat leidt. Het blijkt dat er een reductie van 15,4% materiaal volume mogelijk is bij de *bolvormige kap* koepelvorm, terwijl de koepel zijn eigen gewicht nog wel net kan dragen. Hierbij is de dikte in de top zodanig gekozen dat spanning in de top net niet groter is dan de kritieke spanning. De dikte aan de onderkant dient $(1 / 0.813)$ keer zo groot te zijn als de dikte in de top. Vervolgens dient de dikte kwadratisch toe te nemen van de top naar de onderkant, ten opzichte van de x-as. Dit zorgt ervoor dat optredende spanning dicht bij de kritieke spanning ligt maar deze hem nooit overschrijdt. In fig.26 hieronder volgt een overzicht van koepels met variërende dikte.

Soort koepel	Bolvormige kap constante dikte	Bolvormige kap lineair toenemende dikte	Bolvormige kap kwadratisch toenemende dikte
			
Mate waarin dikte toeneemt	t is constant	$t(x) = t_{top} + x \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)}$	$t(x) = t_{top} + x^2 \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}$
t_{top}	$\frac{2}{9} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$	$\frac{3}{18} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$	$\frac{3}{18} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$
$t_{onderkant}$	$\frac{2}{9} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$	$\frac{2}{9} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$	$\frac{500}{2439} C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\rho g l^2}{E}$
Materiaal volume t.o.v. bolvormige kap met constante dikte	100%	92,73%	84,6%

Figure 26 Overzicht koepels variërende diktes

7.3 Toepassing in de praktijk

Gezien de gebruikte aanpak in dit verslag van puur theoretische aard was, is het verstandig te kijken in hoeverre de resultaten toepasbaar zijn op de werkelijkheid. Dit kan men doen door bijvoorbeeld te kijken naar wat voor diktes men verkrijgt indien men de gevonden koepelvormen met bijbehorende formules toepast.

Stel men wil een koepel van beton ontwerpen met een overspanning van 100m. Met:

$$E_{\text{beton}} = 30000 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{\text{beton}} = 2400 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$C\sqrt{3(1-\nu^2)} = 10$$

$$l = 100\text{m}$$

De diktes die dan uit de gevonden formules voor de onderzochte koepelvormen worden verkregen blijken worden in fig.27 hieronder weergegeven:

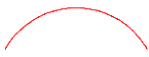
Soort koepel	Bolvormige kap	Paraboloïde	Kettinglijn	Ellipsoïde	Aangepast bolvormig
					
Dikte koepel bij overspanning van 100m	0.0180m	0.0220m	0.0208m	0.0170m	0.0166m

Figure 27 Diktes van koepelvormen bij $l=100\text{m}$

Bij het toepassen van een variabele dikte zoals in hoofdstuk 6 is uitgelegd, zal de dikte in de top van de koepel nog dunner worden ($t_{\text{top}} = 3/4 \cdot 0.018\text{m} = 0.0135\text{m}$ bij een koepel met bovenstaande gegevens)

Te zien is dat de dikte van de koepels in dezelfde orde liggen van elkaar, maar onrealistisch dun blijken te zijn, terwijl er sprake is van een relatief grote overspanning (100m). Wel moet niet vergeten worden dat het hier gaat om koepels die alleen hun eigen gewicht dragen. Desalniettemin is het nog maar de vraag in hoeverre deze resultaten nuttig kunnen worden toegepast in de praktijk.

7.4 Aanbevelingen

Combinaties van een andere koepelvorm toepassen en de dikte laten variëren zijn helaas niet onderzocht. Daardoor verdient het de aanbeveling om te onderzoeken of het variëren van de dikte bij andere koepelvormen dan de *bolvormige kap* vorm nog kan leiden tot nog gunstigere resultaten. Wellicht is de meest optimale vorm een andere dan die van een bolvormige kap waarbij de dikte ook varieert.

Daarnaast verdient het de aanbeveling dat de gevonden oplossingen / resultaten op een of andere onafhankelijke manier nog gecontroleerd kunnen worden, aangezien er sprake was van een puur theoretische aanpak in dit verslag. Wellicht zou dit kunnen met een computer programma zoals SCIA Engineer.

Bovendien verdient het de aanbeveling om te onderzoeken hoe dit soort resultaten op een nuttige manier in de praktijk gebruikt kunnen worden, aangezien voor de gevonden optimale koepels onrealistische waardes uitkomen voor de dikte bijvoorbeeld. Daarnaast zal in werkelijkheid een koepel ook te maken krijgen met andere belastingen (bijvoorbeeld wind) in plaats van alleen eigen gewicht.

Bijlage 1 - Literatuurlijst

1. P.C.J Hoogenboom (2011), *Notes on Shell Structures* Delft University of Technology online: homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT4143_handout_1.pdf (geraadpleegd 10-2011)
2. P.C.J Hoogenboom (2011), CT4143 Shell Analysis – handout 12 *Shell* buckling, Delft University of Technology, online: homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT5143_handout_12.pdf (geraadpleegd 10-2011)
3. B. Elferink (2011), *De optimale koepel*, Bachelor Eindwerk Delft University of Technology, online: homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_elferink.pdf (geraadpleegd 09-2011)
4. M. El Marini (2011), *Koepels in de rondte bekeken*, Bachelor Eindwerk Delft University of Technology, online: homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_elmarini.pdf (geraadpleegd 09-2011)
5. J. Stewart (2007), *Calculus Early Transcendentals Fifth Edition*, blz.554-557

Overige bronnen:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Dome> (geraadpleeg 10-2011)

www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En3/Computing/mapletutorial/tutorial.html
(geraadpleegd 09-2011)

Bijlage 2 - Paraboloïde koepel

2.1 Berekening optimale koepelhoogte

$$> y := c \cdot x^2 + s;$$

$$y := c x^2 + s$$

$$> \text{diff}(y, x); \quad \text{diff}(y, x, x);$$

$$2 c x$$

$$2 c$$

$$> n_v := \frac{A \cdot \rho \cdot g \cdot t}{\pi \cdot l}; \quad n_h := \frac{n_v}{-\left(2 c \left(\frac{1}{2} l\right)\right)};$$

$$n_v := \frac{A \rho g t}{\pi l}$$

$$n_h := -\frac{A \rho g t}{\pi l^2 c}$$

$$> \sigma_{\text{onderkant}} = \text{simplify}\left(\frac{1}{t} \cdot \text{sqrt}(n_v^2 + n_h^2)\right);$$

$$\sigma_{\text{onderkant}} = \frac{\sqrt{\frac{A^2 \rho^2 g^2 t^2 (l^2 c^2 + 1)}{l^4 c^2}}}{\pi t}$$

$$> \sigma_{\text{onderkant}} := \frac{A \rho g \sqrt{\frac{l^2 c^2 + 1}{l^4 c^2}}}{\pi};$$

$$\sigma_{\text{onderkant}} := \frac{A \rho g \sqrt{\frac{l^2 c^2 + 1}{l^4 c^2}}}{\pi}$$

$$> a_{\text{onderkant}} := \frac{\frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{\left(1 + \left(-2 c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l\right)\right)^2\right)}}{-\left(2 c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l\right)\right)};$$

$$a_{\text{onderkant}} := -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{l^2 c^2 + 1}}{c}$$

$$> t := \left(\frac{C \sqrt{3(1-v^2)}}{E}\right) \cdot \sigma_{\text{onderkant}} \cdot a_{\text{onderkant}};$$

$$t := -\frac{1}{2} \frac{C \sqrt{3-3v^2} A \rho g \sqrt{\frac{l^2 c^2 + 1}{l^4 c^2}} \sqrt{l^2 c^2 + 1}}{\pi c E}$$

$$> A := 2 \cdot \pi \cdot \text{int}\left(x \cdot \text{sqrt}(1 + (2 c x)^2), x=0.. \frac{1}{2} l\right);$$

$$A := \frac{1}{6} \frac{\pi \left(-1 + (l^2 c^2 + 1)^{3/2}\right)}{c^2}$$

$$> c := \text{solve}\left(c \cdot \left(\frac{1}{2} l\right)^2 + s = 0, c\right);$$

$$c := -\frac{4 s}{l^2}$$

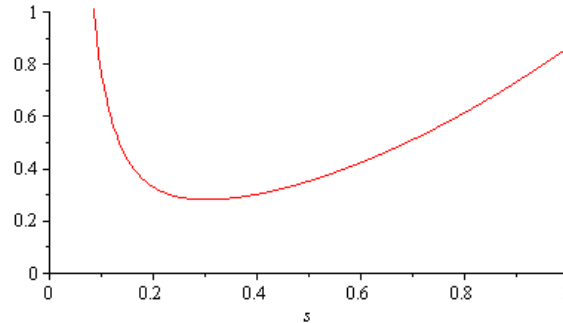
$$> V_{\text{nieuw}} := A \cdot t;$$

$$V_{\text{nieuw}} := \frac{1}{1179648} \frac{\pi \left(-1 + \left(\frac{16 s^2}{l^2} + 1\right)^{3/2}\right)^2 l^{10} C \sqrt{3-3v^2} \rho g \sqrt{16} \sqrt{\frac{\frac{16 s^2}{l^2} + 1}{s^2}} \sqrt{\frac{16 s^2}{l^2} + 1}}{s^5 E}$$

> $l := 1$

$l := 1$

> $\text{plot}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot E}{C \sqrt{3 - 3v^2} \cdot t \cdot \rho g}, s = 0..1\right);$



> $\text{minimize}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot E}{C \sqrt{3 - 3v^2} \cdot t \cdot \rho g}, s = 0.2..0.4, \text{location}\right);$

0.2817883680, {[$s = 0.3030781502$], 0.2817883680}

> $s := 0.3030781502;$

$s := 0.3030781502$

2.2 Controle volume percentage

> $V_{\text{bolvormige}} := \frac{2}{27} \cdot \left(\left(\frac{C \sqrt{3(1 - v^2)}}{E} \right) \right) \cdot t \cdot \rho \cdot g \cdot \pi;$

$V_{\text{bolvormige}} := \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3 - 3v^2} \rho g \pi}{E}$

> $\text{evalf}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot 100}{V_{\text{bolvormige}}}\right);$

121.0896315

2.3 Controle spanning in de top

> $x := 0; \quad k := \frac{(2c)}{(1 + (2c \cdot x)^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad a_{\text{top}} := -\frac{1}{k};$

$x := 0$

$k := -2.424625202$

$a_{\text{top}} := 0.4124348783$

> $\sigma_{\text{optr.top}} := \frac{1}{2} \cdot a_{\text{top}} \cdot \rho \cdot g; \quad \sigma_{\text{cr.top}} := \frac{t \cdot E}{C \sqrt{3(1 - v^2)} \cdot a_{\text{top}}};$

$\sigma_{\text{optr.top}} := 0.2062174392 \rho g$

$\sigma_{\text{cr.top}} := 0.6656161558 \rho g$

> $\text{evalb}\left(\frac{\sigma_{\text{optr.top}}}{\rho g} < \frac{\sigma_{\text{cr.top}}}{\rho g}\right);$

true

Bijlage 3 - Kettinglijn koepel

3.1 Berekening optimale koepelhoogte

> restart;

> $y := -a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a_{top}}\right) + a_{top} + s;$

$$y := -a_{top} \cosh\left(\frac{x}{a_{top}}\right) + a_{top} + s$$

> $a_{top} := c \cdot l;$

$$a_{top} := c l$$

> $diff(y, x); \quad diff(y, x, x);$

$$-\sinh\left(\frac{x}{c l}\right) \\ - \frac{\cosh\left(\frac{x}{c l}\right)}{c l}$$

> $n_v := \frac{A \cdot \rho \cdot g \cdot t}{\pi \cdot l}; \quad n_h := \frac{n_v}{- \left(-\sinh\left(\frac{\left(\frac{1}{2}l\right)}{a_{top}}\right) \right)};$

$$n_v := \frac{A \rho g t}{\pi l}$$

$$n_h := \frac{A \rho g t}{\pi l \sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)}$$

> $\left(\frac{1}{t} \text{sqrt}\left((n_v)^2 + (n_h)^2\right)\right);$

$$\sqrt{\frac{\frac{A^2 \rho^2 g^2 t^2}{\pi^2 l^2} + \frac{A^2 \rho^2 g^2 t^2}{\pi^2 l^2 \sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)^2}}{t}}$$

> $\sigma_{onderkant} := A \cdot \rho \cdot g \sqrt{\frac{\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{a_{top}}\right)^2 + 1\right)}{\pi^2 l^2 \sinh\left(\frac{1}{2} \frac{l}{a_{top}}\right)^2}};$

$$\sigma_{onderkant} := \frac{A \rho g \sqrt{\frac{\sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)^2 + 1}{l^2 \sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)^2}}}{\pi}$$

> $a_{onderkant} := \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot \sqrt{\left(1 + \left(-\sinh\left(\frac{\left(\frac{1}{2}l\right)}{a_{top}}\right)\right)^2\right)}}{- \left(-\sinh\left(\frac{\left(\frac{1}{2}l\right)}{a_{top}}\right) \right)};$

$$a_{onderkant} := \frac{1}{2} \cdot \frac{l \sqrt{\sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)^2 + 1}}{\sinh\left(\frac{1}{2 c}\right)}$$

> $t := \left(\frac{C \sqrt{3(1 - v^2)}}{E}\right) \cdot \sigma_{onderkant} \cdot a_{onderkant};$

$$t := \frac{1}{2} \frac{C \sqrt{3-3v^2} A \rho g \sqrt{\frac{\sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2 + 1}{l^2 \sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2}} l \sqrt{\sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2 + 1}}{\pi \sinh\left(\frac{1}{2c}\right) E}$$

$$\begin{aligned} > s := \text{solve}\left(-a_{top} \cdot \cosh\left(\frac{\frac{1}{2}l}{a_{top}}\right) + a_{top} + s = 0, s\right); \\ & \quad s := c l \cosh\left(\frac{1}{2c}\right) - c l \end{aligned}$$

$$> V_{nieuw} := A \cdot t;$$

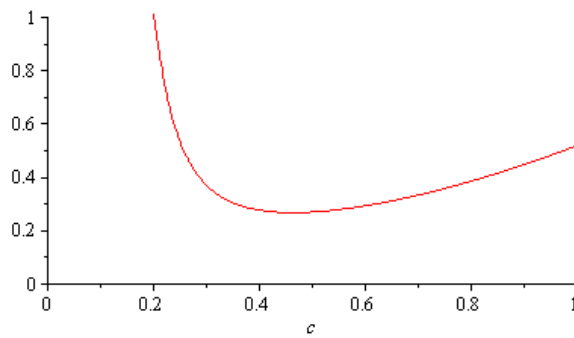
$$V_{nieuw} := \frac{1}{2} \frac{A^2 C \sqrt{3-3v^2} \rho g \sqrt{\frac{\sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2 + 1}{l^2 \sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2}} l \sqrt{\sinh\left(\frac{1}{2c}\right)^2 + 1}}{\pi \sinh\left(\frac{1}{2c}\right) E}$$

$$\begin{aligned} > A := 2 \cdot \pi \cdot \text{int}\left(x \cdot \sqrt{1 + \left(-\sinh\left(\frac{x}{a_{top}}\right)\right)^2}, x = 0 \dots \frac{1}{2}l\right); \\ & \quad A := 2 \pi \left(c^2 l^2 - \frac{1}{2} c^2 l^2 e^{-\frac{1}{2c}} - \frac{1}{4} c l^2 e^{-\frac{1}{2c}} - \frac{1}{2} c^2 l^2 e^{\frac{1}{2c}} + \frac{1}{4} c l^2 e^{\frac{1}{2c}}\right) \end{aligned}$$

$$> l := 1$$

$$l := 1$$

$$> \text{plot}\left(\frac{V_{nieuw} \cdot E}{C \sqrt{3-3v^2} \cdot l^2 \cdot \rho g}, c = 0 \dots 1\right);$$



$$> \text{with}(\text{Optimization});$$

$$[\text{ImportMPS}, \text{Interactive}, \text{LPSolve}, \text{LSSolve}, \text{Maximize}, \text{Minimize}, \text{NLPSolve}, \text{QPSolve}]$$

$$\begin{aligned} > \text{Minimize}\left(\frac{V_{nieuw} \cdot E}{C \sqrt{3-3v^2} \cdot l^2 \cdot \rho g}, c = 0.3 \dots 0.6\right); \\ & \quad [0.268211826695731, [c = 0.463006618040228]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > c := 0.463006618040228; \quad a_{top} := c \cdot l; \quad s := c l \cosh\left(\frac{1}{2c}\right) - c l; \\ & \quad c := 0.463006618040228 \\ & \quad a_{top} := 0.463006618040228 l \\ & \quad s := 0.2972525221 l \end{aligned}$$

3.2 Controle spanning in de top:

$$\begin{aligned}
 & \color{red}{>} \quad a_{top} := c \cdot l; \\
 & \hspace{15em} a_{top} := 0.463006618040228 \\
 & \color{red}{>} \quad \sigma_{optr.top} := \frac{1}{2} \cdot a_{top} \cdot \rho \cdot g; \quad \sigma_{cr.top} := \frac{t \cdot E}{C \sqrt{3(1 - \nu^2)} \cdot a_{top}}; \\
 & \hspace{15em} \sigma_{optr.top} := 0.2315033090 \rho g \\
 & \hspace{15em} \sigma_{cr.top} := 0.5626007357 \rho g \\
 & \color{red}{>} \quad evalb\left(\frac{\sigma_{optr.top}}{\rho g} < \frac{\sigma_{cr.top}}{\rho g}\right); \\
 & \hspace{15em} true
 \end{aligned}$$

3.3 Volume percentage

$$\begin{aligned}
 & \color{red}{>} \quad V_{bolvormige} := \frac{2}{27} \cdot \left(\left(\frac{C \sqrt{3(1 - \nu^2)}}{E} \right) \right) \cdot l^3 \cdot \rho \cdot g \cdot \pi; \\
 & \hspace{15em} V_{bolvormige} := \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3 - 3\nu^2} \rho g \pi}{E} \\
 & \color{red}{>} \quad evalf\left(\frac{V_{nieuw} \cdot 100}{V_{bolvormige}}\right); \\
 & \hspace{15em} 115.2555426
 \end{aligned}$$

Bijlage 4 - Ellipsoïde koepel

4.1 Berekening optimale koepelhoogte

> restart;

> $y := x \rightarrow \frac{\sqrt{a_{\text{onderkant}}^2 - x^2}}{c};$

$$y := x \rightarrow \frac{\sqrt{a_{\text{onderkant}}^2 - x^2}}{c}$$

> $a_{\text{onderkant}} := \frac{1}{2}l;$

$$a_{\text{onderkant}} := \frac{1}{2} l$$

> $c := \text{solve}(y(0) = s, c);$

$$c := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{l^2}}{s}$$

> $\text{diff}(y(x), x); \text{diff}(y(x), x, x);$

$$-\frac{4 s x}{\sqrt{l^2 - 4 x^2} \sqrt{l^2}} - \frac{16 s x^2}{(l^2 - 4 x^2)^{3/2} \sqrt{l^2}} - \frac{4 s}{\sqrt{l^2 - 4 x^2} \sqrt{l^2}}$$

> $n_v := \frac{A \cdot \rho \cdot g \cdot t}{(\pi \cdot l)};$

$$n_v := \frac{A \rho g t}{\pi l}$$

> $n_h := 0;$

$$n_h := 0$$

> $\sigma_{\text{onderkant}} := \text{simplify}\left(\frac{1}{t} \cdot (\text{sqrt}(n_v^2)), 'assume = positive'\right);$

$$\sigma_{\text{onderkant}} := \frac{A \rho g}{l \pi}$$

> $A := 2 \cdot \pi \cdot \text{Int}\left(x \cdot \text{sqrt}\left(1 + (\text{diff}(y(x), x))^2\right), x = 0 .. \frac{1}{2} \cdot l\right);$

$$A := 2 \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2} l} x \sqrt{1 + \frac{16 s^2 x^2}{(l^2 - 4 x^2)^2}} dx \right)$$

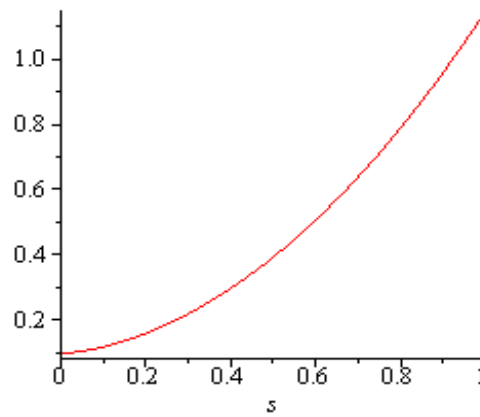
> $t := \left(\frac{C \sqrt{3(1 - v^2)}}{E} \right) \cdot \sigma_{\text{onderkant}} \cdot a_{\text{onderkant}};$

$$t := \frac{C \sqrt{3 - 3 v^2} \left(\int_0^{\frac{1}{2} l} x \sqrt{1 + \frac{16 s^2 x^2}{(l^2 - 4 x^2)^2}} dx \right) \rho g}{E}$$

> $V_{\text{nieuw}} := A \cdot t;$

$$V_{\text{nieuw}} := \frac{2 \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2} l} x \sqrt{1 + \frac{16 s^2 x^2}{(l^2 - 4 x^2)^2}} dx \right)^2 C \sqrt{3 - 3 v^2} \rho g}{E}$$

$$> l := 1; \text{plot}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot E}{C \sqrt{3-3v^2} \cdot t^4 \cdot \rho \cdot g}, s=0..1\right);$$

$$l := 1$$


$$> k := \frac{-\frac{16s(0)^2}{(1-4(0)^2)^{3/2}} - \frac{4s}{\sqrt{1-4(0)^2}}}{\left(1 + \frac{16s^2(0)^2}{1-4(0)^2}\right)^{3/2}};$$

$$k := -4s$$

$$> a_{\text{top}} := -\frac{1}{k};$$

$$a_{\text{top}} := \frac{1}{4s}$$

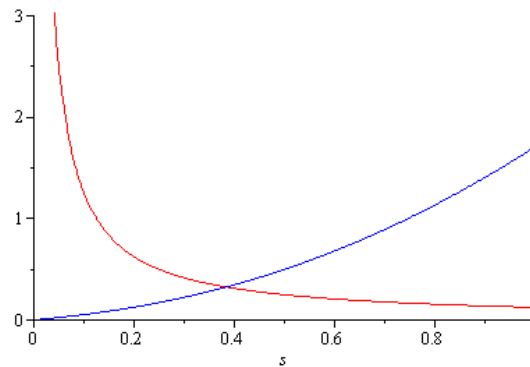
$$> \sigma_{\text{opt},\text{top}} := \frac{1}{2} \cdot a_{\text{top}} \cdot \rho \cdot g;$$

$$\sigma_{\text{opt},\text{top}} := \frac{1}{8} \frac{\rho g}{s}$$

$$> \sigma_{\text{cr},\text{top}} := \frac{t \cdot E}{C \sqrt{3-3v^2} \cdot a_{\text{top}}};$$

$$\sigma_{\text{cr},\text{top}} := 4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \sqrt{1 + \frac{16s^2x^2}{1-4x^2}} dx \right) \rho g s$$

$$> \text{plot}\left(\left[\frac{\sigma_{\text{opt},\text{top}}}{\rho \cdot g}, \frac{\sigma_{\text{cr},\text{top}}}{\rho \cdot g}\right], s=0..1, \text{color}=[\text{red}, \text{blue}]\right);$$



$$> s := \text{fsolve}\left(\frac{\sigma_{\text{opt},\text{top}}}{\rho \cdot g} = \frac{\sigma_{\text{cr},\text{top}}}{\rho \cdot g}, s=0..1\right);$$

$$s := 0.3836896900$$

4.2 Volume percentage

$$> V_{bolvormige} := \frac{2}{27} \cdot \left(\left(\frac{C\sqrt{3(1-v^2)}}{E} \right) \right) \cdot l^4 \cdot \rho \cdot g \cdot \pi;$$

$$V_{bolvormige} := \frac{2}{27} \cdot \frac{C\sqrt{3-3v^2} \rho g \pi}{E}$$

$$> evalf\left(\frac{V_{nieuw} \cdot 100}{V_{bolvormige}}\right);$$

$$121.6587330$$

Bijlage 5 – Aangepaste bolvormige koepel

5.1 Berekening optimale koepelhoogte

$$\begin{aligned}
 &> \text{restart,} \\
 &> y := c \cdot \text{sqrt}(b^2 - x^2) - c \cdot b + s; \\
 &\quad y := c \sqrt{b^2 - x^2} - c b + s \\
 &> \text{diff}(y, x); \quad \text{diff}'(y, x, x); \\
 &\quad -\frac{c x}{\sqrt{b^2 - x^2}} \\
 &\quad -\frac{c x^2}{(b^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{c}{\sqrt{b^2 - x^2}} \\
 &> n_v := \frac{A \cdot \rho \cdot g \cdot t}{\pi \cdot l}; \quad n_h := \frac{n_v}{\left(-\frac{c \left(\frac{1}{2} l \right)}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} l \right)^2}} \right)}; \\
 &\quad n_v := \frac{A \rho g t}{\pi l} \\
 &\quad n_h := \frac{A \rho g t \sqrt{4 b^2 - l^2}}{\pi l^2 c} \\
 &> \sigma_{\text{onderkant}} := \text{simplify} \left(\frac{1}{t} \cdot \text{sqrt}(n_v^2 + n_h^2), 'assume = positive' \right); \\
 &\quad \sigma_{\text{onderkant}} := \frac{A \rho g \sqrt{l^2 c^2 + 4 b^2 - l^2}}{\pi l^2 c} \\
 &> \\
 &> b := \text{solve} \left(c \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} l \right)^2} - c b + s = 0, b \right); \\
 &\quad b := \frac{1}{8} \frac{l^2 c^2 + 4 s^2}{c s} \\
 &> l := 10; c := 0.839; s := 0.282 \cdot l; \\
 &\quad l := 10 \\
 &\quad c := 0.839 \\
 &\quad s := 2.820 \\
 &> A := 2 \cdot \pi \cdot \text{evalf} \left(\text{Int} \left(x \cdot \text{sqrt}(1 + (\text{diff}'(y, x))^2), x = 0 .. \frac{1}{2} l \right) \right); \\
 &\quad A := 33.51084358 \pi \\
 &> a_{\text{onderkant}} := \frac{1}{2} \frac{l \cdot \sqrt{\left(1 + \left(-\frac{c \left(\frac{1}{2} l \right)}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} l \right)^2}} \right)^2 \right)}}{\left(-\frac{c \left(\frac{1}{2} l \right)}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2} l \right)^2}} \right)}; \\
 &\quad a_{\text{onderkant}} := 5.559024569
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> t &:= \text{evalf}\left(\left(\frac{C\sqrt{3(1-v^2)}}{E}\right) \cdot \sigma_{\text{onderkant}} \cdot a_{\text{onderkant}}\right); \\
& t := \frac{20.71154721 C \sqrt{3.-3.v^2} \rho g}{E} \\
> V_{\text{nieuw}} &:= A \cdot t; \\
& V_{\text{nieuw}} := \frac{694.0614189 \pi C \sqrt{3.-3.v^2} \rho g}{E} \\
> V_{\text{bolvormige}} &:= \frac{2}{27} \cdot \left(\left(\frac{C\sqrt{3(1-v^2)}}{E}\right)\right) \cdot l^4 \cdot \rho \cdot g \cdot \pi; \\
& V_{\text{bolvormige}} := \frac{20000}{27} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g \pi}{E} \\
> \text{evalf}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot 100}{V_{\text{bolvormige}}}\right); \\
& 93.69829155 \\
> x := 0; k &:= \frac{\left(-\frac{cx^2}{(b^2-x^2)^{3/2}} - \frac{c}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)}{\left(1 + \left(-\frac{cx}{\sqrt{b^2-x^2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}; a_{\text{top}} := -\frac{1}{k}; \\
& x := 0 \\
& k := -0.1553834991 \\
& a_{\text{top}} := 6.435689798 \\
> \sigma_{\text{opt},\text{top}} &:= \frac{1}{2} \cdot a_{\text{top}} \cdot \rho \cdot g; \quad \sigma_{\text{cr},\text{top}} := \text{evalf}\left(\frac{t \cdot E}{C\sqrt{3(1-v^2)} \cdot a_{\text{top}}}\right); \\
& \sigma_{\text{opt},\text{top}} := 3.217844899 \rho g \\
& \sigma_{\text{cr},\text{top}} := 3.218232677 \rho g \\
> \text{evalf}\left(\frac{\sigma_{\text{cr},\text{top}}}{\sigma_{\text{opt},\text{top}}}\right); \\
& 1.000120509
\end{aligned}$$

5.2 Volume percentage

$$\begin{aligned}
> V_{\text{nieuw}} &:= A \cdot t; \\
& V_{\text{nieuw}} := \frac{0.06940614189 \pi C \sqrt{3.-3.v^2} \rho g}{E} \\
> V_{\text{bolvormige}} &:= \frac{2}{27} \cdot \left(\left(\frac{C\sqrt{3(1-v^2)}}{E}\right)\right) \cdot l^4 \cdot \rho \cdot g \cdot \pi; \\
& V_{\text{bolvormige}} := \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g \pi}{E} \\
> \text{evalf}\left(\frac{V_{\text{nieuw}} \cdot 100}{V_{\text{bolvormige}}}\right); \\
& 93.69829155
\end{aligned}$$

Bijlage 6 - Dikte variëren

6.1 Spanning in de top

$$\begin{aligned}
 &> \text{restart}; \\
 &> y := s\sqrt{a^2 - x^2} + s - a; \\
 &\qquad\qquad\qquad y := s\sqrt{a^2 - x^2} + s - a \\
 &> s := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot l; a := \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8s}; t := \frac{2}{9} \frac{C \cdot \sqrt{3(1-v^2)}}{E} \rho \cdot g \cdot l^2; \\
 &\qquad\qquad\qquad s := \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot l \\
 &\qquad\qquad\qquad a := \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot l \\
 &\qquad\qquad\qquad t := \frac{2}{9} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^2}{E} \\
 &> \sigma_{optr.top} := \frac{1}{2} \cdot a \cdot \rho \cdot g; \quad \sigma_{cr.top} := \frac{t \cdot E}{C \sqrt{3(1-v^2)} \cdot a}; \\
 &\qquad\qquad\qquad \sigma_{optr.top} := \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot l \rho g \\
 &\qquad\qquad\qquad \sigma_{cr.top} := \frac{2}{9} \frac{\sqrt{3-3v^2} \rho g l \sqrt{3}}{\sqrt{3-3v^2}} \\
 &> \frac{\sigma_{optr.top}}{\sigma_{cr.top}}; \\
 &\qquad\qquad\qquad \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

6.2 Effect dikte lineair laten toenemen

$$\begin{aligned}
 &> \text{restart}; \\
 &> y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a; \\
 &\qquad\qquad\qquad y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a \\
 &> \text{diff}(y, x); \\
 &\qquad\qquad\qquad -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &> s := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot l; a := \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8s}; \\
 &\qquad\qquad\qquad s := \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot l \\
 &\qquad\qquad\qquad a := \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot l \\
 &> t_{onderkant} := \frac{2}{9} \frac{C \cdot \sqrt{3(1-v^2)}}{E} \rho \cdot g \cdot l^2; \\
 &\qquad\qquad\qquad t_{onderkant} := \frac{2}{9} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^2}{E}
 \end{aligned}$$

$$> t_{top} := \frac{3}{4} \cdot t_{onderkant};$$

$$t_{top} := \frac{1}{6} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^2}{E}$$

$$> t := t_{top} + x \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)};$$

$$t := \frac{1}{6} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^2}{E} + \frac{1}{9} \frac{x C \sqrt{3-3v^2} \rho g l}{E}$$

$$> V_{variabele\ dikte} := simplify\left(2 \cdot \pi \cdot int\left(t \cdot x \cdot sqrt\left(1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2\right), x = 0 .. \frac{1}{2}l\right), 'assume = positive'\right);$$

$$V_{variabele\ dikte} := \frac{1}{972} \frac{\pi l^4 C \sqrt{3-3v^2} \rho g (45 + 4\sqrt{3}\pi)}{E}$$

$$> V_{const.dikte} := \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^4 \pi}{E};$$

$$V_{const.dikte} := \frac{2}{27} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g l^4 \pi}{E}$$

$$> evalf\left(\frac{V_{variabele\ dikte}}{V_{const.dikte}}\right) \cdot 100;$$

$$92.72998942$$

6.3 Optredende en kritieke spanning bij dikte lineair laten toenemen

$$> restart;$$

$$> y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a;$$

$$y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a$$

$$> diff(y, x);$$

$$-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$> l := 1; s := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot l; a := \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot s};$$

$$l := 1$$

$$s := \frac{1}{6} \sqrt{3}$$

$$a := \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$> t_{onderkant} := \frac{2}{9} \frac{C \cdot \sqrt{3(1-v^2)}}{E} \rho \cdot g \cdot l^2;$$

$$t_{onderkant} := \frac{2}{9} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g}{E}$$

$$> t_{top} := \frac{3}{4} \cdot t_{onderkant};$$

$$t_{top} := \frac{1}{6} \frac{C \sqrt{3-3v^2} \rho g}{E}$$

$$> t := t_{top} + x \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)};$$

$$t := \frac{1}{6} \frac{C\sqrt{3-3v^2} \rho g}{E} + \frac{1}{9} \frac{x C\sqrt{3-3v^2} \rho g}{E}$$

$$> t := \frac{(C\sqrt{3-3v^2}) \rho g l^2}{E} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} \frac{x}{l} \right);$$

$$t := \frac{C\sqrt{3-3v^2} \rho g \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} x \right)}{E}$$

$$> n_v := \frac{V \cdot \rho \cdot g}{\pi \cdot 2 \cdot x};$$

$$n_v := \frac{1}{2} \frac{V \rho g}{\pi x}$$

$$> n_h := \frac{n_v}{-\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)};$$

$$n_h := \frac{1}{6} \frac{V \rho g \sqrt{3-9x^2}}{\pi x^2}$$

$$> \sigma_{opt} := \text{simplify}\left(\frac{1}{t} \cdot (\sqrt{n_v^2 + n_h^2}), \text{'assume=positive'}\right);$$

$$\sigma_{opt} := \frac{3 E \sqrt{3} V}{\sqrt{3-3v^2} \pi x^2 C (3+2x)}$$

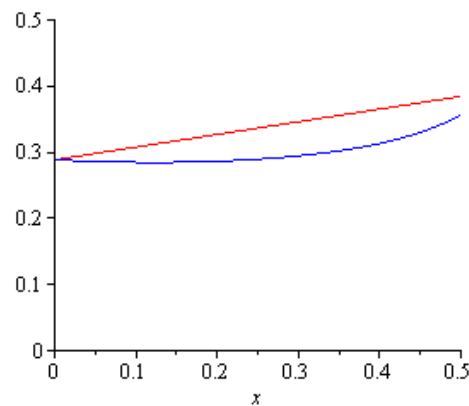
$$> \sigma_{cr} := \frac{1}{C\sqrt{3(1-v^2)}} \cdot \frac{E \cdot t}{a};$$

$$\sigma_{cr} := \rho g \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} x \right) \sqrt{3}$$

$$> V := 2 \cdot \pi \cdot \frac{C\sqrt{3-3v^2} \rho g l^2}{E} \cdot \text{Int}\left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{p}{l}\right) \cdot p \cdot \text{sqrt}\left(1 + \left(-\frac{p}{\sqrt{a^2 - p^2}}\right)^2\right), p=0..x\right);$$

$$V := \frac{2 \pi C \sqrt{3-3v^2} \rho g \left(\int_0^x \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} p \right) p \sqrt{1 + \frac{9p^2}{3-9p^2}} dp \right)}{E}$$

$$> \text{plot}\left(\left[\frac{\sigma_{cr}}{\rho \cdot g}, \frac{\sigma_{opt}}{\rho \cdot g}\right], x=0..\frac{1}{2}l, \text{color}=[\text{red}, \text{blue}]\right);$$



6.4 Effect dikte kwadratisch laten toenemen

> restart;

> $y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a;$

$$y := \sqrt{a^2 - x^2} + s - a$$

> diff'(y, x);

$$-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

> $s := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot l; a := \frac{s}{2} + \frac{l^2}{8 \cdot s};$

$$s := \frac{1}{6} \sqrt{3} l$$

$$a := \frac{1}{3} \sqrt{3} l$$

> $t_{top} := \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{C \cdot \sqrt{3(1 - v^2)}}{E};$

$$t_{top} := \frac{1}{6} \frac{l^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

> $t_{onderkant} := \frac{1000}{813} t_{top};$

$$t_{onderkant} := \frac{500}{2439} \frac{l^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

> $t := t_{top} + x^2 \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2};$

$$t := \frac{1}{6} \frac{l^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E} + \frac{374}{2439} \frac{x^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

> $t := \frac{\rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E} \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right);$

$$t := \frac{\rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E} \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right)$$

> $n_v := \frac{V_{nieuw} \cdot \rho \cdot g}{\pi \cdot 2 \cdot x};$

$$n_v := \frac{1}{2} \frac{V_{nieuw} \rho g}{\pi x}$$

> $n_h := \frac{n_v}{-\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)};$

$$n_h := \frac{1}{6} \frac{V_{nieuw} \rho g \sqrt{3l^2 - 9x^2}}{\pi x^2}$$

> $\sigma_{optr} := \frac{1}{t} \cdot \left(\sqrt{n_v^2 + n_h^2} \right);$

$$\sigma_{optr} := \frac{1}{6} \frac{E \sqrt{\frac{9 V_{nieuw}^2 \rho^2 g^2}{\pi^2 x^2} + \frac{V_{nieuw}^2 \rho^2 g^2 (3l^2 - 9x^2)}{\pi^2 x^4}}}{\rho g C \sqrt{3 - 3v^2} \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right)}$$

$$> \sigma_{opt} := \frac{1}{6} \cdot \frac{E \cdot V_{nieuw} \rho g \sqrt{\frac{9}{\pi^2 x^2} + \frac{(3l^2 - 9x^2)}{\pi^2 x^4}}}{\rho g C \sqrt{3 - 3v^2} \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right)};$$

$$\sigma_{opt} := \frac{1}{6} \frac{E V_{nieuw} \sqrt{\frac{9}{\pi^2 x^2} + \frac{3l^2 - 9x^2}{\pi^2 x^4}}}{C \sqrt{3 - 3v^2} \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right)}$$

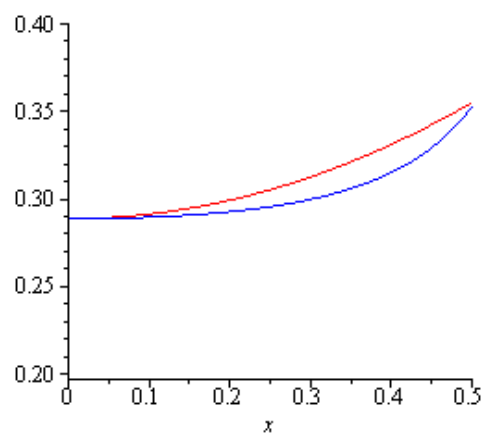
$$> \sigma_{cr} := \frac{E}{C \sqrt{3(1 - v^2)}} \cdot \left(\frac{t}{a} \right);$$

$$\sigma_{cr} := \frac{\rho g \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} x^2 \right) \sqrt{3}}{l}$$

$$> V_{nieuw} := 2 \cdot \pi \cdot \frac{\rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E} \cdot \text{int} \left(\left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} p^2 \right) \cdot p \cdot \text{sqrt} \left(1 + \left(-\frac{p}{\sqrt{a^2 - p^2}} \right)^2 \right), p=0..x \right);$$

$$V_{nieuw} := \frac{2 \pi \rho g C \sqrt{3 - 3v^2} \left(\int_0^x \left(\frac{1}{6} l^2 + \frac{374}{2439} p^2 \right) p \sqrt{1 + \frac{9p^2}{3l^2 - 9p^2}} dp \right)}{E}$$

$$> l := 1; \text{plot} \left(\left[\frac{\sigma_{cr}}{\rho \cdot g}, \frac{\sigma_{opt}}{\rho \cdot g} \right], x=0.. \frac{1}{2} l, \text{color} = [\text{red}, \text{blue}] \right);$$



6.5 Volume percentage bij dikte kwadratisch laten toenemen

$$> t := t_{top} + x^2 \cdot \frac{(t_{onderkant} - t_{top})}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2};$$

$$t := \frac{1}{6} \frac{l^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E} + \frac{374}{2439} \frac{x^2 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

$$> V_{nieuw} := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} t \cdot x \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx;$$

$$V_{nieuw} := \frac{4126}{65853} \frac{\pi l^4 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

$$> V_{constante\ dikte} := \frac{2}{27} \cdot \frac{\pi l^4 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E};$$

$$V_{constante\ dikte} := \frac{2}{27} \frac{\pi l^4 \rho g C \sqrt{3 - 3v^2}}{E}$$

$$> evalf\left(\frac{V_{nieuw} \cdot 100}{V_{constante\ dikte}}\right);$$

$$84.58384584$$