



Titel:	Doorbuiging van schalen door puntlasten
Eerste begeleider:	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider:	ir. S. Pasterkamp
Naam student:	A. Semiari
Student nummer:	1536389
Versie:	1.5
Status:	Definitief
Date:	24 januari 2012

Dankwoord

In het kader van het bachelor eindwerk aan de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen van TU Delft, is onderzoek gedaan naar de buiging van schalen ten gevolge van een puntlast.

Hierbij wil ik dr.ir. Hoogenboom en ir. Pasterkamp bedanken voor hun begeleiding, inzet en hulp bij het tot stand brengen van dit rapport.

Verder wil ik Armin Saraji bedanken die mij geholpen heeft met allerlei ICT problemen.

Delft, Januari 2012

Amir Semiari

Inhoudsopgave

Dankwoord.....	2
Inhoudsopgave	3
Lijst van symbolen	5
Samenvatting	6
1. Introductie.....	8
1.1. Algemeen.....	8
1.2. Probleemstelling	8
1.3. Doel van het project.....	8
1.4. Onderzoeksvragen	9
1.5. Plan van aanpak	10
1.6. Planning	14
2. Informatiebronnen.....	15
2.1. Boeken.....	15
2.2. Internet.....	15
3. Soorten schaalconstructies en een wiskundige beschrijving van dit soort constructies	16
4. ANSYS script verifiëren en optimaliseren	18
5. Koepels.....	19
5.1. Koepels in ANSYS.....	21
5.2. Spanningen bij Koepels	24
5.3. Koepel formule zonder dwarscontractie	27
5.4. De invloed van de dwarscontractiecoëfficiënt bij koepels.....	31
5.5. Geldigheid en nauwkeurigheid van de formule.....	33
6. Cilinder (halfcilinder).....	43
6.1. Cilinder formule	43
6.2. Spanningen bij Cilinders.....	47
7. Zadels (Hyperbolische Paraboloide).....	52
7.1. Zadel formule	53
7.2. Spanningen in zadels.....	55
8. Conclusies en aanbevelingen	58
Bijlage 1: ANSYS Script.....	59
Bijlage 2: Differentiaal vergelijking voor het plat vlak.....	63
Bijlage 3: Onderzoek naar optimale waarde van "hn" en "h1" voor koepels.....	65
Bijlage 4: Onderzoek naar de juiste waarde van "g" voor koepels.....	68

Bijlage 5: Eigenschappen formule die een verband beschrijft tussen de krommingen en vervorming bij koepels (DataFit analyse)	76
Bijlage 6: Vergelijking van de originele Datapunten en de koepelformule (met een vaste $g = 1000$)	78
Bijlage 7: Invloed van de dwarscontractie op koepels met verschillende krommingen	107
Bijlage 8: Fouten van de koepelformule ten opzichte van de waarde van ANSYS bij $g=(1/k)$	117
Bijlage 9: Fouten van de koepelformule ten opzichte van de waarde van ANSYS bij $g=(1/2k)$	121
Bijlage 10: Fouten van de koepelformule ten opzichte van de waarde van ANSYS bij $g=(1/4k)$	125
Bijlage 11: Fouten van de koepelformule ten opzichte van de waarde van ANSYS bij $g=(2/k)$	129
Bijlage 12: Fouten van de koepelformule ten opzichte van de waarde van ANSYS bij $g=(4/k)$	133
Bijlage 13: Onderzoek naar de correcte waarde van 'g' bij Cilinders	137
Bijlage 14: Eigenschappen van cilinderformule die een verband beschrijft tussen g , k en $t = 1$	140
Bijlage 15: Originele datapunten en de fouten bij de cilinderformule met variabele grondstraal	142
Bijlage 16: Cilinder met $g = (1/k)$	150
Bijlage 17: cilinder met $g=(1/2k)$	151
Bijlage 18: cilinder met $g=(1/4k)$	152
Bijlage 19: De invloed van grondstraal bij zadels	153
Bijlage 20: Datapunten bij zadels met $g= 2/k$	156
Bijlage 21: Datapunten bij zadels met $g=1/k$	162
Bijlage 22: Datapunten bij zadels met $g= 1/2k$	168
Bijlage 23: Datapunten bij zadels met $g=1/4k$	174
Bijlage 24: Verificatie koepelformule voor grote constructies:	180

Lijst van symbolen

P	Puntlast	[N]
E	Elasticiteitsmodulus	[N/m ²]
k_1	kromming in hoofdrichting 1	[1/m]
k_2	kromming in hoofdrichting 2	[1/m]
t	Dikte van de schaal	[m]
d	Diameter van oppervlakte waarop de belasting werkt	[m]
ν (nu)	Dwarscontractiecoëfficiënt/ Poisson ratio	[-]
g	Straal van de parabool / grondstraal schaalconstructie	[m]
h_1	Midden element grootte	[m]
h_n	Element grootte aan de zijkant van de schaal	[m]
h	Hoogte van parabool	[m]
w	Buiging/ vervorming van de schalen	[m]

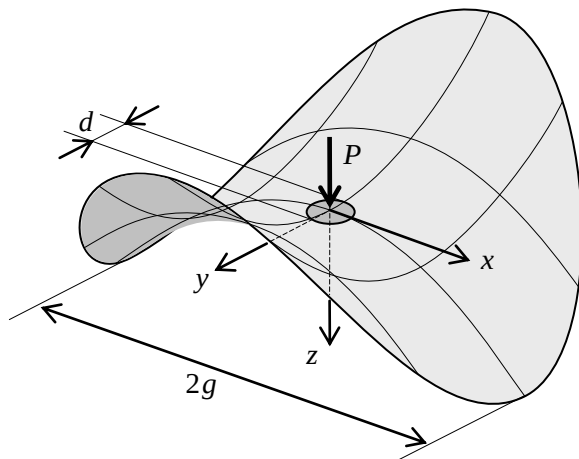


Figure 1: Zadelschaal met assenstelsel, afmetingen en belasting

Samenvatting

Hier wordt een korte samenvatting gegeven van de uitkomsten van dit onderzoek. Uit onderzoek blijkt dat bij koepels en zadels de Gaussische kromming $k_1 \cdot k_2$ een rol speelt.

Koepels:

In hoofdstuk 5 van dit verslag zijn koepels onderzocht voor krommingen $(1/2000) \leq k \leq (1/100)$. Uit datapunten blijkt dat het volgende verband geldt tussen w , k_1 , k_2 , t , P , E en v .

$$w := \frac{0.434818 \cdot P}{E \cdot t^2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_2}} \cdot (1 - 0.5 \cdot v^2); \quad (1)$$

Onder de voorwaarde dat:

$$t \cdot k_1 \leq \frac{1}{100} \quad (2)$$

$$t \cdot k_2 \leq \frac{1}{100} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2000} \leq \sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \leq \frac{1}{100} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k \text{ (kleinste)}} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k \text{ (kleinste)}} \quad (5)$$

Formule (1) is tot 5% nauwkeurig onder voorwaarde dat aan alle eisen (2,3,4 en 5) is voldaan.

Vergelijking (2), (3) en (4) zorgen ervoor dat steeds met 'dunwandige schaalconstructies' wordt berekend. Over het algemeen geldt dat als de oplossing van (4) in de beurt van 1/100 is, dan zijn de fouten het grootst (5%). Is de oplossing van eis (4) daarentegen klein (bijvoorbeeld dicht in de beurt van 1/2000), dan zijn de fouten klein.

Vergelijking (5) zorgt er voor dat de constructie niet te plat maar ook niet te hoog wordt. Uit onderzoek is gebleken dat een koepel niet platter dan 15 graden mag worden (linkerkant van vergelijking (5)).

Cilinders:

Voor cilinders is de onderstaande formule gevonden die tot 2% nauwkeurig is.

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \left(0.422647 \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{(t \cdot k)^{\frac{3}{4}}} \right); \quad (6)$$

Onder de voorwaarde dat:

$$\frac{1}{2000} \leq t \cdot k \leq \frac{1}{100} \quad (7)$$

Zadels (Hyperbolische paraboloiden):

Een zadel heeft een positieve en een negatieve kromming. Voor zadels is het volgende verband gevonden waarbij k_2 altijd negatief wordt verondersteld:

$$w = \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{a}{(t \cdot k_1 \cdot t \cdot |k_2|)^b} \quad (8)$$

Waarbij afhankelijk van de hoogte* van de koepel geldt:

$$\begin{aligned} 0.43 &\leq a \leq 0.5 \\ b &\approx 0.55 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{1}{2000} \leq t \cdot k \leq \frac{1}{100} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k \text{ (kleinste)}} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k \text{ (kleinste)}} \quad (11)$$

1. Introductie

1.1. Algemeen

Schalen worden evenals platen tot vlakconstructies gerekend met het verschil dat schalen uit een of meerdere krommingen bestaan. Door het combineren van deze schaalconstructies kunnen constructies met vrije vormen ontstaan. Schalen zijn de afgelopen jaren regelmatig toegepast in de bouw (vooral als dakconstructie). Daarom is het belangrijk dat er handige en snelle methodes worden ontwikkeld waarmee een constructeur of een architect een schatting kan maken van de benodigde afmetingen van een schaalconstructie.

1.2. Probleemstelling

Moderne schaalconstructies met vrije vormen bestaande uit een of twee krommingen worden in de bouw (maar ook in de auto- en vliegtuigindustrie) toegepast. Om deze schaalconstructies te moduleren en de constructieve eigenschappen (sterkte en stijfheid) van deze constructies te toetsen worden vaak eindige-elementenprogramma's gebruikt. Een nadeel van deze programma's is dat ze veel tijd in beslag nemen om een constructie door te rekenen. Bovendien moet degene die ze gebruikt verstand hebben van deze programma's en precies weten hoe die programma's werken. Het probleem met de huidige manieren (verplaatsingen, spanningen) is dat ze geen inzicht geven in hoe een constructie kan worden verbeterd. Verder is het goed om te melden dat het voor een architect of een constructeur erg prettig is, zeker in een vroeg stadium, om een schatting te kunnen maken van de afmetingen van een schaalconstructie met behulp van een simpele formule.

1.3. Doel van het project

In dit BSC eindwerk wordt er naar gestreefd om een formule te vinden die een relatie legt tussen de doorbuiging (of vervorming) 'w' net onder de belasting, dikte, krommingen en dwarscontractiecoëfficiënt.

Om dit te bereiken worden, met behulp van een eindige-elementenprogramma (Ansys), schaalconstructies gemodelleerd die bestaan uit verschillende krommingen. Deze opdracht is beperkt tot constructies met twee krommingen (kromming 1 in hoofdrichting 1 en kromming twee in hoofdrichting 2). Op de gemodelleerde constructie wordt een puntlast aangebracht waarna de bijbehorende verplaatsing net onder de puntlast wordt afgelezen. Hierna worden er grafieken gemaakt van de verplaatsingen, als functie van de dikte en krommingen. Uiteindelijk moet er een formule gevonden worden die goed overeenkomt met deze resultaten.

1.4. Onderzoeksvragen

Hoofdvraag:

Wat is de relatie tussen de verplaatsing, dikte, krommingen, dwarscontractiecoëfficiënt, grootte van de puntlast en elasticiteitsmodulus bij een schaalconstructie en hoe kan deze relatie in de vorm van een formule worden gepresenteerd?

Sub vragen:

Sub vragen worden opgedeeld in twee verschillende groepen. De eerste groep vragen kunnen met behulp van literatuurstudie worden opgelost. De tweede groep vragen worden met behulp van computer simulaties (Ansys, Datafit, maple etc.) uitgewerkt.

Literatuurstudie:

1. *Welke soorten schaalconstructies bestaan er? Hoe worden deze constructies wiskundig beschreven?*
2. *Welke methodes en formules worden er tegenwoordig gebruikt om schaalconstructies te berekenen?(een klein onderzoek naar de bestaande en huidige methodes om schaal constructies te berekenen)*

Computersimulatie (m.b.v. ANSYS, DataFit, Maple etc.):

3. *Wat is het verband tussen verplaatsing onder de puntlast (w), dikte (t), krommingen (k_1 en k_2) en dwarscontractie (v) bij koepels? Welke formule beschrijft dit verband?*
4. *Wanneer is deze formule geldig? Hoe groot zijn de afwijkingen ten opzichte van de waarde die ANSYS geeft?*
5. *Wat is het verband tussen w , k_1 , k_2 , t en v bij cilinders?*
6. *Wanneer is deze formule geldig? Hoe groot zijn de fouten en in welke reken gebieden zijn deze fouten het grootst?*
7. *Wat is het verband tussen w , k_1 , k_2 , t en v bij zadels?*
8. *Wat zijn de fouten van deze formules en in welke gebieden zijn deze fouten het grootste?*

1.5. Plan van aanpak

Om de onderzoeksvragen te kunnen beantwoorden, wordt de volgende aanpak gehandhaafd. In 5 stappen wordt hier naar de eindoplossing (eindformules) toe gewerkt.

Stap 1:

In de eerste stap wordt een literatuurstudie gedaan. Hierbij wordt kennis genomen van de schaalconstructies en de bestaande formules en methodes om een schaalconstructie te berekenen. Dit gedeelte levert een korte samenvatting op die in de uiteindelijke rapportage wordt opgenomen. Verder is het voor dit BSC eindwerk van belang om kennis te hebben van programma's zoals Ansys en Datafit. In de eerste week bestaat de mogelijkheid om kennis te maken met deze programma's. Ook het bestaande ANSYS script wordt geanalyseerd en zo nodig aangepast en verbeterd. De eerste week (week 1) is aan de bovengenoemde werkzaamheden toegewijd.

Stap 2:

In de tweede stap worden met behulp van Ansys, schaalmodellen met verschillende krommingen en verschillende diktes gegenereerd. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen koepels (k_1 en k_2 zijn beide positief of beide negatief), zadels (k_1 is positief en k_2 is negatief) en cilinder (k_1 is positief of negatief en k_2 is nul). Elke van deze constructiesoorten wordt apart bestudeerd. Op deze schaalmodellen wordt een puntlast aangebracht. De doorbuiging net onder de puntlast zijn de uitkomsten van deze stap die in de vervolgstappen gebruikt zullen worden.

Stap 3:

De krommingen, diktes en de bijbehorende momenten worden in DataFit gebracht. Hierbij wordt geprobeerd om een grafiek en een passende formule te vinden die een relatie beschrijft tussen al deze variabelen.

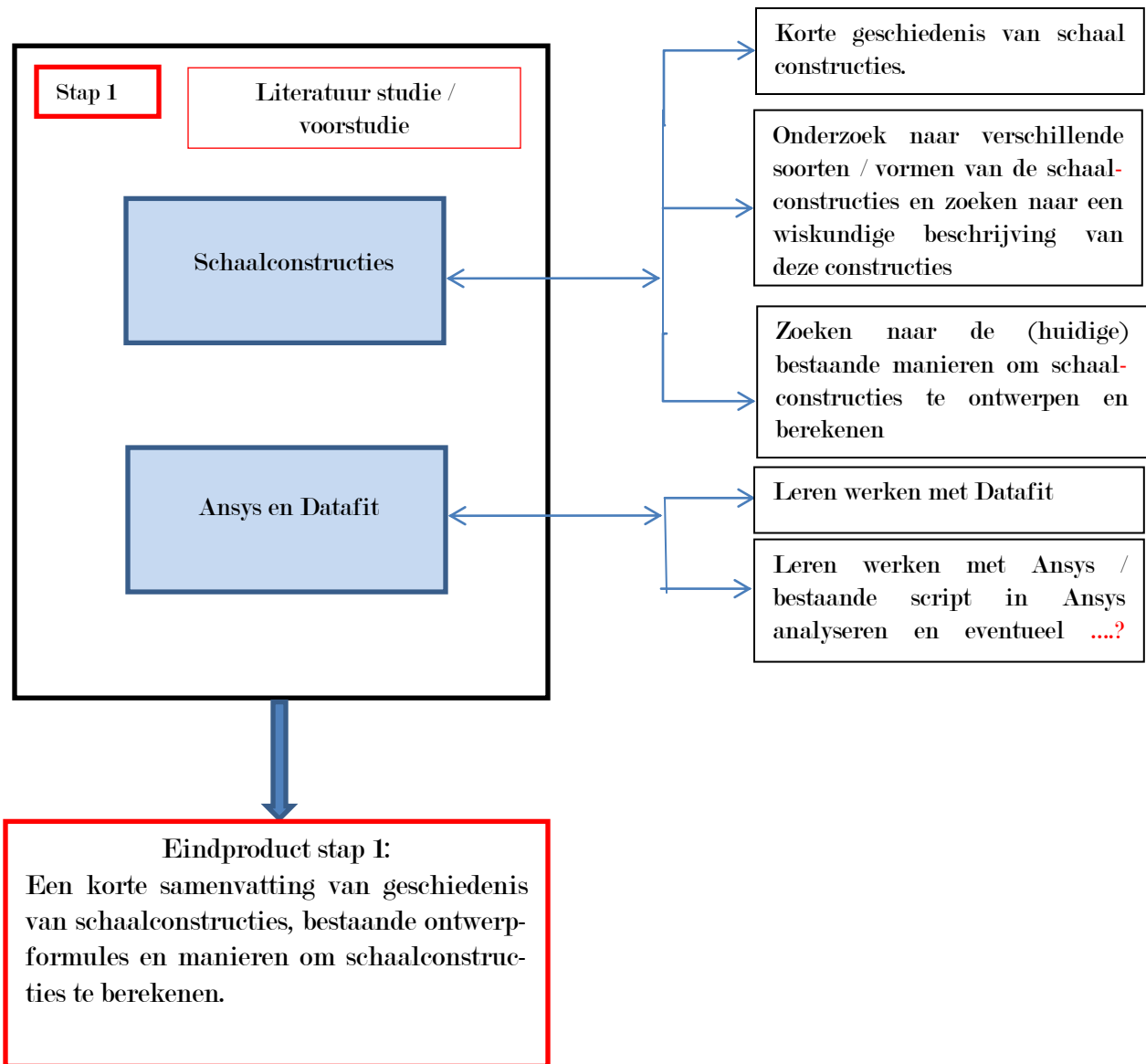
Stap 4:

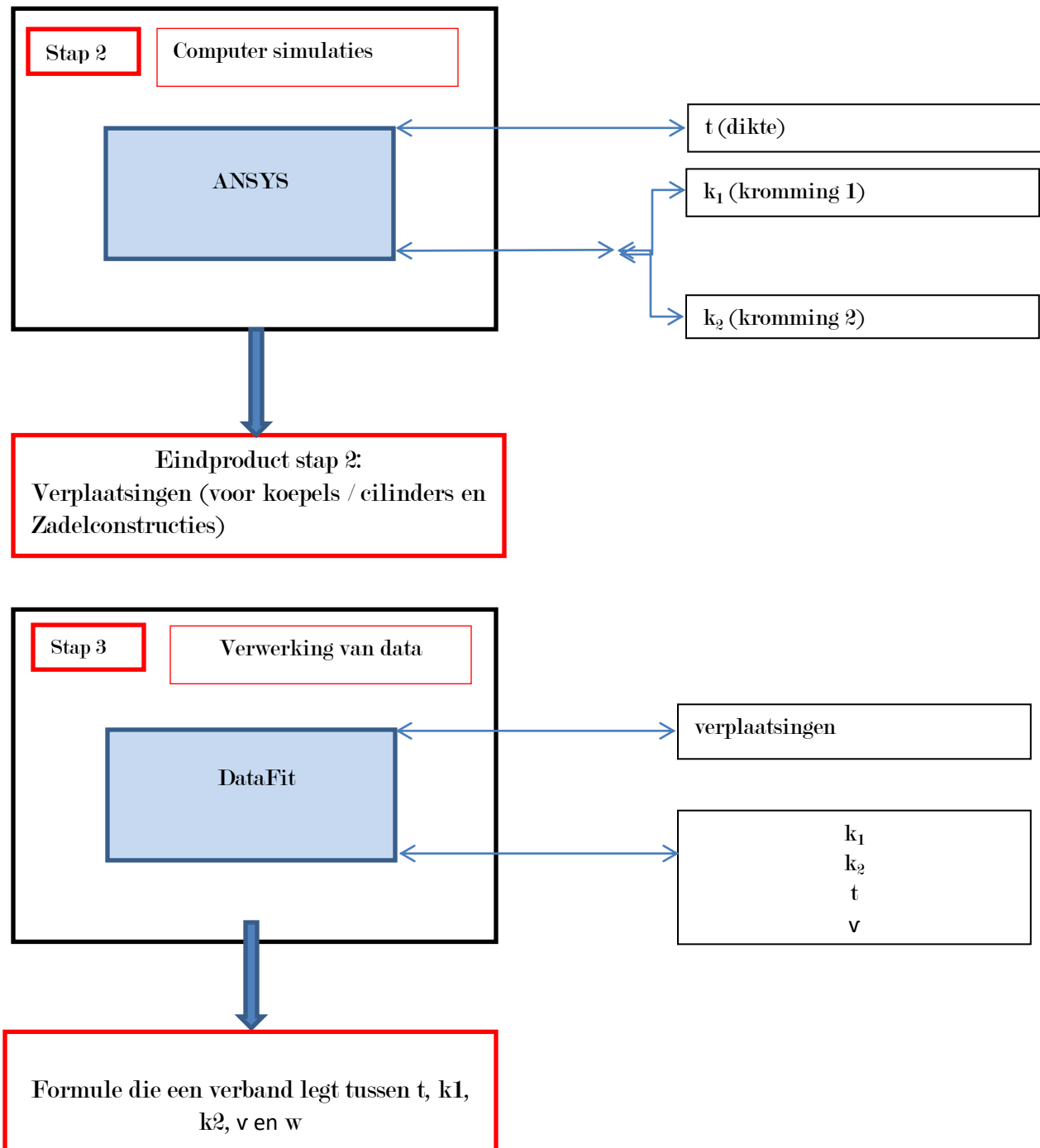
In deze stap wordt de juistheid en betrouwbaarheid van de resultaten die door Ansys zijn verkregen onderzocht.

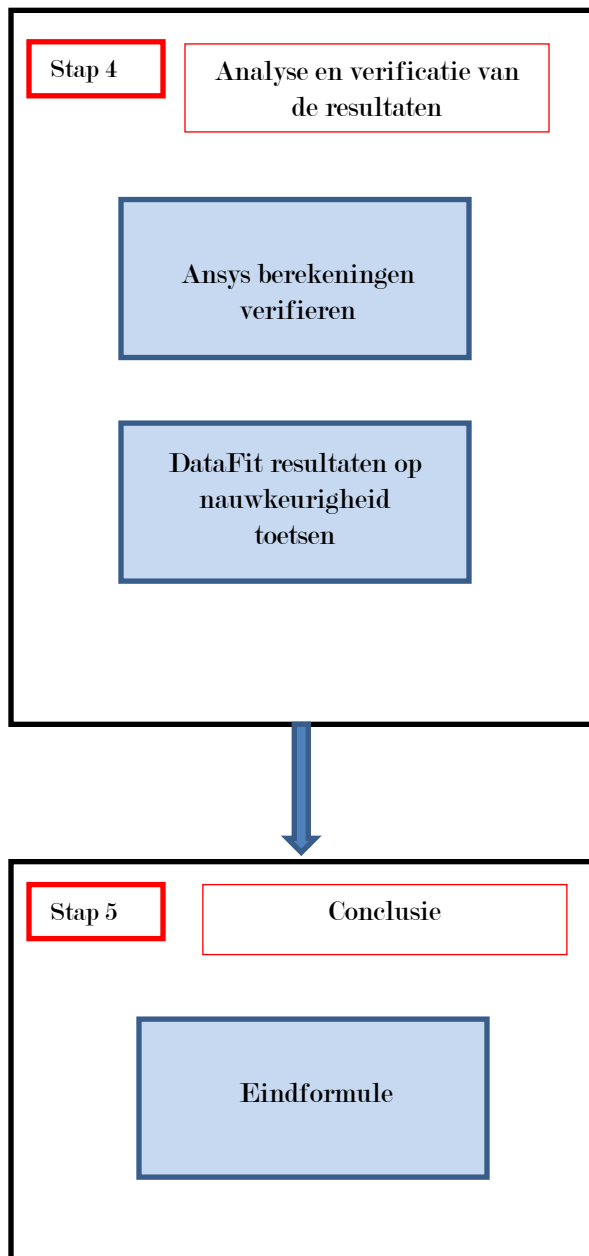
Bovendien wordt hier geanalyseerd hoe nauwkeurig de resultaten en formules zijn die door DataFit worden verkregen.

Stap 5:

De conclusie en de laatste formules worden dan gepresenteerd.







1.6. Planning

Tabel 1

Planning			
Week	To do	Doel	Deadline
1	Werkplan	Voorlopig werkplan schrijven	16 nov
	Bespreking werkplan	Werkplan bespreken met begeleiders en eventueel verbeteren/aanpassen	18 nov /in overleg
	Literatuurstudie/ zoeken naar bestaande manieren om schaal constructies te berekenen	Om de bestaande manieren en formules te vinden waarbij men de schaal constructies kan ontwerpen en berekenen	20 nov
	Ansys, Datafit	Leren werken met Ansys om het bestaande script te kunnen begrijpen en eventueel verbeteringen aanbrengen. Leren werken met Datafit om de resultaten in de latere stadia te kunnen analyseren om uiteindelijk tot een formule te komen.	20 nov
2	Onderzoek het verband tussen w , k_1 , k_2 en $v(\text{nu})$ bij koepels	Om een verband te vinden tussen w , k_1 en k_2 .	25 nov.
3	Invloed van E-modulus en dwarscontractie coëfficiënt op de verplaatsingen onderzoeken	Om de formule te uitbereiden met E-modulus en dwarscontractie coëfficiënt	2 Dec
4	Rapport / formule afronden	Rapport schrijven over koepels	
5	Tussen rapport schrijven/ afronden	Een tussen rapport schrijven om de voortgang van het project aan de begeleiders te kunnen presenteren	11 Dec
	Tussen presentatie/ tussen bespreking	Tussen resultaten bespreken met de begeleiders zodat er besloten kan worden wat er aangepast/verbeterd/veranderd moet worden.	14 Dec. Om 14:00 Locatie: -
6	schaal constructies met een positief en een negatief kromming/cilinders	De rest van de schaal constructies onderzoeken	
vakantie	Inhaalmogelijkheid	Vooruitwerken aan opdracht	
Vakantie	Inhaalmogelijkheid	Verbeteren / veranderen	
7	Werken aan het eindrapport / presentatie		
8	Deadline rapport		13 Januari
	Presentatie		17 Januari

2. Informatiebronnen

2.1. Boeken

Melaragno, Michele, An introduction to shell structures: the art and science of vaulting, 1991

Zingoni, Alphose , Shell structures in civil and mechanical engineering; theory and closed-form analytical solutions, 1997

Ugural, Ansel C ,Stresses in plates and shells, 1999

Jawad, Maan H , Design of plate and shell structures, 2004

2.2. Internet

ANSYS tutorial, University of Alberta

<http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/index.html>

3. Soorten schaalconstructies en een wiskundige beschrijving van dit soort constructies

Er bestaan verschillende soorten schaal constructies. Cilinders, koepels en zadels worden in dit verslag onderzocht.

Zadel:

Een zadel (of hyperbolische paraboloid) is een constructie waarbij de kromming in een hoofdrichting positief en in de andere hoofd richting negatief is.

Er zijn verschillende manieren om een Zadel wiskundig te beschrijven. Een voorbeeld is als volgt:

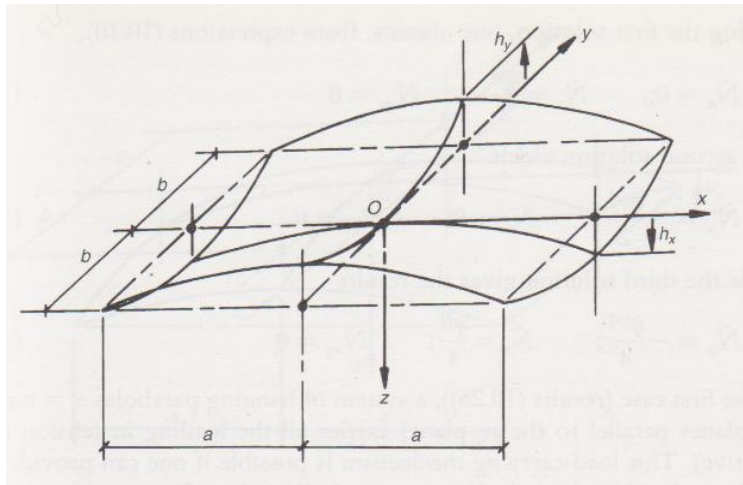


Figure 2: zadels

"a" is de helft van de horizontale afstand van de constructie in de x richting.

"b" is de helft van de horizontale afstand in de y richting.

"hx" is de hoogte verschil tussen de uiteinden en de "x-y" vlak in de x richting.

"hy" idem voor hx alleen in de y richting.

$$A := \frac{a^2}{hx}; B := \frac{b^2}{hy};$$

$$z := \left(\frac{x^2}{A} \right) - \left(\frac{y^2}{B} \right);$$

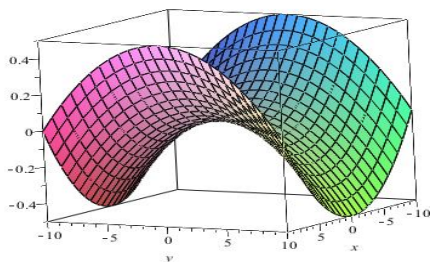


Figure 3: Zadels in maple

Koepel:

Bij koepels zijn de krommingen in beide hoofdrichtingen positief (of negatief).

Zoals zadels geldt hier ook:

$$A := \frac{a^2}{h_x}; B := \frac{b^2}{h_y};$$

wat er verandert is:

$$z := \left(\frac{x^2}{A} \right) + \left(\frac{y^2}{B} \right);$$

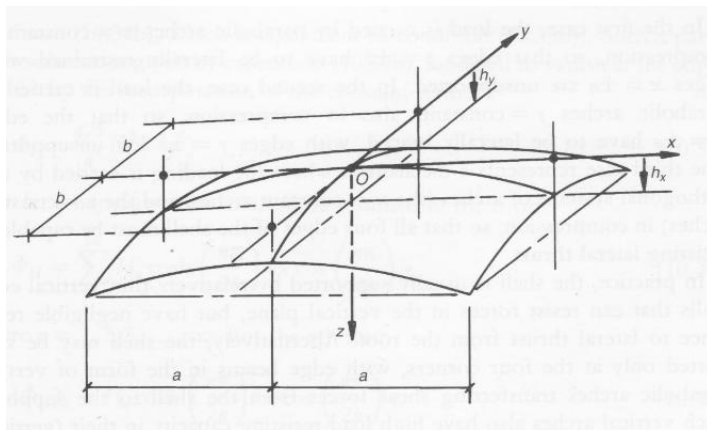


Figure 4: koepel

4. ANSYS script verifiëren en optimaliseren

Voordat het onderzoek wordt gestart, moet in eerste instantie gekeken worden of de ANSYS script (programma) überhaupt de juiste en betrouwbare waardes gaat geven. Het ANSYS programma moet dus eerst geijkt en geverifieerd worden.¹

Helaas zijn er tot nu toe geen formules voor koepels en andere schaalconstructies die een verband beschrijven tussen de verplaatsingen en krommingen en andere variabelen. Echter, er bestaat al een differentiaal vergelijking voor een plat vlak (dus met $k_1=0$ en $k_2=0$). De oplossing van de differentiaal Vergelijking is hieronder aangegeven.²

$$\hat{w} = \frac{P}{16\pi D} \left(g^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{d^2}{16} \left(\frac{7+3\nu}{1+\nu} + 4 \ln \frac{2g}{d} \right) \right) \quad (4.1)$$

Hiervan kan gebruikt worden gemaakt om het ANSYS-programma te controleren. Als beide krommingen in het ANSYS-script gelijk aan nul gekozen worden ($k_1 = 0$ en $k_2 = 0$), dan moet de uitkomst van ANSYS en de differentiaal vergelijking goed overeen komen. Dus als alle andere variabelen zowel bij ANSYS script als bij differentiaal vergelijking hetzelfde zouden zijn, moet de oplossing van de differentiaal vergelijking en de oplossing die ANSYS geeft overeen komen.

Deze methode is verder gebruikt om het ANSYS script te optimaliseren en de juiste elementgroottes te kiezen bij ANSYS. De conclusie is dat de volgende waardes de optimale waardes zijn voor ANSYS bij een vaste "g" van 1000 mm.

$h_1 = 0.1$	Midden element grootte [mm]
$h_n = 30$	Rand element grootte [mm]

De uitkomsten van ANSYS en differentiaal vergelijking bij $k_1=0$ en $k_2 = 0$ komen nu exact overeen. Er kan nu geconcludeerd worden dat de uitkomsten van ANSYS verder goed zijn.

Als de waarde van "g" kleiner gekozen wordt dan $g=1000$, dan moet h_1 en h_n kleiner gekozen worden om een nauwkeurige oplossing krijgen. De waarde die gekozen wordt voor h_1 en h_n bepaalt hoe fijn de mesh wordt bij ANSYS. Over het algemeen geldt: hoe fijner de mesh, hoe nauwkeuriger de oplossingen worden die ANSYS geeft.³

¹ Het ANSYS script is opgenomen in bijlage 1.

² Differentiaal vergelijking voor vlakke platen is opgenomen in bijlage 2.

³ korte samenvatting van optimalisatie van ANSYS Script is te zien in bijlage 3.

5. Koepels

In dit gedeelte van het verslag worden koepels onderzocht. Koepels zijn constructies waarbij beide krommingen ongelijk aan nul zijn en beide positief of negatief zijn. In het geval dat de krommingen van de koepel beide negatief zijn, staat de constructie als het ware op zijn kop. Dat geval wordt dus hier verder niet meer onderzocht omdat dat equivalent is aan een constructie met twee positieve krommingen.

Voornamelijk in de renaissance zijn heel veel koepels in belangrijke gebouwen toegepast. In figuur 1 is een kerk in Rome afgebeeld.



Figure 5 : kerk in Rome

Koepels worden tegenwoordig nog steeds heel vaak toegepast. Ook in moderne constructies van kernreactors worden koepels toegepast.



Figure 6: Reactor Institute Delft

De koepelconstructies in ANSYS worden eerst gemaakt met een vaste grondstraal $g = 1000 \text{ mm}$.⁴

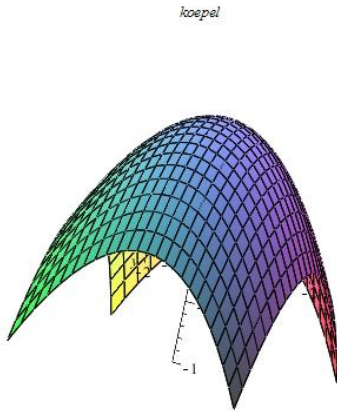


Figure 7: koepel in Maple

De krommingen (k_1 en k_2) worden onderzocht vanaf een ondergrens ($1/2000$) tot een bovengrens ($1/100$).

$$\frac{1}{2000} \leq k_1 \text{ en } k_2 \leq \frac{1}{100}$$

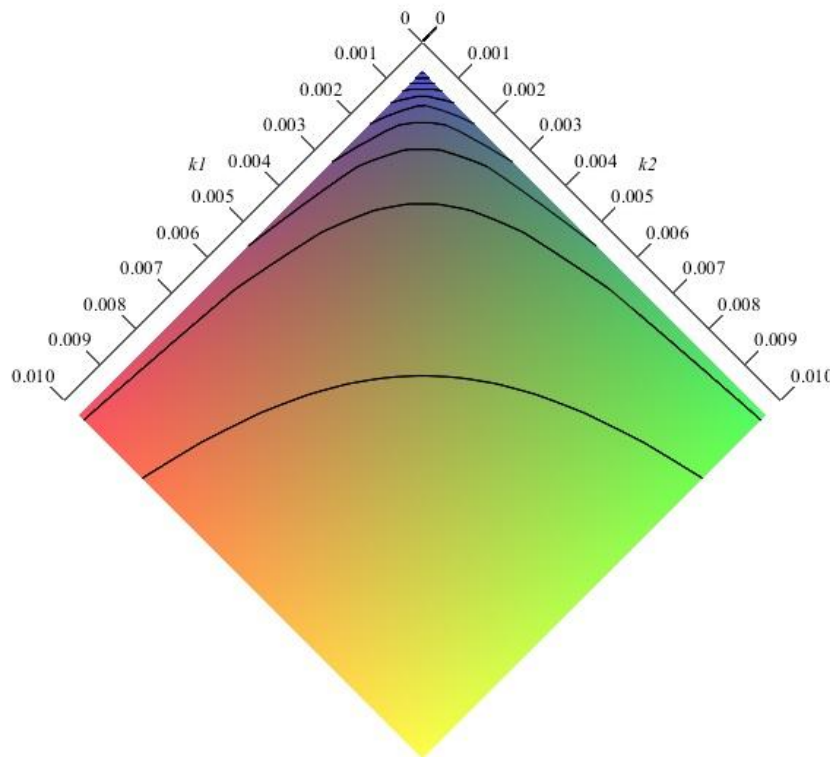


Figure 8: Onderzoeks gebied bij Koepels

⁴ in bijlage 4 wordt uitgelegd waarom er in de eerste instantie voor $g = 1000$ is gekozen.

5.1. Koepels in ANSYS

Om datapunten te genereren is de eindige elementen programma ANSYS gebruikt. In de afbeeldingen hieronder is te zien hoe de constructies in ANSYS er uitzien.

$k_1 = 0.0005$ $k_2 = 0.0005$

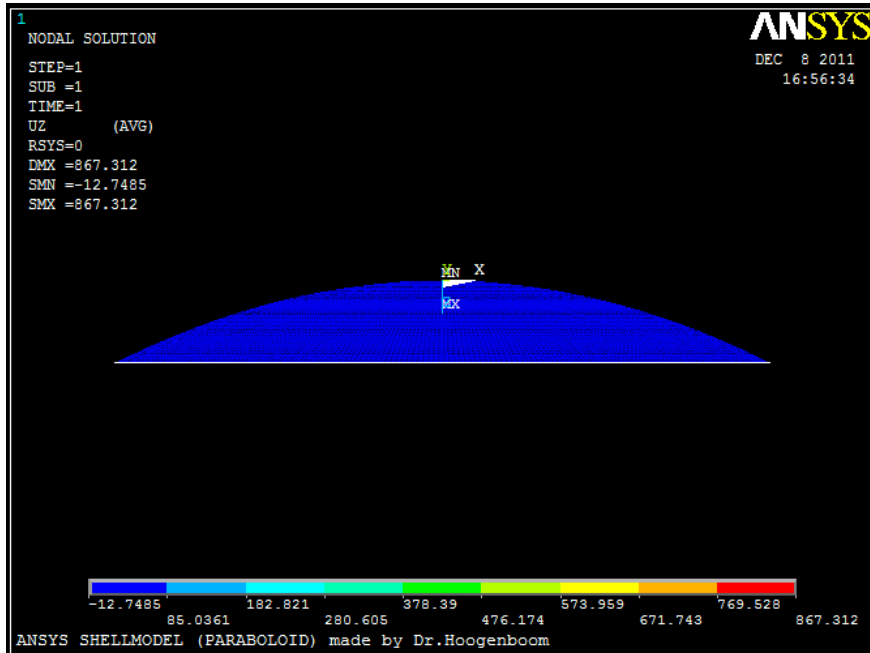


Figure 9: koepel met gelijke (kleine) krommingen van (1/2000) [1/mm]

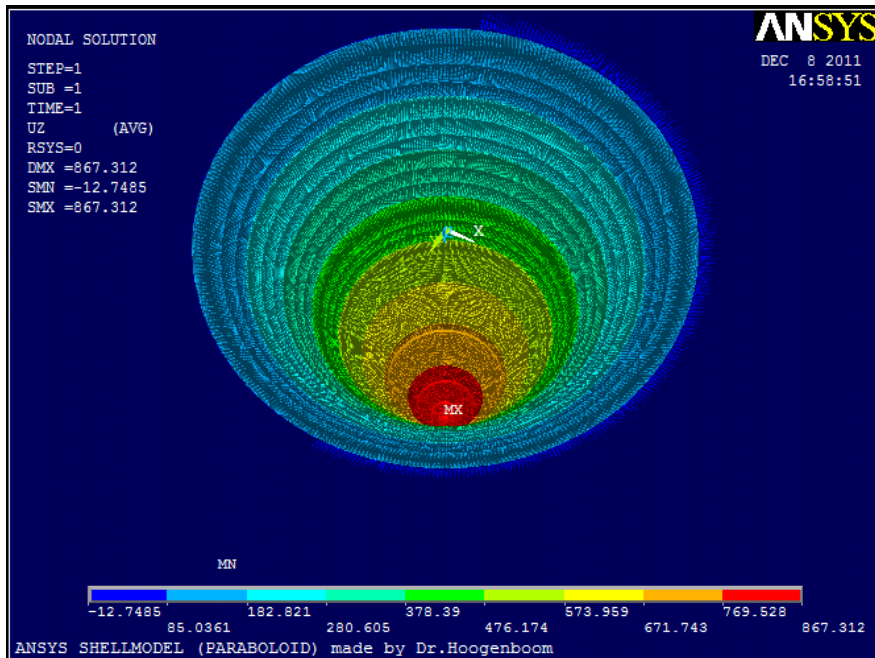


Figure 10: Het gebied net onder de puntlast (bovenaanzicht)

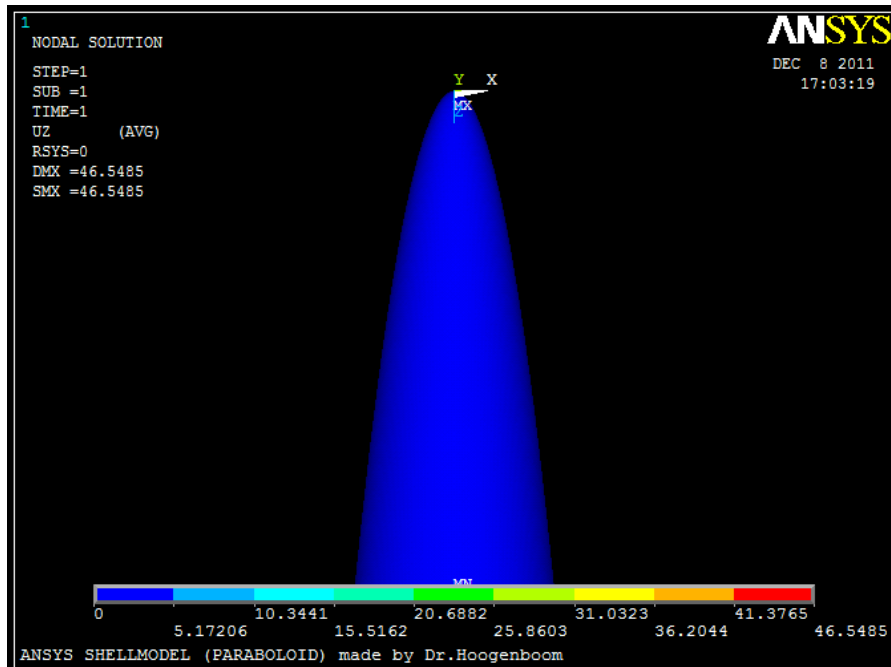
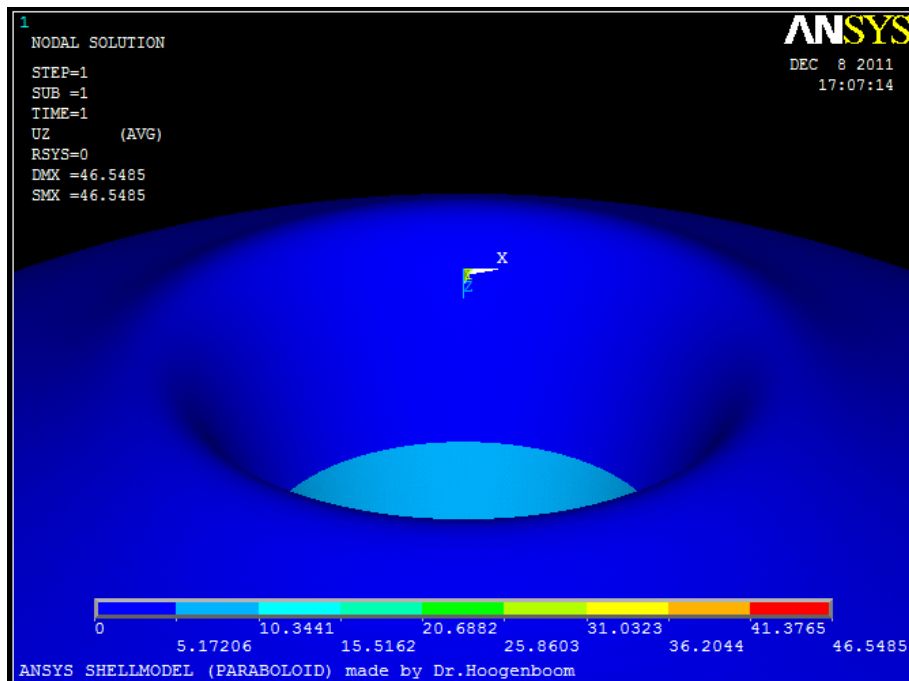
$k_1 = 0.01$ $k_2 = 0.01$ Figure 11: Relatief grote krommingen (1/100) [1/mm] bij $g=1000$ 

Figure 12: Boven aanzicht

$$k_1 = 0.0005 \quad k_2 = 0.01$$

Hieronder wordt een voorbeeld van een combinatie van krommingen met verschillende waarden afgebeeld. De kromming in de ene richting is erg groot (1/100) en in de andere richting erg klein (1/2000).

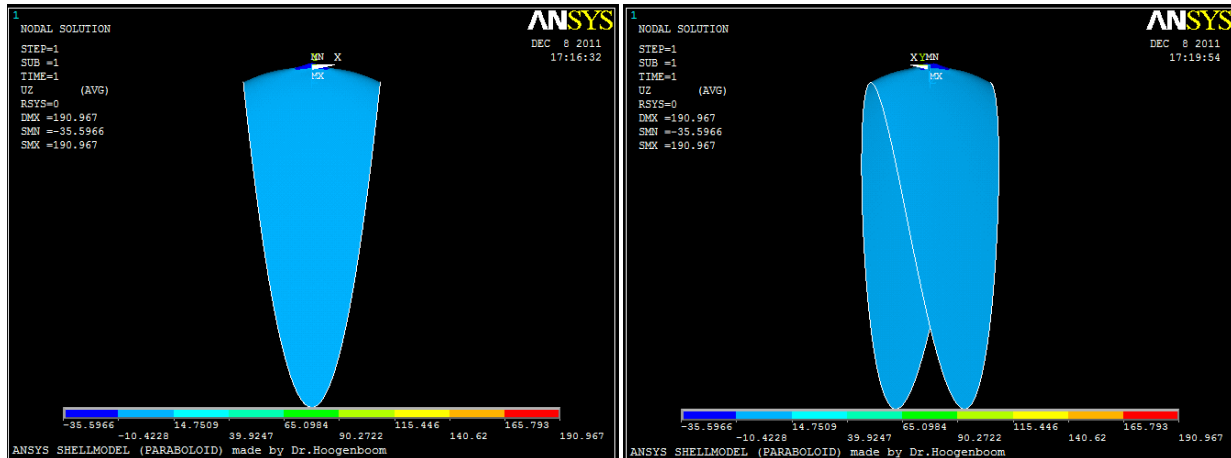


Figure 13: zijaanzicht

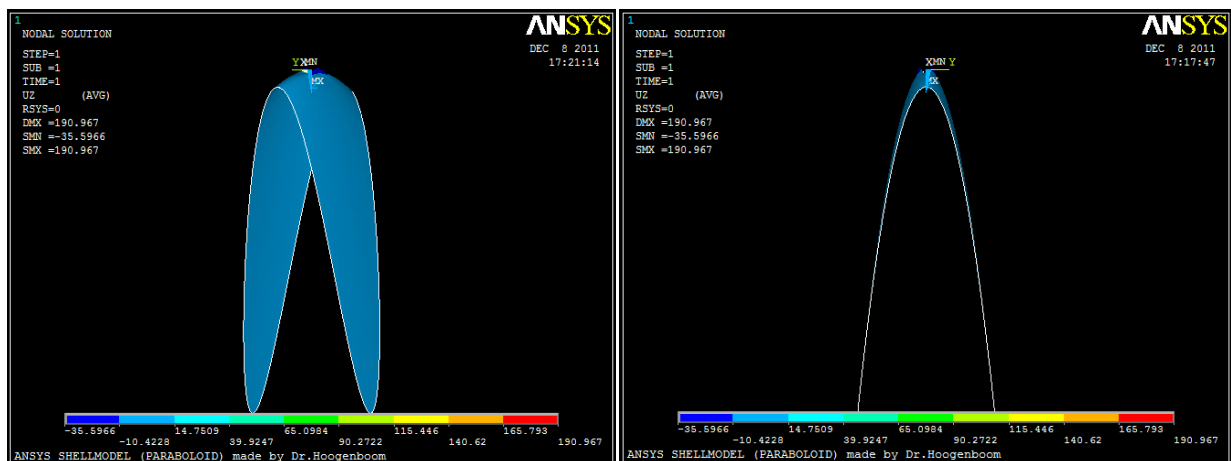


Figure 14: zijaanzicht

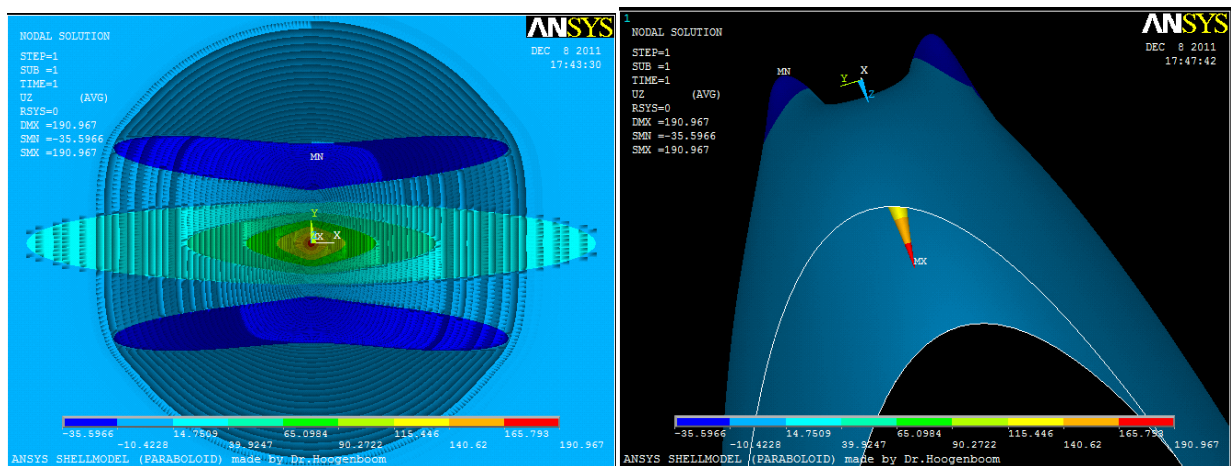


Figure 15 links: bovenaanzicht

rechts: zij/onderaanzicht

5.2. Spanningen bij Koepels

In dit laatste gedeelte wordt nog eens gekeken naar de spanningen bij Koepels. Hiervoor zijn de volgende krommingen en gegevens gebruikt in ANSYS:

$$k_1 = k_2 = 0.005 \quad t = 2 \quad g = 500$$

Alleen de bovenaanzichten worden hier afgebeeld.

In het plaatje hieronder is de buiging onder de puntlast te zien. Bij een koepel dempt de vervorming snel uit en de buiging blijft beperkt tot de beurt van de puntlast.

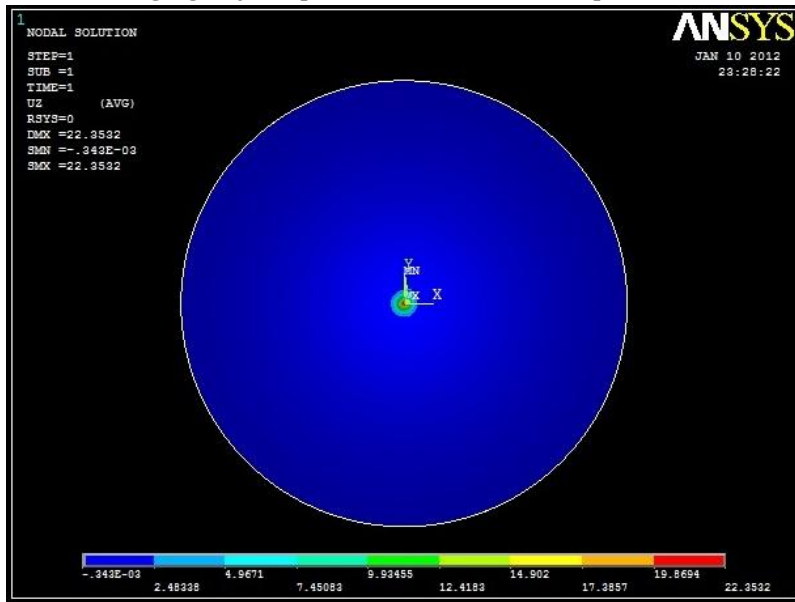


Figure 16: buiging onder de puntlast

Hieronder staan de x, y en z-component van de spanning.

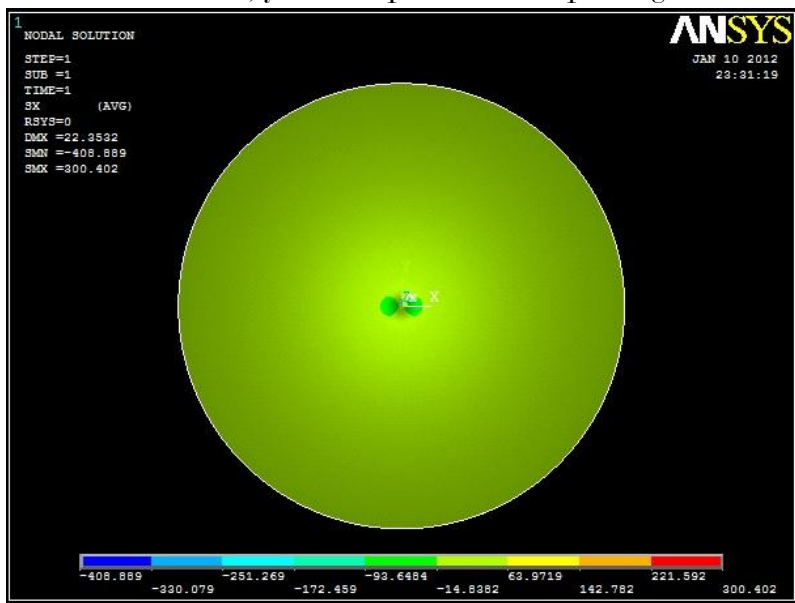


Figure 17: x-component van de spanning (SX)

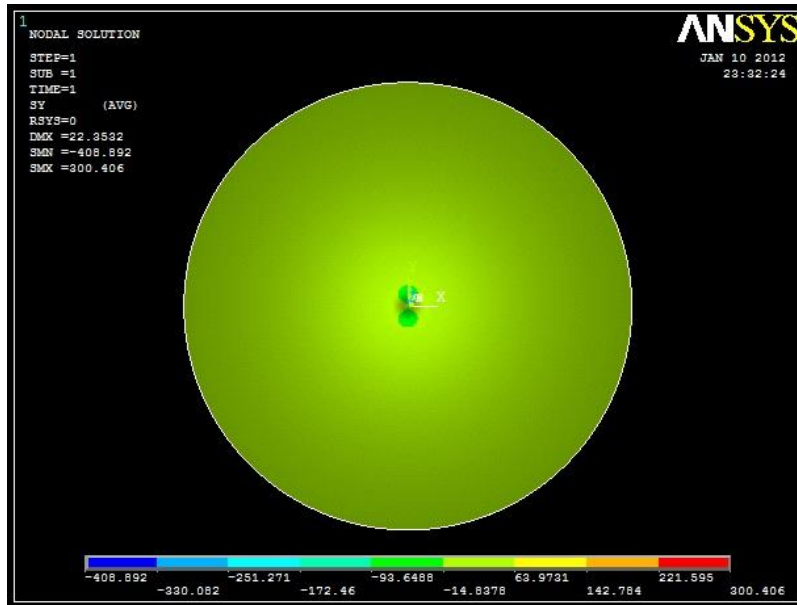


Figure 18: y-component van de spanning (SY)

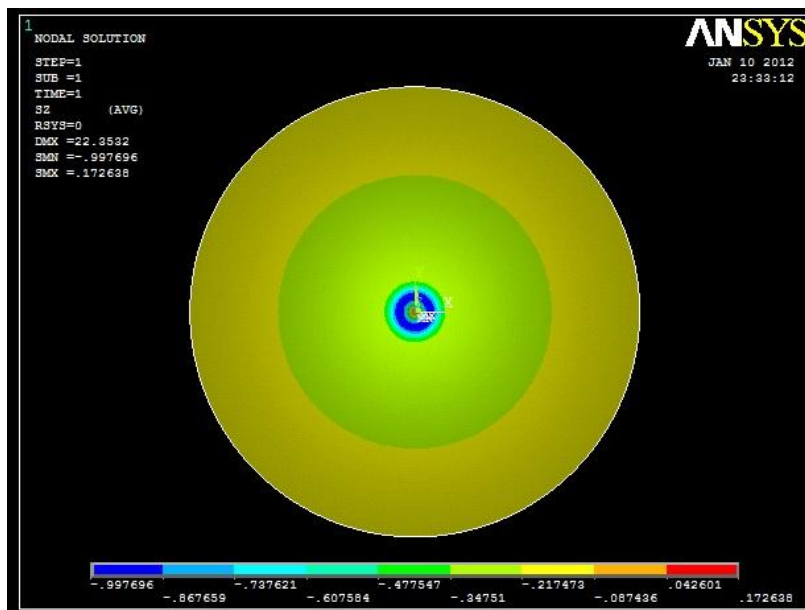


Figure 19: z-component van de Spanning (SZ)

Als laatste worden de schuifspanningen opgenomen:

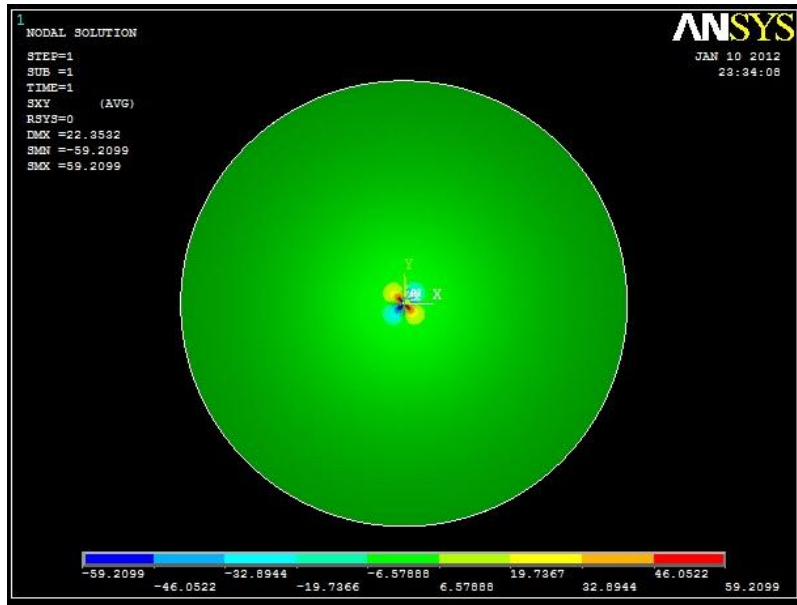


Figure 20: sigma xy (SXY)

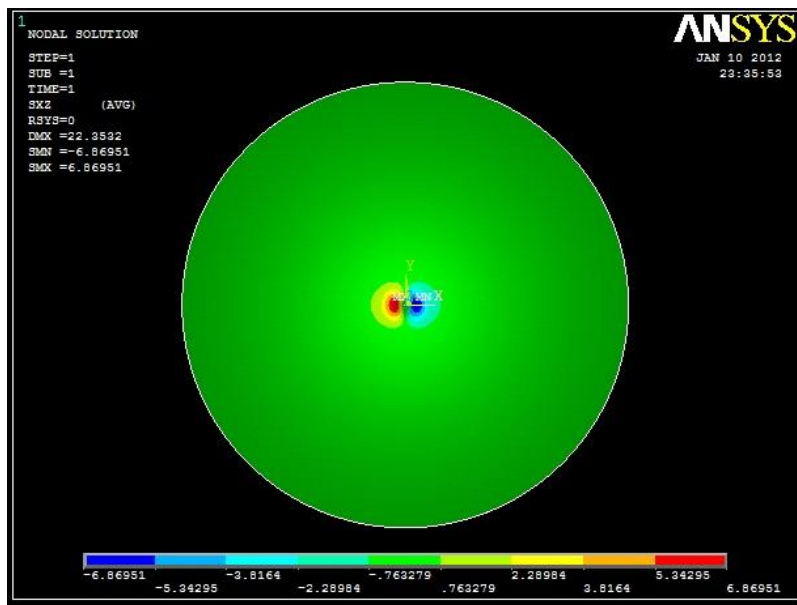


Figure 21: sigma xz (SXZ)

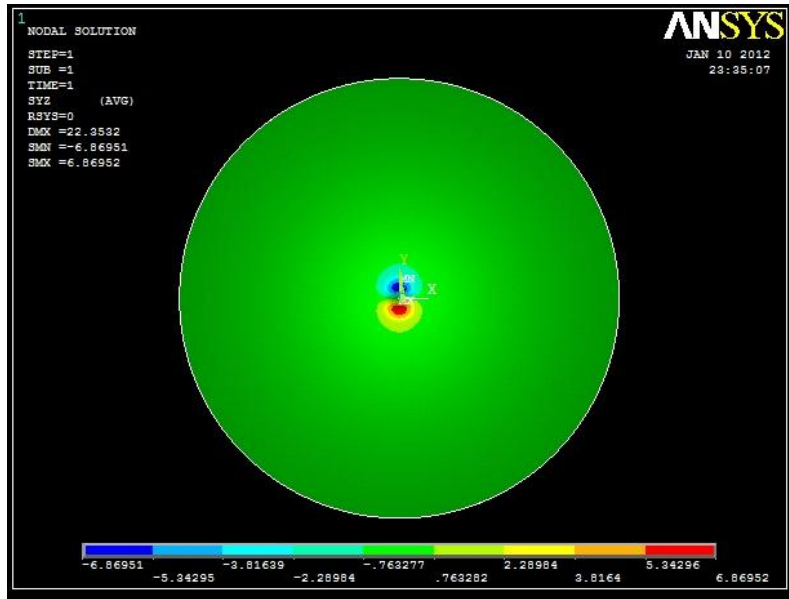


Figure 22: sigma.yz (SYZ)

Duidelijk is te zien dat de spanningen snel uitdempen en de extreme spanningen optreden in het middelpunt van de koepel waar de belasting aangrijpt.

5.3. Koepel formule zonder dwarscontractie

De verplaatsing onder de puntlast bij een koepel (maar ook andere schaalconstructies) hangt af van variabelen zoals: P, E, t, k1, k2, v.

Omdat hier een linear elastisch model wordt gebruikt, is de buiging onder de puntlast proportioneel aan kracht P gedeeld door elasticiteitsmodulus E.

$$w \approx \frac{P}{E} \quad (5.1)$$

Deze verband is onderzocht door eerst de puntlast twee keer groter maken in ANSYS en kijken of de verplaatsing ook inderdaad twee keer groter wordt. Deze is voor verschillende waarden van P gedaan en daaruit kan geconcludeerd worden dat buiging inderdaad recht evenredig is met de waarde van de puntlast. Deze aanpak is ook gebruikt om te kijken of de buiging omgekeerd evenredig is met de Elasticiteitsmodulus. Uit onderzoek is gebleken dat een twee keer grotere elasticiteitsmodulus, twee keer kleinere verplaatsing geeft. De invloed van de eerste twee parameters zijn hierbij dus vast gelegd.

Er moet nog de invloed van 4 andere parameters onderzocht worden. De vier overgebleven parameters zijn: t, k1, k2 en v (nu).

Omdat de poisson ratio een kleine invloed heeft, wordt de poisson ratio in de eerste instantie weg gehaald uit de formule door v=0 te kiezen. (Dus in ANSYS wordt v=0 gebruikt). Later zal de invloed van de dwarscontractiecoefficient onderzocht worden.

Verder is gekozen om de kracht te laten werken op een oppervlakte met een diameter ‘d’ die altijd gelijk wordt gesteld aan de dikte van de schaal constructie. Dus d = t. (Belasting wordt uitgesmeerd op een oppervlakte met diameter ‘d’ en deze diameter wordt dus steeds gelijk gekozen aan de dikte van de constructie.)

Er blijven nu drie parameters over: t , k_1 en k_2 . Er moet een functie "f" gevonden worden die het volgende verband beschrijft:

$$w = \frac{P}{E} f(t, k_1, k_2). \quad (5.2)$$

De eenheden zijn w [mm], P [N], E [N/mm²], t [mm], k_1 [1/mm], k_2 [1/mm].

De formule moet uiteindelijk fysisch en wiskundig kloppen. Dat betekent dat de dimensies links van de vergelijking (links van het gelijk teken) overeen moeten komen met de dimensies rechts van de vergelijking.

De vergelijking wordt voor het gemak eerst anders geschreven en de linkerzijde en de rechterzijde van de vergelijking wordt vermenigvuldigd met "t":

$$\frac{wEt}{P} = f_w(t, k_1t, k_2t) \quad (5.3)$$

De eenheden zijn nu: $\frac{wEt}{P}$ [-], t [mm], k_1t [-], k_2t [-].

Dit kan niet de juiste vergelijking zijn omdat de linker zijde van de vergelijking dimensieloos is en de rechterzijde (de functie f) nu een dimensie [mm] extra heeft. De juiste functie zal zijn:

$$\frac{wEt}{P} = f_w(k_1t, k_2t). \quad (5.4)$$

Nu zijn beide kanten van de vergelijking dimensieloos [-]. Door de linkerzijde van vergelijking 2 te vermenigvuldigen met "t" en in de rechterzijde k_1 en k_2 te vermenigvuldigen met t , zijn de dimensies links en rechts van de vergelijking gelijk aan elkaar.

Omdat het programma Datafit het beste werkt met maximaal twee afhankelijke variabelen, dan is besloten om de invloed van "t" niet mee te nemen bij het maken van de formule door $t = 1$ te nemen. Voor het gemak wordt in ANSYS voor P en E een waarde 1000 gekozen. (de verhouding P/E is dus 1). Voor de dikte wordt 1 mm aangehouden. Hierdoor gaat vergelijking 4 over in:

$$\frac{w \cdot 1000 \cdot 1}{1000} = f(k_1 \cdot 1, k_2 \cdot 1) \quad (5.5)$$

of wel:

$$w = f(k_1, k_2) \quad (5.6)$$

Dit betekent dat als er in ANSYS steeds een andere waarde voor k_1 en k_2 gekozen wordt terwijl de volgende parameters niet veranderen:

$P = 1000$ [N]
 $E = 1000$ [N/mm²]
 $t = d = 1$ [mm]
 $\nu = 0$

dan kan de functie $f(t, k_1, k_2)$ gevonden worden.

De verplaatsing t.g.v. de puntlast worden onderzocht bij $\frac{1}{2000} \leq k_1$ en $k_2 \leq \frac{1}{30}$.

Ieder keer worden er koepels gegenereerd in ANSYS met verschillende krommingen en de maximale verplaatsingen onder de puntlast opgeschreven.

De krommingen en hun bijbehorende verplaatsingen worden in DataFit gezet. DataFit geeft nu het volgende verband tussen de verplaatsingen en krommingen (bij $P/E = 1$ en $t = 1$).⁵

$$w = \frac{0.4348128}{\sqrt{k_1 \cdot k_2}} \quad (5.7)$$

Deze formule was gevonden bij $t = 1$. Om de invloed van t in de formule te verwerken kan het beste terug gaan naar de originele functie:

$$\frac{w \cdot E \cdot t}{P} := \frac{0.434818}{\sqrt{t \cdot k_1 \cdot t \cdot k_2}} \quad (5.8)$$

Anders schrijven geeft dit de eindformule die een verband beschrijft tussen de verplaatsing (vervorming), k_1 , k_2 , t , P en E .

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{0.434818}{\sqrt{t \cdot k_1 \cdot t \cdot k_2}} \quad (5.9)$$

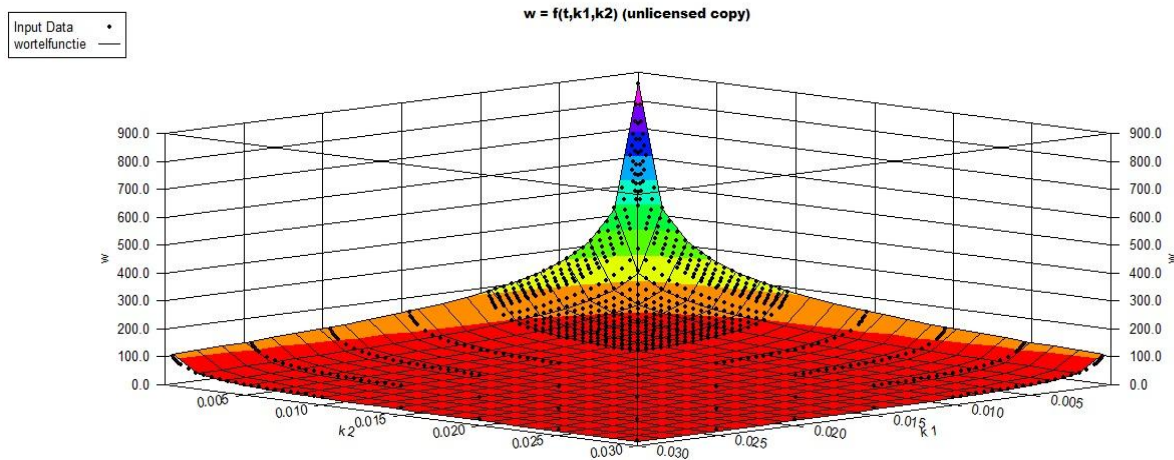


Figure 23: Doorbuiging van koepel voor $P=1000$ [N], $E=1000$ (N/mm²), $t = 1$. De originele datapunten zijn als zwarte stipjes aangegeven in de figuur.

De punten in de afbeeldingen zijn de datapunten die door ANSYS zijn verkregen en ingevuld in DataFit.

⁵ voor de eigenschappen van deze formule wordt verwezen naar bijlage 5

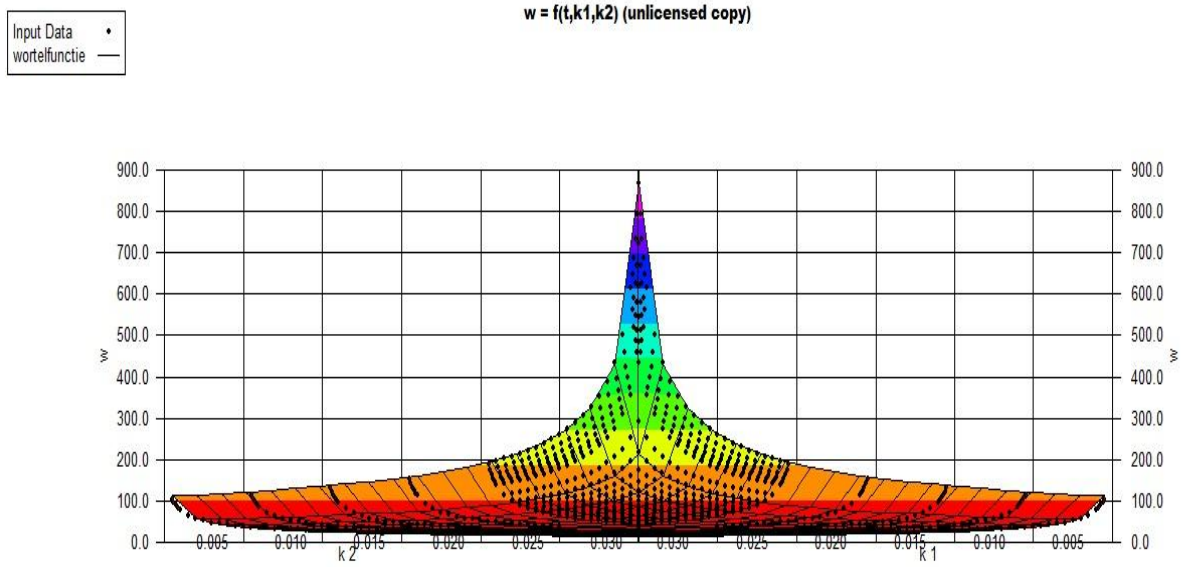


Figure 24: Vooraanzicht

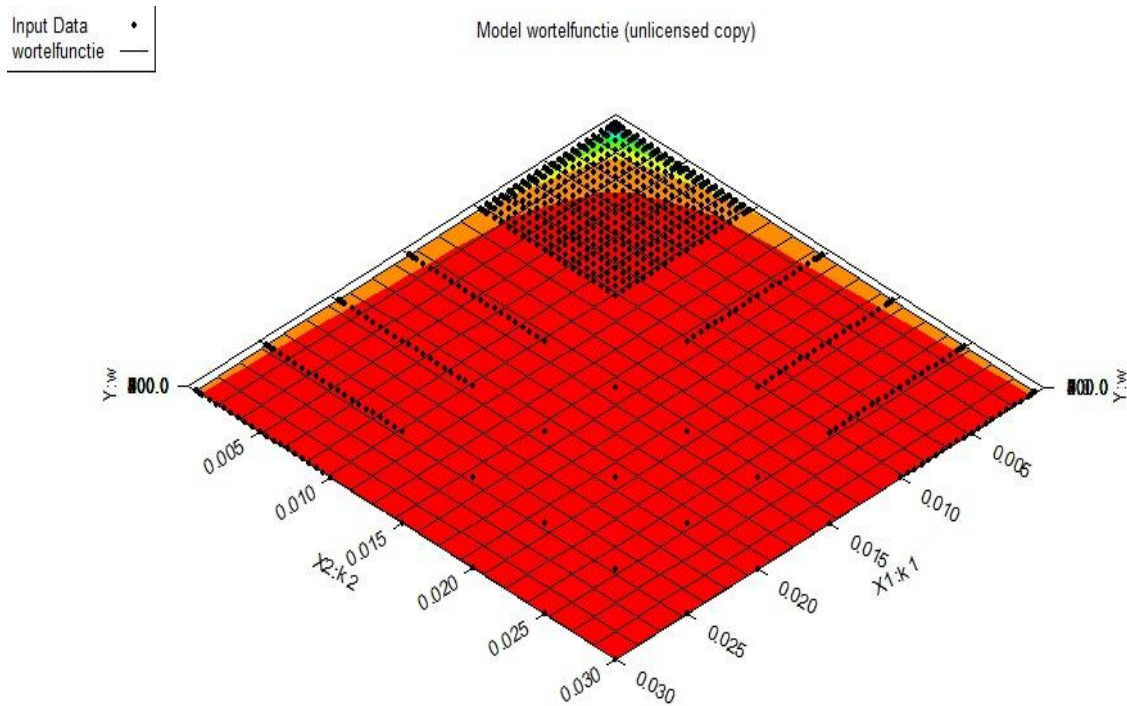


Figure 25: Boveanaanzicht

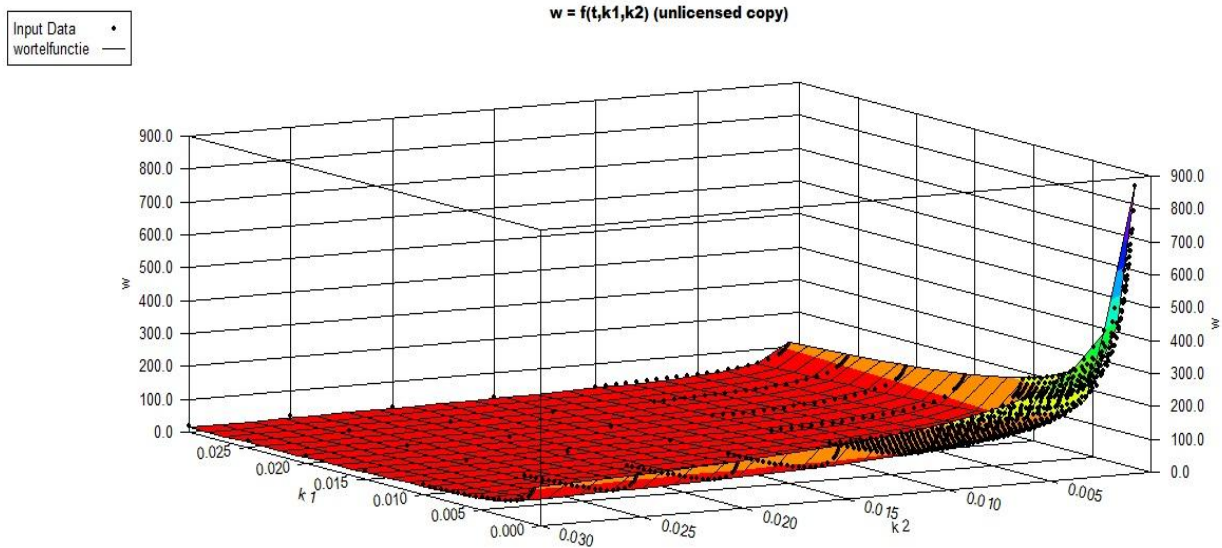


Figure 26: Zijaanzicht

Controle op dimensies bij formule 5.9 geeft:

$$[mm] = \frac{[mm^2]}{[mm]} \cdot \frac{[-]}{\sqrt{[mm^2] \cdot \left[\frac{1}{[mm^2]} \right]}} \quad (5.10)$$

$$[mm] = [mm] \quad \text{Akkoord!}$$

Dus de eindformule zonder dwarscontractie is:⁶

$$w = \frac{P}{E \cdot t^2} \cdot \frac{0.434818}{\sqrt{k1 \cdot k2}} \quad (5.11)$$

5.4. De invloed van de dwarscontractiecoëfficiënt bij koepels

De invloed van de dwarscontractie is wel klein. Daarom was tot nu toe de invloed van de Poisson ratio in de berekeningen verwaarloosd door een waarde van $\nu = 0$ in te voeren in ANSYS. De formule die nu gevonden is beschrijft dus het verband tussen w , t , $k1$, $k2$, E en P bij een dwarscontractie $\nu = 0$.

$$w = f(t, k1, k2, E, P) \quad (5.12)$$

ν was tot nu toe weggelaten.

⁶ het bewijs dat deze formule (bij $g = 1000$) ook goed werkt bij grotere diktes dan een is opgenomen in bijlage 6.

Stel dat er een functie zou bestaan die de invloed van de dwarscontractie in rekening brengt. Dat functie wordt $C(v)$ genoemd. De totale formule inclusief dwarscontractie kan nu als volgt geschreven worden:

$$w \approx C(v) * f(t, k1, k2, E, P) \quad (5.13)$$

De vergelijking van hierboven kan ook anders worden geschreven:

$$\frac{w(ANSYS)}{f(t, k1, k2, E, P)} = C(v) \quad (5.14)$$

Dus als de variabelen t , $k1$, $k2$, E en P zowel bij ANSYS als bij de formule constant gehouden worden, terwijl de waarde van Poisson's ratio (in ANSYS) gelijk aan nul wordt gesteld, zal de uitkomst van de vergelijking van hierboven 1 moeten zijn. (Tenminste in het geval dat de formule erg nauwkeurig is.)

Als een andere waarde voor nu wordt ingevuld in de ANSYS, zal de uitkomst van de verhouding van hierboven niet meer 1 zijn maar kleiner dan 1. Deze verhouding zou dus een indicatie geven voor de waarde van de poisson ratio.

Helaas omdat de formule niet heel erg nauwkeurig is, en omdat de constanten in de formule soms een klein beetje zijn afgerond, schommelt de waarde een beetje tussen de werkelijke oplossing en is het gebruik van de formule niet echt voor de hand liggend.

Er is echter een andere oplossing hiervoor. De variabelen t , $k1$, $k2$, E en P worden in ANSYS weer als constante waarde gekozen. De bijbehorende waarde van de zakking net onder de puntlast wordt dan berekend met behulp van de ANSYS, eerst met $\nu=0$. Dit wordt $w(ANSYS\ 0)$ genoemd en is als het ware de waarde die de formule ook hoort te geven. (in de formule was $\nu=0$ gekozen in de vorige paragraaf)

De volgende stap is dan om alleen de poisson ratio te laten veranderen van 0 tot 0.5 terwijl alle andere waardes constant blijven. Dit wordt $w(ANSYS)$ genoemd in de tabellen.

De verhouding tussen de $w(ANSYS)/w(ANSYS\ 0) = C(v)$ wordt steeds berekend bij verschillende waardes van de "nu". ($\nu=0$ tot $\nu=0.49$)⁷

Er valt nu iets vreemds op. Zoals hierboven is uitgelegd, als $\nu=0$ is, moet de verhouding van $w(ANSYS)/w(ANSYS\ 0)$ gelijk aan 1 zijn. Vanaf de krommingen 0.0005 tot 0.002 gebeurt dat werkelijk ook. Bij krommingen groter dan 0.002 (dus 0.002 tot 0.01) gebeurt er iets opmerkelijks. Bij een grotere dwarscontractie wordt de verplaatsing onder de puntlast eerst groter ondanks het feit dat de dwarscontractie steeds groter gekozen wordt en dan wordt het weer kleiner. Dat zien we in de tabellen omdat de verhouding $w(ANSYS)/w(ANSYS\ 0)$ eerst groter dan 1 wordt maar daarna weer kleiner wordt. Dit zou ook kunnen betekenen dat er een verband bestaat tussen de krommingen en de Poisson's ratio. Echter, dit verband is erg klein. Bovendien als men dit verband ook in de formule zou opnemen, zou dat leiden tot een hele ingewikkelde formule. Maar vooral omdat de invloed erg klein is, wordt dat hier verder verwaarloosd.

$$C(v) = 1 - 0.5 * v^2 \quad (5.15)$$

De formule inclusief de dwarscontractie wordt dan:

⁷ De datapunten voor de dwarscontractie zijn opgenomen in bijlage 7.

$$w := \frac{P}{E \cdot t^2} \cdot \frac{0.434818}{\sqrt{k_1 \cdot k_2}} \cdot (1 - 0.5 \cdot v^2) \quad (5.16)$$

De afwijkingen van de uitkomsten van deze formule in vergelijking met wat ANSYS geeft bij verschillende waarden van t en k zijn opgenomen in bijlage 6.

5.5. Geldigheid en nauwkeurigheid van de formule

De koepelformule uit de vorige paragraaf is onderzocht bij variabele waarden van E, P, K1, K2, t en v om vast te stellen hoe nauwkeurig deze formule is en wat de maximale fouten zijn in vergelijking met de waarde die ANSYS geeft.

In de eerste instantie was onderzoek gedaan voor $(1/2000) \leq k \leq (1/30)$ voor $g=1000$, (waarbij voor de maximaal toe te passen dikte bij een bepaalde kromming ook moet gelden dat: $(1/2000) \leq t \cdot k \leq (1/30)$). Uit onderzoek is gebleken dat de formule in dit geval een fout kan geven die kan oplopen tot 30 %. Het is duidelijk te zien dat een k groter dan $(1/100)$ niet meer goed beschreven kan worden met deze formule. Daarom moet de bovengrens aangepast worden. Een betere bovengrens is:

$$(1/2000) \leq k \leq (1/100)$$

Met deze aanpassing is de fout begrensd tot maximaal 8 %.

Het is verder te zien dat als de combinatie $t \cdot k$ dicht bij de ondergrens is (in de omgeving van $(1/2000)$), dan zijn de fouten erg klein.

Als $t \cdot k$ in de buurt van de bovengrens $(1/100)$ is, dan zijn de fouten het grootst (8%).

Om deze datapunten te genereren was gebruik gemaakt van een vaste waarde voor g ($g=1000$ mm). Dat betekent dat bij het toepassen van een grote kromming (bijv. $1/100$), een lange koepel gemaakt wordt.

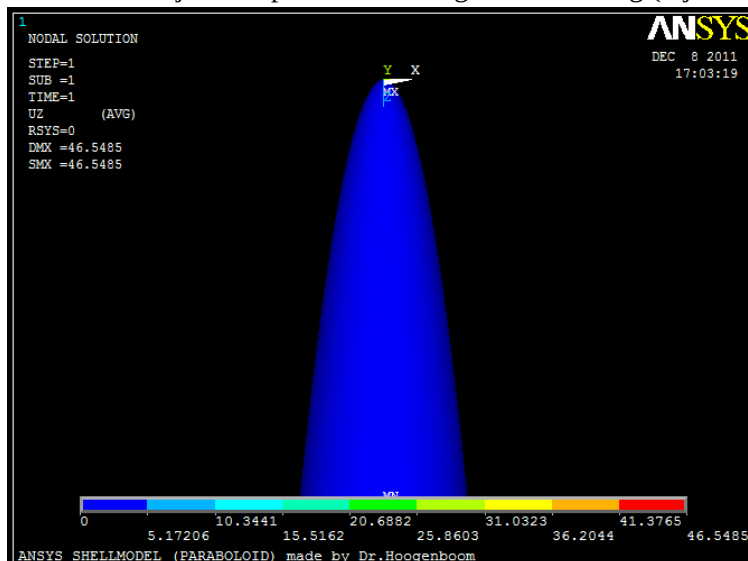


Figure 27: langgerekte koepel

Bij een lange koepel wordt de gehele koepel ingedrukt door de membraankrachten. Dit kan dus ook een extra bijdrage geven aan de verplaatsingen die door ANSYS wordt gegeven. Deze probleem kan worden

voorkomen om "g" kleiner te nemen. Dit betekent dus dat "g" niet te groot gekozen mag worden bij een bepaalde kromming.

Ook een kleine g schijnt niet goed te zijn. Een kleine g bij een bepaalde kromming zorgt ervoor dat de constructie "platter" wordt. (dus dat de constructie meer op een plat vlak lijkt). Daarbij is de invloed van buiging erg groot en dat zorgt ook weer voor grote fouten in de uitkomsten.

Stelling:

"g" kan niet helemaal onafhankelijk van de krommingen worden gekozen. De koepel mag niet te hoog worden, maar zeker ook niet te plat, anders zijn de fouten tussen de verplaatsingen bij ANSYS en de waarde die de formule geeft erg groot.

Om deze stelling te bewijzen, wordt eerst terug gegaan naar het ANSYS programma. Het ANSYS script maakt ieder keer een parabool bij een bepaalde kromming.

Formule van de parabool in twee dimensie (dus alleen in een hoofdrichting) is:

$$y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad (5.17)$$

"y" kan gezien worden als de hoogte van de parabool bij ieder punt. Deze formule kan nu als volgt worden geschreven:

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad (5.18)$$

Voor $k=1/2000$ en variabele "g" wordt de parabool getekend in figuur hieronder.

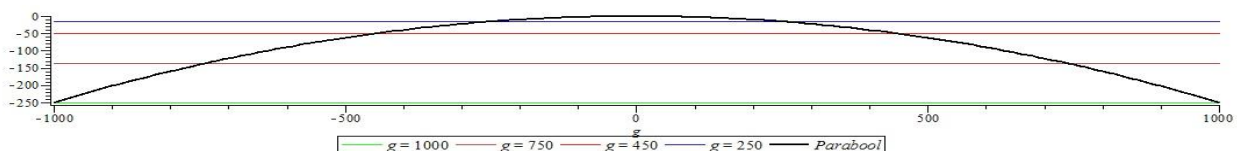


Figure 28: parabool met een kleine kromming 1/2000

Dwars door de grafiek heen zijn een aantal rechte lijnen getekend die de parabool doorsnijden in twee punten. Deze rechte lijnen stellen een bepaalde waarde van "g" voor. Bijvoorbeeld $g=1000$ betekent dat de straal vanaf de nul punt (middelpunt van de koepel) tot aan de rand van de koepel 1000 mm is.

Als $g=1000$ (zie de groene lijn aan de onderkant van de grafiek), dan is de parabool met $k=1/2000$ niet te plat, maar ook niet te lang. Deze parabool wordt door de formule goed berekend.

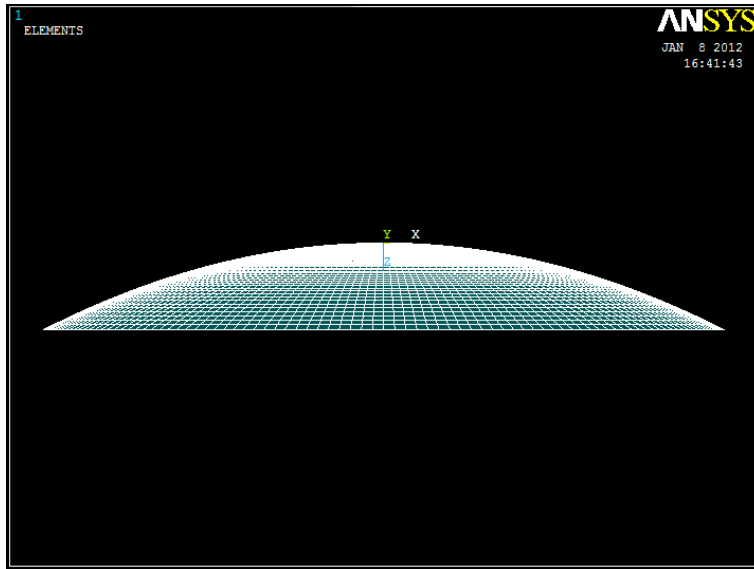


Figure 29: koepel met $k_1 = k_2 = 1/2000$ en $g = 1000$

Als de grondstraal kleiner wordt, bijvoorbeeld $g = 750$ of $g = 450$, dan wordt de parabool steeds platter. Als de grondstraal $g = 250$ (de blauwe lijn helemaal bovenaan de grafiek), dan is de parabool heel erg plat. De koepel wordt als het ware in de top afgezaagd. Formule geeft in dat geval geen goed schatting meer van de vervormingen van de koepel. De oplossingen zijn verstoord omdat de parabool in dat geval veel te plat is.

Inzoomen op de grafiek bij $g = 250$ bewijst dat de parabool erg plat wordt. Het toepassen van een grote dikte in dit geval kan afwijkingen van zelfs 300% veroorzaken in vergelijking met de waarde die ANSYS geeft.

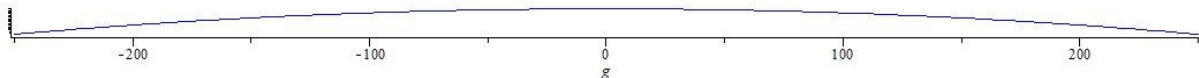


Figure 30: $k_1 = k_2 = 1/2000$ en $g = 250$

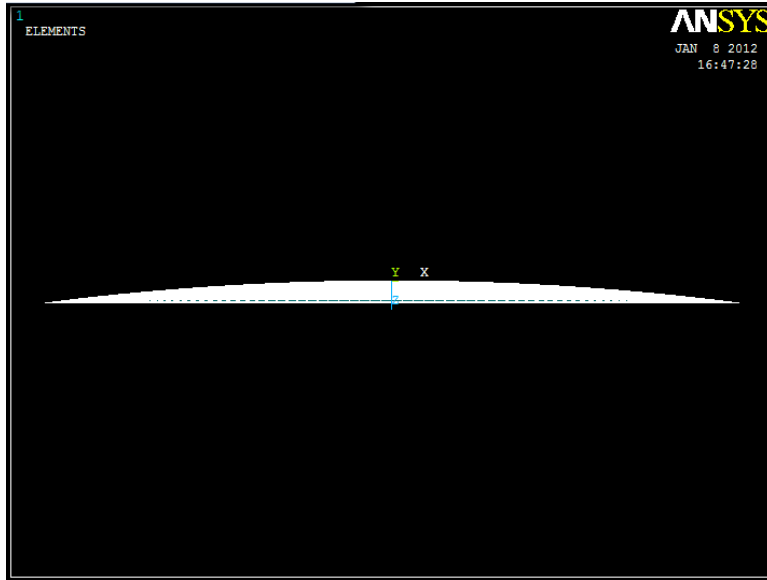


Figure 31: ANSYS model waarbij $k_1 = k_2 = 1/2000$, $g = 250$

Dezelfde berekeningen kunnen opnieuw worden gedaan maar deze keer met $k=1/100$

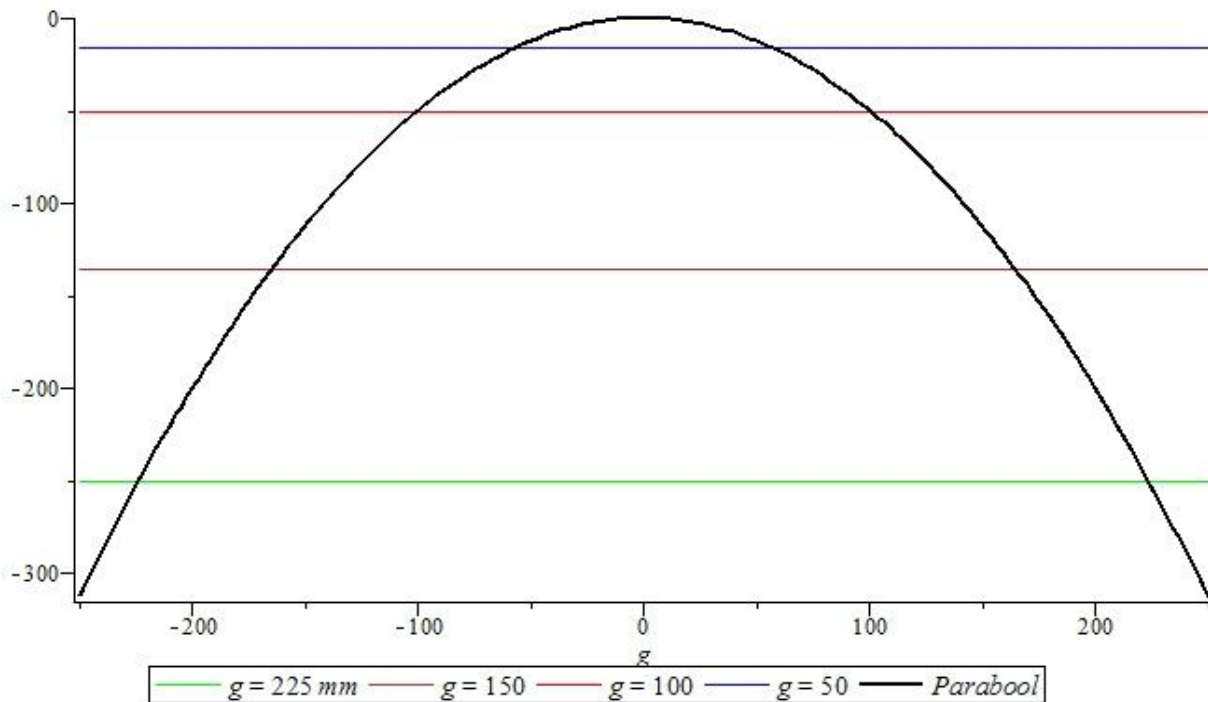


Figure 32: koepel met $k= 1/100$ en verschillende waarden van g (rechte lijnen)

Blijkbaar kan " g " ook niet vrij gekozen worden bij een relatief grote kromming ($1/100$). Zelfs hier is een minimale waarde van " g " aan te wijzen waarbij de parabool te plat wordt. In figuur hieronder is ingezoomd op $g = 50$.

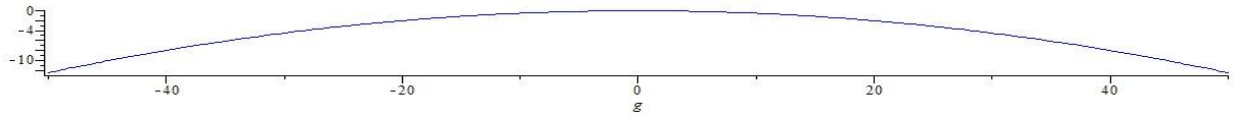


Figure 33: parabool bij $k = 1/100$ en $g = 50$

De parabool is bij $g=50$ erg plat.

Een grote grondstraal is ook niet gunstig bij $k=1/100$. In dat geval wordt er een lange koepel gemaakt.

De doorbuiging onder de puntlast bestaat nu uit twee componenten. Door de membraan krachten zal de (lange) koepel in zijn geheel een stukje worden ingedrukt. Hierdoor komen de uitkomsten van de formule en wat ANSYS geeft niet helemaal goed overeen.

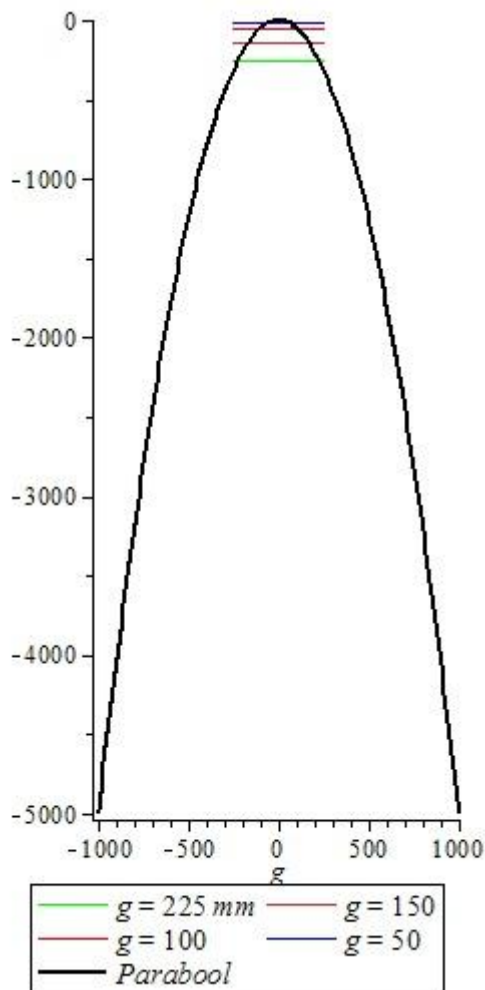


Figure 34: $k = 1/100$ en $g = 1000$

Uit de bovenstaande stellingen is af te leiden dat de koepel niet te plat maar ook niet te lang mag worden. Deze beperking kan het beste in een extra eis verwerkt worden. Die eis moet er voorzorgen dat koepels niet te plat en ook niet te lang worden. Omdat hier dunwandige schaalconstructies worden onderzocht, is de invloed van dikte niet echt relevant (dikte is erg klein in vergelijking met de waarde van de grondstraal

of hoogte van de parabool en daarom verwaarloosbaar). Daarom is geprobeerd om een verband te vinden tussen "h" (de hoogte van de koepel) en de grondstraal.

Om te bewijzen dat de formule ook in dit geval goed functioneert, wordt steeds een variabele g gekozen die afhankelijk van de kromming wordt bijgesteld. (waarbij de kleinste kromming maatgevend is).

Deze wordt gedaan voor $g=(1/k_{\min})$, $g=(1/2k_{\min})$, $g=(1/4k_{\min})$, $g=(2/k_{\min})$ en $g=(4/k_{\min})$. De waarnemingen zijn hieronder kort samengevat.

$$g=(1/k_{\min})^8$$

Hier wordt eerst $g=1/k$ gekozen. De parabool formule was:

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad (5.19)$$

Dit betekent dat ongeacht de kromming die er steeds gekozen wordt in de formule, de hoogte altijd de helft van de "g" is.

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad \text{en} \quad g = \frac{1}{k} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2 \cdot k} \quad (5.20)$$

De hoogte is dan steeds bij ieder waarde van de kromming, de helft van de grondstraal. (bij krommingen in twee hoofdrichtingen is de kleinste kromming maatgevend.)

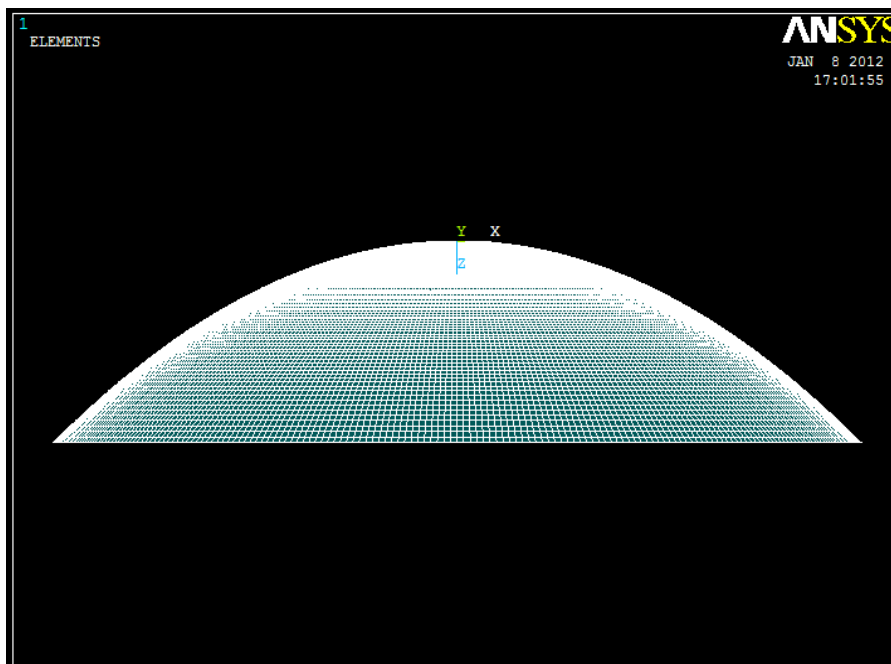


Figure 35: $k_1=k_2=5/1000$ en $g=(1/k_{\min})$

Hierbij valt als eerste op dat de fouten bij grote krommingen ($1/100$), stuk kleiner zijn dan voorheen (dan wanneer een vaste waarde voor g was gebruikt, $g = 1000$). De fouten variëren nu van -0.5% tot +3.7%.

Tot nu toe werd verondersteld dat de formule alleen gebruikt mag worden in het geval dat aan de volgende eis is voldaan: $(1/2000) \leq t \cdot k \leq (1/100)$. Dit zou betekenen dat bijvoorbeeld als $k_1 = 0.01$ en $k_2 = 0.0005$

⁸ voor de datapunten en een vergelijking tussen de verplaatsing in ANSYS en de bijbehorende verplaatsing van de koepelformule wordt verwezen naar bijlage 8.

is, dat er maximaal een dikte van 1 mm zou mogen worden toegepast om de juiste oplossing te krijgen met de formule. Een dikte groter dan $t = 1$ mm zou groter zijn dan de bovengrens van de eis en was niet toegestaan.

Bijvoorbeeld als $t = 2$, en $k_1 = 0.01$ en $k_2 = 0.0005$, dan $t \cdot k_1 = 0.02$. Dit is groter dan de bovengrens (1/100) en dus (volgens de eis) niet toegestaan terwijl de formule nog steeds een goed schatting geeft van de oplossing.

Echter uit berekeningen en data punten blijkt nu dat de volgende eis geldig is bij het kiezen van een dikte:

$$\frac{1}{2000} \leq \sqrt{t \cdot K_1 \cdot t \cdot k_2} \leq \frac{1}{100}.$$

In het geval dat $g = 1/k$, de fouten zijn erg klein als $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2}$ in de buurt van de ondergrens (1/2000) is, dus als er geldt: $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{2000}$

De fouten zijn maximaal (ongeveer 3.7%) als $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2}$ in de buurt van de bovengrens (1/100) is, $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{100}$.

$$g = (2/k_{\min})^9$$

Bij deze keuze wordt de hoogte precies gelijk aan g want:

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad \text{en} \quad g = \frac{2}{k} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{2}{k} \quad (5.21)$$

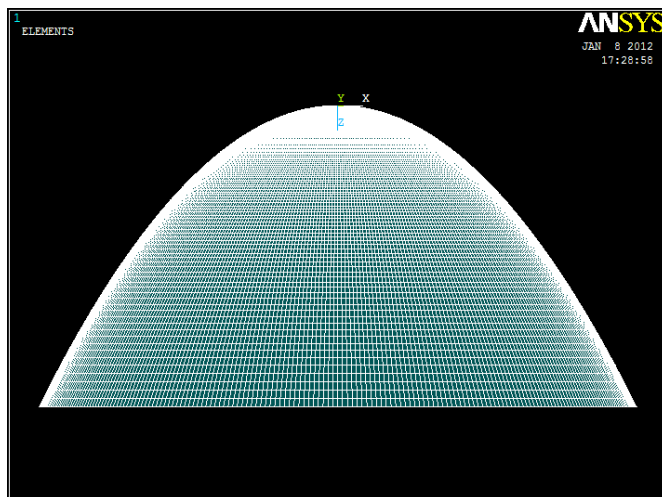


Figure 36: $k_1 = k_2 = 2/1000$ en $g = (2/k_{\min})$

Als $g = 2/k$ is, dan zijn de relatieve fouten tussen de waarde die koepelformule geeft en de waarde die ANSYS geeft tussen -0.5% en 4.5%.

Ook hier geldt nog steeds de eis dat $\frac{1}{2000} \leq \sqrt{t \cdot K_1 \cdot t \cdot k_2} \leq \frac{1}{100}$.

⁹ Voor de bijbehorende datapunten wordt verwezen naar bijlage 9.

Als de combinatie van t , k_1 en k_2 klein is (dicht bij de ondergrens: $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{2000}$), dan zijn de fouten erg klein. Als dikte en krommingen zodanig gekozen worden dat de bovengrens wordt bereikt, $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{100}$ dan zijn de fouten het grootst: 4.5%.

$$g = (4/k_{\min})^{10}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad \text{en} \quad g = \frac{4}{k} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{8}{k} \quad (5.22)$$

Hier wordt de hoogte steeds twee keer groter dan de grondstraal gekozen.

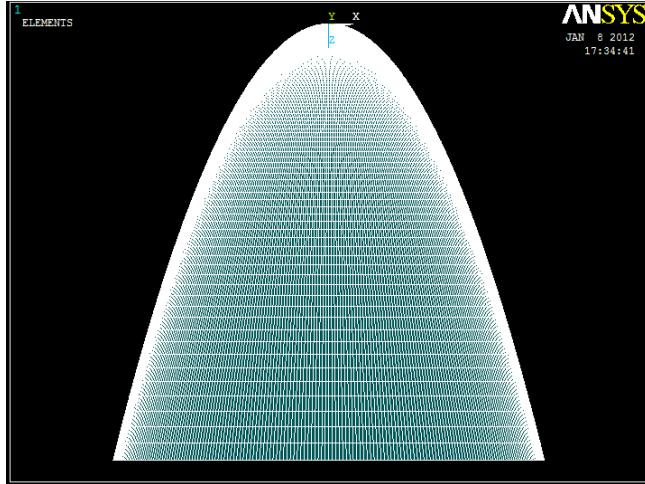


Figure 37: $k_1=k_2=2/1000$ en $g = (4/k_{\min})$

Hierbij geldt dat als $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{2000}$, dan zijn de fouten ongeveer in de buurt van -0.2%.

Als $\sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{100}$, dan zijn de fouten ongeveer 6%.

$$g = (1/(2k_{\min}))^{11}$$

Hier wordt steeds een koepel gemaakt waarbij de hoogte 4 keer kleiner is dan de grondstraal.

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad \text{en} \quad g = \frac{1}{2k} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2k}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{8k} \quad (5.23)$$

¹⁰ Voor de bijbehorende datapunten en de relatieve fouten wordt verwezen naar bijlage 10.

¹¹ Voor de bijbehorende datapunten en de relatieve fouten wordt verwezen naar bijlage 11.

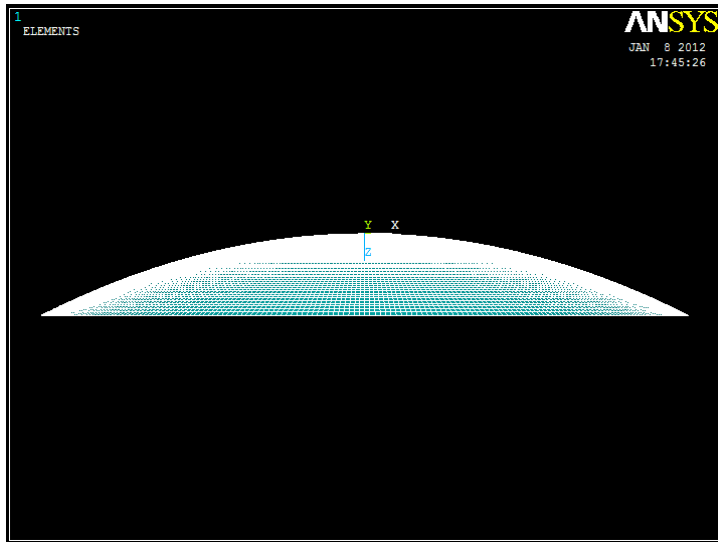


Figure 38: $k_1=k_2=1/1000$ en $g=(1/(2k_{\min}))$

De relatieve fouten zijn in dit geval tussen de -3% en 3%.

$$g=(1/(4k_{\min}))^{12}$$

Hier is de hoogte 8 keer kleiner dan de grondstraal

$$h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g^2 \quad \text{en} \quad g = \frac{1}{4k} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{4k} \right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{32k} \quad (5.24)$$

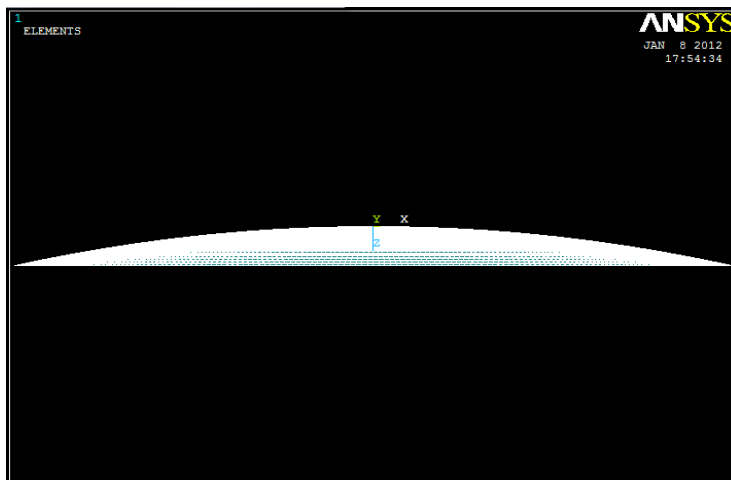


Figure 39 : $k_1=k_2=1/100$, $g=(1/(4k_{\min}))$

De relatieve fouten van de formule liggen nu tussen 0% bij (1/2000) en -16 % bij (1/100). Hier gaat duidelijk iets fout, want nu zijn de fouten op eens erg groot.

$$0\% \text{ bij } \sqrt{t^2 \cdot k_1 \cdot k_2} \approx \frac{1}{2000}$$

¹²Voor de bijbehorende datapunten en de relatieve fouten wordt verwezen naar bijlage 12.

en -16 % bij $\sqrt{t^2 \cdot k1 \cdot k2} \approx \frac{1}{100}$

De relatieve fouten van de koepelformule en de verplaatsingen die ANSYS geeft zijn in dit geval duidelijk erg groot (16%). $g=1/4k$ is dus geen goede keuze geweest. Bij deze waarde van g , ontstaat een vlakke koepel. Een te vlakke koepel kan dus blijkbaar niet meer goed worden beschreven met deze formule.

Uit de berekeningen van hierboven kan geconcludeerd worden dat de krommingen inderdaad niet helemaal onafhankelijk gekozen kunnen worden van de " g " (de grond straal van de koepel).

De formule werkt goed tot een hoek van 15 graden, tussen de zijkant en de hoogste punt van de koepel. De verplaatsingen bij een platte koepel (waarbij de hoek kleiner is dan 15 graden) kan met deze formule niet goed berekend worden.

Deze kan worden samengevat in een extra eis die ervoor zorgt dat de constructie niet te plat wordt:

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k (\text{kleinste})} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k (\text{kleinste})} \quad (5.25)$$

De formule wordt hier nogmaals in het kort samengevat:

$$w := \frac{P}{E \cdot t^2} \cdot \frac{0.434818}{\sqrt{k1 \cdot k2}} \cdot (1 - 0.5 \cdot v^2)$$

Onder de voorwaarde dat:

$$t \cdot k1 \leq \frac{1}{100}$$

$$t \cdot k2 \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2000} \leq \sqrt{t^2 \cdot k1 \cdot k2} \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k (\text{kleinste})} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k (\text{kleinste})} \quad **$$

** Er blijkt dat een kleinere kromming (kleiner dan 1/2000) ook toegepast mag worden, dus de ondergrens mag meer naar beneden verschuiven als aan de laatste eis ** wordt voldaan. Deze laatste eis zorgt ervoor dat de constructie niet te plat wordt. (niet platter dan 15 graden.)

6. Cilinder (halfcilinder)

6.1. Cilinder formule

In dit gedeelte van het verslag wordt aandacht besteed aan cilinders en wordt geprobeerd om een passende formule te vinden die het verband beschrijft tussen een puntlast op de cilinder en de maximale vervorming net onder de puntlast (w). Een cilinder is een schaalconstructie waarbij de kromming in een van de hoofdrichtingen 'nul' is.

De overkapping van Amsterdam Centraal station is een voorbeeld van cilinder (half-cilinder) waarbij de verhouding h/g ongeveer gelijk aan 1 is.



Figure 40: Centraal station, Amsterdam

Er zijn ook cilinderconstructies waarbij de verhouding h/g niet gelijk aan 1 is. Hierbij wordt een hogere Cilinder gebouwd (een cilinder die is uitgerekt in de verticale richting) als de verhouding h/g groter is dan 1. Een plattere cilinder wordt ook vaak toegepast.



Figure 41: kerk in VS bestaande uit half cilinders

Een cilinder kan uit bestaande ANSYS script gegenereerd worden door een van de krommingen $k_1=0$ te kiezen. k_2 mag uiteraard weer variëren in de hele onderzoeksgebied $1/2000 \leq k_2 \leq 1/100$.

Uit onderzoek¹³ is gebleken dat de keuze van "g" in het geval van cilinders een grote invloed heeft op de uitkomsten (vervorming van de constructie t.g.v. een puntlast). Daarom is het misschien verstandig om de invloed van "g" ook in de formule mee te nemen. (omdat hier k_1 gelijk aan nul wordt gekozen, dan is er ruimte om een extra parameter, in dit geval g, in de formule te onderzoeken in plaats van k_1).

Om dit te bereiken zijn met ANSYS verschillende cilinderconstructies gemodelleerd met een "g" die varieert van $g=100t$ tot $g=1500t$ bij verschillende krommingen. Daarna werden deze data punten in DataFit gezet om te kijken of er een verband tussen die parameters bestaat. Helaas slaagt DataFit niet erin om in een keer een mooie functie te vinden in het geval dat er 3 afhankelijke variabels (g,t,k) tegelijk worden ingevoerd. Er wordt daarom weer terug gegaan naar de aanpak van vorige onderdeel waarbij eerst een functie van twee variabelen werd gevonden en dan de invloed van dikte in de formule werd gebracht. Er wordt dus eerst een verband gevonden tussen "g" en "k". Daarna wordt "t" in de formule ingewerkt zoals het in de vorige onderdeel bij koepels ook is gedaan.

$$w = \frac{P}{E} \cdot f(t, k, g) : \quad (6.1)$$

$$\frac{w \cdot E}{P} = f(t, k, g) : \quad (6.2)$$

¹³ invloed van de grondstraal bij cilinders is opgenomen in bijlage 13

$$\frac{[mm] \cdot \left[\frac{N}{mm^2} \right]}{N} = f(t, k, g) : \quad (6.3)$$

$$\left[\frac{1}{mm} \right] = f[??] \quad (6.4)$$

Uit data is af te leiden dat bij een dikte $t=1$ het volgende verband bestaat tussen "g" en "k":¹⁴

$$f(t, k, g) = a \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{k^{\frac{3}{4}}} : \quad (6.5)$$

Waarbij "a" een constant getal is.

De waarde van 't' kan nu in de formule 6.5 ook worden gesubstitueerd. Hierdoor ontstaat formule 6.6 waarbij de dimensies links en rechts van de vergelijking ook gelijk aan elkaar zijn [-].

$$\frac{w \cdot E \cdot t}{P} = f\left(t, t \cdot k, \frac{g}{t}\right) = a \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{(t \cdot k)^{\frac{3}{4}}} : \quad (6.6)$$

De uiteindelijke formule zonder invloed van de dwarscontractie is dan:

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \left(0.422647 \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{(t \cdot k)^{\frac{3}{4}}} \right) ; \quad (6.7)$$

Deze formule is ook bij grotere diktes onderzocht.¹⁵

Echter uit de datapunten blijkt dat ondanks het feit dat 'g' nu in de formule is opgenomen, bij een te kleine 'g' zijn de oplossingen van ANSYS en de formule niet overeen.

Een ding is wel zeker. Als de eis van koepels (die ervoorzorgde dat de constructie niet te plat of te lang

wordt) hier ook wordt toegepast:

$$1/2000 \leq t \cdot k \leq 1/100.$$

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k (kleinste)} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k (kleinste)} \quad (6.8)$$

Dan zijn de oplossingen erg nauwkeurig. (tot 1.5 %)

¹⁴ De datafit analyse van deze formule bij 't is 1' staat in bijlage 14

¹⁵ datapunten voor cilinder zijn opgenomen bij bijlage 15

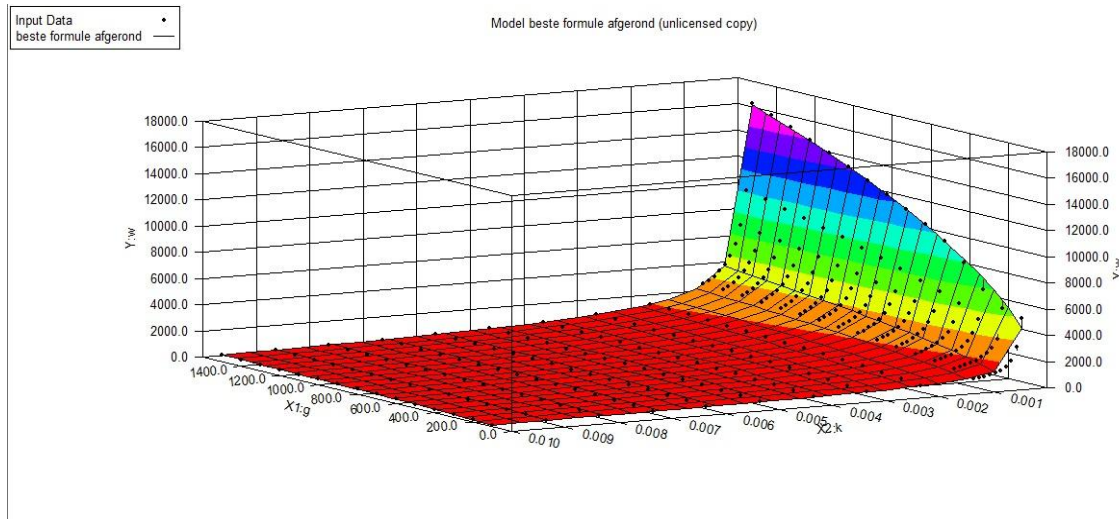


Figure 42: cilinderformule en datapunten bij verschillende waarden van g en k en een dikte van 1 mm.

voor $P=1000$, $E=1000$, $t=1$, $g=0..10000$ en k = variabel, is ieder keer in de plaatje hieronder een grafiek uitgezet waarbij te zien is dat vooral bij kleine krommingen, de waarde van de verplaatsing niet uitdempt en dat het alleen maar groter wordt. Alleen voor hele grote krommingen (bijv. 0.01), blijft de uitkomst min of meer ongewijzigd als g groter gekozen wordt.

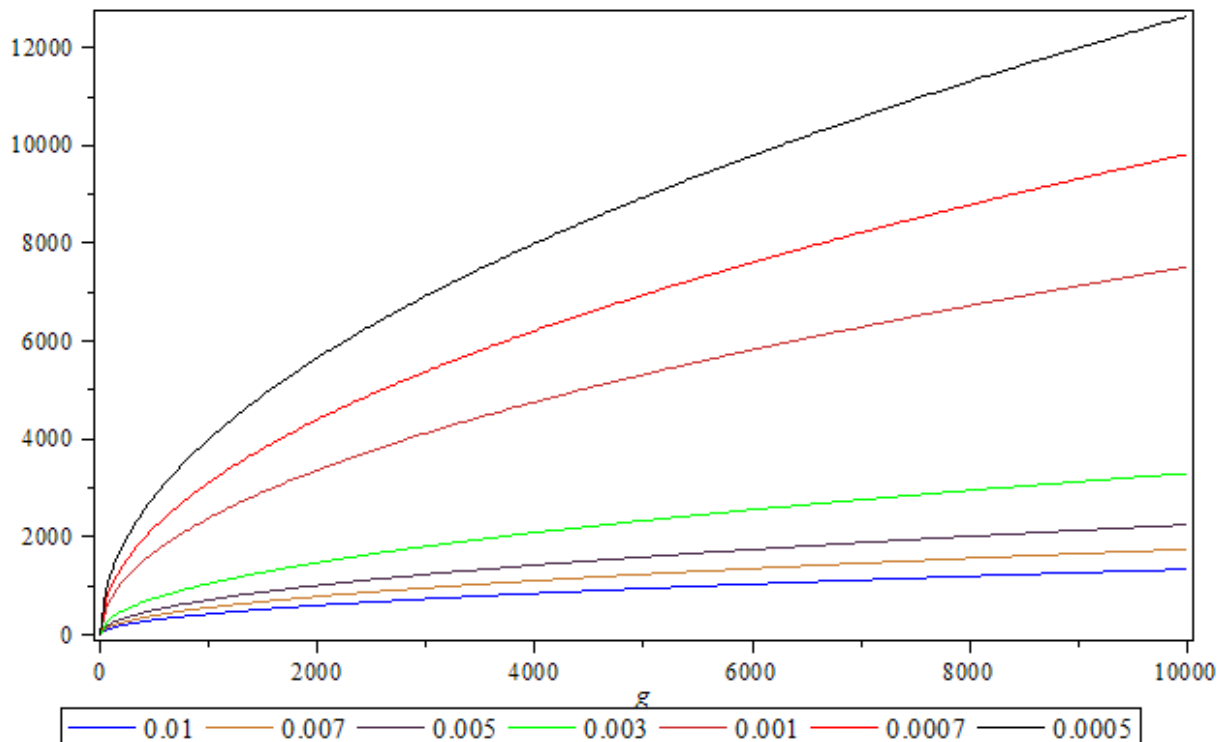


Figure 43: buiging van een cilinder t.g.v een puntlast bij verschillende krommingen en een variabele " g " tot 10 m.

Om de formules van hierboven te controleren worden de berekeningen opnieuw uitgevoerd, maar dit keer met een vaste 'g' die van de kromming afhangt. deze berekeningen zijn gedaan voor $g=(1/k)^{16}$, $g=(1/2k)^{17}$ en $g=(1/4k)^{18}$.

Opvallend is dat bij al deze gevallen de volgende formule blijft gelden:

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \left(\frac{a}{(t \cdot k)^b} \right); \quad (6.9)$$

waarbij

$$0.1955 \leq a \leq 0.4408$$

$$\text{en } b=1.25$$

Verder is goed om te melden dat als in formule (6.7) bijvoorbeeld $g=(1/k)$ wordt ingevuld, dan zijn de formules van 6.9 en 6.7 identiek aan elkaar. zelfs de constanten in de formule komen goed overeen. hiermee is dus ook bewezen dat formule 6.7 goed werkt.

6.2. Spanningen bij Cilinders

Als laatste is het ook interessant om naar de spanningen te kijken die in een cilinder werken.

De z-component van de verplaatsingen staat in figuur 39. Opvallend is dat de buiging in de z component bijna niet uitdempt in de y-richting.

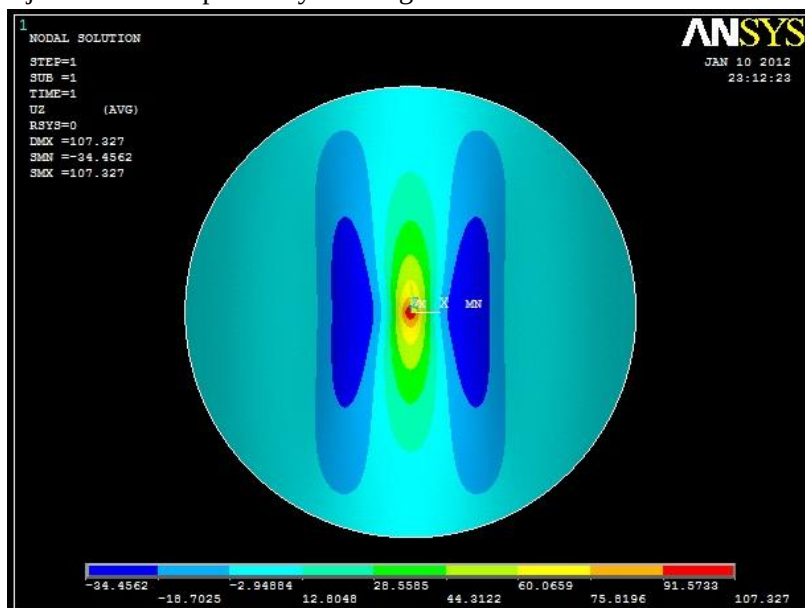


Figure 44: z-component van buiging

¹⁶ zie bijlage 16 voor datapunten

¹⁷ zie bijlage 17 voor datapunten

¹⁸ zie bijlage 18 voor datapunten

verder zijn de x-y en z component van de spanningen (normaalspanningscomponenten) in de volgende figuren opgenomen.

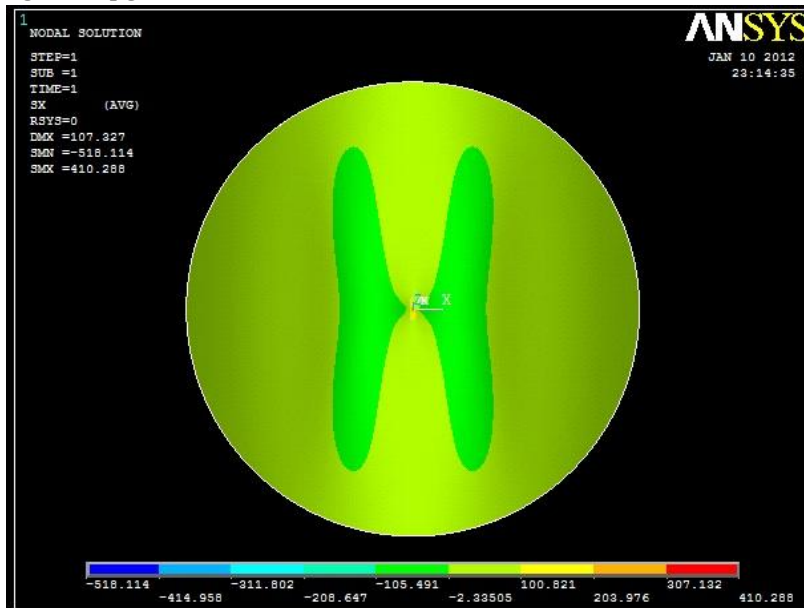


Figure 45: x-component van de spanning (SX)

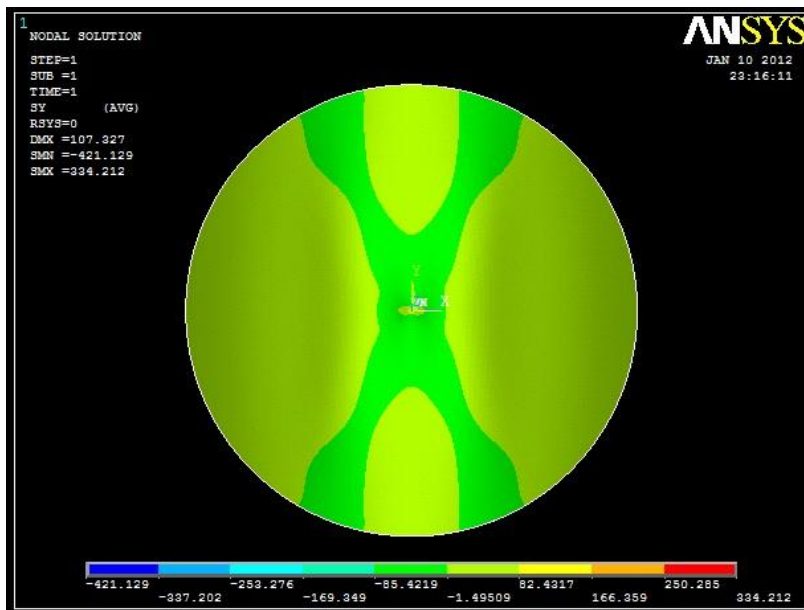


Figure 46: Normalspanningscomponent in de Y richting

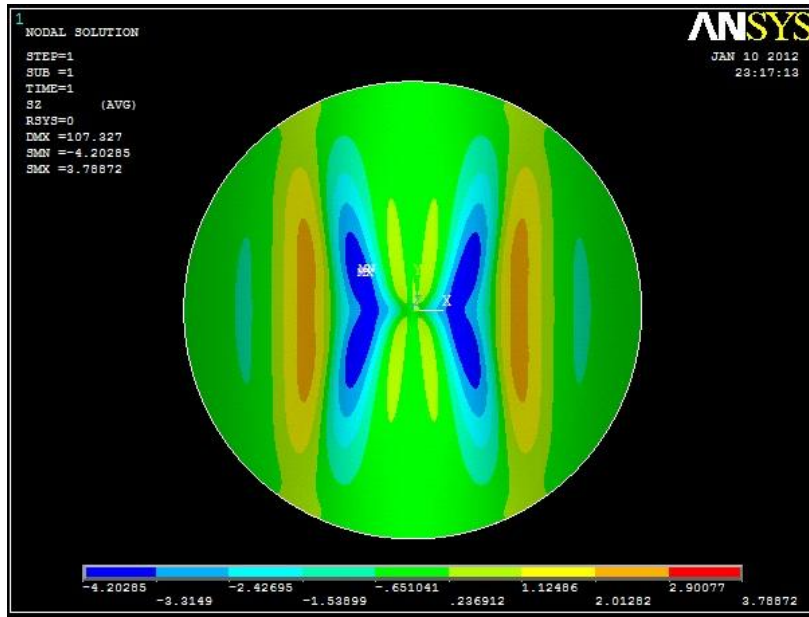


Figure 47: Normalspanningscomponent in de Z richting (SZ)

Duidelijk is te zien dat de normaalspanningen groot zijn waar de cilinder niet gekromd is. (aan de bovenkant van de cilinder waar de constructie vrijwel plat is, de y-richting)

En de schuifspanningen zijn:

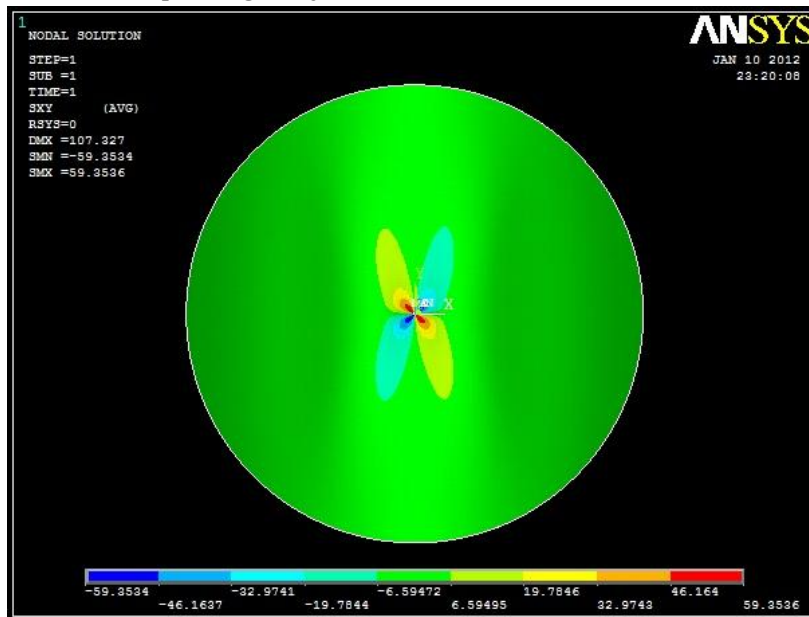


Figure 48: sigma xy (SXY)

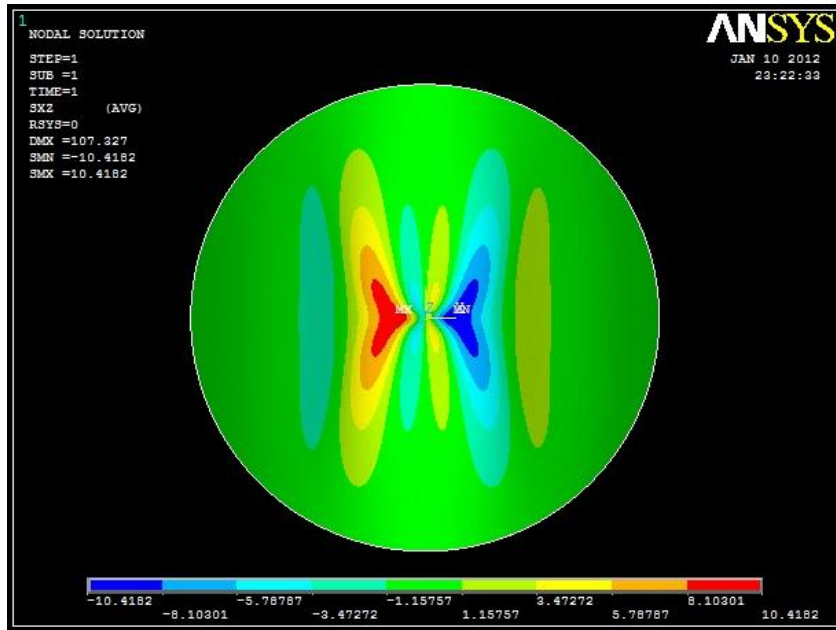


Figure 49: SXZ

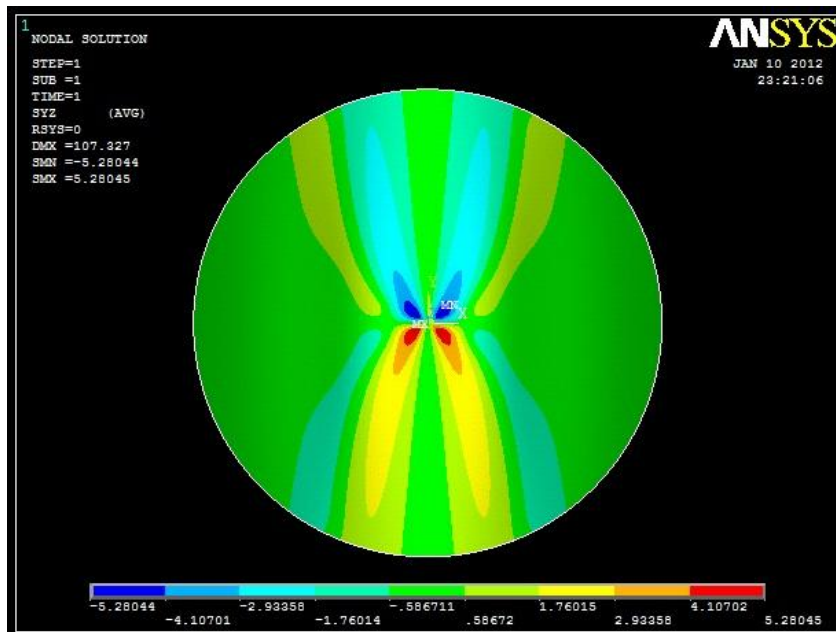


Figure 50: SXY

De schuifspanningen blijven ook doorgroeien en blijven bestaan in de y-richting. Deze verklaart waarom buigingen steeds groter worden bij een grotere overspanning (of bij het kiezen van een grotere grondstraal).

Samengevat:

Voor cilinders geldt:

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \left(\frac{a}{(t \cdot k)^b} \right);$$

waar: $0.1955 \leq a \leq 0.4408$ en $b=1.25$

of:

$$w := \frac{P}{E \cdot t} \cdot \left(0.422647 \cdot \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{(t \cdot k)^{\frac{3}{4}}} \right);$$

Onder de voorwaarde dat:

$$\frac{1}{2000} \leq t \cdot k \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k (kleinste)} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k (kleinste)}$$

7. Zadels (Hyperbolische Paraboloïde)

Bij zadels wordt de constructie in een hoofdrichting positief en in de andere hoofdrichting negatief gekromd. Een voorbeeld van een hyperbolische paraboloïde is te zien in het plaatje .



Figure 51: Hyperbolic paraboloïde (zadel)

Deze constructies worden in ANSYS gemaakt door een van de krommingen negatief en de andere kromming positief te nemen.

De krommingen worden hier ook gevarieerd tussen: 1/2000 en 1/100

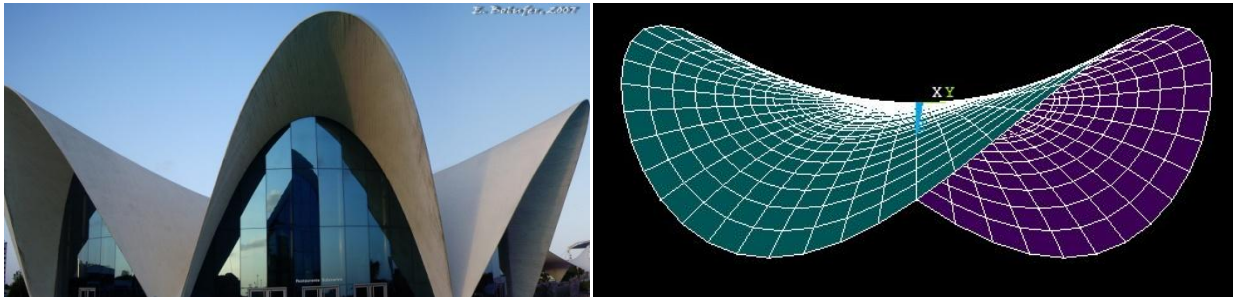


Figure 52: gemeentehuis in Ohio, VS (links), zadel model in ANSYS (rechts)

7.1. Zadel formule

Uit analyse ¹⁹ blijkt dat de grondstraal een grote invloed heeft op de uitkomsten, daarom wordt hier gewerkt met een vaste waarde van 'g' die van de kromming afhangt. hierdoor wordt de verhouding h/g ieder keer vast gehouden. (Deze aanpak is in de vorige onderdeel ook gebruikt)

Voor $g=2/k_{\min}$, $g=1/k_{\min}$, $g=1/2k_{\min}$, $g=1/4k_{\min}$, is geprobeerd om een verband te vinden tussen w en alle andere parameters. de uitkomsten worden hieronder kort samengevat.

$$g=2/k_{\min} \quad ^{20}$$

In dit geval is de hoogte van de koepel precies gelijk aan de grondstraal gekozen bij alle waarden van de krommingen.

De formule die de buiging van zadels beschrijft is in de zelfde vorm van de formule van koepels.

$$w = \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{a}{(t \cdot k_1 \cdot t \cdot |k_2|)^b} \quad (7.1)$$

$$a=0.4866$$

$$b=0.5545$$

$$g=1/k_{\min} \quad ^{21}$$

Hier is de hoogte van de koepel 2 keer kleiner dan de grondstraal bij ieder waarde van kromming, waarbij de kleinste kromming maatgevend is.

$$w = \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{a}{(t \cdot k_1 \cdot t \cdot |k_2|)^b}$$

$$a=0.4739$$

$$b=0.5506$$

$$g=1/2k_{\min} \quad ^{22}$$

Hier is de hoogte 4 keer kleiner dan de grondstraal.

$$w = \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{a}{(t \cdot k_1 \cdot t \cdot |k_2|)^b}$$

$$a=0.4378$$

$$b=0.5484$$

$$g=1/4k_{\min} \quad ^{23}$$

hier wordt de hoogte 8 keer kleiner dan de grondstraal gekozen.

$$w = \frac{P}{E \cdot t} \cdot \frac{a}{(t \cdot k_1 \cdot t \cdot |k_2|)^b}$$

¹⁹ Zie bijlage 19 voor de invloed van 'g' bij Zadels

²⁰ De bijbehorende datapunten zijn opgenomen in bijlage 20.

²¹ De bijbehorende datapunten zijn opgenomen in bijlage 21.

²² De bijbehorende datapunten zijn opgenomen in bijlage 22.

²³ De bijbehorende datapunten zijn opgenomen in bijlage 23.

$a=0.356$
 $b=0.5524$

Wat opvalt is dat $b \approx 0.55$ in tegenstelling tot de koepel formule waarbij $b=0.5$.
 en de waarde van 'a' in het geval dat de koepel niet te plat maar ook niet te lang wordt is:
 $0.43 \leq a \leq 0.5$

Hier geldt verder ook dat de constructie weer niet te plat mag worden:

$$\frac{1}{2 \cdot t \cdot k \text{ (kleinste)}} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t \cdot k \text{ (kleinste)}} \quad (7.2)$$

wordt de constructie toch platter, dan zal de constante 'a' nog lager zijn (bijv. 0.30)
 Deze formule heeft ook hetzelfde vorm als koepel formule.

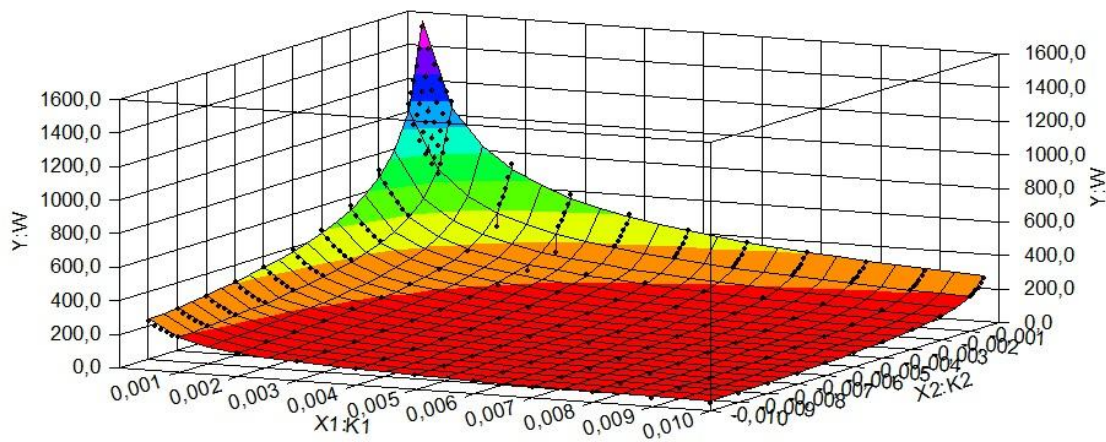


Figure 53: zadel formule bij t-1

7.2. Spanningen in zadels

Als laatst wordt hier nog gekeken naar de spanningen in de zadelconstructies. Deze spanningen zijn berekend bij een $g = 1000 \text{ mm}$ en $k_1 = 1/2000$ en $k_2 = -1/2000$

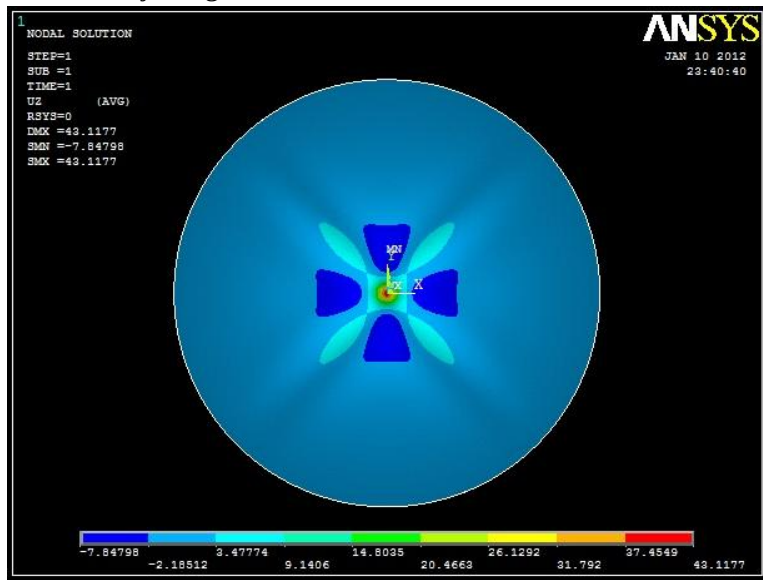


Figure 54: z-component van de verplaatsingen

Hierna komen de spanningen:

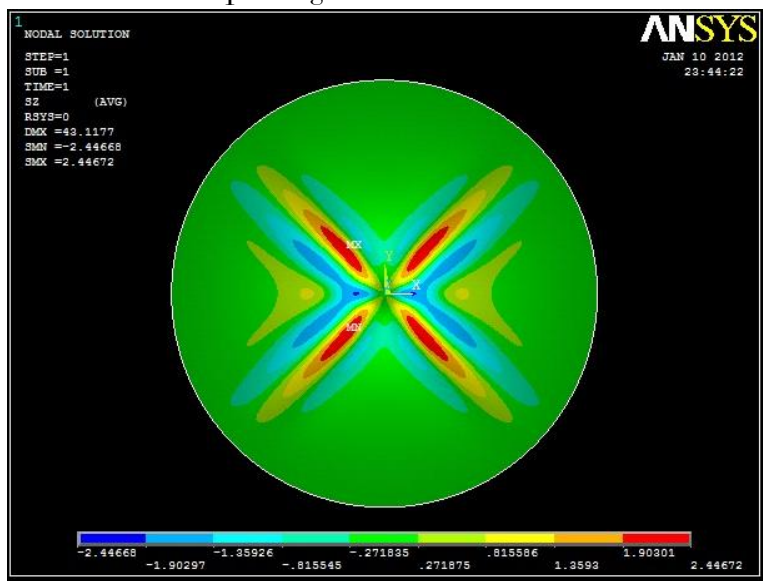


Figure 55: Normaalspanningscomponent in de z-richting

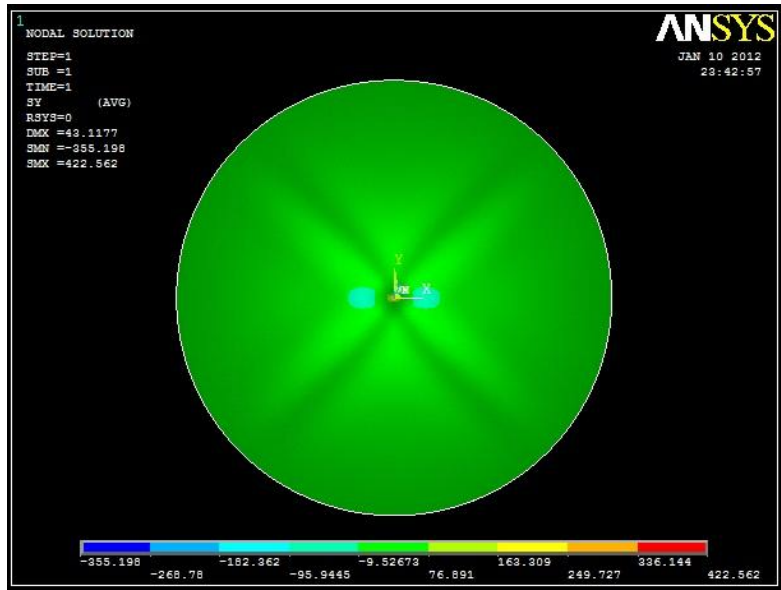


Figure 56: y-component van de normaalspanningen SY.

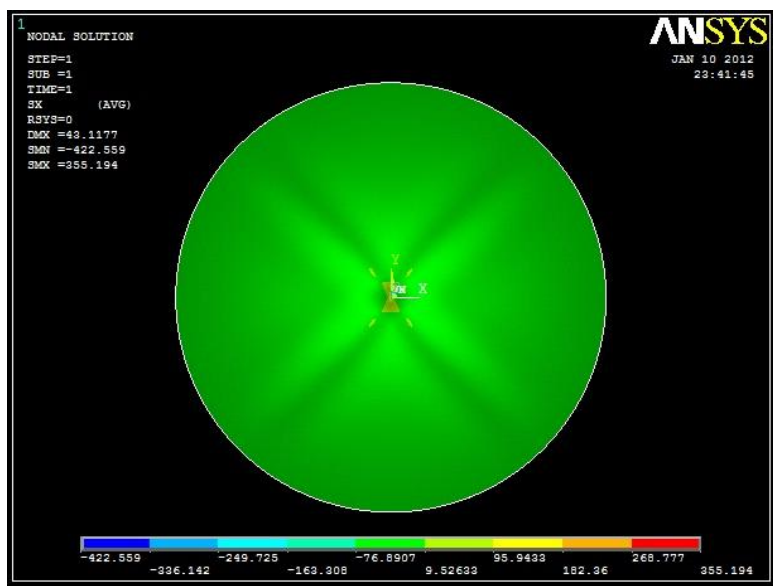


Figure 57: Normaalspanningscomponent in de x-richting, SX

De schuifspanningen zijn hieronder te zien:

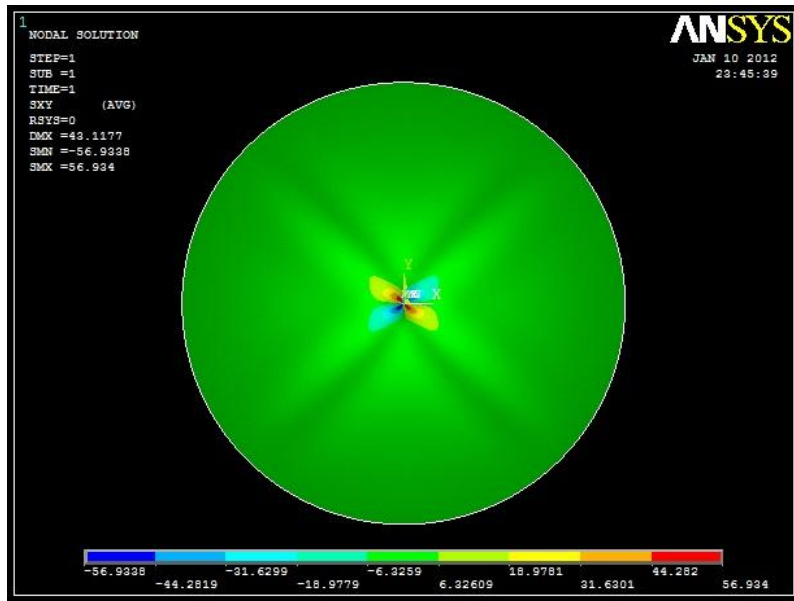


Figure 58: Sigma xy, (SXY)

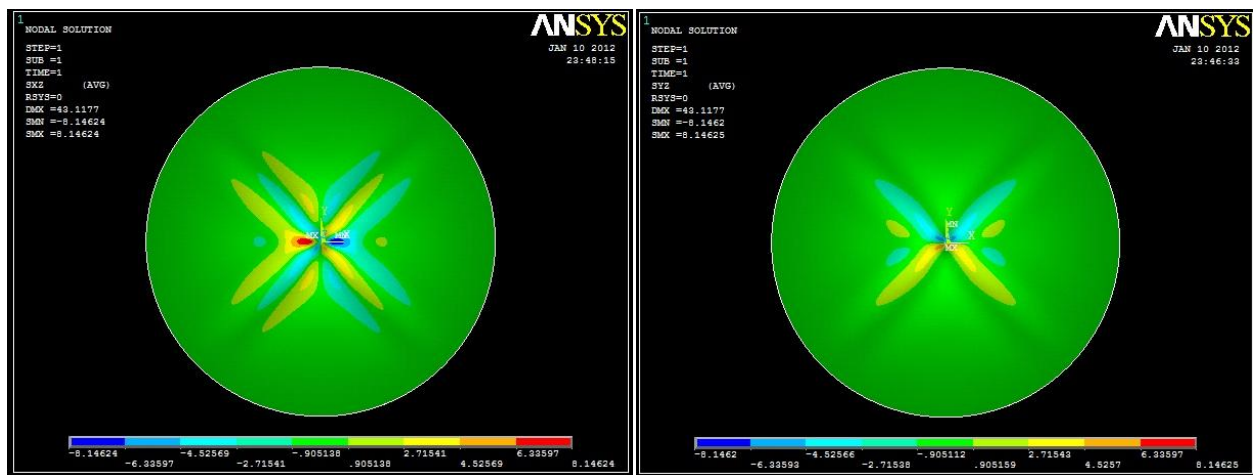


Figure 59: Sigma xz

Sigma yz

Het is opvallend dat waar de krommingen in elkaar overgaan, (dus op de plekken waar positieve kromming even nul wordt en overgaat naar negatieve kromming), daar zijn de spanningen het grootst. het lijkt alsof de rest van de constructie weinig bijdraagt aan de belastingsoverdracht en juist dat stukje waar de krommingen nul zijn de belasting en de spanningen dragen.

8. Conclusies en aanbevelingen

Voor koepels, cilinders en zadels zijn in dit onderzoek eenvoudige formules afgeleid voor de doorbuiging onder een puntlast (blz. 6).

Voor zowel koepels als zadels blijkt de Gaussische kromming heel belangrijk voor de doorbuiging onder een puntlast.

De grootte van een koepel of een zadel heeft weinig invloed op de doorbuiging door een puntlast mits deze tussen vastgestelde grenzen ligt. De lengte van een cilinder heeft wel een belangrijke invloed.

Bij zadels belast door een puntlast ontstaan de grootste spanningen langs de richtingen waarin de kromming nul is. Het lijkt erop dat deze richtingen de belasting dragen. Dit is anders dan men zou verwachten omdat dit de minst stijve richtingen zijn. Meer onderzoek hierna wordt aanbevolen.

De formule voor cilinders is afgeleid op met elementenmodellen van enkel gekromde paraboloiden. Het is verstandig om deze formule te controleren met elementenmodellen van cilinders.