# BSc Eindwerk
# Eigenfrequenties, Dubbele Krommingen & Twist

Onderzoek naar een algemene formule voor de laagste eigenfrequentie van dubbelgekromde panelen, ter vaststelling van de noodzaak tot uitvoeren van tijdrovende detailmodelering.

Annemette Scheltema
4033302
14/10/2013
Technische Universiteit Delft
Civiele techniek en Geowetenschappen
Structural Engineering
Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom
Dr. R. Abspoel

# Voorwoord

Dit eindproject werd tijdens de eerste weken gekenmerkt door tegenslag. Zo toonden TU-PC's bij voortduring blauwe schermen, leidde mislukte herinstallatie van het eindige-elementenprogramma tot verdere vertraging en leverde een dagdurende installatie van een versie van het benodigde programma op de laptop een programma op waarmee, zo bleek later, nog geen sudoku-raster zou kunnen worden berekend. Met als resultaat dat tijdens de eerste tussenrapportage nagenoeg geen voortgang kon worden gemeld. Groot was de waardering dat later, toen eindelijk op een functionerende machine kon worden gewerkt, een ANSYS-script voor berekening van scharnierend opgelegde panelen werd aangereikt. In de wetenschap dat daarmee geen optimale resultaten zouden kunnen worden bereikt kon de eindopdracht met enkele weken vertraging tenminste eindelijk van start gaan.

Dit rapport is tot stand gekomen met steun van mijn begeleiders dr.ir. P.C.J Hoogenboom en ir. R. Abspoel. Heren Hoogenboom en Abspoel, hartelijk dank voor uw sturing, uw adviezen, uw morele ondersteuning tijdens de periode van tegenslag en uw aanhoudende, motiverende vertrouwen in een bevredigend eindresultaat!

oktober 2013,
Annemette Scheltema

Delft, Oktober 2013

Foto voorpagina:
**Figuur 0.1: JS Bach Chamber Music Hall, Manchester, Zaha Hadid [Arch2go.com]**

## Samenvatting


In het kader van het opstellen van een gemakkelijk hanteerbare ontwerpformule richt het onderzoek zich op de trillingsvorm van 1 halve trilling in de hoofdrichtingen x en y. Uit literatuurstudie blijkt dat de volgende formules toepasbaar zijn bij verschillende geometrieën:

Vlakke schaal:

$$f_{vlak} = \frac{\pi}{l^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \tag{3.3}$$

Sferische schaal:

$$f_{\substack{Ondiep\\ Sferisch\\ gekromd}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{\rho R^2}} \tag{4.3}$$

Cilindrische schaal:

$$f_{\substack{cilindrisch\\ gekromd}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho R^2}} \tag{5.5}$$

Na een parameterstudie is een formule afgeleid voor vierkante, dubbelgekromde panelen:

$$f_{\substack{dubbelgekromd,\\ vierkant}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{20\rho}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2} \tag{7.4}$$

Formule 7.4 is vervolgens uitgebreid met een factor voor twist:

$$f_{\substack{dubbelgekromd,\\ getwist,vierkant}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{20\rho}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{E}{80\rho}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right)} \tag{8.2}$$

Tot slot is een formule afgeleid waarmee de laagste eigenfrequentie voor rechthoekige geometrieën kan worden bepaald:

$$f_{\substack{dubbelgekromd,\\ getwist,rechthoekig}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\underbrace{\frac{\pi^4h^2}{3(1-v^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}_{vlak} + \underbrace{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2}_{kromming} + \underbrace{\frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2}_{twist}\right)} \tag{9.6}$$

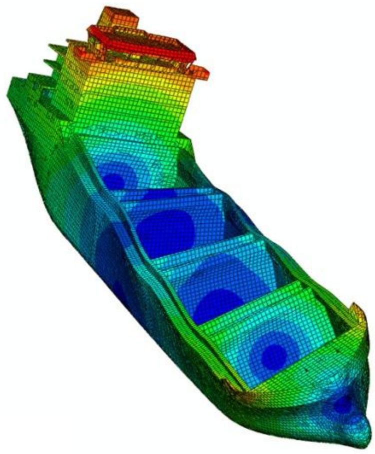
De eerste term onder het wortelteken volstaat nog steeds voor berekening van een vierkant paneel; de volgende termen kunnen naar behoefte worden meeberekend; voor een getwiste cilinder kan b.v. $1/R_x=0$ of $1/R_y=0$ worden verondersteld.
Bij toenemende kromming en twist neemt de stijfheid en daarmede de eigenfrequentie toe. De invloed van (dubbele) kromming is daarbij sterker dan van twist.
De formule is toepasbaar op geometrieën waarvan de eigenfrequentie zich in beide hoofdrichtingen in de vorm van een enkele buik presenteert. Het toepassingsgebied is gebonden aan afmetingen omdat bij grote panelen al snel complexere trillingen optreden.

## Gebruikte Symbolen

| | | |
|---|---|---|
| $a,b$ | Afmeting paneel | [m] |
| $l$ | $a=b=l$ | [m] |
| $h$ | Afmeting: Hoogte | [m] |
| $\kappa$ | Kromming | [1/m] |
| $R$ | Kromtestraal | [m] |
| $f$ | Eigenfrequentie | [Hz] |
| $i,j$ | Aantal halve trillingen | [-] |
| ω | hoekfrequentie | [rad/s] |
| u | deformatie | [m] |
| υ | Dwarscontractiecoëfficiënt | [-] |
| ρ | Soortelijke dichtheid | [kg/m$^3$] |
| γ | Massa per dikte | [kg/m$^2$] |
| $k_{max}$ | Veerstijfheid | [-] |
| M | Massa | [kg] |
| $E$ | Elasticiteitsmodulus | [N/m$^2$] |
| ε | Rek | [-] |

# 1. Inleiding

'Mijne heren, veronachtzaming van eigenfrequentie kan levens kosten!' Zo ongeveer moet de intro van een natuurkunde-college voor werktuigbouwers in 1968 geklonken hebben. Mijn vader herinnert zich nog steeds de theatrale voordracht. De bijzonderheden is hij inmiddels kwijt. De merites van het verhaal: In de dertiger jaren van de vorige eeuw was een stalen motorschip onderweg in de Indische wateren. Na zonsopkomst zag de kapitein een panorama zoals hij nog nooit eerder had gezien: een volmaakt vlakke zee. Tot aan de horizon zo vlak als een spiegel! De kapitein, bekend met het feit dat sporadisch zee deiningen optreden waarvan de golflengte/frequentie overeen kan komen met de eigenfrequentie van een modern stalen vaartuig, zag onmiddellijk het gevaar in. Hij realiseerde zich dat toevoeging van energie in het ritme van de eigenfrequentie tot toenemende opslingering van zijn stalen schip zou kunnen leiden, met letterlijke schipbreuk tot gevolg. Hij veranderde de koers van zijn schip, voer volle-kracht-vooruit, voortdurend zigzaggend en met alle nevenaggregaten op volle dreun terug naar de dichtstbijzijnde haven. Zíjn schip kwam veilig aan, maar op diezelfde ochtend verdwenen enkele andere schepen spoorloos in de Java Zee. Waren die schepen op die ochtend het slachtoffer van de destructieve gevolgen van eigenfrequentie geworden? Waren die schepen in toenemende opslingering gekomen en tenslotte doormidden gebroken? Ruim dertig jaar later, ten tijde van het college in 1968, was het raadsel van de verdwenen schepen nog steeds niet opgelost.



**Figuur 1.1** Resonantie Vrachtship [http://www.mesh.com.tr/vibration-analyses.html]

## 1.1 Probleemstelling

Het gebruik van dubbelgekromde panelen kent vele toepassingen: In de vliegtuigbouw en in de scheepsbouw wordt van oudsher gebruik gemaakt van  gekromde metalen panelen. Zelfs het succes van de ontwikkeling van de stoomenergie tijdens de industriële revolutie is mede te danken aan dunschalige boilers. Binnen de architectuur is deze bouwvorm betrekkelijk nieuw. Toepassing van panelen maakt het ontwerp van golvende gevels van glas en metaal mogelijk. Dunne gekromde oppervlakken staan bekend om hun stijfheid, maar volgens de inleiding van Callandine (1983) schuilt er in deze efficiënte constructies ook het gevaar van falen t.g.v. knik of resonantie door dynamische belasting. [2]  Een gevel waarvan de eigenfrequentie overeenkomt met de trillingsfrequentie van een aardbeving of een stotend windpatroon (of deze frequenties benadert) vormt een voortdurend gevaar voor zijn directe omgeving.[1]

In Figuur 3  is een constructie voor zoutopslag te zien. Deze is slank uitgevoerd en niet geïsoleerd. Dit type dunwandige, dubbelgekromde constructies bestaat uit losse elementen. Met het resultaat van onderstaand onderzoek meer het dynamische gedrag van dergelijke elementen beter worden begrepen.

**Figuur 1.2: Zoutopslag Ontario, Canada**

Het blijkt in de praktijk niet eenvoudig dunne, gekromde panelen op de laagste eigenfrequentie te toetsen. Het simuleren van een systeem in een softwareprogramma is anno 2013 nog steeds een tijdrovende aangelegenheid. Het kunnen gebruiken van een ontwerpformule die, al is het slechts op grove wijze, de aanwezigheid van een resonantierisico voorspelt, en daarmee aanwijzing geeft tot de noodzaak van het al of niet moeten uitvoeren van een simulatie, kan aanzienlijke tijdbesparing opleveren.

## 1.2 Opdracht

Opdracht voor dit Bachelor-eindwerk:
Ontwerp een formule die breed toepasbaar, gemakkelijk hanteerbaar, goed programmeerbaar en redelijk nauwkeurig is. Deze formule moet a) gebruikt kunnen worden als richtlijn voor een algemene bepaling van de laagste eigenfrequentie, en moet b) kunnen dienen ter bepaling van de noodzaak tot uitvoering van eindige-elementenberekeningen.
Een nauwkeurigheid van 5% wordt acceptabel geacht. Bij de afweging nauwkeurigheid ↔ hanteerbaarheid staat gebruiksgemak voorop.

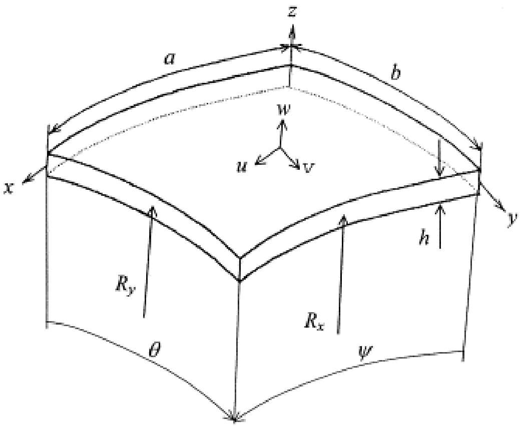
In het eindige-elementenprogramma ANSYS dient een vierkant, gekromd paneel te worden gemodelleerd. Voor verschillende diktes, lengtes en krommingen dient de laagste eigenfrequentie te worden bepaald. Vervolgens dient te worden gezocht naar een algemene formule voor de laagste eigenfrequentie.

Voordat aan de hoofdvraag kan worden gewerkt moeten eerst antwoorden gevonden op de volgende deelvragen:

- Welke ontwerpformules worden er gehanteerd voor vlakke, cilindrische en bolvormige platen?
- Welke invloed hebben de verschillende parameters op de eigenfrequentie?
- Welke gevolgen hebben de gestelde randvoorwaarden?

## 1.3 Uitgangspunten

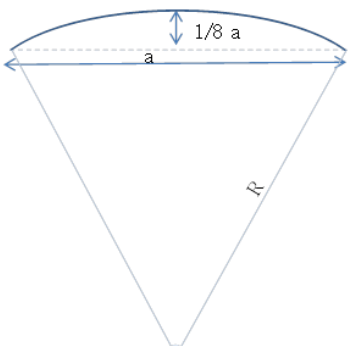
Het woord ‘schaal’ wordt algemeen gebruikt voor de beschrijving van de harde buitenkant van een ei, schaaldieren en schildpadden. ‘Schaal’ is in de mechanica de benaming voor een driedimensionaal element dat wordt gekarakteriseerd door twee parallelle, dicht op elkaar geplaatste oppervlakken. De dikte van de schaal wordt bepaald door de lengte van de normaal tussen deze oppervlakken.



Figuur 1.3: Geometrie van een dubbelgekromde, ondiepe schaal [sciencedirect.comsciencearticle]

Om tot een algemene vergelijking te komen voor de laagste eigenfrequentie van een schaalconstructie worden de volgende uitgangspunten gehanteerd:

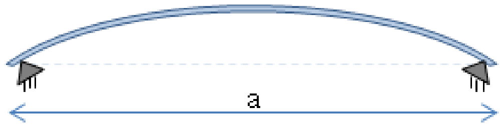
1. de schaal is dunwandig (h<<a, h<<b);
2. de schaal heeft een constante dikte (h);
3. de schaal is ondiep;*
4. het materiaal van het schaal is homogeen, lineair elastisch en isotroop;
5. er zijn geen uitwendige belastingen;
6. deformaties zijn klein in verhouding tot de straal (u << R);
7. de rotatietraagheid mag worden verwaarloosd.[5]



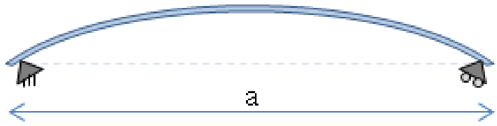
Figuur 1.4: maximale schaaldiepte v.l.g. de theorie van Soedel (1973)

* Een schaal wordt in de mechanica als ondiep beschouwd als de bolling minder is dan 1/8 van de zijdelingse projectielengte van de schaal (zie Soedel, 1973)[4]

Het type ondersteuning heeft een grote invloed op de laagste eigenfrequentie. In eerste instantie wordt een model worden gesimuleerd waarbij de schaal aan alle zijden scharnierend is ondersteund. In realiteit vormt de schaal een enkel element in een grotere constructie en zal de zijdelingse bewegingsvrijheid ongelijk aan nul zijn. Om deze reden zal later in het onderzoek een situatie worden onderzocht waarin beweging in het vlak mogelijk, en beweging loodrecht op het vlak onmogelijk is. Deze situatie kan worden gemodelleerd d.m.v. rolopleggingen.




**Figuur 1.6: Aan beide zijden gefixeerd**




**Figuur 1.5:links een fixatie, rechts een roloplegging**

Uitsluitend beschouwen van de eerste trillingsvorm resulteert niet in 100% van de gevallen in de laagste eigenfrequentie.

## 1.4 Plan van Aanpak

Voor het testen van formules zijn veel ANSYS-berekeningen nodig. De nauwkeurigheid van deze berekeningen is afhankelijk van het aantal elementen waarmee in het eindige-elementenprogramma wordt gerekend. Begonnen wordt met de bepaling van het aantal elementen dat nodig is om de gewenste nauwkeurigheid te behalen. Deze test wordt in eerste instantie uitgevoerd op een vlakke plaat en wordt herhaald bij afwijkende geometrieën.
Vervolgens zal er worden bepaald in hoeverre verandering van parameters zoals lengte, breedte, hoogte en dichtheid invloed hebben op de verschillen tussen de uitkomsten van ANSYS-berekeningen en bekende formules.
Op vergelijkbare manier worden daarna panelen en van sferisch gekromde en van cilindrische panelen getoetst. Daarna wordt een formule opgesteld voor dubbelgekromde, vierkante panelen. Tenslotte zal er een formule worden afgeleid voor dubbelgekromde getwiste panelen. Tijdens dit proces zal op enig moment worden onderzocht wat de invloed is van de wijze van oplegging (scharnierend vs. roloplegging).

## 2. Basistheorie eigenfrequentie

Veel mechanismen kunnen worden teruggebracht naar een massa-veer systeem met een of meer vrijheidsgraden. De bewegingsvergelijking van het systeem kan als volgt worden genoteerd: [5]

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial u}{\partial t} + ku(t) = F(t) \tag{2.1}$$

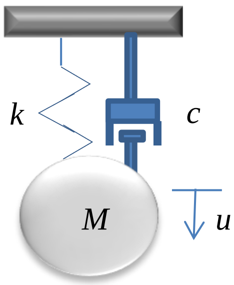
Bij de vrije trilling is de amplitude niet van belang zodat de demping buiten beschouwing kan worden gelaten. De externe kracht wordt voor de vrije trillingen gelijk gesteld aan 0.

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial u}{\partial t} + ku(t) = 0 \tag{2.2}$$

$$u(t) = Asin(\omega t + \emptyset) \tag{2.3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{2.4}$$

Wanneer een dergelijk systeem op t=0 uit de evenwichtsstand wordt gebracht trilt het systeem met een karakteristieke frequentie, de z.g. eigenfrequentie. De hoogte van deze eigenfrequentie is (zie 1-1-4) afhankelijk van de veerstijfheid (k) en de massa (M). Er zijn evenveel eigenfrequenties/eigenvormen als er vrijheidsgraden zijn. Het is mogelijk om elke eigenvorm te reduceren naar een systeem met één vrijheidsgraad, een SDOF-systeem. (Single Degree of Freedom)




2.5

De algemene vorm van de eigenfrequentie wordt gegeven door:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.6}$$

In de literatuur in men het er over eens dat bewegingen volgens de dunne plaat theorie kunnen worden beschreven met een enkele vierde orde differentiaalvergelijking. Ten aanzien van de bewegingen van een schaalconstructie bestaan er echter vrijwel evenveel uiteenlopende theorieën als deskundigen. Zo hebben verschillende onderzoekers theorieën vanuit de analytische afleiding van de differentiaalvergelijking ontwikkeld. Love (1927) publiceerde onder andere een vergelijking voor vibratie van een cylindrische schaal. Het achterliggende fundamentele idee is het opstellen van een bewegingsvergelijking van drie bewegingsvariabelen *u, v* en *w* waarna er een gegeneraliseerde trillingsvorm aangenomen wordt waaruit een formule voor de eigenfrequentie van een cylindrische schaal wordt ontwikkeld.[5] Blevins bouwde voort op o.a. het werk van Love en van Sewall. Onderliggende thesis is gebaseerd op de bevindingen van Blevins (1981).

# 3. Wijze van oplegging

De wijze waarop de randen van een paneel zijn bevestigd heeft naar verwachting een aanzienlijke invloed op de laagste eigenfrequentie. Van een paneel dat aan alle zijden volkomen is ingeklemd mag worden verwacht dat het veel stijver reageert dan een volkomen vrij paneel. Naar verwachting zal de laagste eigenfrequentie van een ingeklemde schaal derhalve hoger zijn dan van de vrije schaal. (Illustraties zijn te vinden in figuur 1.5 en 1.6 op blz 9)

In het begin van het onderzoek is uitsluitend gekeken naar een vierkant paneel waarvan alle zijden scharnierend zijn opgelegd. Op het moment dat de kans zich voordeed om schalen-in-roloplegging te berekenen werd die kans onmiddellijk omarmd. Berekening met roloplegging, d.w.z berekening van schalen met een grotere vrijheidsgraad dan ‘scharnierders’ komt immers meer met de werkelijkheid overeen.
De vrijheid die een roloplegging oplevert heeft volgens berekening van kleine afmetingen geringe invloed op de eigenfrequentie. De uitkomsten van ANSYS-berekeningen voor panelen met roloplegging verschillen gemiddeld slechts 0,5% van de berekeningen met scharnieropleggingen.

In Tabel 1 werd aansluitend de invloed van de dikte van een vlak paneel geanalyseerd. De overige parameters werden constant gehouden. Aanvankelijk blijken de verschillen van de ANSYS-berekeningen af te nemen naarmate de dikte van de schaal toeneemt. Er is een omslagpunt waarneembaar bij 0,013m. Vanaf dit punt neemt het verschil toe. Het testpaneel heeft daarbij een constante afmeting van 0,3m. In verhouding tot deze afmeting is het systeem met $h$=0,013m erg dik zodat in deze situatie niet meer gesproken kan worden van een schaalconstructie. Tevens is de invloed van een vlak, vierkant paneel onderzocht met een constante dikte van 0,005m. Bij $l$ >1,0m blijkt de frequentie bij een roloplegging hoger te zijn dan de eigenfrequentie bij een scharnierende oplegging. Voor panelen met $l$<1,0m is de wijze van oplegging niet van grote invloed op de laagste eigenfrequentie.

In de volgende analyses is verder gewerkt met het ANSYS-script voor roloplegging.
[Bijlage A geeft overige resultaten]

| h | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil | l | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | % | [m] | [Hz] | [Hz] | % |
| 1,0e-3 | 250,20 | 248,99 | 0,48 | 0,1 | 984,64 | 984,11 | 0,05 |
| 2,0e-3 | 302,72 | 301,38 | 0,44 | 0,2 | 393,17 | 392,36 | 0,21 |
| 3,0e-3 | 340,04 | 338,60 | 0,42 | 0,3 | 302,72 | 301,38 | 0,44 |
| 4,0e-3 | 373,73 | 372,20 | 0,41 | 0,4 | 256,14 | 254,26 | 0,73 |
| 5,0e-3 | 407,77 | 406,14 | 0,40 | 0,5 | 223,91 | 221,80 | 0,94 |
| 6,0e-2 | 443,33 | 441,61 | 0,39 | 0,6 | 199,23 | 197,51 | 0,86 |
| 7,0e-3 | 480,54 | 478,77 | 0,37 | 0,7 | 178,35 | 178,13 | 0,12 |
| 8,0e-3 | 519,24 | 517,46 | 0,34 | 0,8 | 159,24 | 162,02 | 1,75 |
| 9,0e-3 | 559,11 | 557,42 | 0,30 | 0,9 | 141,29 | 148,25 | 4,93 |
| 10,0e-3 | 599,86 | 598,39 | 0,25 | 1 | 125,02 | 136,26 | 8,99 |
| 11,0e-3 | 641,08 | 640,15 | 0,15 | 1,1 | 110,82 | 125,66 | 13,39 |
| 12,0e-3 | 681,92 | 682,51 | 0,09 | 1,2 | 98,62 | 116,19 | 17,81 |
| 13,0e-3 | 716,80 | 725,32 | 1,19 | 1,3 | 88,19 | 107,67 | 22,09 |
| 14,0e-3 | 728,28 | 768,44 | 5,51 | 1,4 | 79,22 | 99,95 | 26,16 |

**Tabel 1: Verschil in wijze van oplegging m.b.t dikte en afmetingen**

# 4. Vlakke panelen

Een dun, vlak paneel is een bijzondere vorm van een schaal. Dit paneel kenmerkt zich door afwezigheid van kromming. (d.w.z. $R_x=R_y=\infty$, $k_x=1/R_x$, $k_y=1/R_y$, $k_x=k_y=k_{xy}=0$)

De formule voor de laagste eigenfrequentie van een dun, vlak, vierkant paneel is (vlg. Blevins 1981)[7]:

$$f_{vlak} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{Eh^3}{12\gamma(1-v^2)}} \qquad 3.1$$

De dimensieloze coëfficiënt λ is afhankelijk van de lengte/breedte-verhouding van de rechthoek, de trillingsvorm en de manier waarop de zijden zijn opgelegd; $\gamma$ is de massa per eenheid van oppervlak.
De initiële keuze voor het aanhouden van de eerste trillingsvorm, en het paneel als scharnierend opgelegd te beschouwen dwingt tot het gebruik van de volgende formule voor de bepaling van $\lambda^2$:

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2\left[i^2 + j^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 2\pi^2 \qquad 3.2$$

*i* en *j* zijn indices voor het aantal buiken van de trilling in de hoofdrichtingen x en y. Voor dit onderzoek wordt $i=j=1$ aangehouden. De parameters $a$ en $b$ geven de lengte en breedte aan. Bestudering van een vierkant paneel impliceert $a/b=1$. Er is gekozen $l$ als symbool voor algemene afmeting te gebruiken; dan geldt: $a=b=l$.

Wanneer 3.2 in 3.1 wordt gesubstitueerd geeft dit de volgende formule voor de eigenfrequentie van een vlak paneel:

$$f_{vlak} = \frac{\pi}{l^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad 3.3$$

Bij de bepaling van niet-vlakke panelen zal gebruik worden gemaakt van de eigenhoekfrequentie $\omega_{ij}$ [rad/s]. Deze kan m.b.v. de volgende formules worden bepaald:

$$\omega_{vlak} = 2\pi f_{vlak} \qquad 3.4$$

$$\Longrightarrow \quad \omega_{vlak} = \frac{2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad 3.5$$

$$\Longrightarrow \quad \omega_{vlak}^2 = \frac{4\pi^4}{l^4}\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)} = \frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} \qquad 3.6$$

## 4.1 Nauwkeurigheid in verhouding tot de elementgrootte

Het programma ANSYS maakt eindige-elementenberekeningen voor een groot aantal geometrieën mogelijk.

De nauwkeurigheid van een eindige-elementenberekening hangt af van de fijnmazigheid van het raster. Hoe fijner het raster wordt opgezet, hoe nauwkeuriger de uitkomst van de berekening zal zijn. De berekening van een fijnmazig raster neemt echter veel tijd in beslag. Opdeling van een vlak in 100 elementen in zowel x- als y-richting, die ieder 6 vrijheidsgraden (translaties in- en rotaties om de 3 asrichtingen) hebben, leidt tot het moeten oplossen van meer dan 60.000 vergelijkingen. Om deze reden dient het minimale elementenaantal te worden bepaald dat een uitkomst garandeert die voldoet aan de vereisten ten aanzien van de nauwkeurigheid. Het feit dat het slechts berekening van eigenfrequenties betreft leidt tot de verwachting dat er relatief weinig elementen nodig zijn om een snelle, doch vrij nauwkeurige bepaling te verkrijgen.

Voor een paneel met de volgende karakteristieken is de nauwkeurigheid t.o.v. het elementaantal berekend:

| Parameter | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l_x$ | 3,0e-1 | [m] |
| $l_y$ | 3,0e-1 | [m] |
| $h$ | 1,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e11 | [N/m$^2$] |
| $\rho_{staal}$ | 7,8e3 | [kg/m$^3$] |

**Tabel 2: dataset nauwkeurigheid bepaling t.o.v het aantal elementen**

Tabel 3 geeft de resultaten van de laagste eigenfrequentie, de nauwkeurigheid, de rekentijd en het gebruikte geheugen t.g.v. het elementenaantal.

| Elementaantal X- en Y-Richting | Laagste Eigenfrequentie | verschilpercentage t.o.v voorgaande uitkomst | Rekentijd | Gebruikte geheugen | Aantal berekende trillingsvormen |
|---|---|---|---|---|---|
| [-] | [Hz] | [%] | [s] | [Mb] | [-] |
| 2 | 66,08 | 83,38 | 1 | 1,34 | 10 |
| 5 | 54,13 | 18,09 | 1 | 1,88 | 10 |
| 10 | 52,61 | 2,81 | 1 | 3,88 | 10 |
| 25 | 52,19 | 0,80 | 1 | 19,29 | 10 |
| 50 | 52,12 | 0,13 | 3 | 77,22 | 10 |
| 100 | 52,08 | 0,06 | 23 | 324,52 | 10 |

**Tabel 3: nauwkeurigheid en rekentijd van ANSYS**

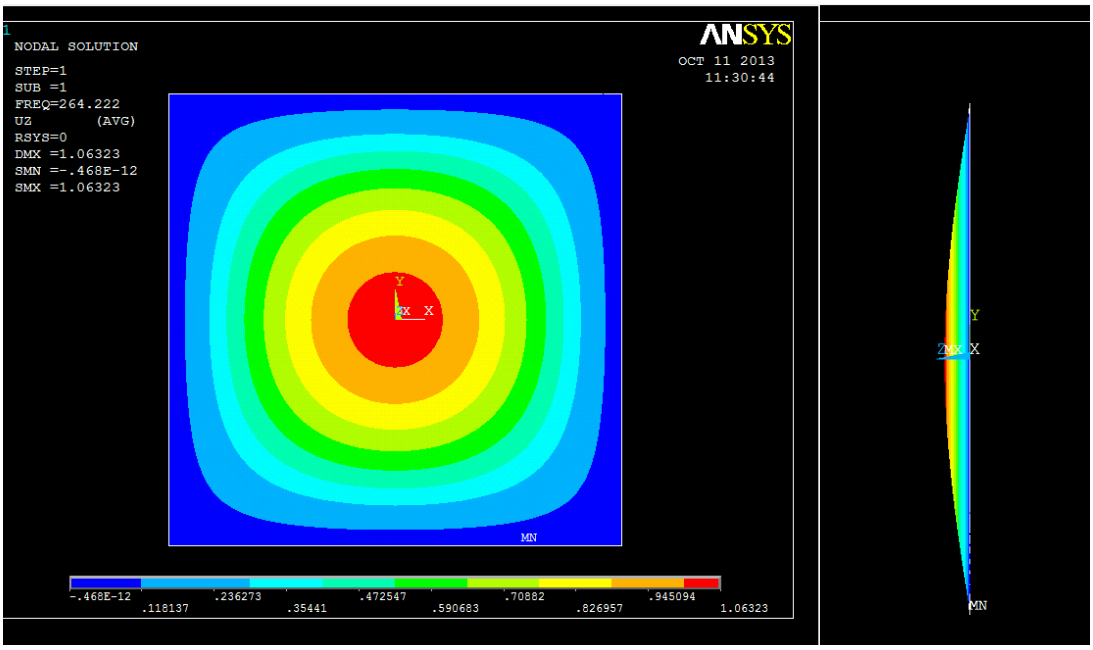
Zoals verwacht convergeert de foutmarge snel. Met de opdracht om een snel toepasbare ontwerpformule te ontwikkelen die de laagste eigenfrequentie redelijk nauwkeurig benadert in gedachte wordt een foutmarge van 0,13% verder acceptabel geacht. Dit impliceert de beginkeuze van een raster met 50x50 elementen. Voor toetsing van een definitieve formule kan een berekening met meer elementen worden uitgevoerd.

## 4.2 Parameterstudie vlak paneel

Alvorens gekeken kan worden naar een gekromd paneel zal kort ingegaan worden op de verbanden tussen het ANSYS programma en de formule 3.3. In deze paragraaf worden de invloed van de dikte ($h$), de elasticiteitsmodulus ($E$), de soortelijke massa ($\rho$), en de grootte van het paneel ($a$,$b$) getoetst. De dwarcontractiecoëfficiënt ($\upsilon$) wordt buiten beschouwing gelaten, omdat deze volgens de formule 3.3 minimale invloed heeft op de laagste eigenfrequentie. (zie ook blz. 15)
Als eerste wordt een stalen plaat van 0,3m x 0,3m gesimuleerd. De uitkomsten van de berekening dienen als controle voor volgende berekeningen. Per berekening wordt slechts één variabele veranderd.

| Parameter | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 1,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |

**Tabel 4: Dataset bepaling nauwkeurigheid**




**Figuur 4.1: Voor en zijaanzicht van de eerste trillingsvorm van een vlak paneel**

Tabel 5 geeft een analyse van de invloed van de dikte, de afmetingen, de elasticiteitsmodulus en de dichtheid. Zoals verwacht hebben de afmetingen van het systeem grote invloed op de laagste eigenfrequentie. Een systeem dat 2 keer zo groot is genereert een frequentie die 4x zo klein is. Voor zowel zeer kleine als zeer grote afmetingen is de formule niet betrouwbaar. Bij zeer kleine afmetingen is er sprake van afschuifvervormingen waardoor de formule niet meer voldoet. Bij grote afmetingen is de fout te wijten aan ANSYS omdat de elementen te klein zijn of omdat de rekenkundige nauwkeurigheid onvoldoende is. Door de grote overspanning in verhouding tot de dikte en stijfheid van de constructie mag worden aangenomen dat er 2^e^ orde effecten optreden. Deze worden niet in de lineair elastische berekeningen van ANSYS en niet in de formules meegenomen.

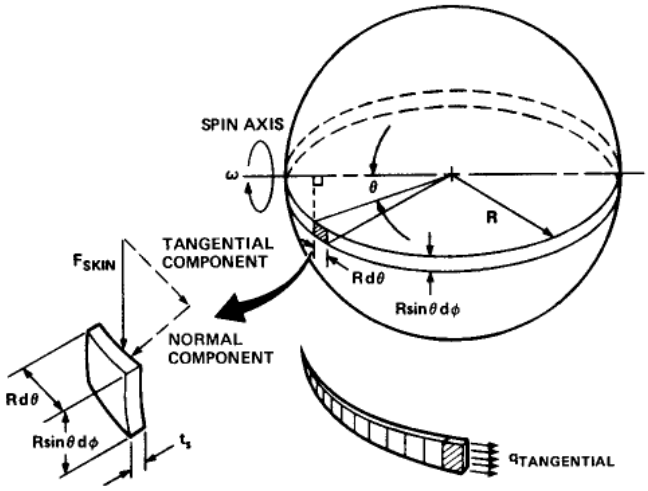
Uit de analyse blijkt dat het verschil tussen de eigenfrequenties volgens de formule 3.3 en de ANSYS-berekening gering is, zowel bij variatie van paneeldikte als bij variatie van elasticiteitsmodulus of dichtheid.

| **Paneeldikte (*h*)** | **ANSYS** | **Formule 3.3** | **Verschil** |
|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,0e-3 | 52,12 | 52,12 | 0,00 |
| 5,0e-3 | 258,52 | 260,59 | 0,80 |
| 8,0e-3 | 410,34 | 416,95 | 1,61 |
| 10,0e-3 | 510,03 | 521,19 | 2,19 |
| **Afmetingen (*l*)** | ANSYS | Formule 3.3 | Verschil |
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,01 | 22536,00 | 46906,61 | 108,14 |
| 0,1 | 467,69 | 469,06 | 0,29 |
| 1 | 4,69 | 4,69 | 0,03 |
| 2 | 1,17 | 1,17 | 0,00 |
| **Elasticiteitsmodulus (E)** | ANSYS | Formule 3.3 | Verschil |
| [N/m$^2$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,1e+11 | 37,71 | 37,72 | 4,0E-3 |
| 2,1e+11 | 52,11 | 52,11 | 3,0E-3 |
| 3,1e+11 | 63,32 | 63,32 | 3,0E-3 |
| 4,1e+11 | 72,82 | 72,82 | 3,0E-3 |
| **Soortelijke massa (ρ)** | ANSYS | Formule 3.3 | Verschil |
| [kg/m$^3$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,5e+3 | 206,50 | 206,51 | 0,03 |
| 1,0e+3 | 145,98 | 146,02 | 0,03 |
| 2,5e+3 | 92,32 | 92,35 | 0,03 |
| 5,0e+3 | 65,28 | 65,30 | 0,03 |
| 7,9e+3 | 52,11 | 52,12 | 0,03 |
| 10,0e+3 | 46,18 | 46,18 | 0,03 |
| **Dwarcontractiecoefficient (*v*)** | ANSYS | Formule 3.3 | Verschil |
| [-] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,00 | 52,12 | 52,12 | 0,00 |
| 0,10 | 52,38 | 52,38 | 0,00 |
| 0,20 | 53,20 | 53,19 | 0,00 |
| 0,30 | 54,64 | 54,63 | 0,00 |

**Tabel 5: Invloed afzonderlijke parameters op een vlak paneel**

# 5. Sferische schalen

Een bol, een sfeer, karakteriseert zich door dezelfde constante kromming in beide hoofdrichtingen ($R_x = R_y$). Bij de bestudering van een sferisch paneel wordt er gekeken naar een klein segment van een bol.




Figuur 5.1: Illustratie sferisch schaal [nss.org]

Wanneer de constructie aan de uitgangspunten van de schaaltheorie voldoet kan de eigenhoekfrequentie worden bepaald met (Blevins, 1981)[8]:

$$\omega_{\substack{Ondiep\\Sferisch\\gekromd}} = \sqrt{\omega_{vlak}^2 + \frac{E}{\rho R^2}} \tag{5.1}$$

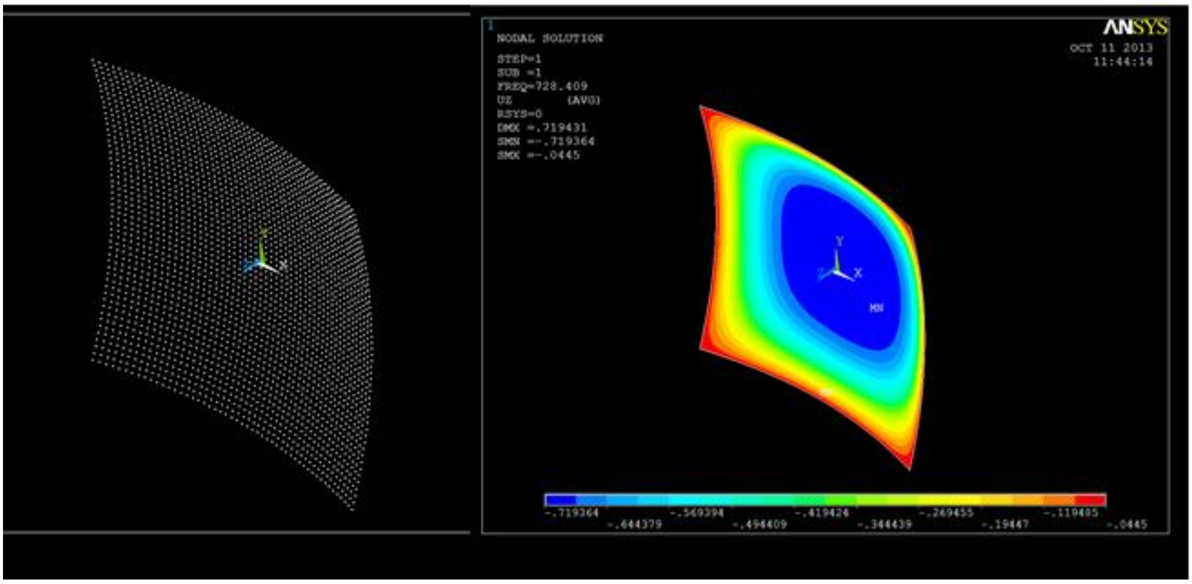
Wanneer formule 3.6 hierin wordt gesubstitueerd dan verandert de formule in:

$$\omega_{\substack{Ondiep\\Sferisch\\gekromd}} = \sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{\rho R^2}} \tag{5.2}$$

Hieruit volgt de eigenfrequentie:

$$f_{\substack{Ondiep\\Sferisch\\gekromd}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{\rho R^2}} \tag{5.3}$$

## 5.1 Parameterstudie Sferische schalen




**Figuur 5: Bepaling van de frequentie van de eerste trillingsvorm d.m.v gebruik van ANSYS**

Voor de analyse van sferisch gekromde panelen zijn, indien niet anders is vermeld, de volgende waarden aangehouden:

| Parameter | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 5,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_x$ | 10 | [m] |
| $R_y$ | 10 | [m] |

**Tabel 6: dataset parameterstudie sferisch gekromde panelen**

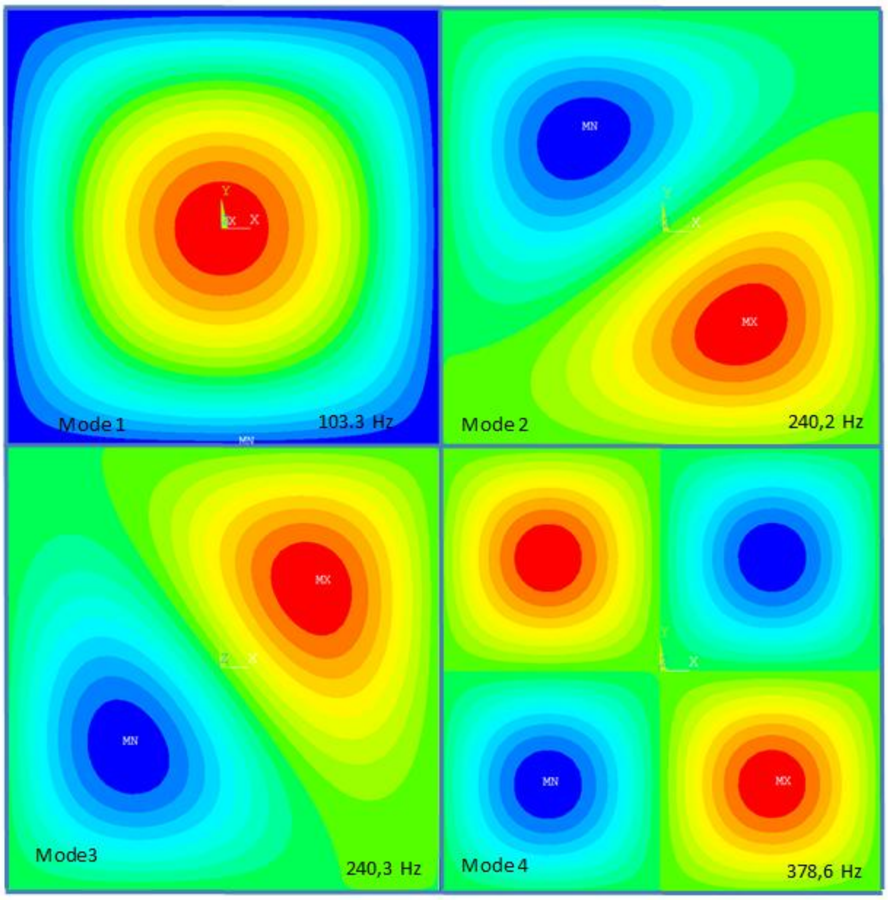
Tabel 7 geeft de parameterstudie van een ondiep sferisch paneel. Vanaf 5,0E-3m dikte voldoet het paneel van 0,3 x 0,3 m aan de gestelde nauwkeurigheid van 5 %. Dunnere panelen kunnen waarschijnlijk beter met de membraantheorie dan met de schaaltheorie benaderd/berekend worden. Bij gebruikmaking van een dataset voor staal valt op dat panelen met de afmetingen vanaf 0,5m in het vierkant een afwijking van meer dan 20% vertonen. Hoewel de elasticiteitsmodulus ($E$) en de soortelijke massa ($\rho$) een belangrijke invloed hebben op de eigenfrequentie blijven de verschillen tussen de resultaten van de formule- en de ANSYS-berekening bij toename van deze parameters constant.

De waarde van $v$ is in deze studie tevens bekeken. Het verschil tussen $v = 0$ $en$ $v = 0{,}3$ $is$ $ca.5Hz$. In deze dataset is er sprake van een constante overschatting, zodat de berekening waarbij de parameter niet meegenomen wordt nog de beste uitkomst geeft. Als blijkt dat dit ook voor andere curves en/of andere materialen geldt, dan kan worden overwogen de factor v geheel uit de benaderingsformule weg te laten.

| Paneeldikte (*h*) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,0e-3 | 67,88 | 97,43 | 43,5 |
| 5,0e-3 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| 8,0e-3 | 412,81 | 424,10 | 3,0 |
| 10,0e-3 | 512,07 | 527,65 | 3,0 |
| Afmetingen (*l*) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,1 | 2262,80 | 2346,78 | 3,7 |
| 0,3 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| 0,5 | 103,29 | 124,81 | 20,8 |
| 0,7 | 64,48 | 95,22 | 47,7 |
| Elasticiteitsmodulus (*E*) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
| [$N/m^2$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,10e+11 | 189,86 | 197,79 | 4,2 |
| 2,10e+11 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| 3,10e+11 | 318,72 | 332,04 | 4,2 |
| Soortelijke massa ($\rho$) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
| [$kg/m^3$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,5e+3 | 1039,40 | 1082,84 | 4,2 |
| 2,5e+3 | 464,84 | 484,26 | 4,2 |
| 7,9e+3 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| Kromtestraal ($R_x$=$R_y$) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 10,0 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| 5,0 | 272,99 | 308,24 | 12,9 |
| 2,0 | 336,02 | 487,15 | 45,0 |
| 1,0 | 480,49 | 863,44 | 79,7 |
| Dwarscontractie-coëfficiënt ($v$) | ANSYS | Formule 4.3 | Verschil |
| [-] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0 | 262,32 | 273,29 | 4,2 |
| 0,1 | 263,77 | 274,54 | 4,1 |
| 0,2 | 267,92 | 278,41 | 3,9 |

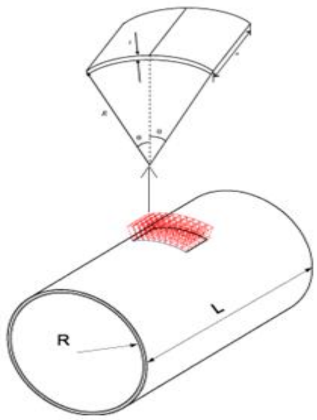
**Tabel 7: Invloed parameters op eigenfrequentie sferisch gekromd paneel**

De afwijkingen bij de panelen met *l*=0,5m resp. *l*=0,7m zijn opmerkelijk. In figuur 5.2 zijn de eerste vier trillingsvormen van een paneel van 0,5x0,5m afgebeeld. De reeks van opvolgende eigenfrequenties wordt niet verstoord door onregelmatigheden, maar toch blijken de afwijkingen tussen de ANSYS-resultaten en die van de bekende formule bij toenemende grootte van het paneel snel toe te nemen.
Van een gehele golf in diagonale richting mag worden verwacht dat deze (bij vrije oplegging) geen voorkeursgedrag heeft. De berekeningsresultaten tonen inderdaad een verwaarloosbaar verschil in frequentie (=0,1Hz.).
Het paneel van 0,7x0,7m toont hetzelfde beeld; slechts de frequenties waarin de trillingen zich voordoen zijn lager.
Bij toenemende kromming wijken de resultaten in toenemende mate van elkaar af. Een kromming $R_x=R_y$=10m geeft een afwijking van 4,18%. Bij een kromming van $R_x=R_y$=5m is de afwijking toegenomen tot 12,9%.
Uit de analyses blijkt dat de bekende formule zowel t.a.v. afmetingen als t.a.v. kromming voldoet als wordt voldaan aan $R/l \geq 30$ *en* $l \leq$0,3m.




**Figuur5.2: Trillingsvormen voor een sferisch paneel met de constanten: $l$=0,5m, $k_x=k_y$=0,1m, h=0,001m**

# 6. Cilindrische panelen



Figuur 6.1: cilindrisch paneel

Een cilinder is een paneel dat slechts in één richting constant gekromd is ($R_x$=*c*, $R_y$=∞). De theorie van een cilindrisch gekromd paneel is afgeleid van de theorie betreffende de eigenfrequentie van gesloten cilinders. De formule voor de eigenfrequentie van eenzijdig gekromde panelen is ontwikkeld door (Sewall, 1967).[9]

$$\omega_{\substack{cilindrisch \\ gekromd}} = \sqrt{\left(\omega_{ij_{vlak}}^2 + \frac{\alpha_{ij} E h}{R^2 \gamma (1 - v^2)}\right)} \qquad 6.1$$

In deze formule is $\alpha_{ij}$ een dimensieloze parameter welke afhankelijk is van de wijze van oplegging. Voor een paneel dat scharnierend of op rol is opgelegd geldt:

$$\alpha_{ij} = \frac{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 (1 - v^2)}{\left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{R\theta_0}\right)^2\right]^2} \qquad 6.2$$

In bovenstaande vergelijking is $l$ de lengte van de plaat (*a*) en $R\theta_0$ de breedte (*b*). Gekeken wordt opnieuw naar een vierkant paneel (*a*=*b*=*l*) met de eerste trillingsvorm: *i*=*j*=*1*. Dit geeft de formule de volgende vorm:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (1 - v^2)}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{R\theta_0}\right)^2\right]^2} \qquad 6.3$$

Wanneer de kromming groot is ten opzichte van de lengte, dan is het verschil in lengte van de originele plaat en de gekromde projectie verwaarloosbaar. Dan geldt $R\theta_0$=*b*=*l*. Zoals te zien in formule 5.4 leidt dat tot een drastische vereenvoudiging voor de bepaling van $\alpha$.

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (1 - v^2)}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{R\theta_0}\right)^2\right]^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (1 - v^2)}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (1 - v^2)}{4\left(\frac{\pi}{L}\right)^4} = \frac{1 - v^2}{4} \qquad 6.4$$

Na substitutie van 5.4 in 5.1 kan de eigenfrequentie voor vierkante, cilindrisch gekromde panelen worden afgeleid volgens:

$$f_{\substack{cilindrisch \\ gekromd}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E h^2 \pi^4}{3 l^4 \rho (1 - v^2)} + \frac{E}{4 \rho R^2}} \qquad 6.5$$

## 6.1 Parameterstudie Cilindrische Panelen

Er is opnieuw een nauwkeurigheidsstudie gedaan (Tabel 8). Gekozen werd voor $R$=10m.
Voor een 50 x 50 raster werd een nauwkeurigheid van 0,13% gevonden. Deze afwijking is even groot als bij een vlak paneel en wordt ook hier acceptabel geacht.

| Elementaantal X- en Y-Richting | Laagste Eigenfrequentie | Foutpercentage | Rekentijd | Gebruikte geheugen | Aantal berekende modes |
|---|---|---|---|---|---|
| [-] | [Hz] | [%] | [s] | [Mb] | [-] |
| 25 | 52,23 | | 1 | 19,29 | 10 |
| 50 | 52,16 | 0,13 | 3 | 77,22 | 10 |
| 100 | 52,13 | 0,06 | 23 | 32,45E1 | 10 |

**Tabel 8: Nauwkeurigheidscontrole**

Uit de studie aan een dataset van een stalen paneel van 0.3x0.3m, zoals gegeven in tabel 9 en 10, blijkt dat de formule voldoet als $h \geq 0{,}005$m, $1$<0,5m en kromtestraal $R \geq 4$ meter.

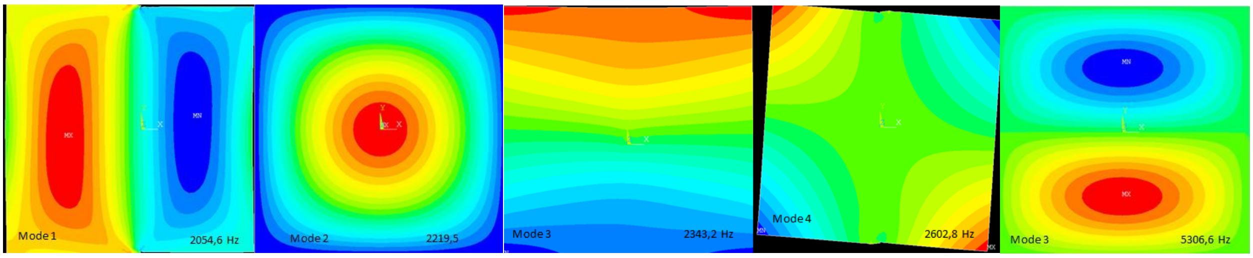
| Parameter | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 1,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+11 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_x$ | 10 | [m] |
| $R_y$ | $\infty$ | [m] |

**Tabel 9: dataset parameterstudie cilindrisch gekromde panelen**

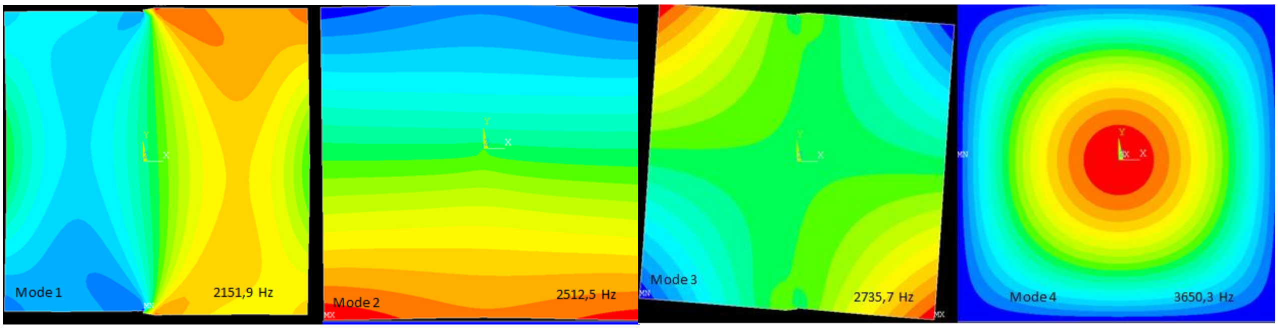
| Paneeldikte ($h$) | ANSYS | Formule | Verschil |
|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,0e-3 | 57,54 | 66,41 | 15,4 |
| 5,0e-3 | 265,21 | 263,82 | 0,5 |
| 8,0e-3 | 420,57 | 418,97 | 0,4 |
| 0,01 | 522,90 | 522,81 | 0,0 |
| 0,05 | 2219,5 | 2606,248 | 17,4 |
| 0,1 | 3650,30 | 5212,50 | 42,8% |
| Afmetingen ($l$) | ANSYS | Formule | Verschil |
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,1 | 2320,70 | 2345,69 | 1,1 |
| 0,3 | 265,21 | 263,82 | 0,5 |
| 0,5 | 97,10 | 102,45 | 4,5 |
| 1 | 32,15 | 47,37 | 47,4 |
| Elasticiteitsmodulus ($E$) | ANSYS | Formule | Verschil |
| [$N/m^2$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 1,10e+11 | 191,94 | 190,94 | 0,5 |
| 2,10e+11 | 265,21 | 263,82 | 0,5 |
| Soortelijke massa ($\rho$) | ANSYS | Formule | Verschil |
| [$kg/m^3$] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,5e+3 | 1050,80 | 1045,35 | 0,5 |
| 2,5e+3 | 469,95 | 467,50 | 0,5 |
| 7,9e+3 | 265,21 | 263,82 | 0,5 |
| Kromtestraal ($R$) | ANSYS | Formule | Verschil |
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 10,0 | 265,21 | 263,82 | 0,5 |
| 5,0 | 267,84 | 273,29 | 2,0 |
| 3,0 | 285,35 | 332,05 | 16,4 |
| 1,0 | 338,10 | 414,88 | 22,7 |

**Tabel 10: Invloed parameters op eigenfrequentie cilindrisch gekromd paneel**

De afwijking van 15,4% bij $h$=0.001m kan worden verklaard vanuit de geldigheidsgrenzen voor panelen: het betreft een membraan in plaats van een schaal. Analyse van het gebied 0,1m≥$h$≥0,05m toont aan dat bij $h$=0,05m de basistrilling zich voordoet als een volledige golf. In de reeks hogere eigenfrequenties volgen twee onduidelijke trillingsvormen, pas daarna verschijnt opnieuw een bekende trillingsmode. Bij $h$=0.1m zijn er drie van deze ‘ruis’-situaties voordat opnieuw een bekende trillingsmode verschijnt.
Deze vaststelling toont aan dat de, in de literatuur vermelde, $h<<l$ dient te worden gerespecteerd, zelfs als het paneel voldoet aan de evenzeer bekende $30< R/h<2000$. (Figuur 6.2 & 6.3)

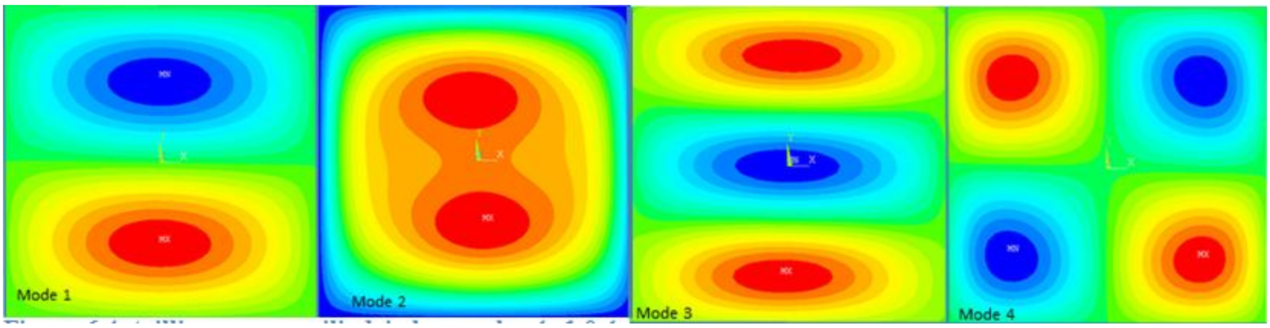



**Figuur 6.2: Trillingsvormen cilindrisch paneel *a*=*b*=0,3, kx=0 $k_y$=0,1 *h*=0,05**




**Figuur 6.3: Trillingsvormen cilindrisch paneel *a*=*b*=0,3, $k_x$=0 $k_y$=0,1 *h*=0.1**

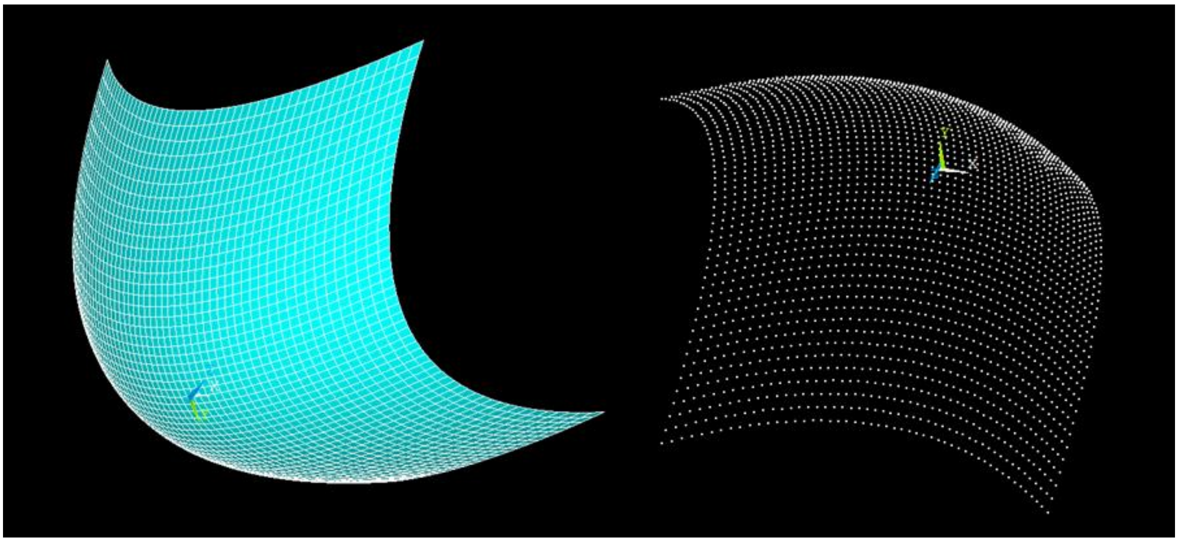
Bij *l*=1m is het verschil tussen de uitkomsten van de formule- en de ANSYS-berekening groot. Het blijkt dat de eerste trilling zich voordoet in de vorm vaneen gehele golf in de richting van de kromming gecombineerd met een halve golf, een buik, in de richting van *R*=∞ (figuur 6.4).
De tweede trillingsvorm is de vorm die de gestelde basistrilling (*i*=*j*=1) het best benaderd. Deze vorm treedt, bij de gegeven dataset, op bij 42,2 Hz. Formule 6.5 heeft daarmee een afwijking van 12,3% t.o.v. ANSYS. Uit danalyse blijkt tevens dat formule 6.5 voldoet als wordt voldaan aan *R*/*l*≥20 en *l*≤0,5m.




**Figuur 6.4:trillingsvormen cilindrisch paneel a=b=1,0, kx=0 ky=0,1**

Na analyse blijkt dat de vertrouwde formule 6.5 voldoende nauwkeurig is bij $R \geq 5$m. $R = 3$m geeft een afwijking ten opzichte van ANSYS die de gewenste nauwkeurigheidsgrens ruim overschrijdt. De studie van de kromming geeft een uiterste verhouding van ca. $R/l \geq 17$, afgerond $R/l \geq 20$.
Deze verhouding komt overeen met de geldigheidsgrens t.a.v. afmetingen zoals beschreven in de vorige alinea.

# 7. Dubbele kromming



**Figuur 7.1: Dubbele kromming ANSYS (overdreven voorgesteld)**
***a*=1.0, *b*=1.0, $R_x$=0.5, $R_y$=0.3m**

Tot nu toe zijn bekende gevallen in de literatuur geanalyseerd. De invloeden van de verschillende parameters op de eigenfrequentie van een paneel werden bepaald. Dit waren in feite allemaal vingeroefeningen om een indruk te krijgen van het gedrag van verschillende geometrieën en de te verwachte range van de foutmarge. De onderzoeksvraag richt zich echter op de laagste eigenfrequentie van een paneel dat in de twee hoofdrichtingen constante, doch verschillende kromming heeft.
Bij een plak vlak is de kromming 0, deze komt niet terug in de formule voor de eigenfrequentie van een plat vlak. Voor het bepalen van de frequentie van een bolvormig oppervlak is er gebruik gemaakt van *R* als kromtestraal, wetende dat de straal in beide richtingen gelijk is. Voor het bepalen van de laagste eigenfrequentie van een cilindrisch gevormde schaal is er gebruik gemaakt van de maatgevende kromtestraal, wetende dat de straal in de richting loodrecht op de eerste straal gelijk is aan nul. Gezocht moet worden naar een vergelijking voor de laagste eigenfrequentie waarin beide kromtestralen tot uiting komen. Omdat de richting waarin het testobject gelegd wordt niet mag uitmaken voor de eigenfrequentie moeten $R_x$ en $R_y$ in deze formule uitwisselbaar zijn. In overeenstemming met eerder onderzochte geometrieën mag een volgende algemene vorm voor de formule worden verwacht:

$$f_{dubbelgekromd} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_{vlak}^2 + \frac{k_{kromming,x}}{m_{kromming},x} + \frac{k_{kromming,y}}{m_{kromming},y}} \quad 7.1$$

In analogie met de afleiding van de formule van de bol en cilinder, verschillende opties zijn geanalyseerd. Daarvoor zijn er enkele formules opgesteld, zijn alle parameters constant gehouden en hebben beide hoofdrichtingen een kromming gekregen. Bij de verandering van de kromming is m.b.v. het eindige-elementenprogramma steeds opnieuw gekeken naar het effect op de frequentie van de eerste trillingsvorm van het systeem en zijn de resultaten vergeleken met die van de te onderzoeken formules.

De volgende opties zijn bekeken:

1) Analoog aan bol:

$$f_{dubbelgekromd} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{\rho x R_x R_y}} \quad 7.2$$

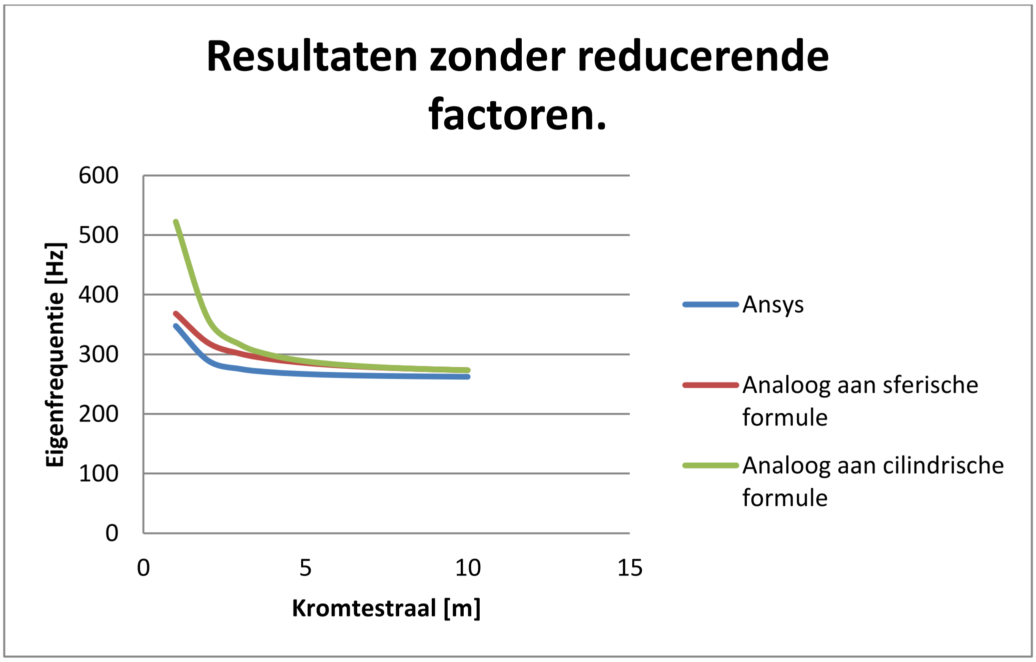
2) Analoog aan cilinder:

$$f_{dubbelgekromd} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}\left[x\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2\right]} \quad 7.3$$

In de formules stelt x een nog nader te bepalen factor voor.
De resultaten van de formules 7.2 en 7.3 zijn door gebruik van data uit tabel 11 vergeleken met ANSYS. Hierbij is $x$=*1* aangenomen.

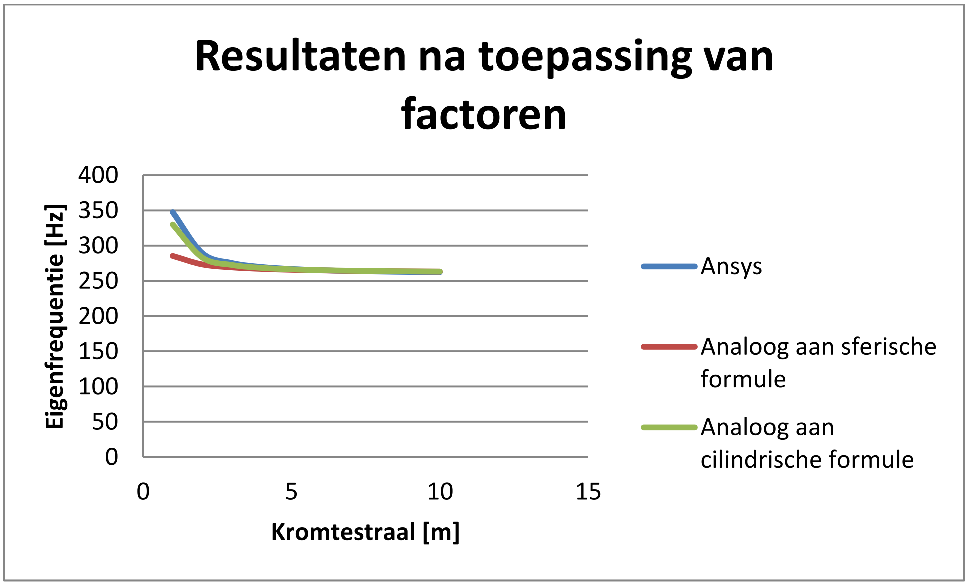
| Staal | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 5,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2, 1e+11 | [N/m$^2$] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m$^3$] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_1$ | Variabel 1,0-10,0 | [m] |
| $R_2$ | 10,0 | [m] |

Tabel 11: Dataset dubbele kromming




Figuur 7.2: resultaten van de afleidingen: formule 7.2 en 7.3

Figuur 7.2 is een grafische weergave van de resultaten van de vergelijking voor de dominante kromtestraal 1m≤$R$≤10m. Bij $x$=1 wijken de resultaten van formule 7.2 in bovenstaande situatie weliswaar niet ver van de ANSYS-waarden af, de resultaten van formule 7.3 vertonen een curve die gelijkvormig is aan de ANSYS-resultaten. (Zowel de resultaten van formule 7.3 als van ANSYS vertonen een scherpe knik in de waarden bij $R$=2m.) Bij $x$=1 zijn de formule-uitkomsten wel hoger dan de daadwerkelijke eigenfrequentie. Na empirisch onderzoek blijkt dat formule 7.3 optimale uitkomsten oplevert bij $x$=1/5. Bij $R$=1m en $x$=1 is de afwijking nog 50,3%; bij x=1/5 is de afwijking, ondanks sterke kromming nog slechts 5,0%.



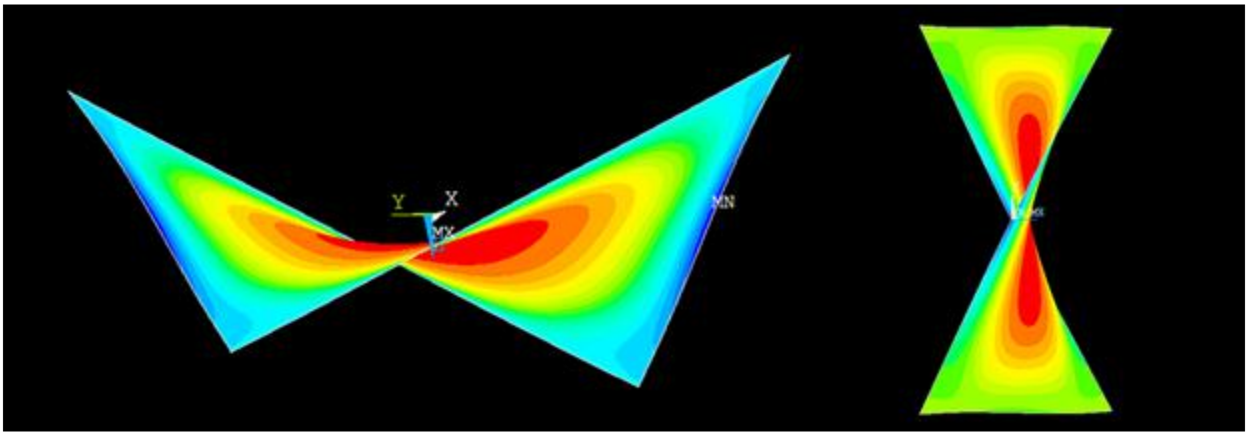

**Figuur 7.3: Resultaten na introductie van een reducerende factor**

Ter controle is er een vergelijking gemaakt met een dataset die correspondeert met de karakteristieken voor een glazen paneel van 1x1m. De foutmarge blijft in deze analyse beperkt tot 3,4%. Een overzicht van de gegenereerde data en de uitkomsten van het glazen paneel zijn te vinden in bijlage B.

Na analyse van de opties 7.2 en 7.3, en na controle, blijkt de vorm van formule 7.3 met $x$=1/5 de beste benadering van de resultaten van de eindige-elementenberekening te geven. Dit leidt tot:

$$f_{dubbelgekromd} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{20\rho}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2} \qquad 7.4$$

# 8. Twist




**Figuur 8.1: Schaal zonder kromming enkel twist**
**[ANSYS *a*=1.0, *b*=1.0, $R_{xy}$=1.0m]**

Een verdraaiing van een vlak treedt op wanneer twee tegenovergestelde zijden niet in hetzelfde vlak krommen.
Ter bepaling van de invloed van de verdraaiing op de eigenfrequentie zijn de variabelen uit dataset 12 als constant aangenomen en is de twistkromming gedefinieerd als $R_{xy}$
Gesteld is $R_{xy}=1/k_{xy}$ waarbij $k_{xy0°}=0$, $k_{xy180°}=1$. Met $1\text{m} \leq R_{xy} \leq \infty$, d.w.z. $0° \leq$ twist $t \leq 180°$, is m.b.v. ANSYS een aantal eigenfrequenties bepaald.

| Dataset Staal | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $l$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 5,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2, 1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_1$ | 10,0 | [m] |
| $R_2$ | 20,0 | [m] |
| n | 50,0 | [-] |

**Tabel 12: Controle Dataset Verdraaiing**

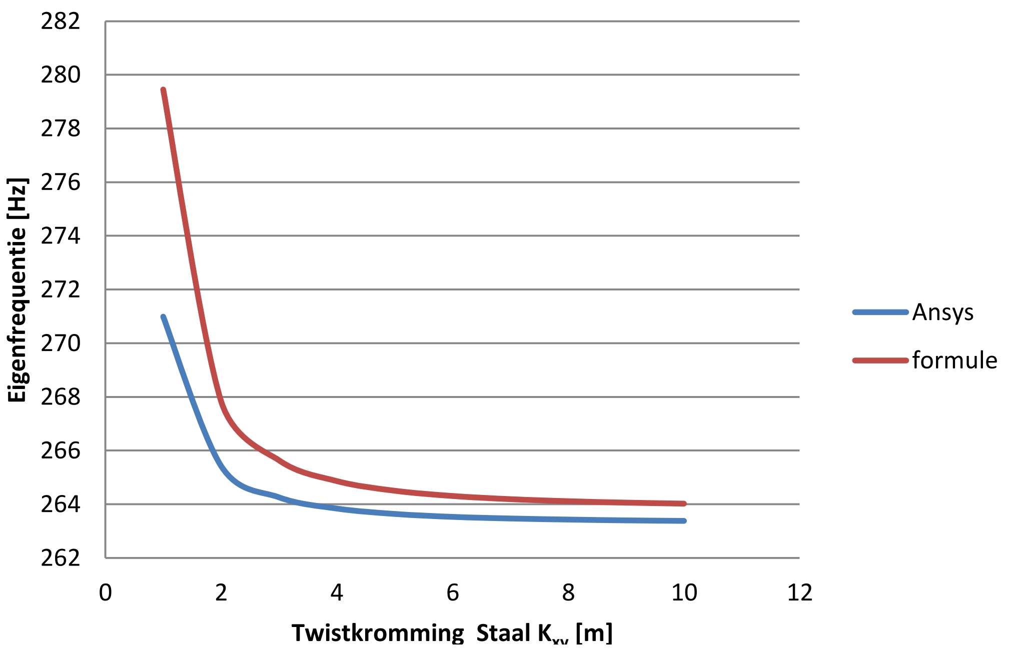
| $R_{xy}$ [m] | Ansys [Hz] |
|---|---|
| ∞ | 263,4 |
| 10 | 263,4 |
| 9 | 263,4 |
| 8 | 263,4 |
| 7 | 263,5 |
| 6 | 263,5 |
| 5 | 263,6 |
| 4 | 263,8 |
| 3 | 264,3 |
| 2 | 265,4 |
| 1 | 271,0 |

**Tabel 13:ANSYS Resultaten bij invoering van dataset tabel 12 en een variabele twist**

Uit tabel 13 blijkt dat de invloed van twist op de eigenfrequentie slechts gering is. Het verschil van een twist van 0° ($R_{xy}=\infty$) t.o.v. van twist van 180° ($R_{xy}=1$) bedraagt slechts ca. 7,5 Hz. In praktische toepassingen zal de twist zich beperken tot enkele (tientallen) graden.

Nu de relatie tussen kromming in hoofdrichtingen en eigenfrequentie bekend is, is gestreefd de twist op een vergelijkbare manier in de formule (7.4) te verwerken. Toekomstig gebruiksgemak pleit voor een toevoeging in de vorm van $x(1/R_{xy})^2$. Deze vorm is om deze reden als eerste onderzocht. In formulevorm wordt dat:

$$f_{dubbelgekromd} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + x\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right]} \qquad 8.1$$



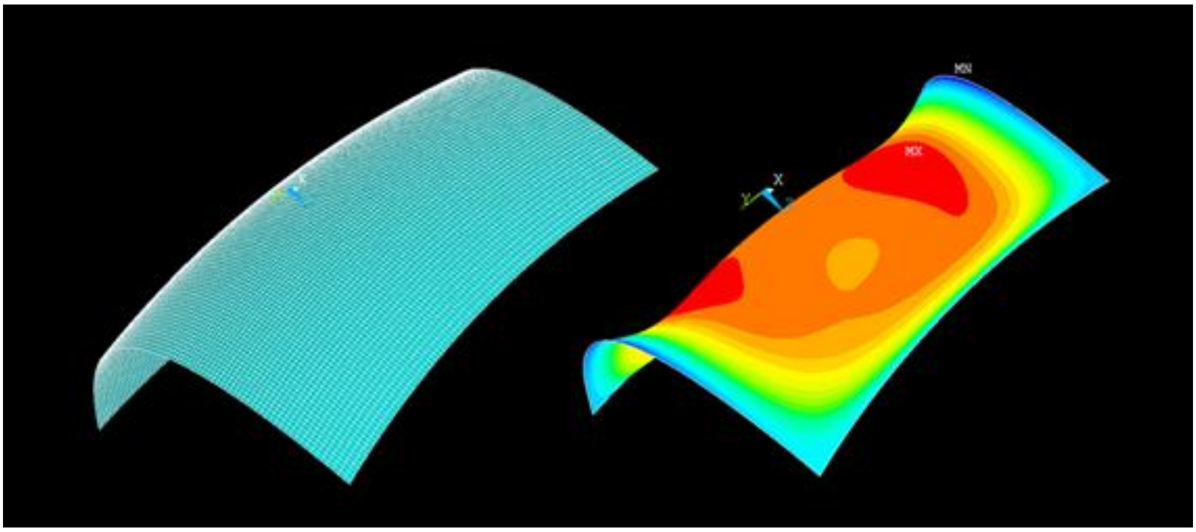

**Figuur 8.2: vergelijking formule 8.1 (*x=1* voor een stalen dataset met de ANSYS resultaten**

Uit de analyse blijkt dat toevoeging van $x(1/Rxy)^2$ aan de formule tot aanvaardbare resultaten leidt. Bij $x$=1/20 en 1m≤$R_{xy}$≤10m blijft de afwijking beperkt. (figuur 8.2).
Ter controle is behalve staal ook beton middels een dataset getest. Voor staal zijn de afwijkingen t.o.v. ANSYS 0,24-3,12%. Het blijkt dat de formule, binnen constructieve grenzen, ook voor beton kan worden toegepast. [Bijlage C bevat de achterliggende resultaten voor grafiek 8.2 en 8.3]
Formule 8.1 blijkt valide voor $x$=1/20; dit leidt tot:

$$f_{\substack{dubbelgekromd,\\ getwist,vierkant}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{20\rho}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{E}{80\rho}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right)} \qquad 8.2$$

# 9. Rechthoekige Geometrieën



**Figuur 9.1: Dubbelgekromde, rechthoekige geometrie en eerste trillingsvorm**
**[ANSYS $a$=1.0, $b$=0.5m, $R_x$=0.8, $R_y$=1.0, $R_{xy}$=5.0 m]**

Het vierkante paneel dat, volgens de opdracht, tot nu toe is bestudeerd is in feite een bijzondere vorm van een rechthoek. Nu er een formule voor een vierkant, dubbelgekromd, getwist paneel is opgesteld dringt de vraag zich op of deze formule ook kan worden ontwikkeld die voor rechthoeken en zo niet, op welke wijze de formule moet worden aangepast zodat deze een valide resultaten oplevert.

| *a/b* [-] | Formule 8.2 [Hz] | Ansys [Hz] | Verschil [%] |
|---|---|---|---|
| 1 | 108.83 | 110.46 | 1,5% |
| 0.9 | 90.04 | 100.88 | 10,7% |
| 0.8 | 73.68 | 92.21 | 20,1% |
| 0.7 | 59.90 | 84.44 | 29,1% |
| 0.6 | 48.86 | 77.56 | 37,0% |
| 0.5 | 40.72 | 71.58 | 43,1% |

**Tabel 12: validatie formule 8.2 voor andere geometrien**

In Tabel 12 is er gekeken naar de nauwkeurigheid van formule 8.2 wanneer het geen vierkante, maar rechthoekige panelen betreft. Een lengte/breedte-verhouding van 0,9 geeft een afwijking van meer dan 10 % t.o.v. de ANSYS-berekening zodat deze formule niet bruikbaar is voor andere geometrieën dan een vierkant.
Bij de afleiding 3.6 voor de eigenhoekfrequentie van een vlak, vierkant, paneel is door aanname van $a=b=l$ een vereenvoudiging gemaakt. Bij rechthoeken kan deze vereenvoudiging geen stand houden. In de volgende afleidingen zijn $a$ en $b$ de lengte en breedte van het paneel.
De algemene formule voor de eigenfrequentie van een vlak paneel wordt door Blevins gegeven volgens[6] (zie ook 3.1):

$$f_{vlak} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{Eh^3}{12\gamma(1-v^2)}} \tag{9.1}$$

Coëfficiënt λ is afhankelijk van de lengte/breedte-verhouding van de rechthoek, de trillingsvorm en de manier waarop de zijden zijn opgelegd; $\gamma$ is de massa per eenheid van oppervlak.
Voor rechthoekige geometrieën geldt:

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2\left[i^2 + j^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \pi^2 + \pi^2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad 9.2$$

Substitutie van 9.2 in 9.1 geeft:

$$f_{vlak} = \frac{\pi^2 + \pi^2\left(\frac{a}{b}\right)^2}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}}$$

$$= \frac{\pi\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}{2a^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad 9.3$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}{2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}}$$

Analoog aan 3.3 -3.6 geldt voor rechthoekige panelen:

$$\omega_{vlak} = 2\pi(1/2\pi\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}} \qquad 9.4$$

$$= \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)}}$$

Voor de opzet van een formule voor bepaling van de eigenfrequentie van een paneel met een kromming wordt gebruik gemaakt van het kwadraat van de eigenhoekfrequentie van het vlak ($\omega_{vlak}^2$). Deze wordt gegeven volgens:

$$\omega_{vlak}^2 = \pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 \frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)} \qquad 9.5$$

Substitutie van 9.5 in 8.2 geeft een algemene afleiding voor dubbelgekromde, getwiste, rechthoekige panelen.

$$f_{\substack{dubbelgekromd\\getwist,rechthoekig}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 \frac{Eh^2}{12\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right]}$$

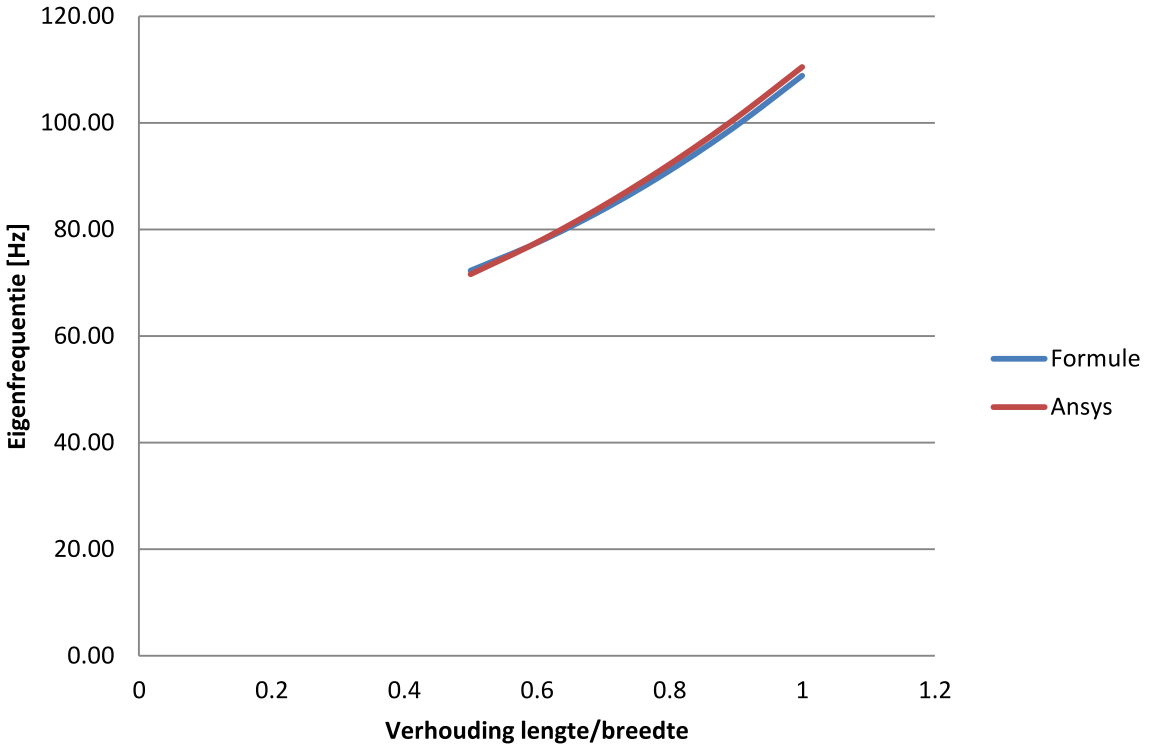
$$= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\pi^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 \frac{Eh^2}{3\rho(1-v^2)} + \frac{E}{\rho}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right]} \qquad 9.6$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\left[\underbrace{\frac{\pi^4 h^2}{3(1-v^2)}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}_{vlak} + \underbrace{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2}_{kromming} + \underbrace{\frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2}_{twist}\right]}$$

Met onderstaande dataset is bovenstaande formule 9.6 vervolgens getest op een aantal rechthoekige geometrieën die voldoen aan $0{,}5 \leq \frac{a}{b} \leq 2$.

| Staal | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $a$ | Variabel | [m] |
| $b$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 5,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2, 1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $R_1$ | 10,0 | [m] |
| $R_1$ | 15,0 | [m] |
| $n$ | 120 | [-] |

**Tabel 13: dataset constanten bij bepaling foutmarge formule 9.6**




**Figuur 9.2: benadering van de eigenfrequentie van een rechthoekig, dubbelgekromd paneel met twist met ANSYS en de formule 9.6**

Uit de testvergelijking met ANSYS blijkt dat formule 9.6 in ieder geval voor de geteste geometrieën de laagste eigenfrequentie van rechthoekige, dubbelgekromde panelen met twist benaderd met een gemiddelde afwijking van slechts 1%.

# 10. Geldigheidsgrenzen

Ter nadere bepaling van nauwkeurigheid en toepassingsgebied van formule 9.6 is allereerst aandacht besteed aan de nauwkeurigheid. Daartoe is gekozen voor berekening met een fijner elementenraster dan voorheen. Uit tabel 15 blijkt dat het gebruik van 120 elementen, evenals 130 elementen, leidt tot een nauwkeurigheid van 0,0056%. Berekening van 140 elementen is weliswaar marginaal nauwkeuriger dan 130 resp. 120 elementen, maar gaat ten koste van de rekentijd. Die neemt toe. Met gebruik van de huidige middelen van 34s tot ca.70s per berekening.
Gegeven de geringe meeropbrengst van gedetailleerdere berekeningen zijn alle volgende analyses uitgevoerd met een raster van 120 elementen.

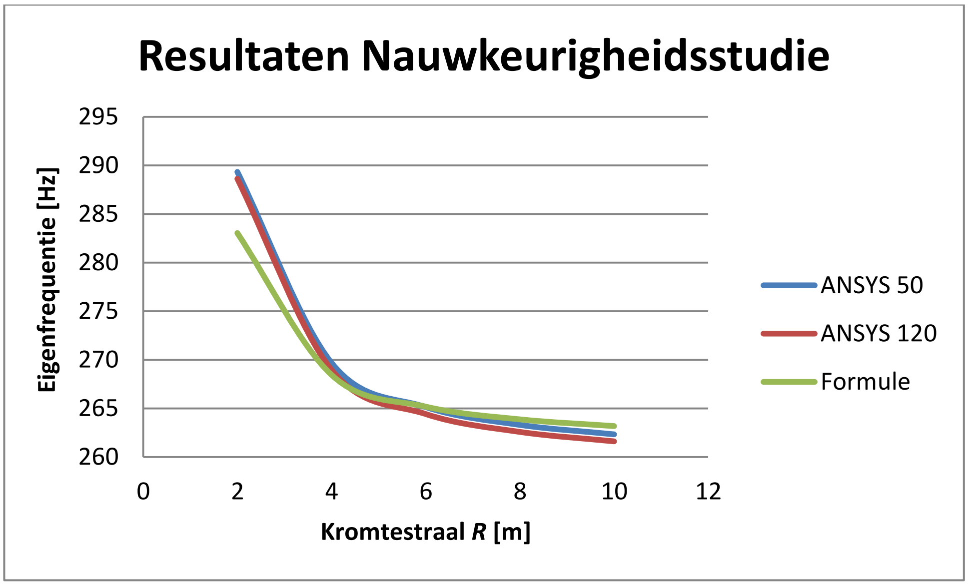
| Staal | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| a | 0,8 | [m] |
| b | 0,5 | [m] |
| h | 8,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_x$ | 3,0 | [m] |
| $R_y$ | 4,0 | [m] |
| $R_{xy}$ | 5,0 | [m] |

Tabel 14: dataset ter bepaling van de fijnheid van het raster

| Elementen | Ansys | Verschil met exact | Rekentijd | Required memory | aantal modes berekend |
|---|---|---|---|---|---|
| [n] | [Hz] | [%] | [s] | [Mb] | [n] |
| 40 | 89.00 | | 1 | 48,70 | 10 |
| 50 | 88.98 | 2,47e-2 | 1 | 77,22 | 10 |
| 60 | 88.97 | 1,57e-2 | 2 | 101,04 | 10 |
| 70 | 88.96 | 1,35e-2 | 3 | 144,37 | 10 |
| 80 | 88.95 | 1,12e-2 | 3 | 205,03 | 10 |
| 90 | 88.94 | 0,90e-2 | 4 | 259,41 | 10 |
| 100 | 88.93 | 0,79e-2 | 23 | 324,52 | 10 |
| 110 | 88.92 | 0,67e-2 | 23 | 400,06 | 10 |
| 120 | 88.92 | 0,56e-2 | 34 | 433,57 | 10 |
| 130 | 88.91 | 0,56e-2 | 41 | 483,09 | 10 |
| 140 | 88.91 | 0,45e-2 | 70 | 519,25 | 10 |
| 150 | 88.91 | 0,45e-2 | 65 | 603,52 | 10 |

Tabel 15: Bepaling nauwkeurigheid ANSYS bij een rechthoekig, dubbelgekromd, getwist paneel

Ten einde de invloed te kunnen bepalen van berekening met een fijner grid zijn aanwezige resultaten volgens de ANSYS50-berekening vergeleken met de uitkomsten van nieuwe ANSYS120-berekeningen. Voor deze vergelijking werden de ANSYS50-resultaten van een dubbelgkromd, getwist, vierkant paneel met een sterke kromtestraal gebruikt.




**Figuur 10.1: Vergelijking van bekende Ansys (50) resultaten met een Anys (120) , voor dataset staal: l= 0.3m, $R_x$ variabel**

Zowel voor het ANSYS model voor 50 als 120 elementen blijkt de formule de laagste eigenfrequentie te onderschatten voor $R_{dominant}$ <4m en iets te overschatten voor $\mathrm{R}_{\mathrm{dominant}}$ >4m. Het absolute verschil tussen het gebruik van de benadering met ANSYS 50 elementen en ANSYS 120 elementen blijft beperkt tot 1 Hz. Gegevens waar deze grafiek op is gebaseerd staan genoteerd in bijlage D.

## 10.1 Geldigheidsgrenzen met betrekking tot de afmetingen

Teneinde formule 9.6 te kunnen onderwerpen aan een onderzoek naar de grenzen van toepasbaarheid is gebruik gemaakt van tabel 16, de standaard dataset zodat vergelijking met eerdere bevindingen mogelijk is. De afmetingen van het bestudeerde paneel zijn relatief gering. Bij interpretatie van de resultaten dient steeds in het oog worden gehouden dat de nieuwe resultaten met de ANSYS120-berekening zijn bepaald en de oude met de ANSYS50-berekening.

| Dataset Staal | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| $a$ | 0,3 | [m] |
| $b$ | 0,3 | [m] |
| $h$ | 5,0e-3 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e+11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7,9e+3 | [kg/m3] |
| $v$ | 0 | [-] |
| $R_x$ | 10,0 | [m] |
| $R_y$ | 10,0 | [m] |
| $R_{xy}$ | 10,0 | [m] |
| n | 120 | [-] |

**Tabel 16: dataset studie nauwkeurigheid formule 9.6**

Het is moeilijk de nauwkeurigheid van de nieuwe formule 9.6 te vergelijken met bestaande, eenvoudige methodes omdat deze niet voorhanden zijn. Er is daarom een poging gedaan een klein paneel (0,3x0,3m) met een relatief grote kromtestraal in secundaire richting ($R_{secundair}$=10m) te vergelijken met een situatie waarin de kromming wordt verwaarloosd, m.a.w. met de bekende cilinderberekening ($R_{secundair}=\infty$). Daarbij diende de dataset van tabel 16 als uitgangspunt.
Tabel 17 toont de resultaten van de vergelijking bij een aantal kromtestralen.
Hieruit blijkt dat zowel voor de formule van de cilinder (5.5) als de nieuwe formule voor dubbelgekromde, getwiste panelen (9.6) de afwijking t.o.v. de ANSYS-berekening toeneemt bij sterker wordende kromming.
Bij $R$=1m vertoont formule 5.5 een afwijking van 22,7% met de resultaten van ANSYS. Bij gebruik van formule 9.6 blijft de afwijking beperkt tot 5,5%. Verwaarlozing van secundaire, zwakke kromming blijkt bij toenemende primaire kromming snel tot grote afwijkingen te leiden.
Hoewel het beoogde gebruiksdoel van de nieuwe ontwerpformule berekening van panelen met slechts beperkte krommingen betreft blijkt formule 9.6 ook in dit geval voor relatief sterke krommingen bruikbaar.

| ***R*** | **ANSYS** | **Formule 5.5: Cilinder** | **Verschil Cilinder-Ansys** | **Formule 9.6: Algemeen** | **Verschil Algemeen-Ansys** |
|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] | [Hz] | [%] |
| 10,0 | 265,21 | 263,82 | 0,5 | 261,24 | 1,3 |
| 5,0 | 267,84 | 273,29 | 2,0 | 263,18 | 1,5 |
| 3,0 | 285,35 | 332,05 | 16,4 | 272,68 | 4,4 |
| 1,0 | 338,10 | 414,88 | 22,7 | 319,05 | 5,5 |

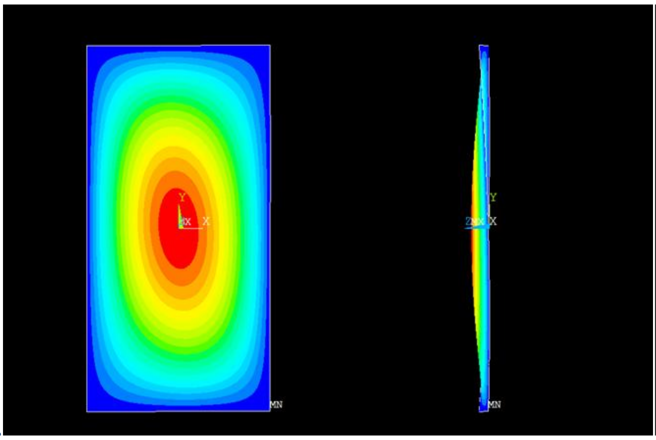
**Tabel 17: Vergelijking nauwkeurigheid formules 5.5 en 9.6 t.a.v de kromming**

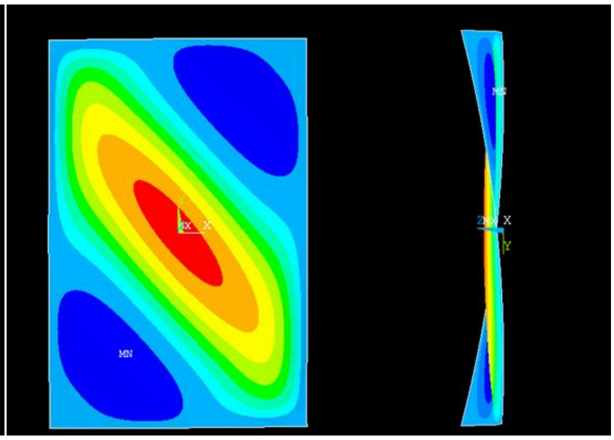
| ***a*** | ***b*** | **Ansys** | **Formule 9.6** | **Verschil in uitkomsten** |
|---|---|---|---|---|
| **[m]** | **[m]** | **[Hz]** | **[Hz]** | **[%]** |
| 0,05 | 0,05 | 3650,9 | 3752,53 | 2,8 |
| 0,1 | 0,1 | 928,28 | 938,13 | 1,1 |
| 5,0 | 5,0 | 0,38 | 0,38 | 0,0 |
| 10,0 | 10,0 | 0,09 | 0,09 | 0,1 |
| 20,0 | 20,0 | 0,02 | 0,02 | 1,8 |
| 0,25 | 0,5 | 236,59 | 237,58 | 0,4 |
| 0,38 | 0,8 | 111,46 | 110,93 | 0,5 |
| 0,5 | 1,0 | 70,73 | 69,84 | 1,3 |
| 1,0 | 2,0 | 35,57 | 40,68 | 14,3 |
| 2,0 | 3,0 | 21,76 | 38,18 | 75,5 |

**Tabel 18: nauwkeurigheidsstudie formule 9.6 t.a.v afmetingen**

Tabel 18 geeft de resultaten van een studie naar verschillende afmetingen van zowel vierkanten als rechthoeken.
De gevonden waarden ondersteunen de vaststelling uit *3.2 Parameterstudie vlak paneel* dat analyse van extreem grote en extreem kleine panelen tot onbetrouwbare resultaten leidt.
Een dubbelgekromd, getwist paneel van 0,5x1,0m trilt netjes met een halve trilling in beide hoofdrichtingen. Vergelijkbare panelen van 1,0x2,0m of 2,0x3,0m vertonen echter een berekeningsfout van 14% resp. 75%. Visualisaties van de ANSYS-resultaten (zie figuur 10.2)

ondersteunen de verwachting dat dergelijke panelen niet trillen met de eerste eigenfrequentie, maar met meer complexe trillingen.





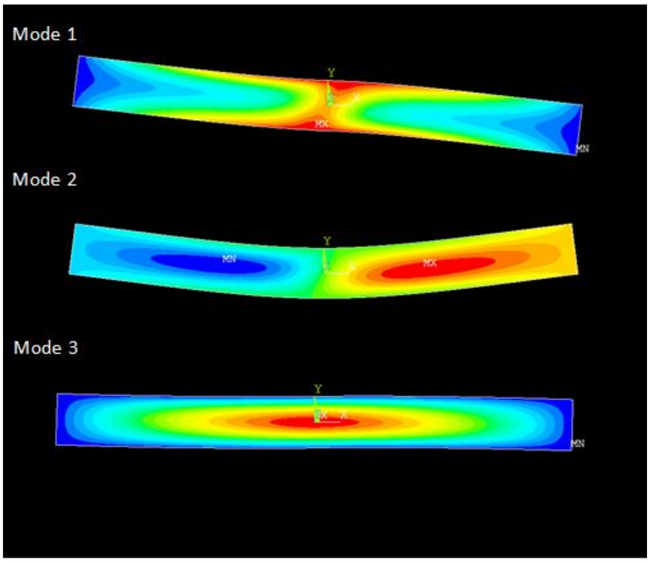
Figuur 10.2: Trillingsmode, a=0.5, b=1,0

Figuur 10.3: Trillingsmode a=2, b=3

| a | b | a/b | Ansys | formule | % | frequentiegebied |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,3 | 1 | 2623 | 263,3 | 0,4 | $1^e$ mode |
| 0,3 | 0,6 | 0,5 | 167,3 | 167,2 | 0,0 | $1^e$ mode |
| 0,3 | 1,5 | 0,2 | 139,5 | 140,7 | 0,9 | $1^e$ mode |
| 0,3 | 3 | 0,1 | 136,0 | 137,0 | 0,7 | $3^e$ mode |

Tabel 19: Analyse lengte/breedte verhouding, uitgevoerd middels dataset (tabel 16)

Analyse van de verhouding van lengte en breedte (tabel 19) wijst uit dat formule 9.6 behalve voor een vierkant paneel tevens een zeer nauwkeurige benadering genereert voor langgerekte dubbel gekromde geometrieën. Wanneer de lengte/breedte verhouding een factor 10 verschilt geeft de formule een afwijking van 0,7 % ten opzichte van het ANSYS resultaat. Wel dient erbij vermeld te worden dat er eerst twee trillingsvormen (80.5 en 107.1 Hz) aan vooraf gaan alvorens de trillingsvorm $i=j=1$ verschijnt.




Figuur 40.4: trillingsvormen a=0.3, b=3

| *h* [m] | Formule [Hz] | Ansys [Hz] | Verschil [%] |
|---|---|---|---|
| 1,00E-03 | 64,47 | 67,17 | 4,0 |
| 2,00E-03 | 110,93 | 113,07 | 1,9 |
| 3,00E-03 | 160,89 | 162,05 | 0,7 |
| 4,00E-03 | 211,90 | 212,03 | 0,1 |
| 5,00E-03 | 263,34 | 262,29 | 0,4 |
| 1,00E-02 | 522,56 | 511,81 | 2,1 |
| 1,50E-02 | 782,70 | 754,83 | 3,7 |
| 1,80E-02 | 938,90 | 896,90 | 4,7 |
| 1,90E-02 | 990,98 | 943,60 | 5,0 |
| 2,00E-02 | 1043,06 | 989,96 | 5,4 |
| 3,00E-02 | 1564,01 | 1434,50 | 9,0 |

**Tabel 20: Bepaling geldigheidsgrens dikte gekromd paneel t.g.v dataset 16**

Wanneer de variabelen uit tabel 16 worden aangehouden als constant en enkel de parameter voor de dikte van het paneel (*h)* varieert. Blijkt dat de formule 9.6 voldoet aan de 5% nauwkeurigheidseis wanneer: $h<0{,}02m$, $R/h \geq 500$.

## 10.2 Geldigheidsgrenzen met betrekking tot de kromtestraal en twist

Tabel 21 toont het resultaat van onderzoek naar de relatie tussen kromtestraal (*R*), afmetingen (*a*,*b)* en dikte (*h*). Voor de relatie tussen de kromtestraal en de dikte is het verwachte geldigheidsinterval $30 < \frac{R}{h}$constante2000 aangehouden.

| *R* [m] | *a=b=l* [m] | *h* [m] | Formule [Hz] | Ansys [Hz] | Verschil [%] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 211,53 | 225,56 | 6,2 |
| 1,2 | 0,3 | 2,0e-3 | 185,46 | 199,51 | 7,0 |
| 1,2 | 0,3 | 2,0e-3 | 161,01 | 173,67 | 7,3 |
| 2,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 139,05 | 148,84 | 6,6 |
| 3,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 120,95 | 126,68 | 4,5 |
| 4,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 113,94 | 117,52 | 3,0 |
| 5,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 110,55 | 112,94 | 2,1 |
| 10,0 | 0,3 | 2,0e-3 | 105,85 | 106,41 | 0,5 |
| 6,0 | 0,6 | 4,0e-3 | 60,48 | 63,34 | 4,5 |
| 10,0 | 1,0 | 5,0e-3 | 29,81 | 31,77 | 6,2 |
| 1,0 | 1,0 | 33,3e-3 | 241,50 | 240,45 | 0,4 |
| 3,0 | 0,3 | 10,0e-3 | 524,78 | 514,80 | 1,9 |
| 0,3 | 0,3 | 10,0e-3 | 805,04 | 801,49 | 0,4 |
| 0,2 | 0,3 | 10,0e-3 | 1057,67 | 981,35 | 7,8 |

**Tabel 21: Relatie *l, R, h***

Uit de analyse blijkt dat voor een dun paneel (*R/h*=2000) de formule veilig toegepast kan worden als voldaan wordt aan de voorwaarden $R/l \geq 10$. Dikkere panelen laten een sterkere kromming (*k=1/R)* toe; bij $R/h = 30$ is de formule toepasbaar voor $R/l \geq 1$. In alle voorkomende gevallen van dubbelkromming geldt dat de sterkste kromming, d.w.z. de kleinste kromtestraal, maatgevend is.

De invloed van de twistfactor op de eigenfrequentie is 5x kleiner dan de invloed van de kleinste kromtestraal. In tabel 20 is de maximale twist van een vlak paneel bepaald. Bij een vlak, vierkant paneel van 0.3x0.3m is de minimale twiststraal 1,5m, d.w.z. $R_{xy}/l \geq 5$. Dit komt overeen met een maximale hoekverdraaiing van 120°/m.. Kleinere twiststralen, d.w.z. grotere hoekverdraaiingen, overschrijden de 5% nauwkeurigheid die als acceptabel is vastgesteld.

| $R_{xy}$ [m] | $R_x=R_y$ [m] | $a=b=l$ [m] | Formule [Hz] | Ansys [Hz] | Verschil [%] |
|---|---|---|---|---|---|
| 10,0 | 0 | 0,3 | 104,64 | 104,49 | 0,2 |
| 5,0 | 0 | 0,3 | 105,85 | 105,58 | 0,3 |
| 4,0 | 0 | 0,3 | 106,75 | 106,37 | 0,4 |
| 3,0 | 0 | 0,3 | 108,66 | 107,98 | 0,6 |
| 2,0 | 0 | 0,3 | 113,94 | 112,03 | 1,7 |
| 1,5 | 0 | 0,3 | 120,95 | 116,67 | 3,7 |
| 1,0 | 0 | 0,3 | 39,05 | 126,02 | 10,3 |

Tabel 22:Twiststraal van een vlak paneel in verhouding tot lengte

Als Tabel 22 wordt vergeleken met tabel 23, waarin de constante van dataset 16 is aangenomen, dan blijkt dat dubbele kromming een gunstige uitwerking heeft op de nauwkeurigheid in geval van twist. De foutmarge bij een paneel met $R_{xy}$=1m is met 3,1% 3x kleiner dan bij een vlak pan eel.

| $R_{xy}$ [m] | Formule [Hz] | Ansys [Hz] | Verschil [%] |
|---|---|---|---|
| 10 | 263,34 | 262,29 | 0,4 |
| 5 | 263,82 | 266,88 | 1,1 |
| 3 | 264,96 | 275,3 | 3,8 |
| 1 | 278,81 | 270,37 | 3,1 |

Tabel 23: Twiststraal en foutmarge t.g.v. dataset (tabel 16)

## 10.3 Geldigheidsvoorwaarden met betrekking tot de dwarscontractiecoëfficiënt.

De studie naar de dwarscontractiecoëfficiënt $v$ wordt met de bekende dataset uit tabel 14 uitgevoerd.

| v | Ansys | formule | [%] |
|---|---|---|---|
| 0 | 261,67 | 263,34 | 0,6 |
| 0,1 | 263,19 | 264,64 | 0,6 |
| 0,2 | 267,38 | 268,66 | 0,5 |
| 0,3 | 274,66 | 275,80 | 0,4 |

Tabel 24:nauwkeurigheid van de dwarscontractiecoëfficiënt ($v$)

Ten aanzien van het gebruik van v kan worden verwezen naar bladzijde 15 waarop wordt beschreven dat, als in de toekomst zal kunnen blijken dat de bevindingen voor andere materialen (nagenoeg) dezelfde zijn als voor staal, in overweging kan worden genomen $v^2$ uit de algemene formule te schrappen. De formule reduceert in dat geval tot:

$$f_{algemeen} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi^4 h^2}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right)} \qquad 10.1$$

Na nadere analyse (zie tabel 24) blijkt dat bij maximale $v$ ($0 \leq v \leq 0{,}3$) de afwijking van formule 10.1 t.o.v. ANSYS toeneemt tot 4,1%. Dat betekent dat als de dwarscontractiecoëfficiënt wordt verwaarloosd in redelijkheid kan worden verondersteld dat de formule in ongunstige gevallen de geldigheidsgrens overschrijdt die is vastgesteld bij aanvang van deze BSc-opdracht (=5%).
Dit is de reden dat er in dit rapport voor is gekozen het gebruik van de vereenvoudigde formule 10.1 te ontraden en de aandacht te blijven richten op formule 9.6.

| v<br>[-] | Ansys<br>[Hz] | Formule 10.1<br>[Hz] | verschil<br>[%] |
|---|---|---|---|
| 0 | 261,67 | 263,34 | 0,6 |
| 0,1 | 263,19 | 263,34 | 0,1 |
| 0,2 | 267,38 | 263,34 | 1,5 |
| 0,3 | 274,66 | 263,34 | 4,1 |

Tabel 25: effect formule 10.1 met betrekking tot de dwarscontractiecoëfficiënt ($v$)

# 11. Conclusies

De opdracht van deze thesis luidde: stel een algemene ontwerpformule op voor bepaling van de eigenfrequentie van een dubbel gekromd, getwist, vierkant paneel die breed toepasbaar, gemakkelijk hanteerbaar / programmeerbaar en tot 5% nauwkeurig is.
Er kon een formule worden afgeleid die aan de gestelde eisen voldoet. Verdere uitwerking leidde tot een vorm die tevens bruikbaar is voor rechthoekige panelen, namelijk:

$$f_{algemeen} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi^4 h^2}{3(1-\upsilon^2)}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{1}{R_{xy}}\right)^2\right)} \tag{11.1}$$

*Component:* *vlak* *kromming* *twist*

Deze formule (11.1) voldoet aan de eisen mits volgende grenzen worden aangehouden:

- Afmeting:
  voor rechthoekige geometrieën als ten minste wordt voldaan aan:
  - $a, b \leq$ 1,0m (bij $a, b$ > 1,0m is er veelal geen sprake van de basistrilling);
  - $0{,}1 \leq \frac{a}{b} \leq 10\text{m}$ (smallere stroken werden niet geanalyseerd);
  - $h << l$.

  (Tabel 18,19)
- Kromming:
  voor slanke schalen ($R/h$=2000) is de formule geldig als $R/l \geq 10$
  voor dikke schalen ($R/h$=30) is de formule geldig als $R/l \geq 1$
  (Tabel 21)
- Twist
  voor verdraaiing is de formule geldig als $R_{xy}$>1m (= $k_{xy} \leq 180°$).
  (Tabel 22)

Overige bevindingen:

- Aan de elasticiteitsmodulus (*E*), de soortelijke massa (*ρ*) en de dwarscontractiecoefficient (ν) zijn geen voorwaarden verbonden. (Tabel 5,7,10,22)
- Bij ondiepe schalen is de wijze van oplegging (wel of geen verhindering van verplaatsing in het vlak) niet van invloed op de laagste eigenfrequentie. (Tabel 1)
- Wanneer de formule getest wordt voor een stalen paneel van 0,3x03m met de uitgangswaarden zoals vermeld in tabel 16 geldt formule 9.6 als voldaan wordt aan:
  - verhouding: $0{,}1 \leq a/b \leq 10$m (tabel 19)
  - dikte: $h$ < 0,02m (tabel 20)
  - kromtestraal: $R$ > 1,0 m (tabel 17)
  - twist: $R_{xy} \leq 180°$ (tabel 22)

Rekentijd voor eindige-elementenberekeningen.
Praktisch gebruik van formule 9.6 beperkt zich tot constructies die zijn opgebouwd uit (vele) kleine elementen. Vastgesteld kan worden dat voor het verkrijgen van de nodige nauwkeurigheid binnen de geldigheidsgrenzen van deze formule kan worden volstaan met rasters ten behoeve de eindige-elementenberekening van maximaal 120x120 elementen. Meer elementen bij dezelfde afmetingen geeft marginaal grotere nauwkeurigheid; grotere panelen kunnen met de formule niet nauwkeurig meer worden berekend. De benodigde rekentijd is dus rechtevenredig met het aantal te berekenen panelen. Met de huidige middelen duurt berekening van een paneel ruim ½ minuut.
Nauwkeurigheid.

Bij de diverse berekeningen is steeds een enkele parameter gewijzigd. Iedere volgende furmuleberekening toonde steeds een nieuwe afwijking ten opzichte van de eindige-elementenberekening aan. Hierbij is geen sprake van stapeling van onnauwkeurigheden. De enige onnauwkeurigheid die verder een rol speelt bij het verschil tussen formuleberekening en eindige-elementenberekening is de eigen onnauwkeurig van de eindige-elementenberekening. Deze onnauwkeurigheid is echter een factor $10^3$ kleiner dan de geaccepteerde onnauwkeurigheid van 5% en wordt geaccepteerd.

# 12 Literatuurlijst


[1] Hoogenboom, P. (2013). *Notes on Shell Structures.* Delft: Reader Delft University of Technology.

[2] Calladine, C. (1983). *Theory of shell structures.* Cambridge: Cambridge University Press, p.2-6

[3] Blevins, R. (1981). Natural frequencies of shallow cylindrically curved panels. *Journal of Sound and Vibration*, p.291

[4] Soedel, W. (1973). A Natural Frequency Analogy Between Spherically Curved Panels and Flat Plates. *Journal of Sound and Vibration*, *29(4)*, 457-461.

[5] Blevins, R. (1981). Natural frequencies of shallow cylindrically curved panels. *Journal of Sound and Vibration*, p.11-13

[6] Calladine, C. (1983). *Theory of shell structures.* Cambridge: Cambridge University Press, p.653

[7] Blevins, R. (1981). Natural frequencies of shallow cylindrically curved panels. *Journal of Sound and Vibration*, 233-290.

[8] Blevins, R. (1981). Natural frequencies of shallow cylindrically curved panels. *Journal of Sound and Vibration*, p.329-333

[9] Sewall, J. (1967). *Vibration Analysis of Cylindrical Curved Panels with Simply Supported or Clamped Edges and Comparison with Some Experiments.* Langley Research Centre: NASA Report NASA-TN-D-3791, p.15-24

# BIJLAGEN

# 12. Bijlage A

## Wijze van oplegging

| Parameter | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|
| l | 0,30 | [m] |
| h | 0,005 | [m] |
| $E_{staal}$ | 2,1e11 | [N/m2] |
| $\rho_{staal}$ | 7850 | [kg/m3] |
| v | 0 | [-] |
| Rx | 0 | [m] |
| Ry | 0 | [m] |

Tabel 26: Constante variabelen

| E | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil | ρ | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [$N/m^2$] | [Hz] | [Hz] | % | [$kg/m^3$] | [Hz] | [Hz] | % |
| 1,0E+10 | 66,043 | 66 | 0,42 | 2000 | 599,730 | 597,08 | 0,44 |
| 2,0E+10 | 93,420 | 93 | 0,44 | 2500 | 536,410 | 534,04 | 0,44 |
| 3,0E+10 | 114,420 | 113,91 | 0,45 | 3000 | 489,680 | 487,51 | 0,44 |
| 4,0E+10 | 132,120 | 131,53 | 0,45 | 3500 | 453,350 | 451,35 | 0,44 |
| 5,0E+10 | 147,710 | 147,06 | 0,44 | 4000 | 424,070 | 422,2 | 0,44 |
| 6,0E+10 | 161,810 | 161,09 | 0,44 | 4500 | 399,820 | 398,05 | 0,44 |
| 7,0E+10 | 174,770 | 174 | 0,44 | 5000 | 379,300 | 377,62 | 0,44 |
| 8,0E+10 | 186,840 | 186,01 | 0,44 | 5500 | 361,650 | 360,05 | 0,44 |
| 9,0E+10 | 198,170 | 197,3 | 0,44 | 6000 | 346,250 | 344,72 | 0,44 |
| 1,0E+11 | 208,890 | 207,97 | 0,44 | 6500 | 332,670 | 331,2 | 0,44 |
| 1,1E+11 | 219,090 | 218,12 | 0,44 | 7000 | 320,570 | 319,15 | 0,44 |
| 1,2E+11 | 228,830 | 227,82 | 0,44 | 7500 | 309,700 | 308,33 | 0,44 |
| 1,3E+11 | 238,170 | 237,12 | 0,44 | 8000 | 299,860 | 298,54 | 0,44 |
| 1,4E+11 | 247,170 | 246,07 | 0,45 | 8500 | 290,910 | 289,62 | 0,44 |

Tabel 27: Verschil in wijze van oplegging m.b.t elasticiteitsmodulus en dichtheid

| $R_1$ | $R_2$ | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil | $R_{xy}$ | ANSYS Scharnieren | ANSYS Rol oplegging | Verschil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [m] | [Hz] | [Hz] | [%] | [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 0,2 | 0,4 | 485,610 | 712,49 | 46,72 | 0,4 | 151,020 | 180,57 | 19,57 |
| 0,4 | 0,8 | 532,130 | 543,05 | 2,05 | 0,8 | 196,880 | 209,05 | 6,18 |
| 0,8 | 1,6 | 353,650 | 351,39 | 0,64 | 1 | 219,540 | 228,75 | 4,20 |
| 1 | 2 | 302,720 | 301,38 | 0,44 | 1,5 | 257,400 | 262,9 | 2,14 |
| 1,5 | 3 | 227,960 | 227,51 | 0,20 | 2 | 275,310 | 278,91 | 1,31 |
| 2 | 4 | 188,420 | 188,2 | 0,12 | 2,5 | 284,410 | 286,86 | 0,86 |
| 2,5 | 5 | 164,840 | 164,71 | 0,08 | 3 | 289,590 | 291,27 | 0,58 |
| 3 | 6 | 149,690 | 149,62 | 0,05 | 3,5 | 292,760 | 293,95 | 0,41 |
| 3,5 | 7 | 139,470 | 139,41 | 0,04 | 4 | 294,880 | 295,69 | 0,27 |
| 4 | 8 | 132,250 | 132,2 | 0,04 | 4,5 | 296,370 | 296,89 | 0,18 |
| 4,5 | 9 | 126,980 | 126,95 | 0,02 | 5 | 297,440 | 297,74 | 0,10 |
| 5 | 10 | 123,040 | 123,02 | 0,02 | 10 | 301,080 | 300,47 | 0,20 |
| 10 | 20 | 109,220 | 109,22 | 0,00 | 20 | 302,150 | 301,15 | 0,33 |

Tabel 28: Verschil in wijze van oplegging m.b.t kromming en twist

# 13. Bijlage B

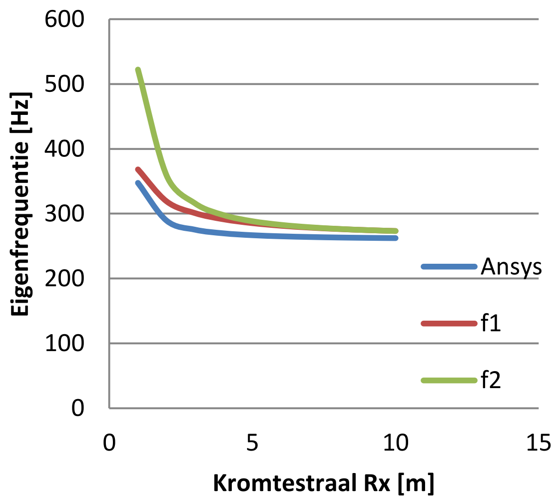
## Dubbelgekromd, vierkant paneel

# 14.

| Staal | Constante waarde | Eenheid | Glas | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|---|---|---|
| **l** | 0.300 | [m] | **l** | 1.0 | [m] |
| **h** | 0.005 | [m] | **h** | 0.015 | [m] |
| **$E_{staal}$** | 2.1e11 | [N/m2] | **$E_{staal}$** | 7.2$^{e}$10 | [N/m2] |
| **$\rho_{staal}$** | 7850 | [kg/m3] | **$\rho_{staal}$** | 2500 | [kg/m3] |
| **v** | 0 | [-] | **v** | 0 | [-] |
| **$R_2$** | 10 | [m] | **$R_2$** | 10 | [m] |

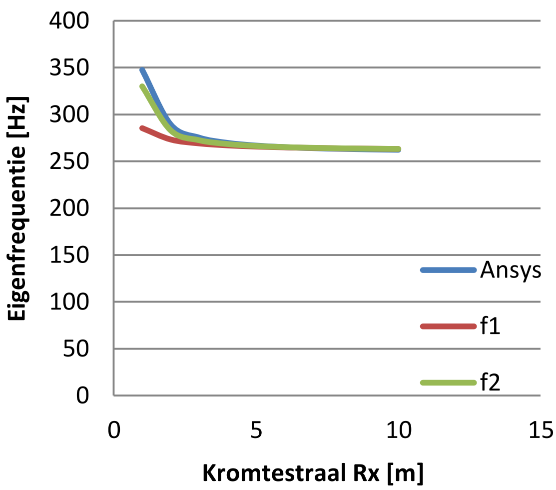
**Tabel 29: Test dataset dubbele kromming**

| $R_x$ | Ansys | f1 | Afwijking f1 | f2 | Afwijking f2 |
|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] | [Hz] | [%] |
| 10 | 262,32 | 273,285 | 4,18 | 273,285 | 4,18 |
| 9 | 262,74 | 274,659 | 4,54 | 274,697 | 4,55 |
| 8 | 263,29 | 276,367 | 4,97 | 276,558 | 5,04 |
| 7 | 264,04 | 278,548 | 5,49 | 279,105 | 5,71 |
| 6 | 265,13 | 281,429 | 6,15 | 282,763 | 6,65 |
| 5 | 266,81 | 285,413 | 6,97 | 288,366 | 8,08 |
| 4 | 269,67 | 291,288 | 8,02 | 297,759 | 10,42 |
| 3 | 275,27 | 300,825 | 9,28 | 315,783 | 14,72 |
| 2 | 289,32 | 319,045 | 10,27 | 359,019 | 24,09 |
| 1 | 347,53 | 368,335 | 5,99 | 522,389 | 50,31 |
| | | | Gem: 6,59% | | Gem: 13,37% |



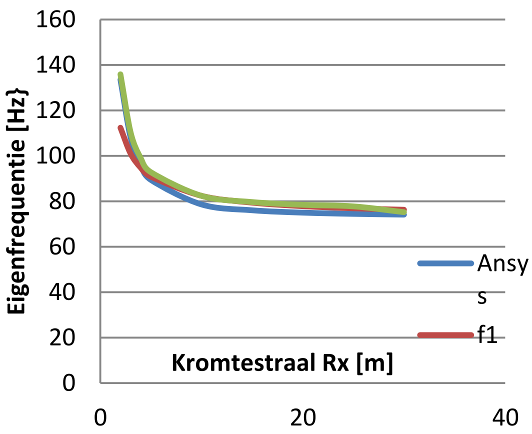

**Tabel 30: Uitkomsten vergelijking (dataset staal) 1 en 2 voor het vinden van optimale factoren**

| $R_x$ | Ansys | f1 | Afwijking f1 | f2 | Afwijking f2 |
|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] | [Hz] | [%] |
| 10 | 262,32 | 263,180 | 0,33 | 263,180 | 0,33 |
| 9 | 262,74 | 263,466 | 0,28 | 263,474 | 0,28 |
| 8 | 263,29 | 263,823 | 0,20 | 263,863 | 0,22 |
| 7 | 264,04 | 264,281 | 0,09 | 264,399 | 0,14 |
| 6 | 265,13 | 264,891 | 0,09 | 265,175 | 0,02 |
| 5 | 266,81 | 265,742 | 0,40 | 266,379 | 0,16 |
| 4 | 269,67 | 267,014 | 0,98 | 268,438 | 0,46 |
| 3 | 275,27 | 269,121 | 2,23 | 272,526 | 1,00 |
| 2 | 289,32 | 273,285 | 5,54 | 283,029 | 2,17 |
| 1 | 347,53 | 285,413 | 17,87% | 330,007 | 5,04 |
| | | | Gem: 0,58% | | Gem: 0,32% |




**Tabel 31: Uitkomsten vergelijking (dataset staal) 1 en 2 met factor 5 resp. 1/5**

| $R_x$ | Ansys | f1 | Afwijking f1 | f2 | Afwijking f2 |
|---|---|---|---|---|---|
| **[m]** | [Hz] | [Hz] | [%] | [Hz] | [%] |
| **10** | 74,12 | 76,26 | 2,89 | 75,19 | 1,45 |
| **9** | 74,445 | 76,89 | 3,29 | 77,74 | 4,43 |
| **8** | 74,987 | 77,84 | 3,80 | 78,42 | 4,58 |
| **7** | 76,028 | 79,38 | 4,42 | 79,64 | 4,75 |
| **6** | 78,599 | 82,39 | 4,83 | 82,39 | 4,83 |
| **5** | 89,419 | 90,81 | 1,56 | 92,80 | 3,78 |
| **4** | 96,049 | 94,74 | 1,35 | 98,98 | 3,06 |
| **3** | 108,09 | 100,96 | 6,60 | 110,35 | 2,10 |
| **2** | 133,53 | 112,36 | 15,85 | 135,87 | 1,75 |
| **1** | 74,12 | 76,26 | 2,89 | 75,19 | 1,45 |
| | | | Gem: 4,96 | | Gem: 3,42 |




**Tabel 32 : Uitkomsten vergelijking (dataset glas) 1 en 2 met factor 5 resp. 1/5**

# 15. Bijlage C

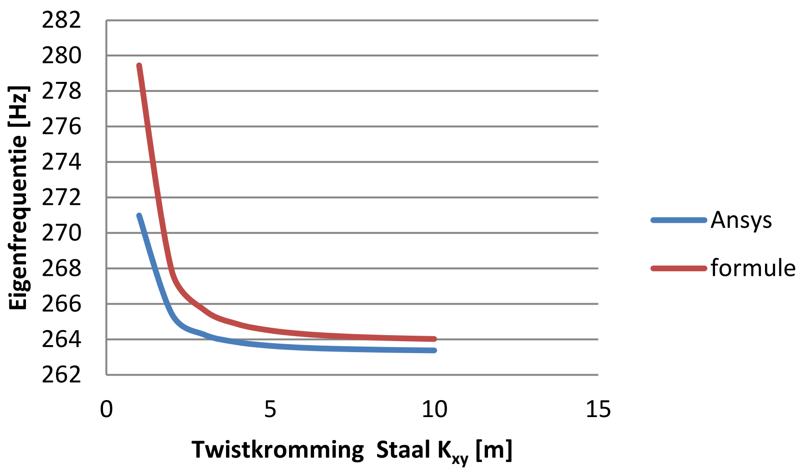
## Twist

| Staal | Constante waarde | Eenheid | Beton | Constante waarde | Eenheid |
|---|---|---|---|---|---|
| **l** | 0.300 | [m] | **l** | 1.0 | [m] |
| **h** | 0.005 | [m] | **h** | 0.015 | [m] |
| **$E_{staal}$** | 2.1e11 | [N/m2] | **$E_{staal}$** | 7.2$^{e}$10 | [N/m2] |
| **$\rho_{staal}$** | 7850 | [kg/m3] | **$\rho_{staal}$** | 2500 | [kg/m3] |
| **v** | 0 | [-] | **v** | 0 | [-] |
| **$R_1$** | 10 | [m] | **$R_2$** | 10 | [m] |
| **$R_2$** | 20 | [m] | $R_2$ | 20 | [m] |
| **n** | 50 | [-] | n | 50 | [-] |

Tabel 33: Datasets met verschillende variabelen

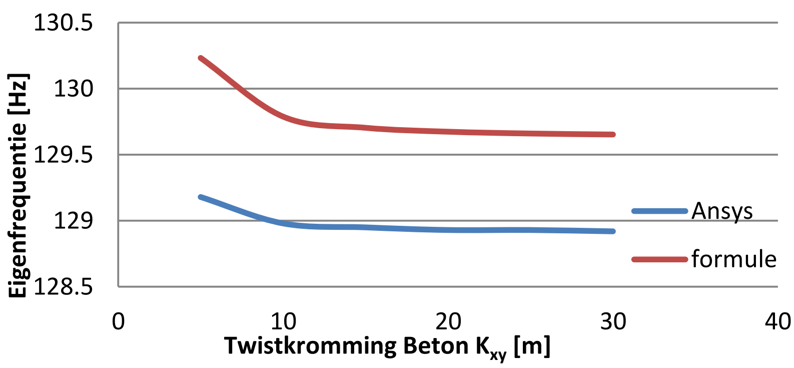
$$f_{vierkant,dubbelgekromd\ twist} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2\pi^4}{3l^4\rho(1-v^2)} + \frac{E}{4\rho}[1/5(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y})^2 + 1/20(\frac{1}{R_{xy}})^2\ ]}$$

| $R_{xy}$ | Ansys | formule | Afwijking |
|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 10 | 263,38 | 264,023 | 0,24 |
| 9 | 263,4 | 264,061 | 0,25 |
| 8 | 263,43 | 264,113 | 0,26 |
| 7 | 263,47 | 264,19 | 0,27 |
| 6 | 263,53 | 264,308 | 0,30 |
| 5 | 263,64 | 264,504 | 0,33 |
| 4 | 263,84 | 264,864 | 0,39 |
| 3 | 264,26 | 265,64 | 0,52 |
| 2 | 265,43 | 267,845 | 0,91 |
| 1 | 270,99 | 279,453 | 3,12 |
| | | | Gem: 0,66% |




Tabel 34: Uitkomsten vergelijking formule voor twist met dataset staal en het ANSYS script

| $R_{xy}$ | Ansys | formule | Afwijking |
|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [%] |
| 30 | 128,92 | 129,653 | 0,57 |
| 25 | 128,93 | 129,661 | 0,57 |
| 20 | 128,93 | 129,674 | 0,58 |
| 15 | 128,95 | 129,704 | 0,58 |
| 10 | 128,98 | 129,789 | 0,63 |
| 5 | 129,18 | 130,233 | 0,82 |
| | | | Gem: 0,62% |




Tabel 35:Uitkomsten vergelijking formule voor twist met dataset Beton en het ANSYS script

# Bijlage D

## Nauwkeurige vergelijking ANSYS

| $R_x$ | Ansys 50 elementen | Ansys 120 elementen | formule | Verschil formule met Ansys 50 | Verschil formule met Ansys 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [Hz] | [%] | [%] |
| 10 | 262,32 | 261,6 | 263,17977 | 0,33 | 0,60 |
| 8 | 263,29 | 262,57 | 263,86281 | 0,22 | 0,49 |
| 6 | 265,13 | 264,41 | 265,17481 | 0,02 | 0,29 |
| 4 | 269,67 | 268,95 | 268,4377 | 0,46 | 0,19 |
| 2 | 289,32 | 288,62 | 283,02934 | 2,17 | 1,94 |
| | | gemiddeld: | | 0,25% | 0,39% |

**Tabel 36: Vergelijking van bekende Ansys resultaten met een Anys-mesh van 120 elementen (voor dataset staal: *l*=0.3m) $R_x$ variabel**

| $R_{xy}$ | Ansys 50 elementen | Ansys 120 elementen | formule | Verschil formule met Ansys 50 | Verschil formule met Ansys 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| [m] | [Hz] | [Hz] | [Hz] | [%] | [%] |
| 10 | 263,38 | 262,66 | 264,02327 | 0,24 | 0,52 |
| 8 | 263,43 | 262,71 | 264,11348 | 0,26 | 0,53 |
| 6 | 263,53 | 262,81 | 264,30828 | 0,30 | 0,57 |
| 4 | 263,84 | 263,12 | 264,86407 | 0,39 | 0,66 |
| 2 | 265,43 | 264,71 | 267,84541 | 0,91 | 1,18 |
| | | gemiddeld: | | 0,42% | 0,69% |

**Tabel 37: Vergelijking van bekende Ansys resultaten met een Ansys-mesh van 120 elementen (voor dataset staal: *l*=0.3m)**