

CTB3000 – Bachelor Eindwerk

Welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorsneden

Bart Schrijvers

4709195

Begeleid door dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. A.C.B. Schuurman

22 juni 2020

Voorwoord

Dit is het Bachelor Eindproject 'Welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorsneden'. Zoals de titel al doet vermoeden, staat het vinden van de welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorsneden in dit verslag centraal. Dit project is gedaan in kader van het afronden van de bachelor Civiele Techniek aan de TU Delft en is onderdeel van het vak CTB3000-16. Ik heb me van 20 april 2020 tot en met 22 juni 2020 met het vinden van de formule bezig gehouden.

De opdracht is bedacht door een van mijn begeleiders, dr.ir. P.C.J. Hoogenboom. Na een parameterstudie en een aantal pogingen is het gelukt om een welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorsneden op te stellen. Dit verslag is bedoeld voor medestudenten, die geïnteresseerd zijn in welving of in het proces van het opstellen van een formule.

Ik wil graag mijn beide begeleiders, dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. A.C.B. Schuurman, bedanken voor de goede begeleiding, ideeën en feedback. Zonder hun medewerking had ik dit onderzoek niet tot een goed einde kunnen brengen.

Bart Schrijvers

's-Gravenzande, 22 juni 2020

Samenvatting

Welving is van belang bij het doen van sterkteberekeningen op torsiekrachten. Onder het welven wordt de vervorming van een vlakke normaaldoorsnede verstaan. De grootte van de welving is onder andere afhankelijk van de welvingsstijfheid. Bij kokerprofielen is deze invloed waarschijnlijk verwaarloosbaar. De eenvoudigste manier om dit aan te tonen, is met het bepalen van een bruikbare formule.

Op internet kan een formule gevonden worden. Echter is dit niet de juiste formule, want als de hoogte en breedte worden omgedraaid geeft de formule niet dezelfde uitkomst. Dat zou wel moeten, want de welvingsstijfheid verandert hierdoor niet. Daarnaast zijn de formules ook niet nauwkeurig genoeg.

In dit onderzoek zal worden gezocht naar een welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorprofielen. De hoofdvraag van dit rapport is dan ook: “Wat is de formule voor de welvingsstijfheid van rechthoekige kokerdoorsneden?”.

Om de welvingsformule te bepalen, wordt een dataset samengesteld met ShapeBuilder. Dit worden de formuleprofielen genoemd. Ook wordt een dataset met controleprofielen samengesteld om de nauwkeurigheid te controleren met standaardprofielen. Vervolgens wordt met behulp van een parameterstudie een aantal verbanden onderzocht. Deze verbanden worden gebruikt bij het opstellen van de eerste versies van de formule. Deze formules worden getest op nauwkeurigheid en steeds iets aangepast om tot een uiteindelijke welvingsformule te komen.

De formule zal afhankelijk zijn van drie parameters: de breedte, de hoogte en de dikte. De gewenste nauwkeurigheid van de formule is een maximale afwijking van 5% ten opzichte van de door ShapeBuilder berekende waarde. Er wordt niet gekeken naar afrondingsstralen. In dit onderzoek hebben alle profielen rechte hoeken.

De parameterstudie heeft een aantal verbanden getoond. Deze zijn te zien in onderstaande tabel.

Parameter	Verband
Dikte	Lineair
Hoogte	3 ^e macht
Breedte	3 ^e macht
Hoogte/Breedte	3 ^e macht
Hoogte-Breedte	Lineair

Na een aantal pogingen wordt de welvingsformule gevonden. Deze heeft een gemiddelde afwijking van 3,0% (formuleprofielen) en 2,8% (controleprofielen). Bij beide datasets voldoet de formule niet aan de eis van een maximale afwijking van 5%, toch kan de formule van waarde zijn, om bijvoorbeeld een eerste inschatting van de welvingsconstante te geven. Onderstaande formule is het resultaat.

$$C_w = \frac{1}{70} h^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot t \cdot |h - b|^{\frac{9}{5}} \cdot (h + b)^{\frac{1}{5}}$$

Met de toepassing is aannemelijk gemaakt dat welving van rechthoekige kokerdoorsneden kan worden verwaarloosd in sterkteberekeningen en dat de welvingsformule nauwkeurig is.

Van groot belang bij het opstellen van een formule is de dataset waarmee gewerkt wordt. Een aanbeveling zou zijn om voor elke parameter een aantal waarden te nemen. Voor alle combinaties die hiermee te maken zijn wordt vervolgens de waarde bepaald. Ook is het handig om een parameterstudie te doen om hiermee mogelijke verbanden te vinden. Vooral voor de losse parameters is dit nuttig. Vervolgens is het belangrijk om een aantal pogingen te doen en telkens te analyseren waar de poging nog mogelijk afwijkt van de bekende waarde. Met behulp van deze analyses en pogingen kan de formule worden geoptimaliseerd.

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
Samenvatting.....	ii
Symbolenlijst	1
1. Inleiding	2
1.1 Aanleiding.....	2
1.2 Doelstelling.....	3
1.3 Structuurbeschrijving	3
2. Welving.....	4
2.1 Theorie van Vlasov	4
3. ShapeBuilder	6
3.1 Nauwkeurigheid ShapeBuilder	6
3.2 Uitkomst ShapeBuilder.....	7
4. Parameterstudie.....	8
4.1 Algemene analyse.....	8
4.2 Analyse per parameter	9
4.3 Analyse parameterverhoudingen	12
5. Formule samenstellen	15
5.1 Bevindingen parameterstudie	15
5.2 Pogingen formule	16
5.3 Nauwkeurigheid welvingsformule.....	21
5.4 3D-plot welvingsformule	23
6. Toepassing.....	24
6.1 Uitkragende ligger	24
7. Conclusie	26
8. Aanbevelingen	26
Bibliografie	27
Bijlage A: Formuleprofielen.....	28
Bijlage B: Controleprofielen	31
Bijlage C: Toepassing verhinderde welving	33
Bijlage D: Toepassing vrije welving.....	34

Symbolenlijst

θ : specifieke wringing (rad/m)

φ : rotatie liggeruiteinden ten opzichte van elkaar (rad)

l : lengte (m)

EC_w : welvingsstijfheid (Nm^4)

E : elasticiteitsmodulus (N/m^2)

C_w : welvingsconstante (m^6)

GI_w : wringstijfheid (Nm^2)

G : glijdingsmodulus (N/m^2)

I_w : wringtraagheidsmoment (m^4)

m_x : verdeeld wringend moment langs de ligger (Nm/m)

C_w : welvingsconstante (m^6)

ψ : welvingsfunctie (m^2)

B : Bi – moment (Nm^2)

σ_{xx} : normaalspanning (N/m^2)

M_w : wringend moment (Nm)

ν : dwarscontractiecoëfficiënt ($-$)

1. Inleiding

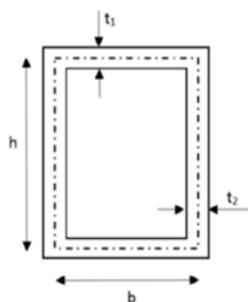
1.1 Aanleiding

Bij de sterkteberekening op torsiekrachten is ook welving van belang. Onder het welven wordt de vervorming van een vlakke normaaldoorsnede verstaan. In sommige gevallen heeft dit invloed op de sterkte van de ligger. De grootte van de welving is onder andere afhankelijk van de welvingsstijfheid.

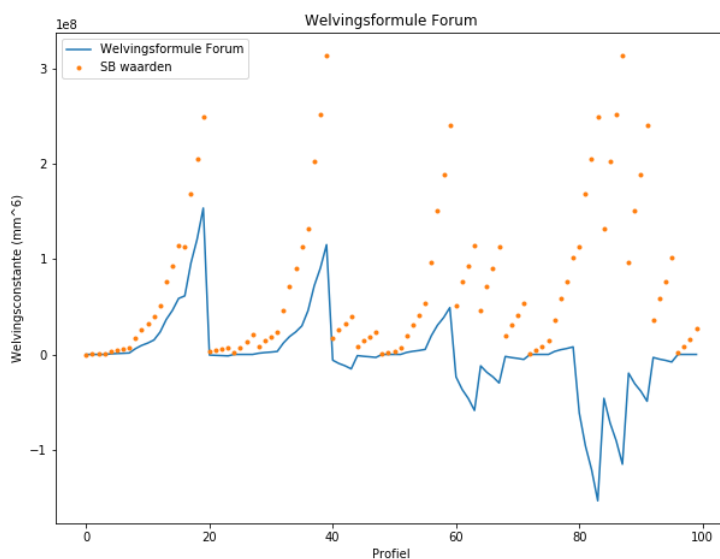
Voor dunwandige open liggers is de invloed van welving niet verwaarloosbaar. Bij kokerprofielen is deze invloed waarschijnlijk wel verwaarloosbaar. Er is dus voor de kokerprofielen eigenlijk geen formule nodig om de welvingsstijfheid te berekenen, maar dit is nog niet bewezen. De eenvoudigste manier om aan te tonen dat er inderdaad geen formule nodig is, is met het bepalen van een bruikbare formule.

Op internet kunnen verschillende formules gevonden worden. Echter zit hier geen juiste formule tussen, want als de hoogte en breedte worden omgedraaid geeft de formule niet dezelfde uitkomst. Dat zou wel moeten, want de welvingsstijfheid verandert hierdoor niet. Een van die formules is afgebeeld in figuur 1. De welvingsconstante die uit de formule komt en de welvingsconstante uit ShapeBuilder zijn uitgezet tegen de profielnummers (figuur 2).

$$C_w = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} \cdot \frac{(b \cdot t_2 - h \cdot t_1)^2}{(b \cdot t_2 + h \cdot t_1)^2} \cdot (b \cdot t_1 - h \cdot t_2)$$



Figuur 1. Welvingsformule forum [1].



Figuur 2. Resultaat welvingsformule forum (formuleprofielen).

De gemiddelde afwijking is 100%. De kleinste afwijking is 38% en de grootste afwijking is 162%. Hieruit kan worden geconcludeerd dat deze formule in ieder geval niet nauwkeurig genoeg is. Ook de absolute waarde van de formule is niet heel nauwkeurig, met een gemiddelde fout van 72%.

1.2 Doelstelling

De hoofdvraag van dit rapport is: “Wat is de formule voor de welvingsstijfheid van rechthoekige kokerdoorsneden?”.

Er zal worden begonnen met een uitleg over welving. Hierin worden de voor dit onderzoek meest relevante onderdelen van de wringtheorie besproken. Vervolgens wordt de welvingsconstante van een aantal profielen berekend met behulp van het programma ShapeBuilder. Er wordt gevarieerd in hoogte, breedte en dikte. Daarna worden deze punten geanalyseerd in een parameterstudie. De verschillende verbanden waar naar wordt gekeken zijn: hoogte, breedte, dikte, hoogte/breedte, breedte/dikte en $| \text{hoogte} - \text{breedte} |$. Hieruit volgen handvatten die kunnen worden gebruikt bij het opstellen van de formule. Na een aantal pogingen zou een formule met een acceptabele afwijking kunnen worden opgesteld. In een toepassing wordt het belang van dit onderzoek aangetoond.

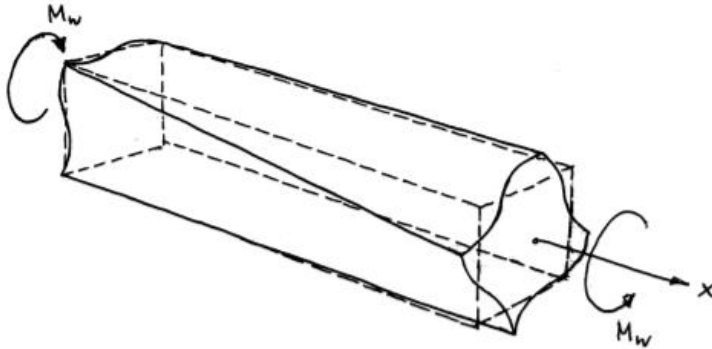
De welvingsstijfheid is afhankelijk van de eigenschappen van de doorsnede van de ligger. Hieronder vallen de breedte, de hoogte, de dikte en de afrondingsstralen. Om dit onderzoek niet te complex te maken, is ervoor gekozen om alleen te kijken naar profielen met afrondingsstralen. Dit resulteert in een formule die afhankelijk is van drie parameters. De gewenste nauwkeurigheid van de formule is een afwijking van 5% ten opzichte van de door ShapeBuilder berekende waarde. Er worden vijf verschillende hoogtes en breedtes en vier verschillende diktes gebruikt. Dit resulteert in honderd profielen. De hoogtes en breedtes die gebruikt worden, zijn: 40; 60; 80; 100 en 120 (mm). Voor de diktes worden de volgende waarden gebruikt: 3,2; 5,0; 6,3 en 8,0 (mm).

1.3 Structuurbeschrijving

Het fenomeen welving wordt in hoofdstuk 1 besproken. Hoofdstuk 2 gaat in op het verzamelen van data en het bepalen van de nauwkeurigheid hiervan. Vervolgens wordt in hoofdstuk 3 een parameterstudie gedaan. Er wordt in hoofdstuk 4 een formule samengesteld en de nauwkeurigheid van de formule wordt besproken. Tenslotte wordt in hoofdstuk 5 een toepassing besproken.

2. Welving

De definitie van welving is “de vervorming van een vlakke normaaldoorsnede”. Deze vervorming kan plaats vinden als er sprake is van een wringend moment of een dwarskracht. De vervorming door een wringend moment is te zien in figuur 3.



Figuur 3. Welving van een vierkante doorsnede door wringing [2].

Er zijn twee belangrijke theorieën die wringing beschrijven. Dat zijn de Theorie van Saint-Venant en de Theorie van Vlasov. Een belangrijk verschil tussen beide theorieën is dat de Theorie van Vlasov wel rekening houdt met gehinderde welving. Dit komt goed overeen met de werkelijkheid. De gehinderde welving treedt onder andere op bij opleggingen, op de plekken waar wringende momenten aangrijpen en waar de doorsnede verandert.

2.1 Theorie van Vlasov

Vasiliy Vlasov ontwikkelde in 1959 zijn wringtheorie. Zoals eerder gezegd is hierin gehinderde welving verwerkt. Andere benamingen voor deze theorie zijn “warping torsion” of “non-uniform torsion”. De hoekverdraaiing φ is de hoek waarmee de doorsnede is gedraaid ten opzichte van de originele positie (veroorzaakt door een wringend moment). Vlasov gaat er in zijn theorie vanuit dat de specifieke verwringing θ ($\theta = \varphi/l$) niet constant is langs de x-as. Met onderstaande differentiaalvergelijking kan de hoekverdraaiing φ worden berekend [2].

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = m_x$$

De welvingsfunctie ψ beschrijft de vervorming van de doorsnede. De welvingsconstante C_w is gedefinieerd als:

$$C_w = \int_A \psi^2 dA$$

Het bi-moment ontstaat als de welving wordt verhinderd en wordt beschreven met de volgende formule:

$$B = - \int_A \sigma_{xx} \psi dA$$

Na het oplossen van de differentiaalvergelijking, kunnen het wringend moment en het bi-moment worden berekend met:

$$B = -EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

$$M_w = GI_w \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dB}{dx}$$

Om de differentiaalvergelijking op te kunnen lossen zijn er ook randvoorwaarden nodig. Deze zijn afhankelijk van het wel of niet roteren en het wel of niet welven aan de liggeruiteinden. Enkele voorbeelden:

Inklemming:	Geen rotatie $\rightarrow \varphi = 0$	Geen welving $\rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 0$
Gaffeloplegging:	Geen rotatie $\rightarrow \varphi = 0$	Vrije welving $\rightarrow B = 0$
Kopplaat (met ruime bouten):	Vrije rotatie $\rightarrow M_w = 0$	Geen welving $\rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 0$
Vrij uiteinde:	Vrije rotatie $\rightarrow M_w = 0$	Vrije welving $\rightarrow B = 0$

Spanningen volgens Vlasov

Er zijn volgens Vlasov drie onderdelen die bijdragen aan de spanningsverdeling:

1. Schuifspanningen volgens Saint-Venant
2. Schuifspanningen door gehinderde welving
3. Normaalspanningen door gehinderde welving

In veel gevallen treden de maximale waarden van de bijdrages op in verschillende punten. Dit is de reden waarom er software wordt gebruikt om een maatgevend punt te vinden. Dit is extra het geval als er sprake is van:

4. Een normaalkracht N
5. Een moment in y-richting (M_y)
6. Een moment in z-richting (M_z)
7. Een dwarskracht in y-richting (D_y)
8. Een dwarskracht in z-richting (D_z)

Als y en z worden aangenomen als hoofdrichtingen, kan de spanning worden berekend met onderstaande formule [2].

$$\sigma_{xx}(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_z} \cdot z - \frac{M_z}{I_y} \cdot y - \frac{B}{C_w} \cdot \varphi$$

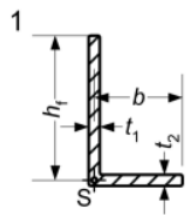
3. ShapeBuilder

De welvingsconstante is afhankelijk van een aantal eigenschappen van de doorsnede. Deze eigenschappen zijn onder andere de hoogte, de breedte, de dikte en de afrondingsstraal. Er is gekozen om de formule te bepalen op basis van drie van deze eigenschappen. Dit zijn de hoogte, de breedte en de dikte (overal hetzelfde). De afrondingsstraal is in alle gevallen 0.

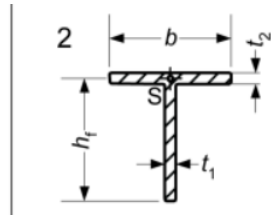
3.1 Nauwkeurigheid ShapeBuilder

Eerst wordt de nauwkeurigheid van het programma ShapeBuilder (SB) getest met een aantal bekende welvingsconstanten. Het zou het best zijn om dit te kunnen vergelijken met vierkante doorsneden. Echter zijn hier geen welvingsconstanten van bekend.

Van verschillende profielen zijn wel formules voor de welvingsconstante bekend (zie figuur 4). Voor het vergelijken met de NEN-waarden wordt een aantal L- en T-profielen gebruikt [3]. In tabel 1 wordt de vergelijking gemaakt tussen de welvingsconstante volgens de NEN en de door ShapeBuilder berekende welvingsconstante. Ondanks dat dit geen rechthoekige profielen zijn, is hieruit te concluderen dat het verschil tussen de welvingsconstante volgens ShapeBuilder en de werkelijke welvingsconstante acceptabel is. Wel kan er rekening worden gehouden dat de formule een grote afwijking met ShapeBuilder kan hebben, maar dat hoeft niet te betekenen dat het verschil met de werkelijkheid ook groot is.



$$C_w = \frac{h_f^3 t_1^3 + b^3 t_2^3}{36}$$



$$C_w = \frac{h_f^3 t_1^3}{36} + 2 \frac{(b/2)^3 t_2^3}{36}$$

Figuur 4. Formules welvingsconstante L-profielen en T-profielen [3].

Tabel 1. Vergelijking ShapeBuilder met NEN-waarden.

Profiel eigenschappen			L-profiel: $C_w \cdot 10^6$ (mm ⁶)			T-profiel: $C_w \cdot 10^6$ (mm ⁶)		
Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	SB	NEN	Verschil L-profiel	SB	NEN	Verschil T-profiel
50	30	3,2	0,1220	0,1278	4,74 %	0,1063	0,1093	2,86 %
60	40	3,2	0,2306	0,2395	3,88 %	0,1926	0,1959	1,69 %
70	40	3,2	0,3398	0,3495	2,87 %	0,3009	0,3058	1,64 %
80	40	3,2	0,4859	0,4969	2,26 %	0,4460	0,4532	1,61 %
80	50	3,2	0,5387	0,5524	2,54 %	0,4622	0,4671	1,05 %
100	50	3,2	0,9650	0,9810	1,66 %	0,8866	0,8957	1,02 %
100	60	3,2	1,044	1,064	1,90 %	0,9099	0,9164	0,71 %
100	60	5,0	3,841	3,968	3,31 %	3,347	3,406	1,76 %
100	80	3,2	1,303	1,333	2,32 %	0,9792	0,9837	0,46 %
100	80	5,0	4,805	4,996	4,00 %	3,621	3,663	1,15 %

3.2 Uitkomst ShapeBuilder

Als eerste zijn honderd profielen in ShapeBuilder doorgerekend. Er wordt gevarieerd met vijf verschillende hoogtes en breedtes en met vier verschillende diktes. De eerste tien profielen zijn weergegeven in tabel 2. Deze profielen worden de formuleprofielen genoemd. Vervolgens zijn 79 standaardprofielen in ShapeBuilder ingevoerd. In tabel 3 worden hiervan de eerste tien profielen met gegevens weergegeven. Dit zijn de controleprofielen, hiermee wordt de formule die aan de hand van de formuleprofielen is gevonden, gecontroleerd. Een aantal profielen zit in beide datasets. Voor de volledige tabellen van de formuleprofielen en controleprofielen, zie respectievelijk bijlage A en B.

Tabel 2. Eerste tien formuleprofielen.

Profiel	Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	$C_w \cdot 10^6 \text{ (mm}^6\text{)}$
1	40	40	3,2	0,06069
2	40	40	5,0	0,1652
3	40	40	6,3	0,2563
4	40	40	8,0	0,3741
5	40	60	3,2	3,003
6	40	60	5,0	4,695
7	40	60	6,3	5,945
8	40	60	8,0	7,573
9	40	80	3,2	17,14
10	40	80	5,0	25,99

Tabel 3. Eerste tien controleprofielen.

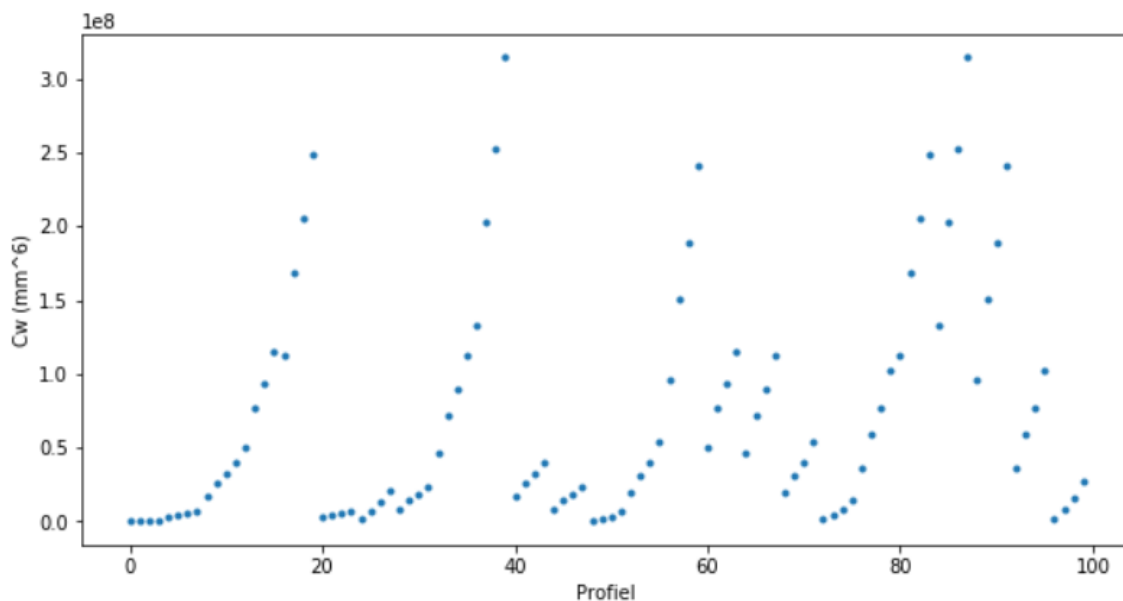
Profiel	Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	$C_w \cdot 10^6 \text{ (mm}^6\text{)}$
1	50	30	3,2	1,426
2	60	40	3,0	2,813
3	60	40	4,0	3,757
4	60	40	5,0	4,695
5	80	40	3,2	17,140
6	80	40	4,0	21,190
7	80	40	5,0	25,990
8	80	40	6,3	32,070
9	80	40	8,0	39,830
10	90	50	3,6	33,140

4. Parameterstudie

Nu de verschillende welvingsconstanten bekend zijn, kan de data worden geanalyseerd. Er wordt gezocht naar verbanden die kunnen worden gebruikt in de formule.

4.1 Algemene analyse

Om een algemeen beeld te krijgen van de welvingsconstanten worden deze allemaal in één grafiek geplot (figuur 5). De profielen zijn gesorteerd op hoogte, daarna op breedte en als laatste op dikte. Er is duidelijk te zien dat na profiel 19, 39, 59 en 79 de waarden voor de welvingsconstante naar beneden gaan. Dit is te verklaren doordat de hoogte, de breedte en de dikte na deze punten verandert. Ook zijn de veranderingen in de breedte samen met de dikte te zien (om de vijf profielen).

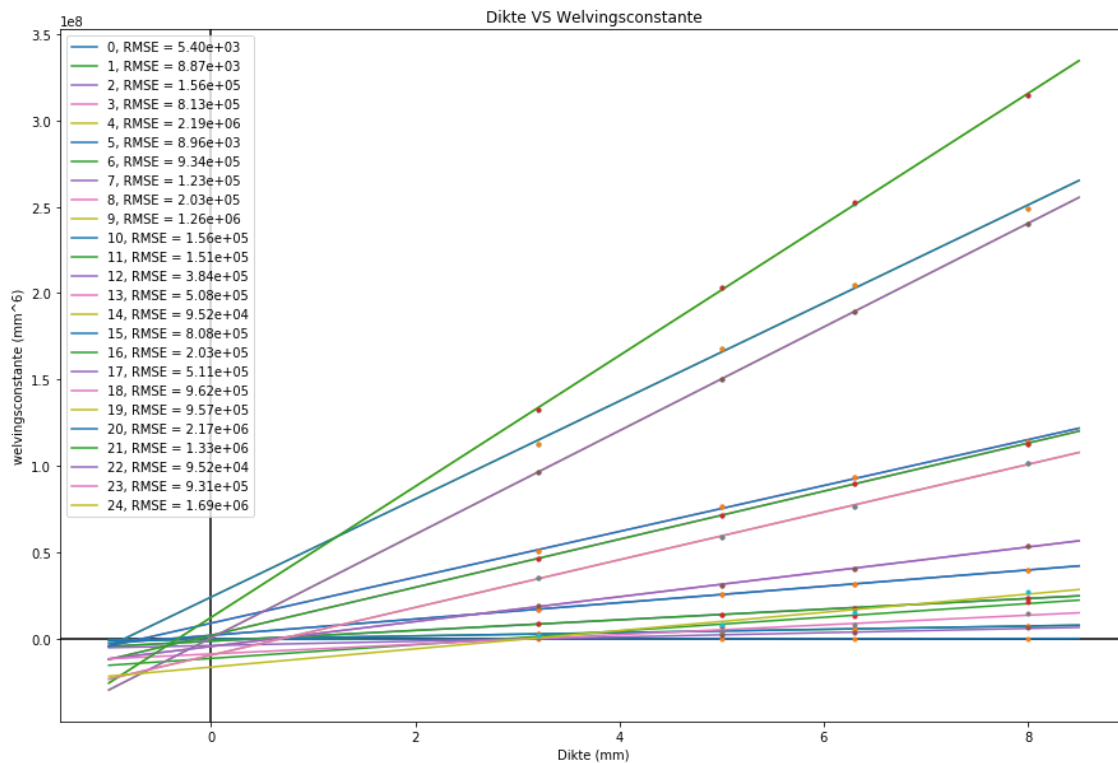


Figuur 5. Overzicht welvingsconstanten.

4.2 Analyse per parameter

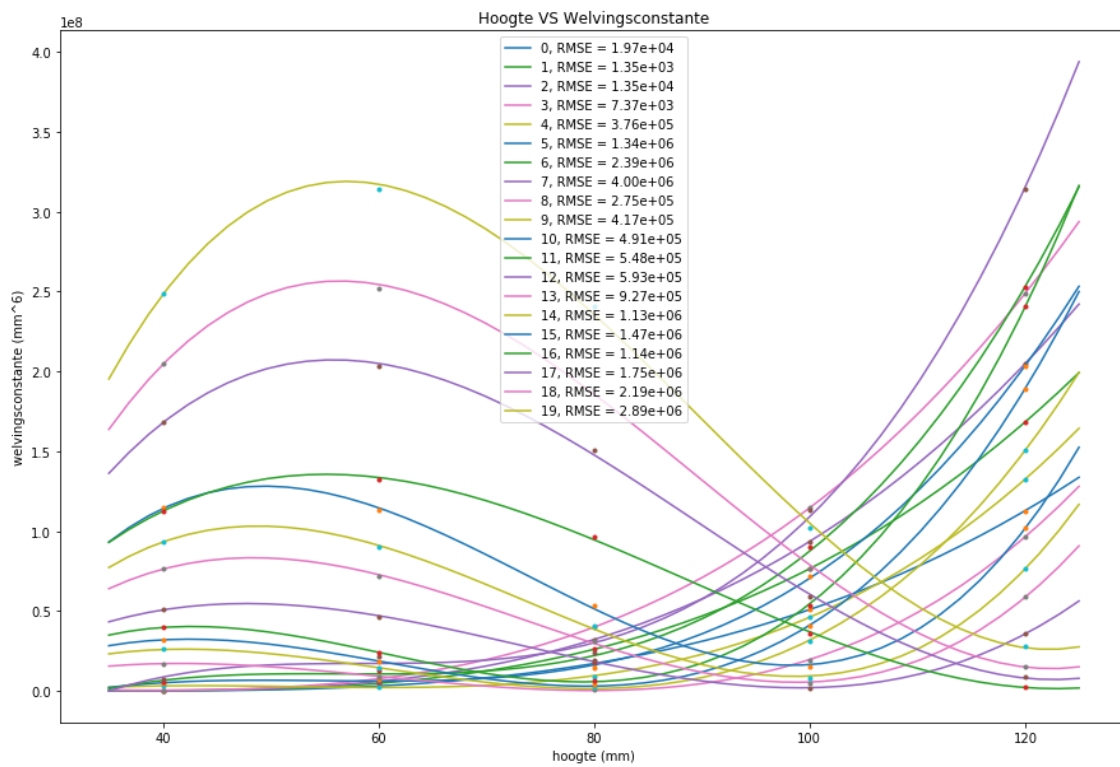
Om de invloed van verschillende parameters in te kunnen schatten worden deze geplot. Als alle profielen door elkaar zouden worden geplot, is er geen verband te vinden. Daarom wordt de te analyseren parameter gevarieerd, terwijl de andere parameters constant blijven. Voor de nauwkeurigheid van de geplotte trendlijnen is de Root Mean Squared Error (RMSE) berekend.

In figuur 6 zijn alle series met constante breedte en hoogte en variërende dikten geplot. De series hebben een lineair verband. De trendlijnen van de series snijden bijna in (0,0). Dit zou betekenen dat de uiteindelijke formule een lineair verband voor de dikte bevat en dat de dikte verder niet als polynoom voorkomt.



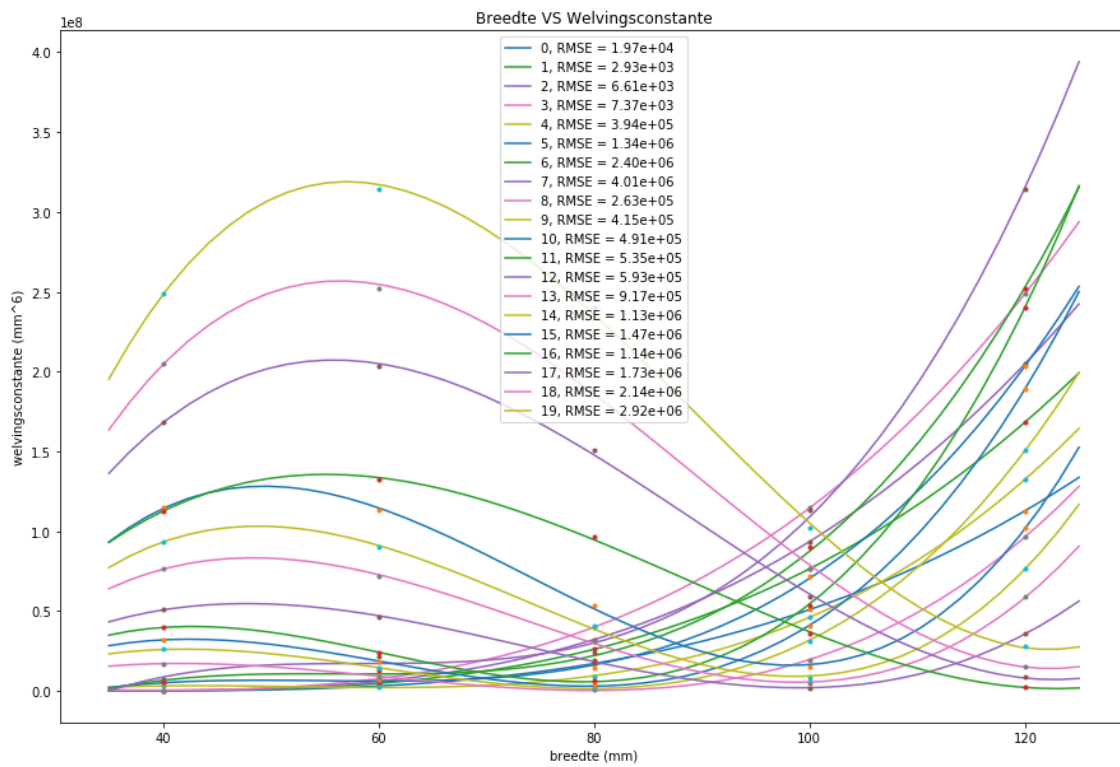
Figuur 6. Welvingsconstante uitgezet tegen de dikte.

Ook het verband tussen de hoogte en de welvingsconstante is onderzocht (zie figuur 7). De profielen zijn in 20 groepen verdeeld, zo dat in elke groep de breedte en dikte constant zijn en de hoogte variabel is. Er kan worden geconcludeerd dat hier sprake is van een 3^e machtsverband.



Figuur 7. Welvingsconstante uitgezet tegen de hoogte.

Net als de hoogte heeft de breedte een 3^e machtsverband met de welvingsconstante. Dit is te zien in figuur 8. De honderd profielen zijn verdeeld in 20 groepen met constante hoogte en dikte. Per groep is de breedte variabel.



Figuur 8. Welvingsconstante uitgezet tegen de breedte.

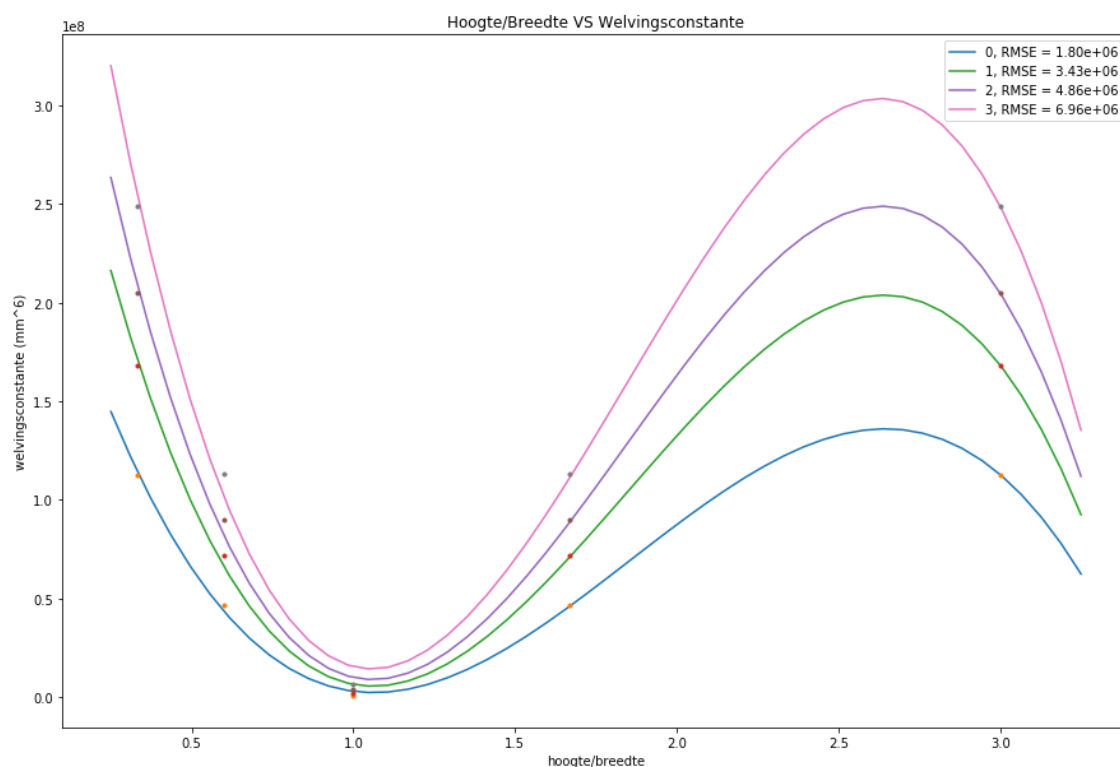
4.3 Analyse parameterverhoudingen

Om de analyse en het afleiden van de formule eenvoudiger te maken, wordt gebruik gemaakt van verhoudingen. Er blijven dan in feite nog maar twee parameters over. De verhoudingen die worden bekeken zijn tussen de breedte en de hoogte en tussen de dikte en de breedte.

Als er naar de hoogte/breedte-verhouding en de welvingsconstante wordt gekeken, is een 3e machtsverband te zien (figuur 9). Bij het samenstellen van de verschillende series wordt gekeken naar een constante hoogte + breedte en met een constante dikte. De gebruikte series zijn te zien in tabel 4.

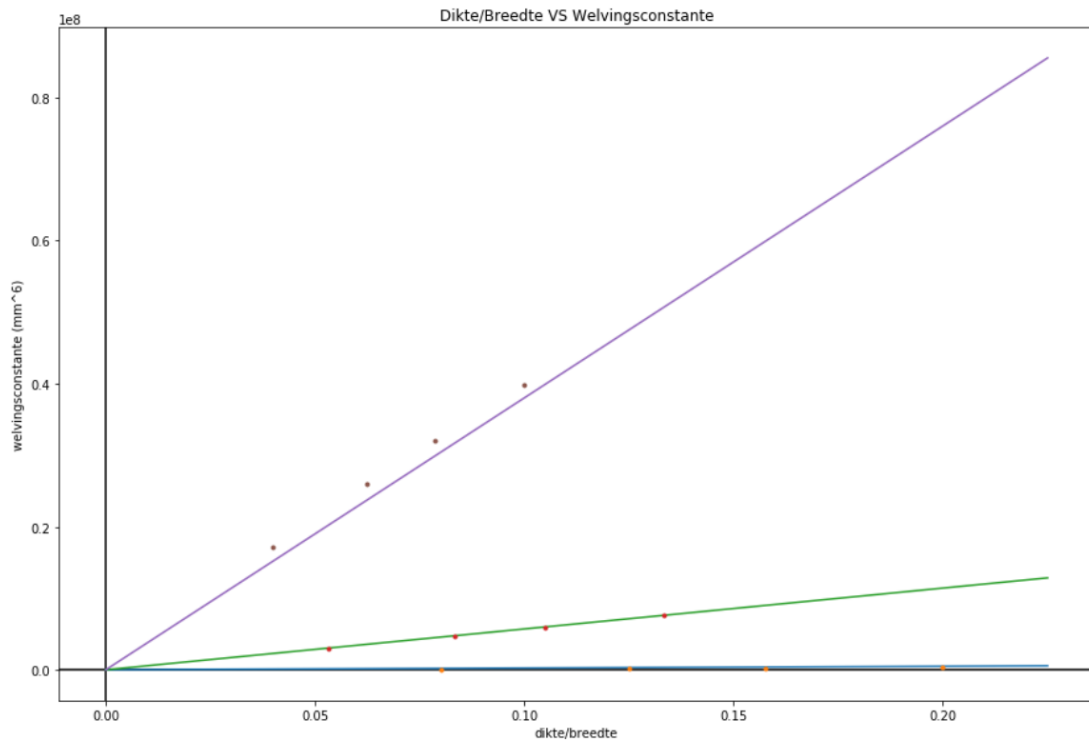
Tabel 4. Gebruikte profielen hoogte/breedte analyse.

Serie	Profielen	Dikte (mm)	Hoogte + breedte (mm)
0	17, 33, 49, 65 en 81	3,2	160
1	18, 34, 50, 66 en 82	5,0	160
2	19, 35, 51, 67 en 83	6,3	160
3	20, 36, 52, 68 en 84	8,0	160

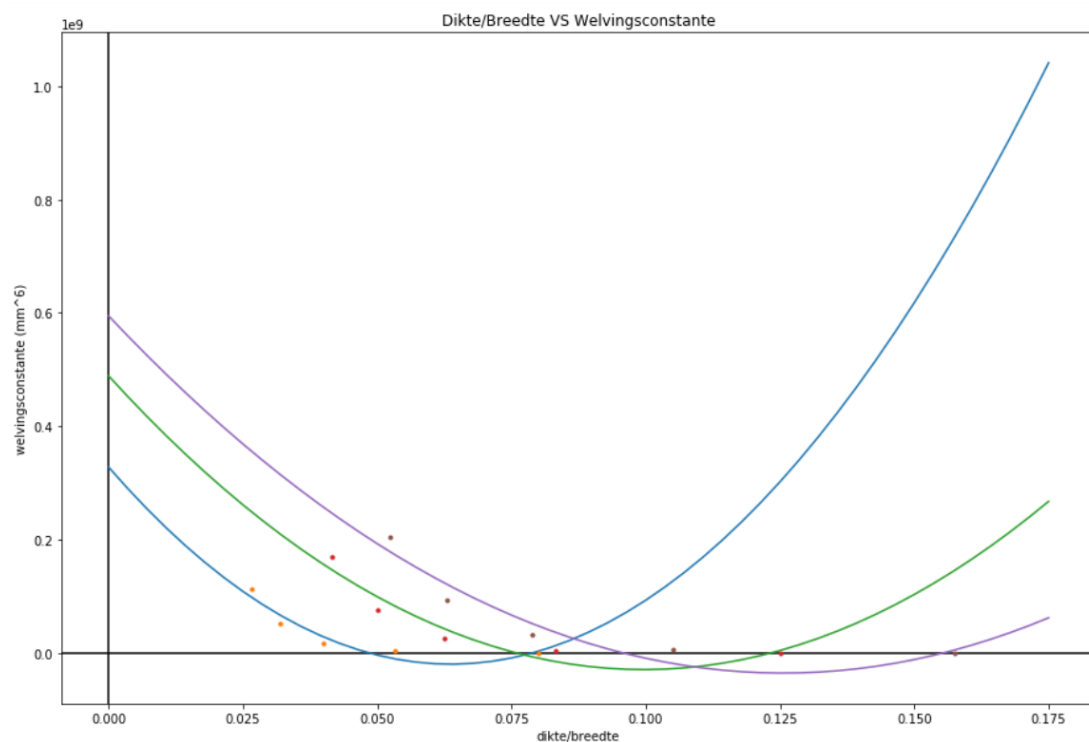


Figuur 9. Welvingsconstante uitgezet tegen de hoogte/breedte.

Ook het verband tussen de dikte/breedte-verhouding en de welvingsconstante wordt onderzocht. Dit is op twee manieren aangepakt. In beide gevallen wordt gebruik gemaakt van een constante hoogte. Vervolgens wordt in het eerste geval ook gebruik gemaakt van een constante breedte (figuur 10). En in het andere geval is gebruik gemaakt van een constante dikte (figuur 11). Uit beide analyses zijn geen logische verbanden af te leiden tussen de dikte/breedte en de welvingsconstante.

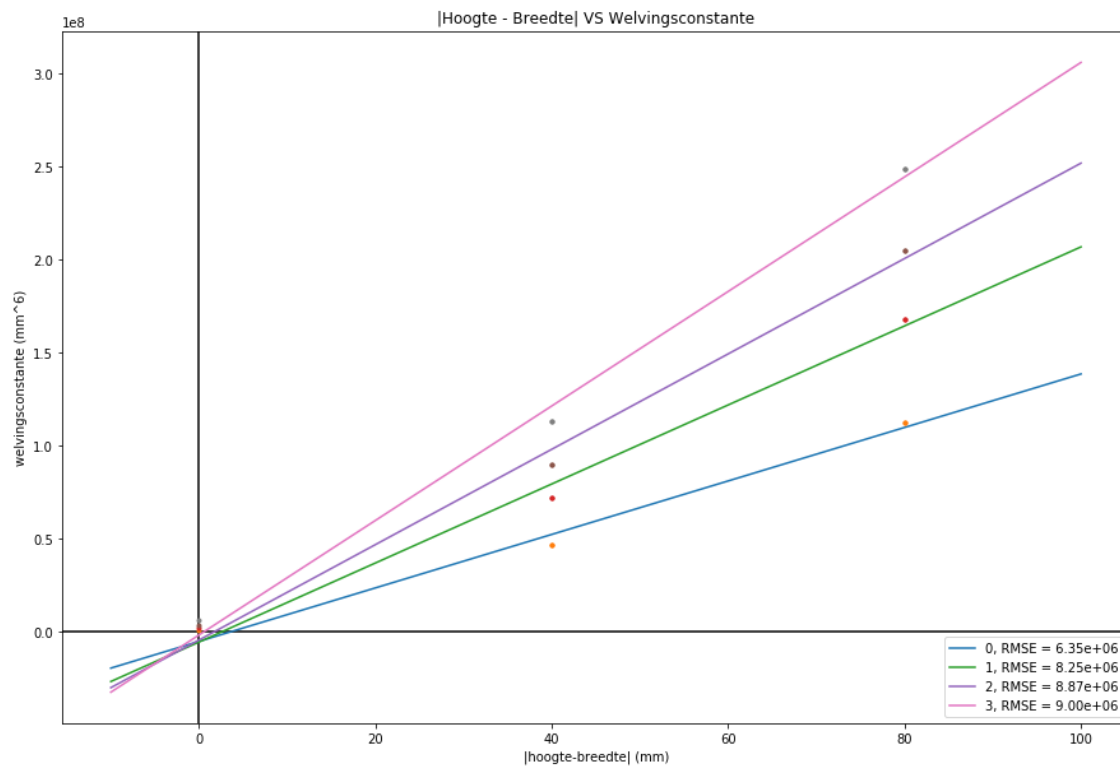


Figuur 10. Welvingsconstante uitgezet tegen de dikte/breedte (constante breedte).



Figuur 11. Welvingsconstante uitgezet tegen de dikte/breedte (constante dikte).

Als laatste wordt het verband tussen het hoogte-breedte verschil en de welvingsconstante onderzocht. Hierbij is sprake van een lineair verband. Dit is te zien in figuur 12. De benadering is niet heel nauwkeurig (R-Waarde). Toch kan deze factor wel goed gebruikt worden om de uitkomst van de formule bij gelijke hoogte en breedte ($C_w = 0$) te bepalen. Hiervoor worden dezelfde series gebruikt als bij de hoogte/breedte analyse, zie hiervoor tabel 4.



Figuur 12. Welvingsconstante uitgezet tegen de |Hoogte – Breedte|.

5. Formule samenstellen

In hoofdstuk 3 zijn de parameters geanalyseerd. Daaruit is per parameter een verband gekomen. Dit verband wordt gebruikt in de formule. Er is een aantal variaties mogelijk en door middel van trial and error zal de optimale formule worden gevonden.

5.1 Bevindingen parameterstudie

Zoals gezegd is in hoofdstuk 3 een aantal verbanden aangetoond. Deze verbanden zijn per parameter te zien in tabel 5. Naast de aangetoonde verbanden moet er ook rekening mee worden gehouden dat de hoogte en de breedte verwisselbaar zijn. Er moet ook opgelet worden dat de eenheid van de welvingsconstante (m^6) klopt.

Tabel 5. Bevindingen parameterstudie.

Parameter	Versand
Dikte	Lineair
Hoogte	3 ^e macht
Breedte	3 ^e macht
Hoogte/Breedte	3 ^e macht
Hoogte-Breedte	Lineair

5.2 Pogingen formule

Met de bekende verbanden en voorwaarden wordt nu een aantal pogingen gedaan. Bij iedere poging zal worden gekeken naar waar op de grafiek de grootste afwijkingen zitten en vervolgens zal de formule hierop aangepast worden.

Om inzichtelijk te maken hoe nauwkeurig een bepaalde formule is, wordt gebruik gemaakt van een aantal statistieken. Hierbij gaat het om de gemiddelde fout, de minimale fout en de maximale fout.

De eerste formule berekent de afwijking in procenten van de formule ten opzichte van de waarde van ShapeBuilder. Hierbij is $C_{w,f,i}$ de waarde van de formule en $C_{w,SB,i}$ de waarde van ShapeBuilder. De waarde n_1 is de grootte van de dataset.

$$x_i = \frac{C_{w,f,i} - C_{w,SB,i}}{C_{w,SB,i}} \cdot 100\% \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n$$

Het gemiddelde van de afwijking van alle profielen in de dataset wordt berekend met onderstaande formule.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Omdat de dataset in een deel van de overige formules niet volledig wordt gebruikt, zijn er een aantal extra definities nodig. Het aantal rechthoekige profielen is n_1 en het aantal vierkante profielen is n_2 . Opgeteld moet dit net zo groot zijn als de totale dataset ($n = n_1 + n_2$). Ook is de som van de afwijking van rechthoekige (RH) profielen en vierkante (VK) profielen gelijk aan de totale som van de afwijkingen.

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{n_1} x_{RH,i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{VK,i}$$

De derde formule die wordt gebruikt, heeft als doel om het gemiddelde van de afwijking van de rechthoekige profielen in de dataset te berekenen.

$$\overline{x_{RH}} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{RH,i}$$

De minimale fout en maximale fout van alle profielen wordt berekend met onderstaande formules.

$$x_{min} = \text{MIN}_i\{x_i\} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{max} = \text{MAX}_i\{x_i\} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n$$

Als alleen de rechthoekige profielen worden beschouwd, dan wordt berekend met onderstaande formules.

$$x_{min} = \text{MIN}_i\{x_{RH,i}\} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n_1$$

$$x_{max} = \text{MAX}_i\{x_{RH,i}\} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n_1$$

Poging 1: $C_w = h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot |h - b| \quad [m^5]$

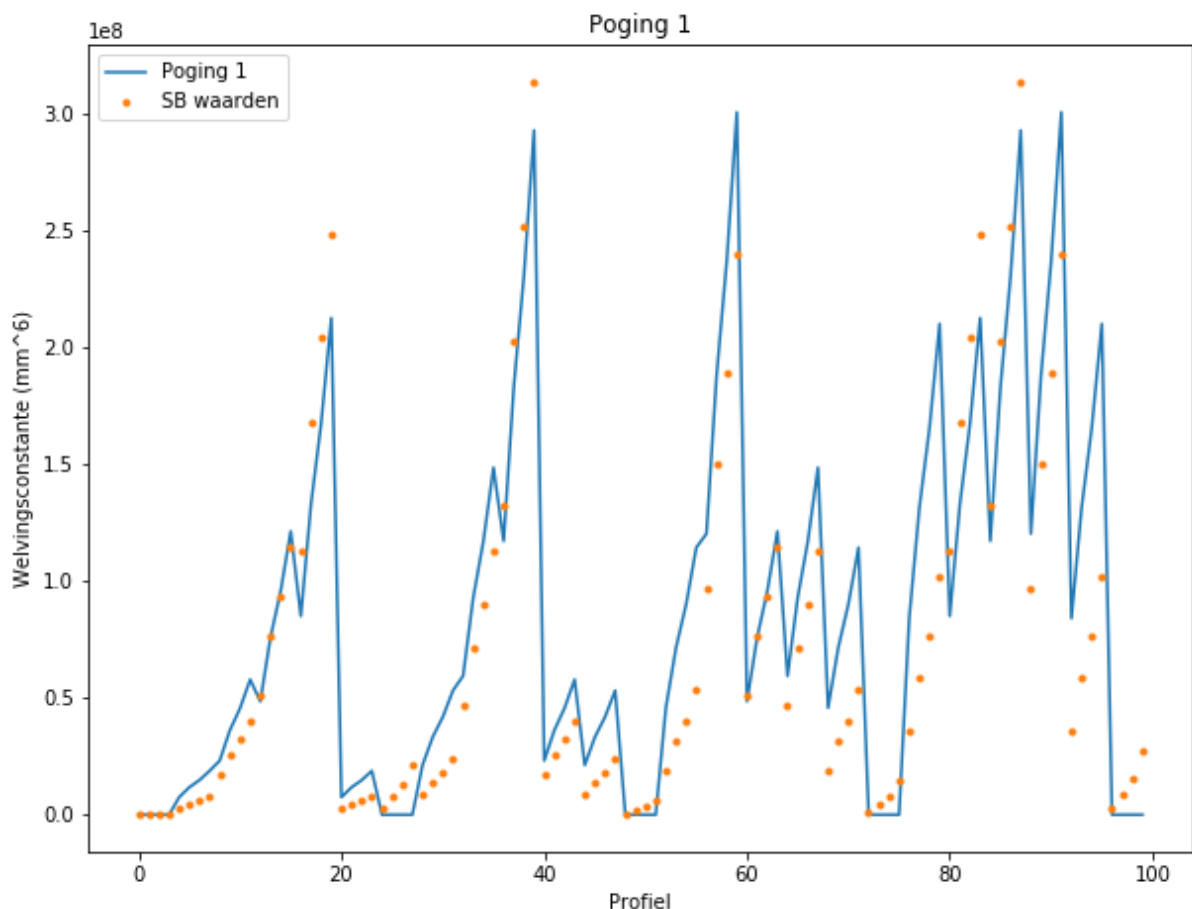
De parameters voor de eerste poging zijn als volgt bepaald. Het is bekend dat de hoogte en breedte verwisselbaar moeten zijn. Ook blijkt uit de parameterstudie dat voor beide parameters een 3^e machtsverband geldt. Als beide parameters een 3^e macht zouden hebben en vermenigvuldigd zouden worden, zou de formule al de eenheid m⁶ hebben. Daarom is voor deze parameters de wortel genomen. De lineaire verbanden zijn ook meegenomen.

Als er wordt gekeken naar de afwijkingen in tabel 6, kan worden geconcludeerd dat poging 1 niet nauwkeurig genoeg is. Op alle statistieken is poging 1 niet nauwkeurig.

Tabel 6. Statistieken poging 1.

	Alle profielen	Rechthoekige profielen
Gemiddelde fout	72%	65%
Fout (minimaal – maximaal)	0,7% - 150,6%	0,7% - 150,6%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	94/100	74/80

De eerste poging (figuur 13) laat zien dat vooral op plekken waar de hoogte en de breedte weinig verschillen, de afwijking het grootst is. Hierom wordt in de volgende poging dit verschil gekwadeerd.



Figuur 13. Resultaat poging 1.

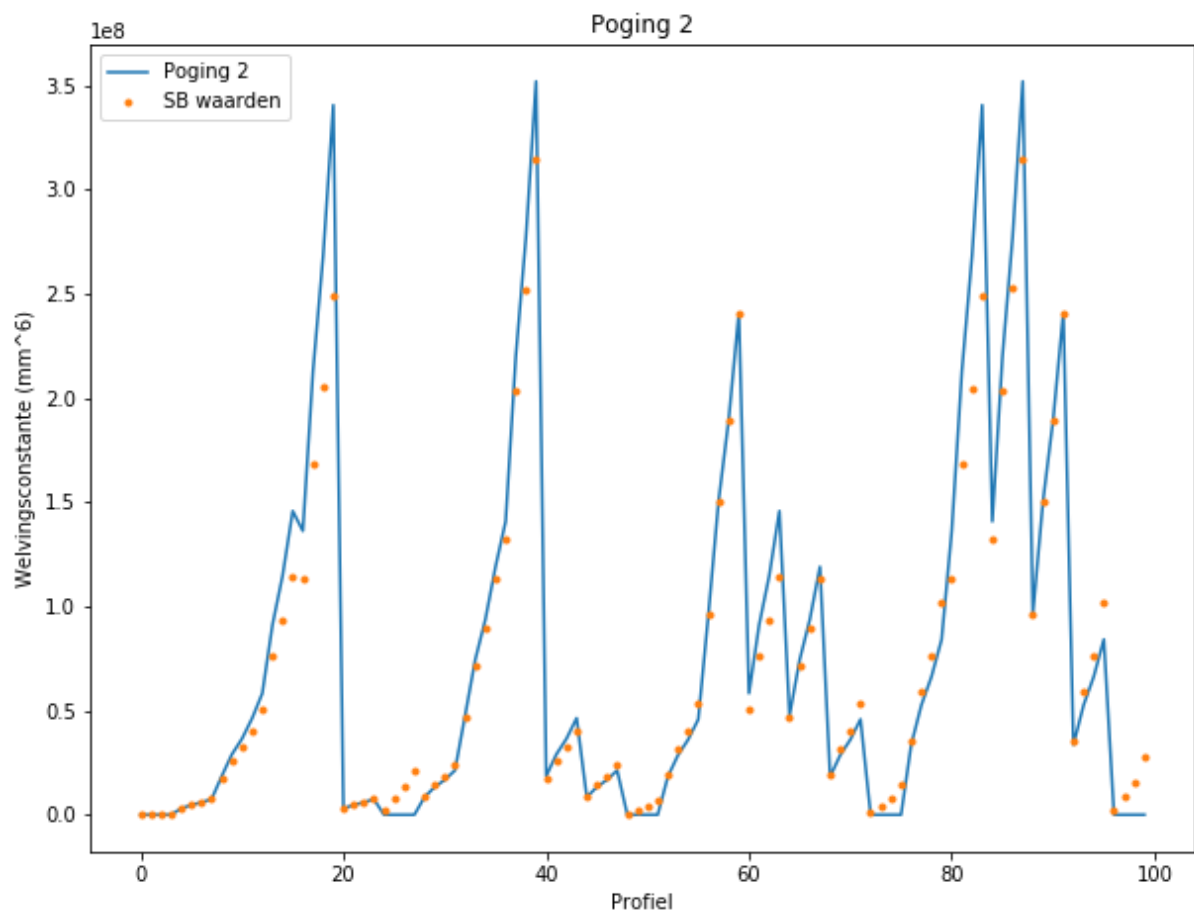
Poging 2: $C_w = \frac{1}{50} h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot (h - b)^2 \quad [m^6]$

In tabel 7 zijn de statistieken van poging 2 te zien. Hieruit blijkt dat deze poging op alle statistieken beter scoort dan poging 1. Dit geeft aan dat de aanpassing van $|h - b|$ naar $(h - b)^2$ goed is.

Tabel 7. Statistieken poging 2.

	Alle profielen	Rechthoekige profielen
Gemiddelde fout	28%	10%
Fout (minimaal – maximaal)	0,1% - 100%	0,1% - 36,9%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	74/100	54/80

De tweede poging is dus al een stuk nauwkeuriger. In figuur 14 is te zien dat bij een groter totaal van hoogte en breedte, de formule minder precies wordt. De term $(\text{hoogte} + \text{breedte})^{1/4}$ wordt dus in poging 3 geïntroduceerd. Om de formule te schalen is de factor 1/50 toegevoegd.



Figuur 14. Resultaat poging 2.

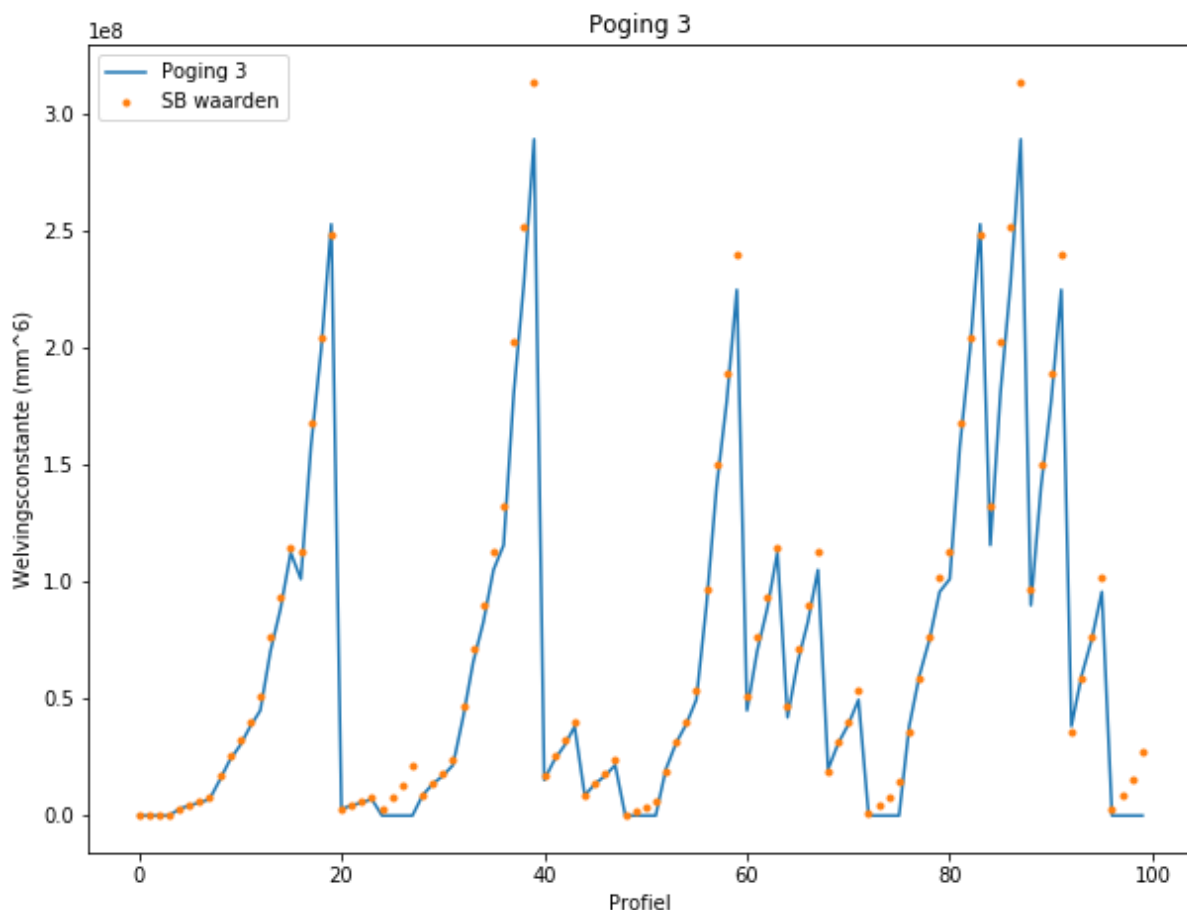
Poging 3:
$$C_w = \frac{1}{80} h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot |h - b|^{7/4} \cdot (h + b)^{1/4} \quad [m^6]$$

Van poging 2 naar poging 3 is een kleine verbetering te zien. Dit is vooral af te leiden uit de gemiddelde fout en de maximale fout van rechthoekige profielen. Dit komt door het toevoegen van de term (hoogte + breedte)^{1/4}. Het aantal punten met een grotere afwijking dan 5% is wel groter dan bij poging 2. Poging 3 is dan ook de basis voor poging 4.

Tabel 8. Statistieken poging 3.

	Alle profielen	Rechthoekige profielen
Gemiddelde fout	25%	6,3%
Fout (minimaal – maximaal)	0,8% - 100%	0,8% - 12,6%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	78/100	58/80

Om poging 4 weer wat beter te maken dan poging 3 wordt in de volgende poging de macht van de (hoogte + breedte) term veranderd (naar 1/5) en om de eenheid goed te krijgen, wordt ook de macht van de term |hoogte – breedte| veranderd (naar 4/5). Hier is wederom een factor (1/80) toegevoegd om de formule te schalen.



Figuur 15. Resultaat poging 3.

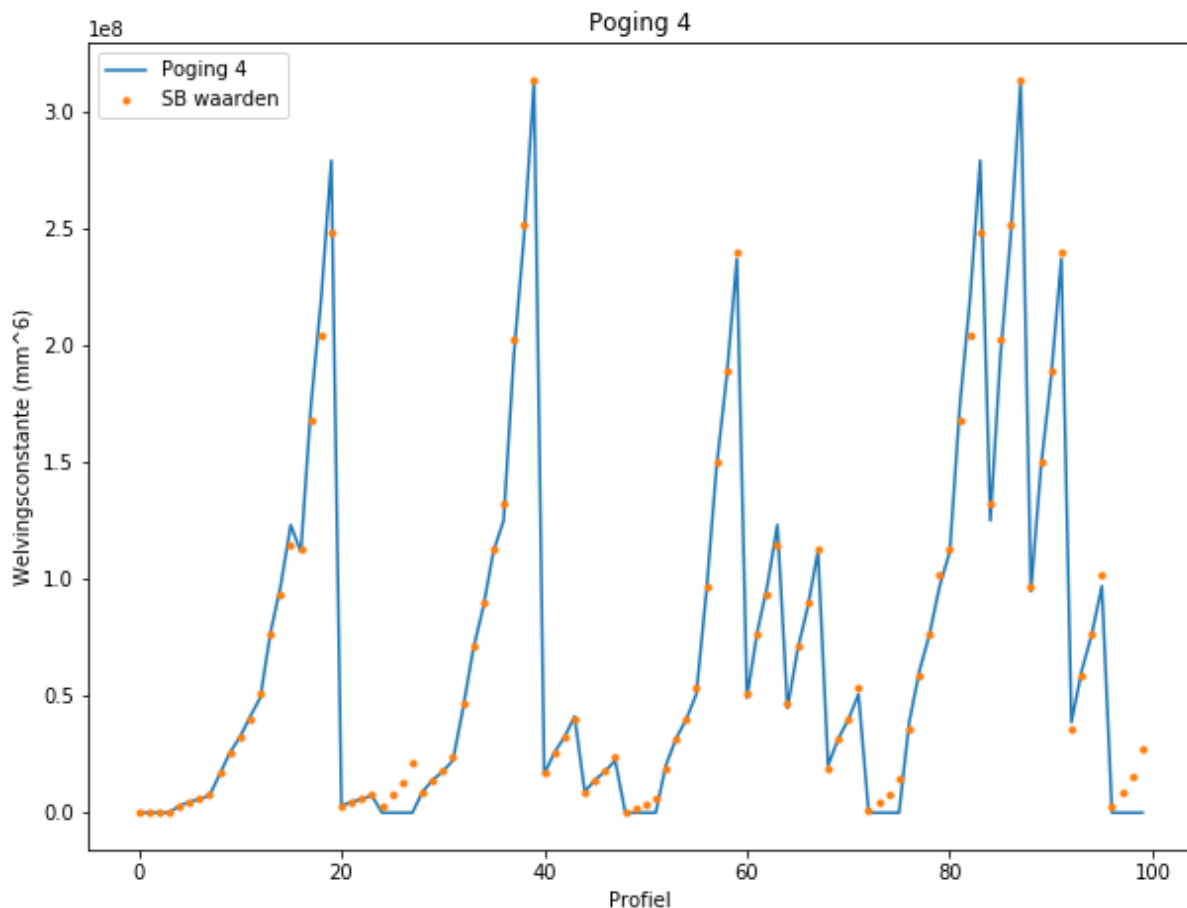
Poging 4:
$$C_w = \frac{1}{70} h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot |h - b|^{9/5} \cdot (h + b)^{1/5} \quad [m^6]$$

Poging 4 is duidelijk de beste poging tot nu toe, omdat deze poging op elke statistiek (behalve minimale afwijking) beter scoort dan alle vorige pogingen (tabel 9). Veel rechthoekige profielen (15 van de 80) hebben een kleinere afwijking dan 5%.

Tabel 9. Statistieken poging 4.

	Alle profielen	Rechthoekige profielen
Gemiddelde fout	22%	3,0%
Fout (minimaal – maximaal)	0,2% - 100%	0,2% - 12,3%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	35/100	15/80

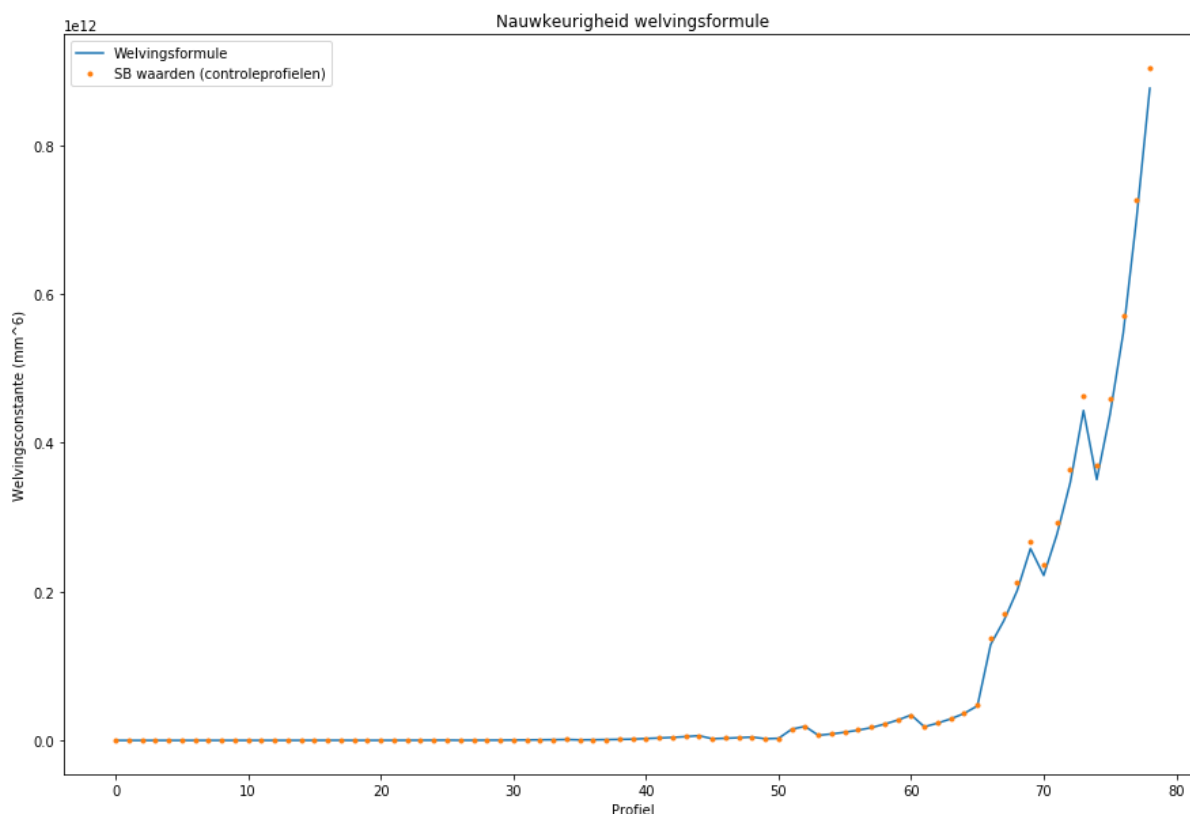
De grootste afwijkingen zijn zichtbaar bij profielen 16 t/m 20 en 80 t/m 84, waar het verschil tussen de hoogte en de breedte het grootst is. Het lijkt hier nog fout te gaan bij profielen met een groot verschil in hoogte en breedte, maar het veranderen van de formule lijdt niet tot een beter resultaat. Om de formule te schalen is hier ook een factor (1/70) toegevoegd.



Figuur 16. Resultaat poging 4.

5.3 Nauwkeurigheid welvingsformule

De formule die in poging 4 is gebruikt is de uiteindelijke formule en zal worden beschouwd als het eindresultaat. Deze formule wordt in het vervolg van dit verslag ook de welvingsformule genoemd. De formule is bepaald door een parameteranalyse te doen met de analyseprofielen. Ook de pogingen in paragraaf 4.2 zijn gedaan met de analyseprofielen. Met de controleprofielen wordt de formule gecontroleerd. In figuur 17 is dit te zien.



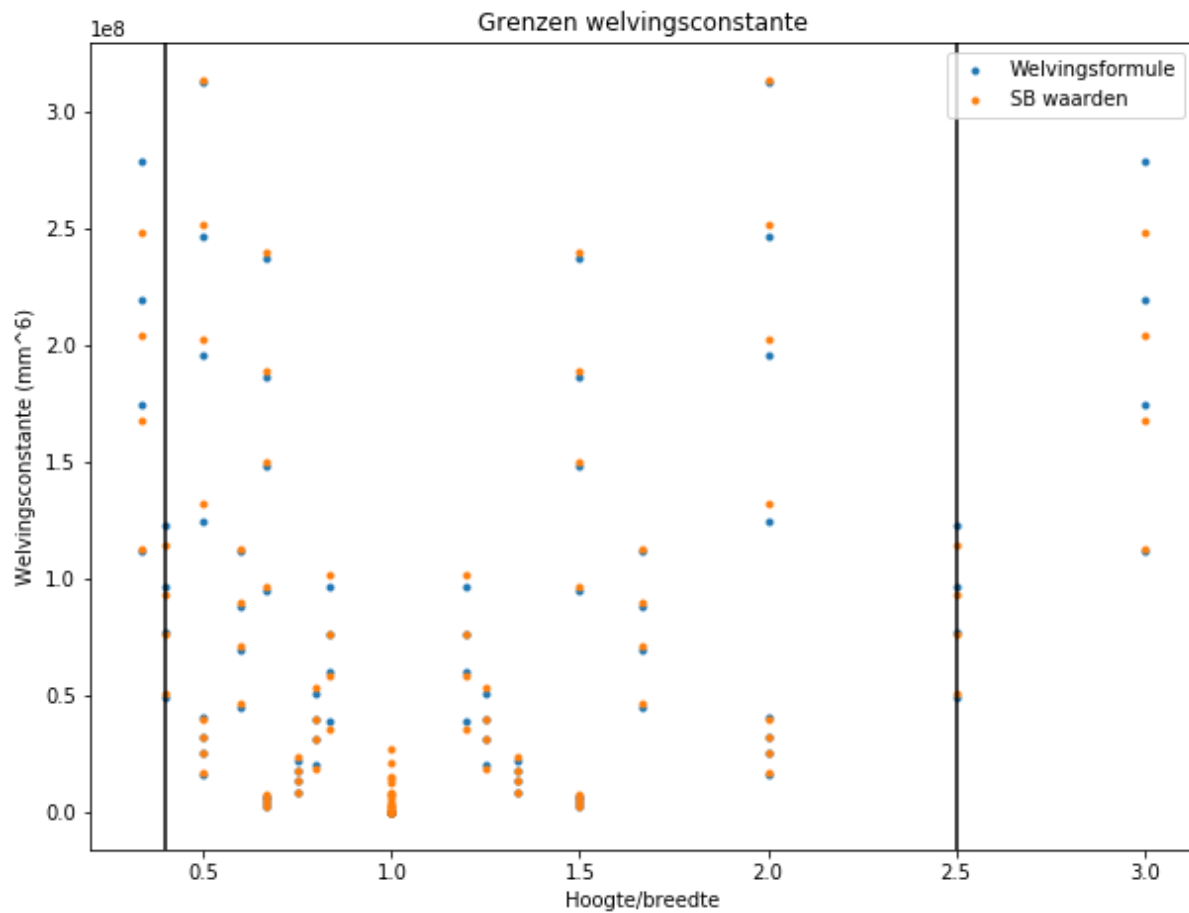
Figuur 17. Nauwkeurigheid welvingsformule (controleprofielen).

De belangrijkste foutgegevens van de controleprofielen zijn in tabel 10 weergegeven. Deze profielen geven een iets positiever beeld dan bij de formuleprofielen. Dus deze afwijkingen geven een goed beeld voor de meeste rechthoekige profielen

Tabel 10. Statistieken welvingsformule (controleprofielen).

	Rechthoekige profielen
Gemiddelde fout	2,8%
Fout (minimaal – maximaal)	0,3% - 6,5%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	7/79

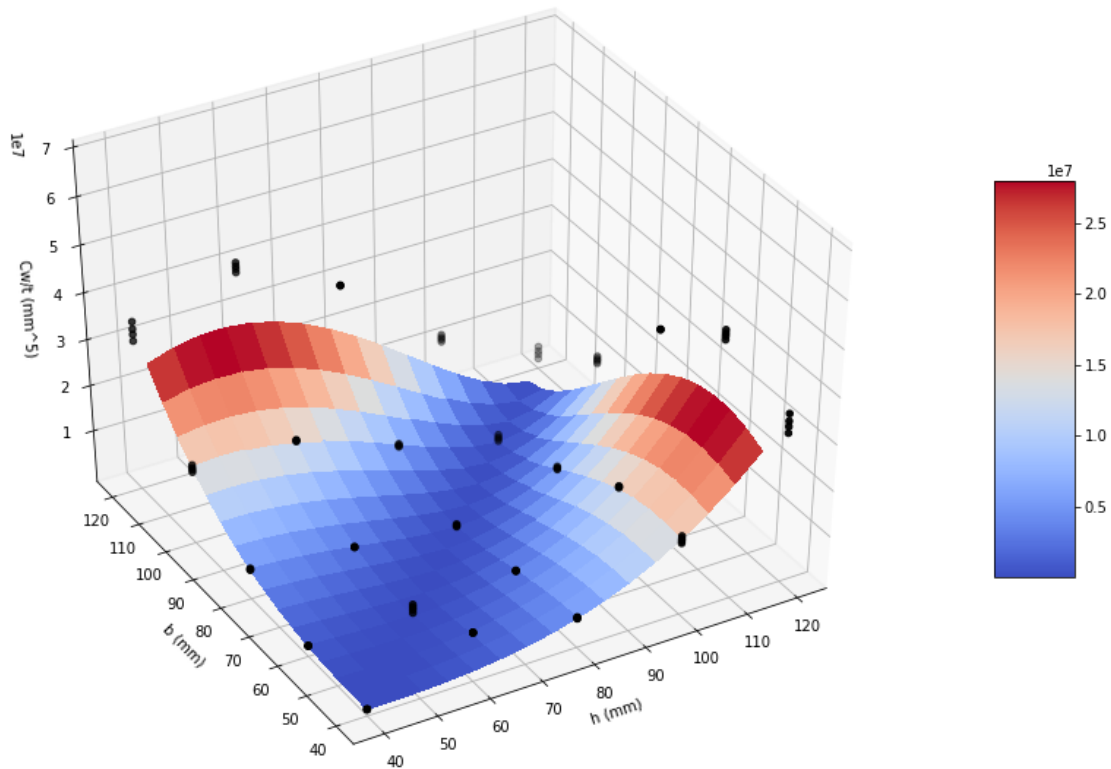
Er wordt ook nog gekeken naar de mogelijke geldigheidsgrenzen van de formule. Geschat wordt dat de formule nauwkeurig is van hoogte/breedte = 0,4 tot en met hoogte/breedte = 2,5. Omdat de datasets een beperkt aantal verhoudingen tussen de 2 en 3 heeft, is hier de bovengrens moeilijk te bepalen.



Figuur 18. Geldigheidsgrenzen welvingsformule (formuleprofielen).

5.4 3D-plot welvingsformule

Voor een beter inzicht in de welvingsconstante van de formuleprofielen en de welvingsformule is een 3D-plot gemaakt (figuur 19). Op de horizontale assen zijn de hoogte (mm) en de breedte (mm) te zien. Op de verticale as is de welvingsconstante gedeeld door de dikte (mm^5) te zien. De punten zijn de formuleprofielen en het oppervlak is de formule.



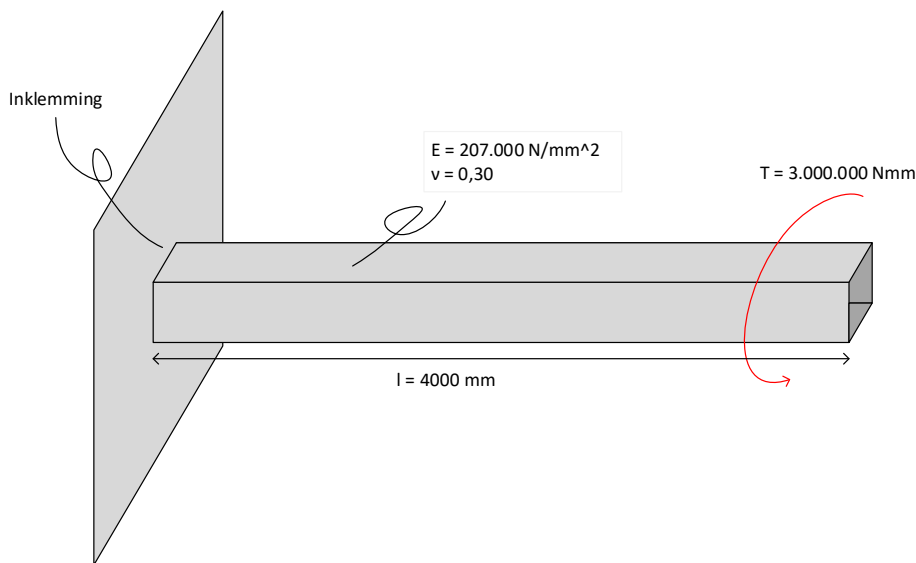
Figuur 19. 3D-plot welvingsformule.

6. Toepassing

Nu de welvingsformule bekend is, wordt er een toepassing mee gedaan. Dit is enerzijds om de relevantie in de praktijk te tonen en anderzijds om de nauwkeurigheid nogmaals te controleren. Voor deze toepassing wordt een uitkragende ligger gebruikt.

6.1 Uitkragende ligger

De uitkragende ligger die gebruikt wordt, heeft een lengte van 4 meter. De elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoëfficiënt van staal worden gebruikt ($E = 207000 \text{ N/mm}^2$ en $\nu = 0,30$). Er wordt een wringend moment toegepast van $3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$. Er worden drie verschillende profielen onderzocht. Deze staan in tabel 11.



Figuur 20. Uitkragende ligger met vrij uiteinde.

In Maple (Bijlage C en D) worden de onderstaande formules gebruikt voor de glijdingsmodulus, het wringtraagheidsmoment en de welvingsconstante.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$I_w = \frac{2t^2(h - t)^2(b - t)^2}{t(a - t) + t(b - t)}$$

$$C_w = \frac{1}{70} h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot |h - b|^{4/5} \cdot (h + b)^{1/5}$$

Met onderstaande differentiaalvergelijking uit de Theorie van Vlasov wordt de hoekverdraaiing φ berekend.

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = m_x$$

Om de vergelijking op te lossen zijn vier randvoorwaarden nodig. Beide uiteinden hebben twee randvoorwaarden.

Links (inklemming):

$$\varphi = 0 \text{ (geen rotatie)}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ (verhinderde welving)}$$

Rechts (kopplaat of vrij uiteinde):

$$M_w = GI_w \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dB}{dx} = 0 \text{ (vrije rotatie)}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ (verhinderde welving) of } \frac{d\varphi^2}{dx^2} = 0 \text{ (vrije welving)}$$

Als φ berekend is, kan ook de spanning worden berekend. Daarvoor wordt onderstaande formule gebruikt. Omdat er geen normaalkracht en momenten aanwezig zijn, kan de formule worden vereenvoudigd.

$$\sigma_{xx}(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_z} \cdot z - \frac{M_z}{I_y} \cdot y - \frac{B}{C_w} \cdot \varphi$$

$$\sigma_{xx}(y, z) = -\frac{B}{C_w} \cdot \varphi$$

In tabel 11 zijn de verschillen tussen de verhinderde welving en vrije welving te zien. Wat opvalt is dat bij de berekende profielen de hoekverdraaiing vrijwel hetzelfde is. De spanning daarentegen is bij vrije welving 0 en bij verhinderde welving niet, maar de spanning bij verhinderde welving is dus niet groot. Vooral uit het feit de hoekverdraaiing in beide situaties vrijwel gelijk is, kan worden geconcludeerd dat de invloed van welving bij rechthoekige kokerdoorsneden verwaarloosbaar is voor sterkteberekeningen. Daarnaast is ook aannemelijk gemaakt dat de welvingsformule voor rechthoekige kokerdoorsneden nauwkeurig genoeg is.

Tabel 11. Verschil hoekverdraaiing en spanning tussen verhinderde welving en vrije welving.

Profiel eigenschappen			Hoekverdraaiing (rad)		Spanning (N/mm ²)	
Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	Vrije welving	Verhinderde welving	Vrije welving	Verhinderde welving
80	60	4,0	0,13726	0,13722	0	0,8459
100	80	4,0	0,06086	0,06084	0	0,1660
120	100	4,0	0,03220	0,03219	0	0,0462

7. Conclusie

Het doel van dit verslag was om een formule voor de welvingsconstante van rechthoekige kokerprofielen te vinden. De eis hierbij was dat de formule een maximale afwijking van 5% met ShapeBuilder had. Uiteindelijk is deze eis niet gehaald. In ieder geval is deze welvingsformule al veel nauwkeuriger dan de formule die inleiding wordt genoemd. De welvingsformule staat hieronder en in tabel 12 wordt een aantal foutstatistieken van de formule weergegeven.

$$C_w = \frac{1}{70} h^{3/2} \cdot b^{3/2} \cdot t \cdot |h - b|^{9/5} \cdot (h + b)^{1/5}$$

Tabel 12. Foutstatistieken welvingsformule.

	Formuleprofielen	Controleprofielen
Gemiddelde fout	3,0%	2,8%
Fout (minimaal – maximaal)	0,2% - 12,3%	0,3% - 6,5%
Aantal punten met een grotere afwijking dan 5%	15/80	7/79

Uit de gedane toepassing is gebleken dat het verschil in hoekverdraaiing ϕ verwaarloosbaar is tussen gehinderde welving en vrije welving voor rechthoekige kokerprofielen. Hiermee is aannemelijk gemaakt dat welving voor rechthoekige kokerdoorsneden kan worden verwaarloosd in sterkteberekeningen.

Het proces van het vinden van een formule (met een numerieke methode) is niet altijd hetzelfde, toch zijn er een aantal stappen die waarschijnlijk in de meeste processen handig kunnen zijn. Van groot belang is de dataset waarmee gewerkt wordt. Een aanbeveling zou zijn om voor elke parameter een aantal waarden te nemen. Voor alle combinaties die hiermee te maken zijn wordt vervolgens de waarde bepaald. Ook is het handig om een parameterstudie te doen om hiermee mogelijke verbanden te vinden. Vooral voor de losse parameters is dit nuttig. Vervolgens is het belangrijk om een aantal pogingen te doen en telkens te analyseren waar de poging nog mogelijk afwijkt van de bekende waarde. Met behulp van deze analyses en pogingen kan de formule worden geoptimaliseerd.

8. Aanbevelingen

Als aanvulling op dit onderzoek zou de welvingsformule kunnen worden gecontroleerd met andere profielen. Daarnaast kan er met een ander programma dan ShapeBuilder een nieuwe dataset worden samengesteld. ShapeBuilder heeft een beperkt aantal elementen, die door het programma worden gebruikt in de eindige elementen methode. Een ander programma met meer elementen, zou een nauwkeurigere waarde voor de welvingsconstante kunnen geven. Hiermee zou kunnen worden aangetoond dat de formule nauwkeuriger is, dan nu aangegeven. Mocht de afwijking niet te verklaren zijn door het beperkte aantal elementen in ShapeBuilder, dan zou kunnen worden gezocht naar andere redenen. Ook kan er een poging worden gedaan om de formule, met de in dit onderzoek gebruikte datasets nauwkeuriger te maken.

Bibliografie

- [1] ENG-Tips. (2019, juli 20). *Formula for warping constant of box section*. Opgehaald van Engineering Forums: <https://www.eng-tips.com/viewthread.cfm?qid=455965>
- [2] Hoogenboom, P. (2019, 18 oktober). *Aantekeningen over wringing*. Opgehaald van <http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/dictaatwringing.pdf>
- [3] Nederlands Normalisatie-instituut. (2011, december). *NEN-EN 1999-1-1+A1*. Opgehaald van NEN-connect: <https://connect.nen.nl/Standard/PopUpHtml?RNR=155887&search=&Native=1&token=8eef6fa6-4ef4-4256-ba0d-511d3fc27e1a>
- [4] Nirmalsingh, R. (2010, juni). *Welvingsspanningen in kokerprofielen*. Opgehaald van http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_nirmalsingh.pdf

Bijlage A: Formuleprofielen

Profiel	Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	$C_w \cdot 10^8 \text{ (mm}^6\text{)}$
1	40	40	3,2	0,0006069
2	40	40	5,0	0,001652
3	40	40	6,3	0,002563
4	40	40	8,0	0,003741
5	40	60	3,2	0,03003
6	40	60	5,0	0,04695
7	40	60	6,3	0,05945
8	40	60	8,0	0,07573
9	40	80	3,2	0,1714
10	40	80	5,0	0,2599
11	40	80	6,3	0,3207
12	40	80	8,0	0,3983
13	40	100	3,2	0,5083
14	40	100	5,0	0,7642
15	40	100	6,3	0,9348
16	40	100	8,0	1,145
17	40	120	3,2	1,128
18	40	120	5,0	1,683
19	40	120	6,3	2,049
20	40	120	8,0	2,488
21	60	40	3,2	0,3003
22	60	40	5,0	0,4695
23	60	40	6,3	0,5952
24	60	40	8,0	0,7573
25	60	60	3,2	0,02499
26	60	60	5,0	0,0754
27	60	60	6,3	0,1312
28	60	60	8,0	0,2145
29	60	80	3,2	0,08831
30	60	80	5,0	0,1407
31	60	80	6,3	0,1817
32	60	80	8,0	0,2357
33	60	100	3,2	0,4644
34	60	100	5,0	0,7182
35	60	100	6,3	0,8992
36	60	100	8,0	1,131
37	60	120	3,2	1,324
38	60	120	5,0	2,032
39	60	120	6,3	2,522
40	60	120	8,0	3,142
41	80	40	3,2	0,1714
42	80	40	5,0	0,2599

43	80	40	6,3	0,3207
44	80	40	8,0	0,3983
45	80	60	3,2	0,08887
46	80	60	5,0	0,1407
47	80	60	6,3	0,1817
48	80	60	8,0	0,2363
49	80	80	3,2	0,006496
50	80	80	5,0	0,02069
51	80	80	6,3	0,03742
52	80	80	8,0	0,06571
53	80	100	3,2	0,1926
54	80	100	5,0	0,3124
55	80	100	6,3	0,4049
56	80	100	8,0	0,5378
57	80	120	3,2	0,9648
58	80	120	5,0	1,506
59	80	120	6,3	1,893
60	80	120	8,0	2,404
61	100	40	3,2	0,5083
62	100	40	5,0	0,764
63	100	40	6,3	0,9348
64	100	40	8,0	1,145
65	100	60	3,2	0,4644
66	100	60	5,0	0,7182
67	100	60	6,3	0,8992
68	100	60	8,0	1,131
69	100	80	3,2	0,1926
70	100	80	5,0	0,3123
71	100	80	6,3	0,4049
72	100	80	8,0	0,5378
73	100	100	3,2	0,01326
74	100	100	5,0	0,0451
75	100	100	6,3	0,08071
76	100	100	8,0	0,1482
77	100	120	3,2	0,3577
78	100	120	5,0	0,587
79	100	120	6,3	0,7662
80	100	120	8,0	1,02
81	120	40	3,2	1,128
82	120	40	5,0	1,683
83	120	40	6,3	2,048
84	120	40	8,0	2,488
85	120	60	3,2	1,324
86	120	60	5,0	2,032
87	120	60	6,3	2,524
88	120	60	8,0	3,141

89	120	80	3,2	0,9648
90	120	80	5,0	1,506
91	120	80	6,3	1,893
92	120	80	8,0	2,404
93	120	100	3,2	0,3577
94	120	100	5,0	0,5881
95	120	100	6,3	0,7662
96	120	100	8,0	1,02
97	120	120	3,2	0,02394
98	120	120	5,0	0,0845
99	120	120	6,3	0,1547
100	120	120	8,0	0,2774

Bijlage B: Controleprofielen

Profiel	Hoogte (mm)	Breedte (mm)	Dikte (mm)	$C_w \cdot 10^8 \text{ (mm}^6\text{)}$
1	50	30	3,2	0,0143
2	60	40	3,0	0,0281
3	60	40	4,0	0,0376
4	60	40	5,0	0,047
5	80	40	3,2	0,1714
6	80	40	4,0	0,2119
7	80	40	5,0	0,2599
8	80	40	6,3	0,3207
9	80	40	8,0	0,3983
10	90	50	3,6	0,3314
11	90	50	5,0	0,454
12	90	50	6,3	0,5641
13	100	50	3,0	0,4964
14	100	50	3,2	0,5279
15	100	50	5,0	0,8078
16	100	50	6,3	0,999
17	100	50	8,0	1,242
18	100	50	10,0	1,518
19	100	60	3,6	0,5218
20	100	60	5,0	0,7182
21	100	60	6,3	0,8992
22	100	60	8,0	1,131
23	120	60	3,6	1,482
24	120	60	5,0	2,032
25	120	60	6,3	2,524
26	120	60	8,0	3,141
27	120	80	5,0	1,506
28	120	80	6,3	1,893
29	120	80	8,0	2,404
30	120	80	10,0	3,005
31	150	100	5,0	4,596
32	150	100	6,3	5,786
33	150	100	8,0	7,329
34	150	100	10,0	9,184
35	150	100	12,5	11,49
36	160	80	4,0	6,994
37	160	80	5,0	8,659
38	160	80	6,3	10,81
39	160	80	8,0	13,56
40	160	80	10,0	16,63
41	200	100	5,0	26,68
42	200	100	6,3	33,28

43	200	100	8,0	41,83
44	200	100	10,0	51,70
45	200	100	12,5	63,53
46	200	120	5,0	23,38
47	200	120	6,3	29,27
48	200	120	8,0	37,01
49	200	120	10,0	45,97
50	200	150	8,0	21,56
51	200	150	10,0	27,14
52	250	100	10,0	152,50
53	250	100	12,5	186,60
54	250	150	5,0	71,78
55	250	150	6,3	89,87
56	250	150	8,0	113,40
57	250	150	10,0	141,20
58	250	150	12,5	175,90
59	250	150	16,0	222,80
60	300	100	8,0	276,30
61	300	100	10,0	337,90
62	300	200	6,3	186,30
63	300	200	8,0	234,40
64	300	200	10,0	294,20
65	300	200	12,5	367,70
66	300	200	16,0	469,10
67	400	200	8,0	1378
68	400	200	10,0	1708
69	400	200	12,5	2114
70	400	200	16,0	2677
71	450	250	8,0	2360
72	450	250	10,0	2929
73	450	250	12,5	3635
74	450	250	16,0	4620
75	500	300	8,0	3698
76	500	300	10,0	4594
77	500	300	12,5	5707
78	500	300	16,0	7257
79	500	300	20,0	9036

Bijlage C: Toepassing verhinderde welving

```

restart :
l := 4000 :
E := 207000 :
v := 0.30 :
G :=  $\frac{E}{2(1+v)}$  :
h := 80 :
b := 60 :
t := 4 :
Iw :=  $\frac{2 \cdot t^2 \cdot (h-t)^2 \cdot (b-t)^2}{t \cdot (h-t) + t \cdot (b-t)}$  :
ECw :=  $\frac{E}{70} \cdot h^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot t \cdot \text{abs}\left((h-b)^{\frac{4}{5}}\right) \cdot (h+b)^{\frac{1}{5}}$  :
GIw := G · Iw :
T := 3000000 :
mx:=0:EI := ECw ·  $\frac{d^4}{dx^4} \text{phi}(x)$  - GIw ·  $\frac{d^2}{dx^2} \text{phi}(x)$  = mx :
bound_con := phi(0)=0, phi'(0)=0, GIw·phi'(l) - ECw·phi'''(l) = T, phi'(l)=0 :
evalf(dsolve({EI, bound_con}, {phi(x)}));
phi(x) = -0.3956113067e-4+0.3432455874e-4*x-0.2310237047e-1511*
exp(.8676334114*x)+0.3956113069e-4*exp(-.8676334114*x)
phil := -0.3956113067e-4 + 0.3432455874e-4 * x - 0.2310237047e-1511 * exp(.8676334114 * x)
+ 0.3956113069e-4 * exp(-.8676334114 * x) :
B := -ECw ·  $\frac{d^2}{dx^2} \text{phil}$  :

eval(phil, x=l);
.1372191128
o :=  $\frac{B \cdot \text{phil} \cdot E}{ECw}$  :
eval(o, x=l);
.8459130971

```

Bijlage D: Toepassing vrije welving

```

restart :
l := 4000 :
E := 207000 :
v := 0.30 :
G :=  $\frac{E}{2(1+v)}$  :
h := 80 :
b := 60 :
t := 4 :
Iw :=  $\frac{2 \cdot t^2 \cdot (h-t)^2 \cdot (b-t)^2}{t \cdot (h-t) + t \cdot (b-t)}$  :
ECw :=  $\frac{E}{70} \cdot h^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \cdot t \cdot \text{abs}\left((h-b)^{\frac{4}{5}}\right) \cdot (h+b)^{\frac{1}{5}}$  :
GIw := G · Iw :
T := 3000000 :
mx:=0:
El := ECw ·  $\frac{d^4}{dx^4} \text{phi}(x)$  - GIw ·  $\frac{d^2}{dx^2} \text{phi}(x)$  = mx :
bound_con := phi(0) = 0, phi'(0) = 0, GIw · phi'(l) - ECw · phi'''(l) = T, phi''(l) = 0 :
evalf(dsolve({El, bound_con}, {phi(x)}));
phi(x) = -0.3956113063e-4 + 0.3432455873e-4 * x - 0.1349100775e-3018 *
exp(.8676334114 * x) + 0.3956113063e-4 * exp(-.8676334114 * x)
phil := -0.3956113063e-4 + 0.3432455873e-4 * x - 0.1349100775e-3018 * exp(.8676334114 * x)
+ 0.3956113063e-4 * exp(-.8676334114 * x) :
B := -ECw ·  $\frac{d^2}{dx^2} \text{phil}$  :

eval(phil, x=l) ;
.1372586738
o :=  $\frac{B \cdot \text{phil} \cdot E}{ECw}$  :
eval(o, x=l);
-0.9881883317e-1513

```