

Eigenfrequentie van gekromde panelen

Uitbreiding van de ontwerpformule
voor zadelvormige panelen

door
J. Sluijs



Studienummer: 4245865
Projectduur: 14 nov 2016 - 24 jan 2017
Begeleiders: dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
dr. ir. F.P. van der Meer
Faculteit: Civiele Techniek

Vooraf

Voorwoord

Voor u ligt de scriptie 'Eigenfrequentie van gekromde panelen – Uitbreiding op de ontwerpformule voor zadelvormige panelen'. In dit Bachelor Eindwerk heb ik onderzoek gedaan naar een ontwerpformule voor de eigenfrequentie bij zadelvormige panelen, met en zonder twist. De ontwerpformule is binnen een foutmarge van 20% ten opzichte van de numeriek verkregen eigenfrequenties komen te liggen. Dit onderzoek is van 14 november 2016 tot en met 17 januari 2017 gedaan ter afronding van de Bachelor opleiding van Civiele Techniek aan de TU Delft.

De eerste weken van het onderzoek zijn gebruikt om meer achtergrond informatie te vergaren. Eerdere onderzoeken over dit onderwerp zijn doorgenomen en de totstandkoming van de huidige ontwerpformule is nagegaan. Daarnaast is deze tijd gebruikt om Ansys te leren gebruiken. Vervolgens ben ik aan de slag gegaan met het verzamelen van data uit Ansys. Uit deze data is bepaald dat er een extra term aan de ontwerpformule toegevoegd kan worden. Met behulp van een wiskundige methode heb ik een toevoeging kunnen vinden op de ontwerpformule. Dit onderzoek heb ik samen met mijn begeleiders, de heer Hoogenboom en de heer Van der Meer, uitgevoerd.

Ik wil hen hartelijk bedanken voor hun bijdrage aan dit onderzoek en de handige tips die zij mij hebben gegeven gedurende de loop van dit onderzoek. Dit heeft mij geholpen tot de resultaten te komen die in dit verslag vermeld staan.

Ik wens de lezer veel leesplezier toe.

Joep Sluijs

24 januari 2017

Samenvatting

In dit onderzoek is verder gegaan op voorgaande Bachelor Eindwerken met de volgende ontwerpformule voor de eigenfrequentie van gekromde panelen als uitgangspunt:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Voor het begrip van de lezer, is aan te raden de symbolenlijst te bekijken op pagina 8 van dit verslag. Zo kunnen de formules, gebruikt in deze samenvatting, beter begrepen worden.

Het doel van dit onderzoek is om een uitbreiding op deze ontwerpformule te vinden, die op zadelvormige panelen van toepassing is, binnen een foutmarge van 20%. Het vinden van deze ontwerpformule is van belang, opdat een ingenieur snel de laagste eigenfrequentie kan bepalen van een gekromd paneel zonder dat er een Eindige-Elementenmethode programma bij gebruikt hoeft te worden. Zo kan snel worden achterhaald of de schaalconstructie is opgewassen tegen een dynamische belasting. Als de frequentie van de dynamische belasting en de laagste eigenfrequentie te dicht op elkaar liggen, gaat de constructie resoneren, wat weer leidt tot bezwijken van de constructie.

Bij de modellering is uitgegaan van een paneel met een aantal karakteristieke eigenschappen. Het paneel was van staal met afmetingen van $1 - 10 \text{ m}$ bij $1 - 10 \text{ m}$ met een dikte van $0,005 \text{ m}$. Met behulp van het Eindige-Elementenmethode programma Ansys is er een dataset gegenereerd. Vanuit deze data en de hypothese dat er dalen gevormd worden bij de verschillende trillingsmodi (1 buik, 4 buiken, enz.) wanneer de lengte wordt uitgezet tegen de eigenfrequentie, kon worden opgemaakt dat er een term mist in de huidige ontwerpformule. De aanname voor de nieuwe ontwerpformule zag er als volgt uit:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + A] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

De extra term zou het verschil tussen de data uit Ansys met 1 buik en de uitkomsten van de huidige ontwerpformule moeten oplossen. Voor het gemak is de extra term A genoemd. Deze term A is als volgt gedefinieerd:

$$A = \frac{f_{ansys}^2 - \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4}}{\frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Deze formule is afgeleid uit de aangenomen formule voor de eigenfrequentie. A heeft een kwadratisch verloop, waardoor is gekozen om een vorm $k^4 l^2$ voor A aan te nemen. Dit volgt uit het feit dat de eenheid aan $\frac{1}{m^2}$ gelijk moet zijn. Om A aan $k^4 l^2$ gelijk te maken, moet A vermenigvuldigd worden met een constante C . Dit heeft geleid tot het volgende:

$$A = C(k_{xx}k_{yy})^2 l^2$$

Deze term A kan (voorlopig) alleen op deze manier beschreven worden wanneer $k_{yy} = -k_{xx}$

Om C te bepalen is kwadratische regressie gebruikt op de data die vergaard is van verschillende zadelvormige panelen.

Dit heeft geleid tot:

$$C = \frac{1}{276,75}$$

Met de toegevoegde constante C geeft dit de volgende ontwerpformule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Deze formule blijkt voor de onderzochte zadelvormige panelen met of zonder twist een eigenfrequentie te geven die binnen een foutmarge van 20% zit. Deze formule kan voorlopig alleen worden toegepast bij een even grote maar tegengestelde kromming in x- en y-richting. De bruikbaarheidsgrenzen zullen nog opgezocht moeten worden om een gebied af te kunnen bakenen waarin de nieuwe ontwerpformule te allen tijde gebruikt kan worden.

Inhoudsopgave

Vooraf	1
Voorwoord	1
Samenvatting.....	2
Lijst van Figuren.....	6
Lijst van Tabellen	7
Symbolen en Termen	8
1. Introductie	9
1.1 Inleiding.....	9
1.2 Probleemstelling.....	10
1.3 Doelstellingen.....	10
1.4 Hoofdvraag en deelvragen	10
1.5 Aanpak.....	10
2. Achtergrond.....	12
2.1 Theorie gekromde panelen.....	12
2.1.1 Gauss-kromming	12
2.1.2 Eigenfrequentie	13
2.2 Overzicht voorgaande studies	14
2.3 Trillingsmodi	15
3. Modellering.....	17
3.1 Script.....	17
3.2 Kwadranten	19
3.3 Hypothese	20
4. Analyse	21
4.1 Lengte versus eigenfrequentie	21
4.2 Dubbele kromming met 1 buik.....	22
4.3 Term A	25
4.4 Kwadratische regressie	27
4.4.1 $k_{xx} = -0,01$	29
4.4.2 Definitieve constante C	29
4.5 Bruikbaarheid nieuwe ontwerpformule.....	30
4.5.1 Zonder twist	30
4.5.2 Met twist.....	31
4.5.3 Verschillende parameters uitgezet tegen A	32
4.6 Dalvorming	33

5. Conclusie & aanbevelingen	35
5.1 Conclusie	35
5.2 Aanbevelingen	36
Bibliografie	37
I. Appendix A: Ansys script.....	38
II. Appendix B: Tabel bij figuur 4.1.....	41
III. Appendix C: Dataset dubbele kromming	42
IV. Appendix D: Term A.....	44
Tabel	44
Figuren	45
V. Appendix E: Kwadratische regressie	46
Tabel	46
Figuren	46
VI. Appendix F: Python script	48
VII. Appendix G: Nieuwe formule zonder twist.....	51
VIII. Appendix H: Nieuwe formule met twist.....	53
IX. Appendix I: Dalvorming.....	55

Lijst van Figuren

1.1: OV-terminal Arnhem.....	9
2.1: Gauss-krommingen. (a) Positieve Gauss-kromming, (b) Negatieve Gauss-kromming, (c) Nul Gauss-kromming	13
2.2: Massaveersysteem.....	13
2.3: trilling met 1 buik, positief(links) en negatief(rechts).....	15
2.4: Trilling met 2, 4 en 9 buiken en een complexe trilling.....	16
3.1: Randvoorwaarden model van een gekromd paneel.....	18
3.2: Model in Ansys	19
3.3: Kwadranten	19
3.4: Kwadranten onderzoekgebied	20
3.5: Verwachte eigenfrequentie gekromd paneel.....	20
4.1: De lengte versus eigenfrequentie uit Ansys en de ontwerpformule met twist van 0,005	21
4.2: Lengte tegen de eigenfrequentie voor $k_{xx}=-0,1$	22
4.3: Eigenfrequenties met 1 buik	23
4.4: Eigenfrequenties voor $k_{xx}=-0,01$ (linksboven); $0,05$ (rechtsboven) ; $0,15$ (linksonder) ; $0,2$ (rechtsonder).....	24
4.5: Ontbrekende deel A van de ontwerpformule.....	25
4.7: De lengte uitgezet tegen A met $k_{xx}=-0,1$	26
4.6: 1 - Verhouding k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 t.o.v. A ; 2 - k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 met een correctiefactor t.o.v. A	26
4.8: Resultaat van kwadratische regressie bij $k_{xx}=-0,1$	28
4.9: Nieuwe ontwerpformule t.o.v. Ansys met 1 buik zonder twist.....	31
4.10: Nieuwe ontwerpformule t.o.v. Ansys met 1 buik met $k_{xy}=-0,005$	32
4.11: Parameters ρ , E-modulus, ν , t en kromming k afgezet tegen term A	33
4.12: Dalvorming bij $k_{xx}=-0,1$	34
IV.1: Grafische weergave k^3l en k^4l^2 ten opzichte van A met krommingen: $-0,01$, $-0,05$, $-0,15$ en $-0,2$	45
V.1: De nieuwe term uit kwadratische regressie in verhouding tot A met krommingen: $-0,01$, $-0,05$, $-0,15$ en $-0,2$	47

Lijst van Tabellen

Tabel 4.1: Constante C per paneel	29
Tabel 4.2: Resultaten nieuwe formule bij $k_{xx}=-0,05$ met foutmarge t.o.v. resultaten uit Ansys met trillingsvorm van 1 buik	30
Tabel 4.3: Onderzochte panelen met twist.....	31
Tabel II.1: Lengte versus eigenfrequentie.....	41
Tabel III.1: Dataset dubbele kromming	43
Tabel IV.1: k^3I , k^4I^2 en k^6I^4 in verhouding tot A.....	45
Tabel V.1: Voorbeeld opzet kwadratische regressie met $k_{xx}=-0,1$	46
Tabel VII.1: Resultaten nieuwe formule zonder twist	52
Tabel VIII.1: Resultaten nieuwe formule met twist	54
Tabel IX.1: Dalvorming bij $k_{xx}=-0,1$	58

Symbolen en Termen

Symbol	Grootheid	Eenheid
l	Lengte van een paneel	m
b	Breedte van een paneel	m
E	Elasticiteitsmodulus	$\frac{N}{m^2}$
t	Dikte van een paneel	m
k_{xx}	Kromming om de x-as	$\frac{1}{m}$
k_{yy}	Kromming om de y-as	$\frac{1}{m}$
k_{xy}	Twist	$\frac{1}{m}$
ν	Poisson-factor	—
n_{xx}	Normaalkracht in x-richting	$\frac{N}{m}$
n_{yy}	Normaalkracht in y-richting	$\frac{1}{m}$
n_{xy}	Schuifkracht in het vlak	$\frac{1}{m}$
π	Pi	—
ρ	Dichtheid	$\frac{kg}{m^3}$
R_x	Kromtestraal in de x-richting	m
R_y	Kromtestraal in de y-richting	m

1. Introductie

1.1 Inleiding

Al eeuwen lang wordt er gebouwd door de mensheid. Dit heeft zich ontwikkeld van de simpele bouwvormen in de tijd van de Egyptenaren tot de meer complexe bouwvormen heden ten dage. De Grieken en Romeinen bouwden al koepelvormen, zoals de schatkamer van Atreus in Mycene en het Pantheon in Rome. Tegenwoordig wordt er ook steeds meer gebruik gemaakt van constructies met gekromde panelen, met als voorbeeld de Openbaar vervoer-terminal in Arnhem (zie figuur 1.1). De hedendaagse architectuur vraagt om meer complexe vormen dan een rechte en eenvoudige constructie. Dit heeft te maken naar een grotere vraag om constructies visueel interessant te maken.



1.1: OV-terminal Arnhem

Gekromde panelen hebben een hoge stijfheid wat zeer voordelig is in de constructie. Er is dan ook veel onderzoek naar de krachtenverdeling en bezwijkmechanismen van gekromde panelen. Een mogelijk bezwijkmechanisme van een gekromd paneel is resonantie. In het verleden zijn een aantal desastreuze gevallen van resonantie opgetreden, zoals de Tacoma Narrows Bridge (USA) in 1940. Deze brug is bezweken aan resonantie. De dynamische belasting, in dit geval de wind, had dezelfde frequentie als de eigenfrequentie van de brug.

Om dit te kunnen voorkomen moet een ingenieur correct de laagste eigenfrequentie van constructies kunnen bepalen. Aan de hand daarvan kan voorkomen worden dat de frequentie van de dynamische belasting en de laagste eigenfrequentie zullen samenvallen.

1.2 Probleemstelling

In voorgaande Bachelor Eindprojecten is een formule ontwikkeld voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen die binnen een foutmarge van 20% ligt. Deze formule is bruikbaar voor meerdere afmetingen, krommingen en belastingen. Echter voorspelt de formule ook een niet verwacht resultaat: als een paneel groter wordt, dan wordt de eigenfrequentie kleiner. Door middel van observaties is gebleken dat dit incorrect is. Koeltorens trillen bijvoorbeeld in een bepaald schaakbordpatroon en bij de laagste eigenfrequentie hebben alle vakken een bepaalde afmeting. Blijkbaar zou er bij minder vakken, maar wel grotere vakken een hogere eigenfrequentie ontstaan in plaats van een lagere eigenfrequentie. Dit is in tegenspraak met de huidige ontwerpformule.

De ontstane tegenspraak heeft een belangrijk gevolg. De formule voor de laagste eigenfrequentie kan worden omgeschreven naar een knikformule voor schaalconstructies. Als een paneel een zadelvorm heeft, dat wil zeggen twee tegengestelde krommingen die in absolute zin even groot zijn, draagt de kromming niet bij aan de stijfheid. Hierdoor wordt de kniklengte van een zadelvormige schaalconstructie oneindig groot en de kniklast gelijk aan nul. Dit is niet in overeenstemming met de werkelijkheid. Blijkbaar is de huidige ontwerpformule vooral niet voldoende nauwkeurig voor zadelvormige panelen. Voor een voorbeeld van de te onderzoeken zadelvormige panelen, zie figuur 2.1b.

Een bijkomend probleem is dat er bruikbaarheidsgrenzen moeten worden opgesteld voor de ontwerpformule. Bij voorkeur zijn dit bruikbaarheidsgrenzen met dimensieloze eenheden. Echter zal dit niet worden behandeld in dit Bachelor Eindwerk.

1.3 Doelstellingen

Het doel van dit onderzoek zal zijn om de invloed van kromming op de laagste eigenfrequentie van zadelvormige panelen te bepalen. Met name de invloed op panelen met een grote lengte en breedte. Er zal getracht worden deze invloed te kwantificeren door een uitbreiding te vinden op de bestaande ontwerpformule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

1.4 Hoofdvraag en deelvragen

Hoofdvraag:

- Is het mogelijk om de bestaande formule voor de laagste eigenfrequentie uit te breiden, zodat de formule tevens te gebruiken is voor zadelvormige panelen, met een maximale foutmarge van 20%?

1.5 Aanpak

Om op de hoogte te zijn van de bestaande studies is er begonnen met een literatuurstudie en een studie naar eigenfrequenties van gekromde panelen, eigenfrequenties van vlakke panelen en Gauss-krommingen. De informatie hierover is gezocht in de collegeslides van CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, het boek Structural Shell Analysis van

Blauwendraad en Hoefakker, voorgaande Bachelor Eindprojecten over gekromde panelen. Tevens is het gebruiken van het eindige-elementenmethode programma Ansys bestudeerd. Hiervoor is in eerste instantie geoefend met simpele voorbeelden, waarna gaandeweg genoeg kennis is vergaard om het bestaande script in Ansys te begrijpen en te kunnen aanpassen naar de gewenste modellering.

Na de voorstudie is er begonnen met het onderzoek naar zadelvormige panelen. Er is een numeriek onderzoek gedaan naar de invloed van kromming van zadelvormige panelen op de huidige ontwerpformule. De resultaten uit het eindige-elementenmethode programma zijn vergeleken en gecontroleerd met de ontwerpformule. Op deze manier is getracht de ontwerpformule te optimaliseren, wat heeft geleid tot een uitbreiding van de ontwerpformule.

Als afsluiting volgt de conclusie en de aanbevelingen die kunnen worden gedaan voor eventueel verder onderzoek.

2. Achtergrond

Het onderzoek zal zich richten op de eigenfrequenties van gekromde panelen, ofwel schaalconstructies. De eigenfrequentie is de natuurlijke frequentie waarin een object of voorwerp gaat oscilleren. De materiaaleigenschappen van een schaaldeel zullen een bepaalde eigenfrequentie met zich meebrengen. Om dit onderzoek tot het gewenste resultaat te brengen is enige achtergrond informatie over gekromde panelen nodig. De benodigde informatie zal voortkomen uit de eerder in hoofdstuk 1 genoemde bronnen. Onderzoek naar gekromde panelen is al enige jaren bezig. Om een goed overzicht te hebben, worden de bevindingen uit voorgaande onderzoeken hier beschreven. Tenslotte zal er nog worden ingegaan op de verschillende trillingsvormen waarin schaaldelen kunnen vibreren, er is namelijk een mogelijkheid dat dit van invloed is op de formule voor de laagste eigenfrequentie.

2.1 Theorie gekromde panelen

Gekromde panelen kunnen worden gedefinieerd door het middenpaneel, de dikte en de materiaaleigenschappen. Het grote verschil met platen is dat het middenpaneel gekromd is. Het gevolg hiervan is dat gekromde panelen externe krachten met interne membraankrachten kunnen dragen. Krachten in de richting van het paneel werken als membraankrachten en krachten uit de richting van het paneel werken als dwarskrachten en momenten. Het zorgt er voor dat gekromde panelen sterke en economisch voordelige constructies vormen. De theorie achter het gedrag van het membraan wordt de *Membraan Theorie* genoemd.

2.1.1 Gauss-kromming

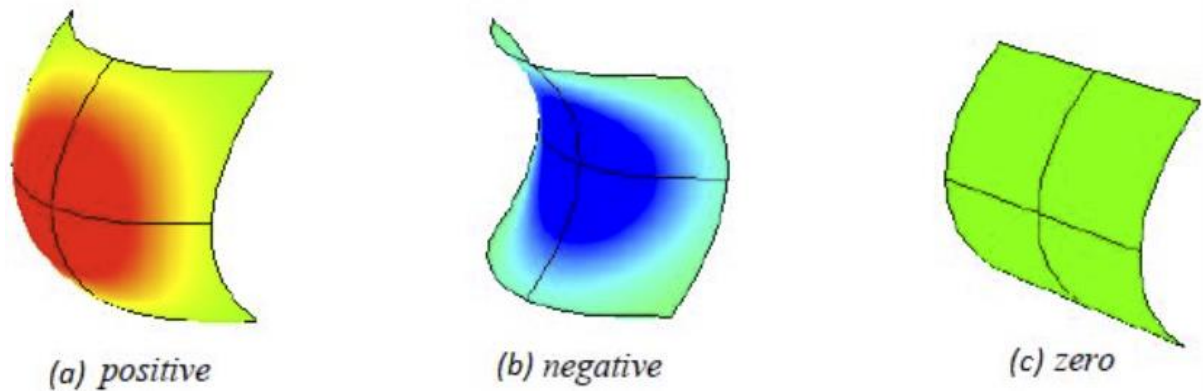
Gekromde panelen kunnen op verschillende manieren geclassificeerd worden. Een manier is classificatie op grond van de geometrische eigenschappen van het paneel. De geometrie van een schaal wordt volledig beschreven door de gekromde vorm van het middenpaneel en de distributie van de dikte van het schaaldeel. Elk punt A op een schaaldeel heeft een maximale en minimale kromming. Deze krommingen heten de hoofkrommingen, k_1 en k_2 . Het product van deze krommingen geeft de Gauss-kromming. De Gauss-kromming is onafhankelijk van de richting van de lokale assenstelsels waardoor het ook kan worden geschreven als $k_G = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$. Hierdoor kunnen schalen worden onderverdeeld:

- Synclastische schalen (hol, bol): de Gauss-kromming is positief
- Anticlastische schalen (zadelvorm): de Gauss-kromming is negatief
- Enkel gekromde schalen: de Gauss-kromming is nul

Al deze vormen zijn afgebeeld in figuur 2.1.

De Gauss-kromming beïnvloedt de doorbuiging van een schaaldeel. Als de Gauss-kromming in absolute zin een grote waarde heeft, zal het schaaldeel onder belasting een kleinere doorbuiging veroorzaken.

In dit onderzoek zal er worden gekeken naar anticlastische schalen.



2.1: Gauss-krommingen. (a) Positieve Gauss-kromming, (b) Negatieve Gauss-kromming, (c) Nul Gauss-kromming¹

2.1.1.1 a/t -ratio

Een andere classificatie voor gekromde panelen is de a/t -ratio. Deze ratio is de verhouding van de kromtestraal (sagitta) en de dikte van het schaaldeel. Aan de hand van de a/t -ratio kunnen schalen onderverdeeld worden in de volgende klassen:

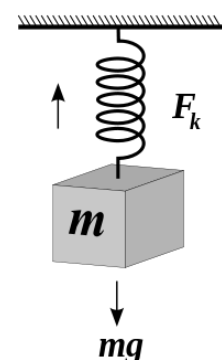
- $a/t < 5$: Erg dikke schaal
- $5 < a/t < 30$: Dikke schaal
- $30 < a/t < 4000$: Dunne schaal
- $4000 < a/t$: Membraan

Het onderzoek zal zich vooral gaan richten op schalen die in de klasse *Dunne schaal* vallen. Het grootste deel van de modellen zullen namelijk binnen de begrenzing van $30 < a/t < 4000$ vallen.

2.1.2 Eigenfrequentie

De eigenfrequentie is de frequentie waarbij een object zonder aandrijving van externe krachten kan oscilleren. Op het moment dat het object te maken heeft met een externe kracht met dezelfde frequentie als de eigenfrequentie, treedt er resonantie op. Resonantie kan leiden tot een bezwijkmechanisme wat niet gewenst is voor constructies.

Een goed voorbeeld van het fenomeen eigenfrequentie is het massaveersysteem met één vrijheidsgraad. Dit houdt in; een blokje met massa gehecht aan een veer die uit de rustpositie wordt gehaald. Het ritme waarin de massa vervolgens gaat bewegen hangt af van de massa (m) en de stijfheid (k) van de veer en is de eigenfrequentie van het object. Figuur 2.2 geeft een voorbeeld van een massaveersysteem.



2.2: Massaveersysteem

Voor een systeem gelijk aan deze kan de bewegingsvergelijking opgesteld worden. Van de opgestelde bewegingsvergelijking kan de radiale hoekfrequentie worden bepaald (ω_0) in $[rad/s]$. Deze hoekfrequentie kan vervolgens worden omgeschreven naar de eigenfrequentie van het systeem:

¹ Gevonden op: <http://shellbuckling.com/presentations/otherTopics/fullsize/gaussiancurvature.png>

² Zie: Marie-Louise Greijmans, *Eigenfrequenties van schalen; Uitbreiding van de ontwerpformule*, TU

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = [\text{Hz}]$$

2.2 Overzicht voorgaande studies

De formule voor de laagste eigenfrequentie van dubbel gekromde panelen wordt inmiddels al jaren onderzocht. Op dit moment ziet de formule er als volgt uit:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Het hele onderzoek is in 2012 begonnen door de heer Moerbeek[7]. Hij heeft gekeken naar de invloed van krommingen op verschillende oppervlaktes, zoals een cilinder of een bol. Hij heeft daaruit kunnen concluderen dat een toename van de dikte staat voor een toename van de eerste eigenfrequentie en een toename van de lengte staat voor een afname van de eerste eigenfrequentie.

In 2013 ging de heer Metselaar[6] voor het eerst naar gekromde panelen kijken. Hieruit volgde een reeks aan formules voor verschillende probleemgevallen. Echter bleek dit niet geschikt in de praktijk vanwege het grote aantal formules.

Mevrouw Scheltema[5] ging in hetzelfde jaar verder met het onderzoek naar de bepaling van een ontwerpformule voor de eigenfrequentie van dubbel gekromde panelen. Zij heeft in het onderzoek de lengte en breedte van de panelen onderling laten verschillen, wat heeft geleid tot een complex probleem. Echter is Scheltema een eind in de goede richting gekomen. In haar onderzoek is uitgegaan van de formule voor een vlak paneel van Blevins:

$$f_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

Aan alle zijden is het paneel scharnierend opgelegd, de vorm is vierkant ($a = b$) en alleen de eerste en dus laagste eigenfrequentie is van belang:

$$\lambda_{i,j} = \pi^2 \left(i^2 + j^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) = 2\pi^2$$

Hieruit ontstaat het eerste deel van de huidige ontwerpformule ($h = t$, $a = l$):

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4}}$$

In een volgend onderzoek is de heer Van Dijk[4] verder gegaan met het ontwikkelen van de ontwerpformule. Hij heeft de invloed van membraankrachten erbij betrokken, wat het volgende resultaat gaf:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\pi^2 \rho} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)^2 + \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{1,06 n_{xy}^2}{100\rho t^4 E}}$$

De heer Noortman[3] is hier in 2015 mee verder gegaan. Hij is hierbij op twee verschillende formules uitgekomen, één voor kromming in x- en y-richting en één voor twist. Hij heeft nog geen formule voor een combinatie gevonden. Mevrouw Greijmans[2] is verder gegaan met het probleem van Noortman. Zij heeft de ontwerpformule in relatie gebracht met de Gauss-kromming. De formule die hieruit voort is gekomen heeft de vorm:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho} + \frac{k_{xx}k_{yy}}{\dots} + \frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho t l^2} - \frac{(1-\nu^2)n_{xy}^2}{71,7\rho Et^4}}$$

De heer Paasman[1] is in 2016 verder gegaan en heeft gekeken naar een aantal situaties met verschillende krommingscombinaties. Zowel synclastische als anticlastische schalen zijn onderzocht. De formule die daarbij is gebruikt, heeft de volgende vorm:

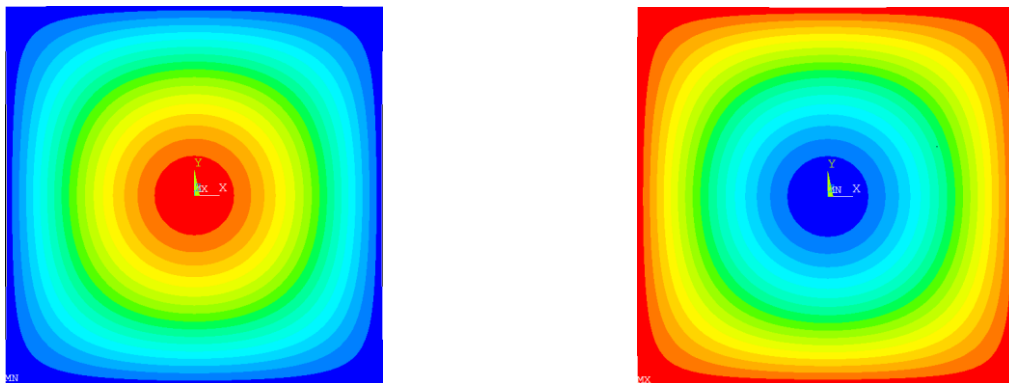
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [A(k_{xx} + k_{yy})^2 + Bk_{xx}k_{yy} + Ck_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Belangrijk om te vermelden is dat het deel van de eigenfrequentie dat wordt veroorzaakt door membraankrachten is weggelaten in de gebruikte ontwerpformule, omdat dit reeds is uitgezocht. Na het uitwerken van de verkregen resultaten en op aanraden van de heer P.C.J. Hoogenboom is uiteindelijk een ontwerpformule verkregen. De formule zoals deze nu bekend is:

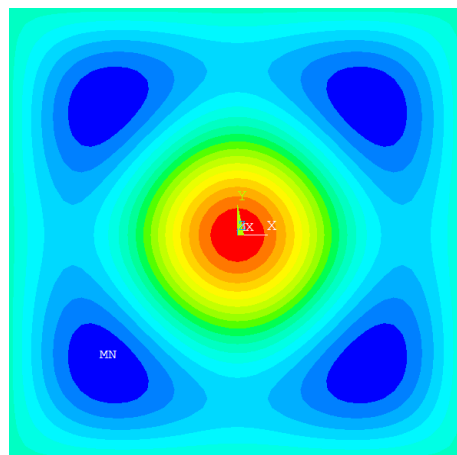
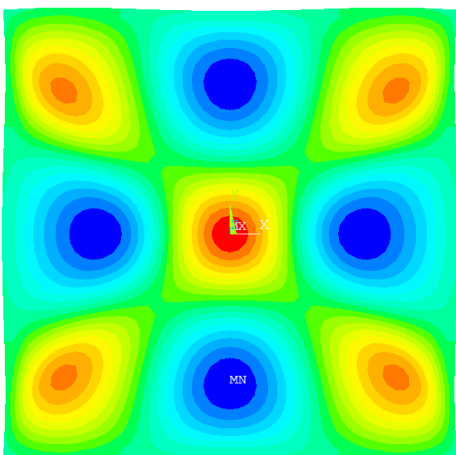
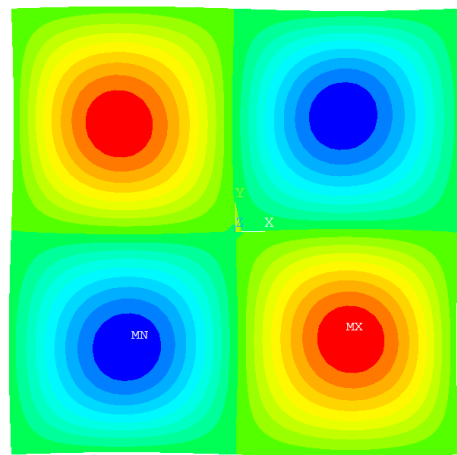
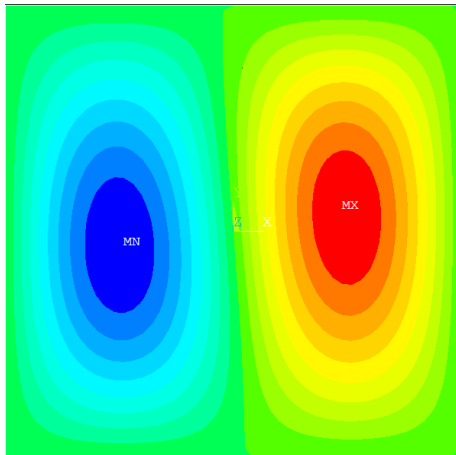
$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

2.3 Trillingsmodi

Een paneel heeft de eigenschap op verschillende manieren te kunnen trillen in de eigenfrequentie. Elke manier van trillen wordt een modus genoemd. Een voorbeeld van een dergelijke modus is een trilling met één buik (dal of heuvel). In de meeste gevallen zal dit de eerste trillingsmodus zijn en dus de laagste eigenfrequentie geven. In de loop van het onderzoek is gebleken dat de trillingsvorm van belang is. In bepaalde situaties heeft de trillingsmodus invloed op de numerieke uitkomst van de eigenfrequenties. In onderstaande figuren vallen een aantal trillingsmodi te zien.



2.3: trilling met 1 buik, positief(links) en negatief(rechts)



2.4: Trilling met 2, 4 en 9 buiken en een complexe trilling

3. Modelling

In dit onderzoek zal er worden gekeken naar het specifieke geval zadelvormige panelen. Er is namelijk gebleken dat panelen in deze vorm niet volledig voldoen aan de huidige ontwerpformule. Zoals al beschreven in de inleiding, zullen er discrepanties ontstaan tussen de numerieke uitkomst van de eigenfrequentie en de uitkomst van de ontwerpformule. Dit doet zich voor als er wordt gevarieerd met verschillende geometrische eigenschappen van een gekromd paneel. In het bijzonder de invloed van de lengte op de laagste eigenfrequentie is goed te onderscheiden. Daarom is gekozen om het onderzoek te starten met een modellering van een standaard paneel met de volgende eigenschappen:

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$E = 2,1E11 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Verder zijn de k_{xx} , k_{yy} en k_{xy} variabel. De k_{xx} en de k_{yy} hebben dezelfde grootte, maar een tegengestelde richting. De lengte heeft ook invloed op de eigenfrequentie bij zadelvormige panelen, daarom is er tevens gekozen voor een variabele $l_x = l_y$. De n_{xx} , n_{yy} en n_{xy} zijn vanwege eerder onderzoek hier buiten beschouwing gelaten

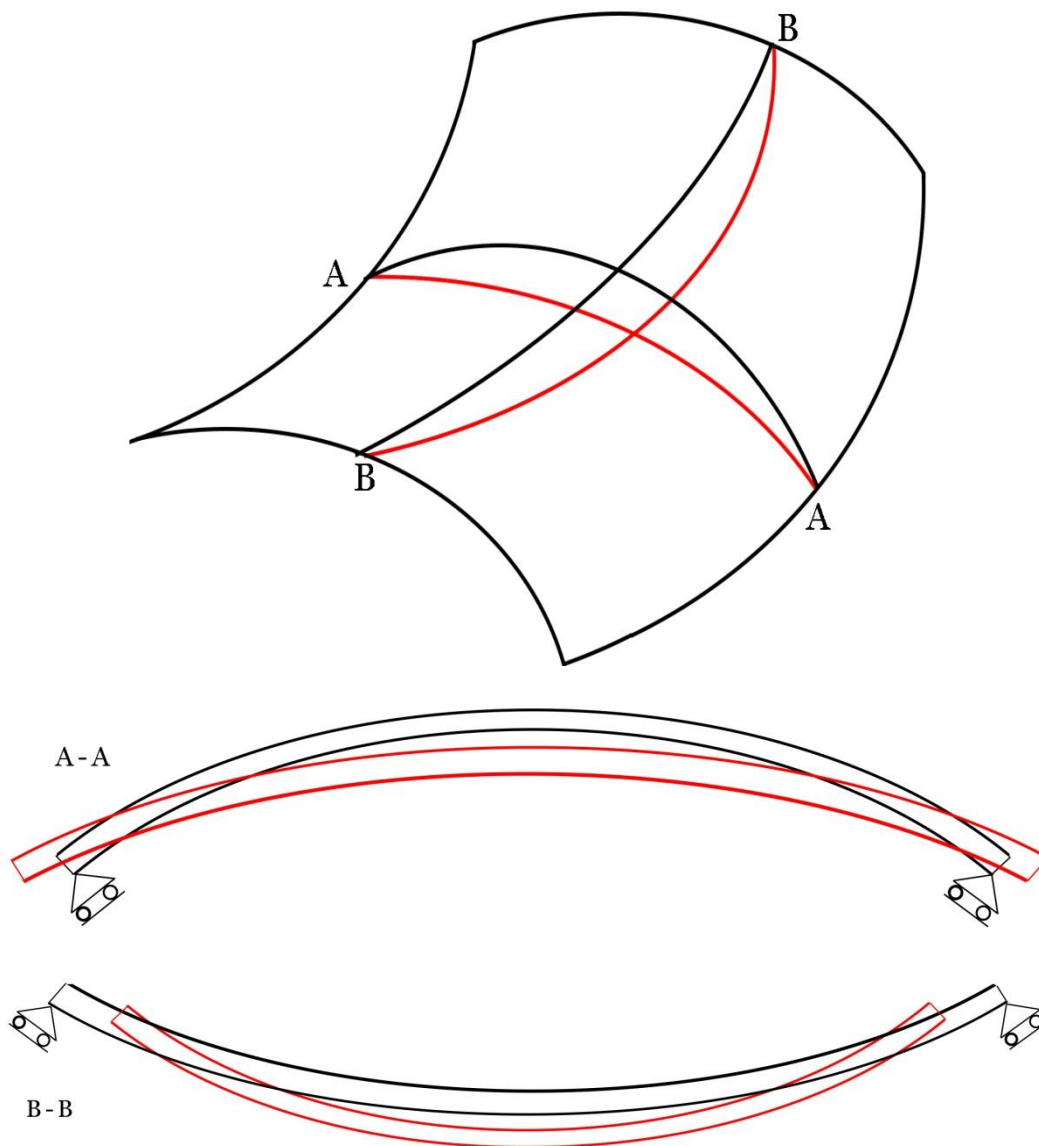
3.1 Script

De opbouw van het Ansys script, zoals het is gebruikt, is te vinden in Appendix A van dit rapport. De volgende stappen zijn genomen in Ansys:

Preprocess: Materiaaleigenschappen, geometrische eigenschappen en het aantal elementen worden hier gedefinieerd. De materiaaleigenschappen hebben een waarde zoals hierboven beschreven. Tevens worden de knopen geplaatst waartussen de elementen van het schaaldeel terecht komen. Per knoop wordt het assenstelsel geroteerd, zodat een lokaal assenstelsel ontstaat. Hierdoor werken de krachten in de richting van het schaaldeel. Er worden randvoorwaarden opgesteld, waardoor er geen verplaatsingen loodrecht op het vlak of in de richting van de randen kan plaatsvinden. In figuur 3.1 zijn de randvoorwaarden afgebeeld. Uit de figuur kan worden afgelezen hoe de randen van het schaaldeel zijn opgelegd.

Solution: Analyse van Ansys. Hiermee worden de trillingskarakteristieken van het gemodelleerde paneel bepaald.

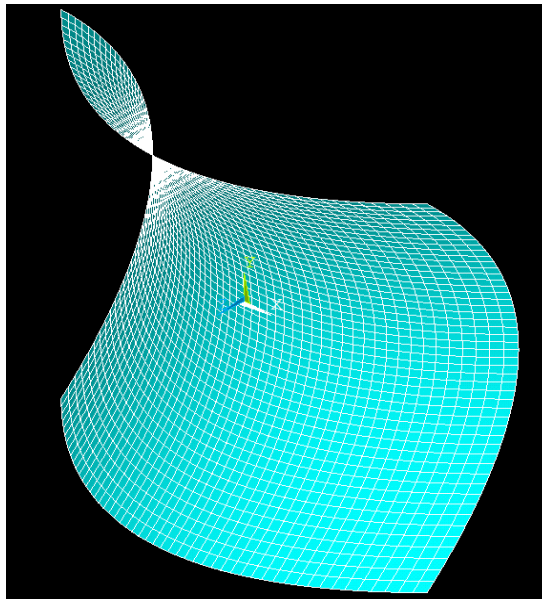
Postprocess: De uitvoer van de analyse wordt gegenereerd, zoals de laagste eigenfrequentie van het paneel. Tevens wordt de trillingsmodus grafisch weergegeven.



3.1: Randvoorwaarden model van een gekromd paneel

In het script is gekozen voor een mesh met 50 elementen in de x- en y-richting om de berekeningen te maken. Dit is in het Bachelor Eindwerk van mevrouw Greijmans al bepaald, waarin zij zegt dat de stap van 50 naar 100 elementen niet meer aan nauwkeurigheid toevoegt.² Zij heeft aangetoond dat bij een aantal van 50 elementen per richting de Ansys eigenfrequentie berekening het meest nauwkeurig overeenkomt met een gemodelleerd vlak paneel. In figuur 3.2 is zichtbaar hoe het model er grafisch in Ansys uitziet.

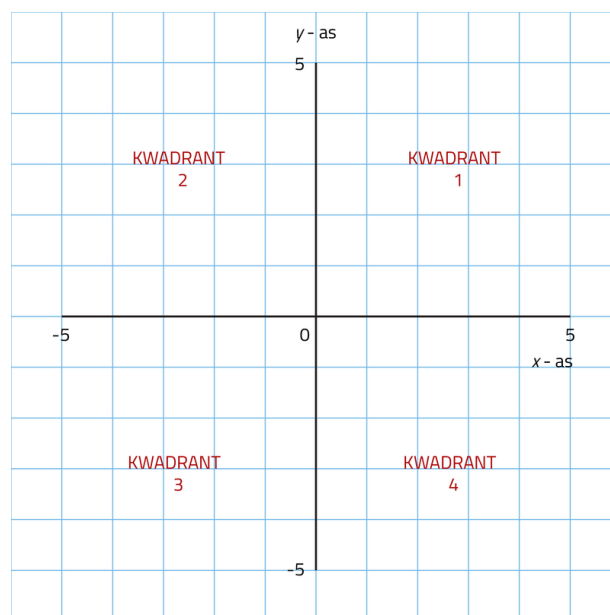
² Zie: Marie-Louise Greijmans, *Eigenfrequenties van schalen; Uitbreiding van de ontwerpformule*, TU Delft, 20 juni 2016



3.2: Model in Ansys

3.2 Kwadranten

Een tweedimensionaal assenstelsel bestaat uit vier kwadranten:

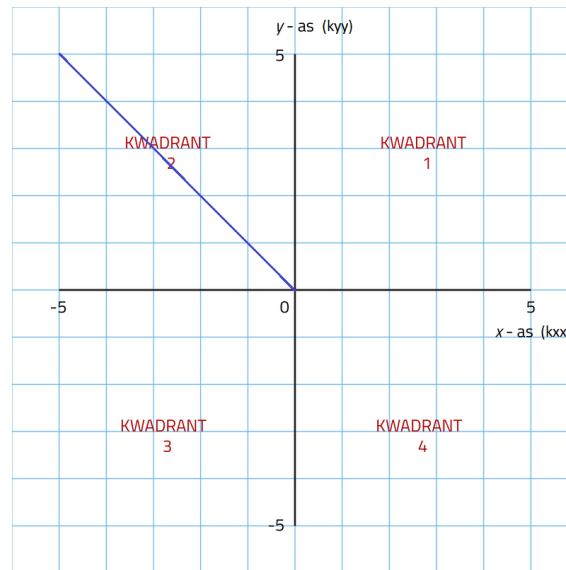


3.3: Kwadranten³

Voor de vorm van de te gebruiken gekromde panelen is het eerste kwadrant gelijk aan het derde kwadrant en het tweede kwadrant gelijk aan het vierde kwadrant. Voor de waarde van de eigenfrequentie maakt het namelijk niet uit hoe het paneel gedraaid is. Er wordt gewerkt met zadelvormige panelen, wat betekent dat de k_{xx} en de k_{yy} even groot en tegengesteld

³ Gevonden op:
<https://www.slimleren.nl/stof/wiskunde/onderwerpen/12.133/Kwadranten+van+het+assenstelsel>

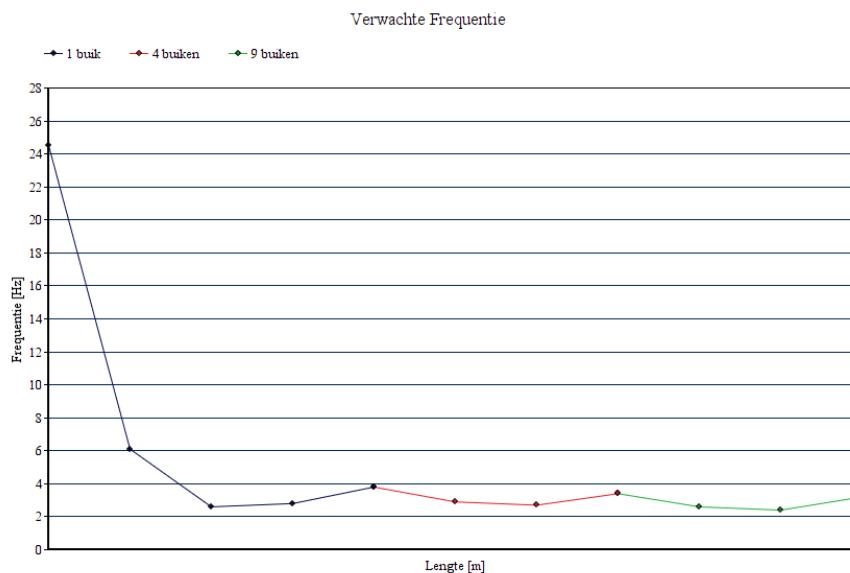
zijn. Dit geeft een situatie, waarbij alleen alles wat op de blauwe lijn ligt in figuur 3.4 beschouwd wordt.



3.4: Kwadranten onderzoeksgebied

3.3 Hypothese

Na observaties in de realiteit is de volgende hypothese ontwikkeld: er zal een volgend fenomeen ontstaan, wanneer de eigenfrequentie van een gekromd paneel wordt uitgezet tegen de lengte.



3.5: Verwachte eigenfrequentie gekromd paneel

Zoals zichtbaar in de grafiek is er tussen verschillende trillingsmodi een duidelijke overgang. Elk gebied van een bepaalde trillingsmodus vormt een dalvorm, waarbij de dalvorm stopt doordat een andere trillingsmodus begint. De minima van alle dalen zullen volgens de hypothese op de zelfde waarde van de eigenfrequentie zitten en bovendien zullen de minima op een gelijke onderlinge afstand voorkomen. In het volgende hoofdstuk zal het veronderstelde fenomeen verder onderzocht worden.

4. Analyse

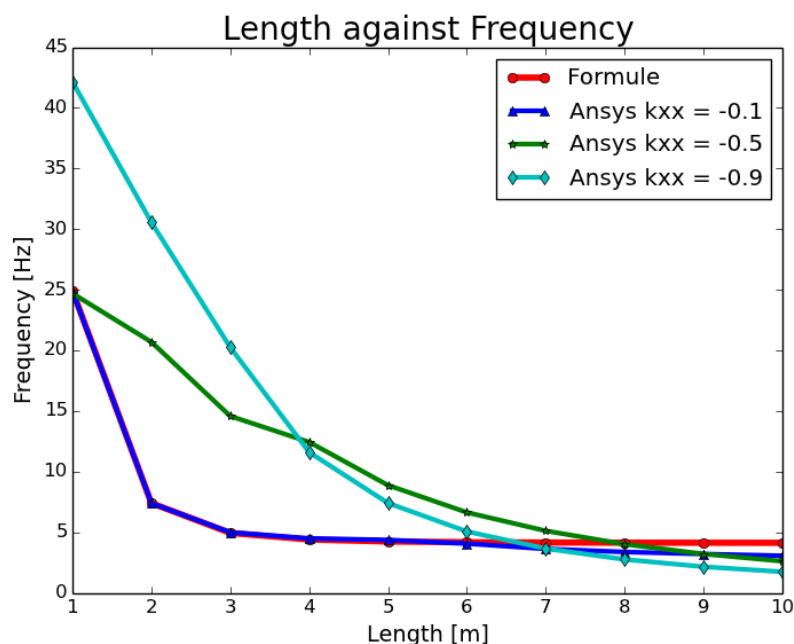
4.1 Lengte versus eigenfrequentie

In de voorgaande hoofdstukken is uitgelegd dat er een aanvulling op de bestaande ontwerpformule wordt gezocht. Deze aanvulling zal worden aangeduid met A .

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + A] \frac{E}{16\pi^2 \rho}} \quad (4.1)$$

Om A te definiëren moeten er verschillende combinaties van krommingen en lengten worden gemodelleerd in Ansys. Daarvoor is er gekozen om een kromming in x- en y-richting van 0,1; 0,5 en 0,9 in absolute zin te gebruiken. Voor de twist k_{xy} is 0,005 aangehouden, doordat in eerdere Bachelor Eindwerken is gewerkt met een twist tussen 0,005 en $0,04 \frac{1}{m}$.

De lengte van het paneel varieert tussen en de 1,0 en 10,0 m. De resultaten zijn te vinden in Appendix B. Als de lengte wordt uitgezet tegen de eigenfrequentie van de gekromde panelen met de drie verschillende krommingen in x- en y-richting, ontstaat de volgende figuur:



4.1: De lengte versus eigenfrequentie uit Ansys en de ontwerpformule met twist van 0,005

Wat opvalt is dat er maar één lijn voor de ontwerpformule in de grafiek is te zien. Dit valt te verklaren door de term $(k_{xx} + k_{yy})^2$ in de huidige ontwerpformule. In het geval van zadelvormige panelen wordt deze term gelijk aan nul, dus ongeacht de grootte van k_{xx} en k_{yy} blijft de eigenfrequentie volgens de ontwerpformule gelijk.

Ook valt de enigszins afwijkende vorm van de grafiek voor een paneel met $k_{xx} = -0,5 \frac{1}{m}$ op. De andere grafieken zetten een geleidelijke daling in, terwijl in dit geval er wat kinken in de grafiek te vinden zijn. Daarnaast lijkt het dat voor alle verschillende krommingen in x- en y-richting de eigenfrequentie bij grotere lengten naar een bepaalde asymptoot gaat of zelfs

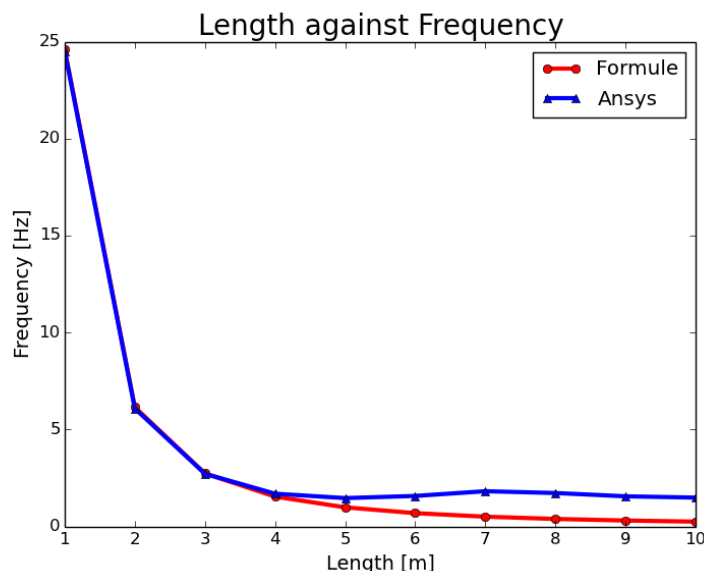
helemaal naar 0. Dit komt niet overeen met de hypothese uit hoofdstuk 3.3. Het lijkt de hypothese van een frequentiegrafiek met verschillende aansluitende dalvormen onderuit te halen.

Uit deze analyse kan worden geconcludeerd dat er een asymptoot gevonden moet worden, waar de verschillende panelen naar toe lopen. Daarom is besloten verder te gaan met kleine krommingen, ondanks de afwijkende grafiek bij $k_{xx} = -0,5 \frac{1}{m}$. In het vervolg zal $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ het uitgangspunt worden. Verdere beargumentatie hiervoor is dat de grote krommingen van deze analyse niet realistisch zijn. Wanneer er panelen van deze grootte (bijvoorbeeld: 10 meter met een kromtestraal van 1,11 meter) zouden worden gemaakt, zal er geen constante kromtestraal meer kunnen worden gerealiseerd.

In eerste instantie zal worden gekeken naar de situatie waarbij de twist 0 is. Hiervoor is gekozen om het ontstane probleem niet te complex te maken en eerst te kijken naar de invloed van alleen de dubbele kromming. Ook worden de eigenfrequenties van de trillingsvormen met 1 buik opgezocht, omdat wordt verwacht dat elke trillingsvorm zijn eigen asymptoot heeft. Voor het resultaat is de trillingsvorm met 1 buik zeer interessant, want de verwachting is dat de ontwerpformule namelijk deze specifieke trillingsvorm zal beschrijven.

4.2 Dubbele kromming met 1 buik

Zoals eerder al is beschreven, zal in eerste instantie de twist k_{xy} op 0 worden gehouden om een eerste indruk te krijgen van wat er precies gebeurt bij zadelvormige panelen. De waarden van de kromming zijn gehouden op $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$, omdat dit als uitgangspositie is gekozen voor de panelen. Als vervolgens weer de lengte wordt uitgezet tegen de eigenfrequentie komt daar figuur 4.2 uit voort.

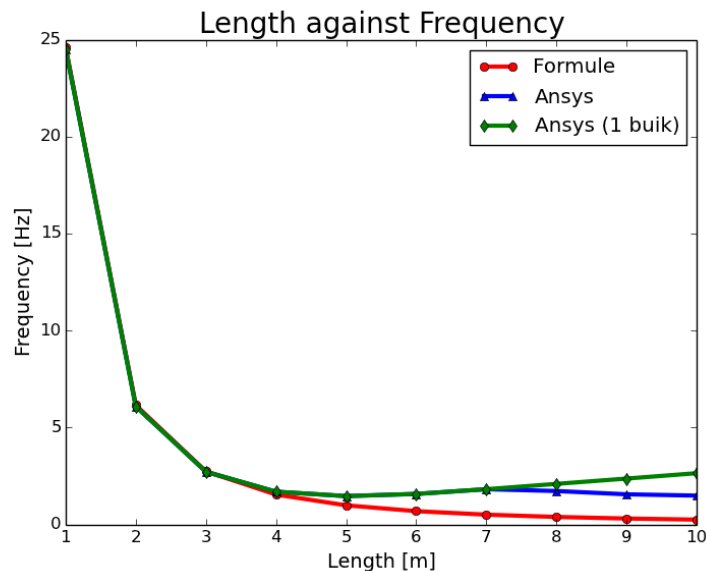


4.2: Lengte tegen de eigenfrequentie voor $k_{xx} = -0,1$

De grafiek van de numerieke berekening uit Ansys geeft meer inzicht in het gedrag van gekromde panelen met oplopende lengte wanneer er een overgang van de ene trillingsvorm naar de andere trillingsvorm is. Vanaf $l = 5 \text{ m}$ loopt de waarde van de eigenfrequentie weer op totdat er tussen $l = 7 \text{ m}$ en $l = 8 \text{ m}$ een overgang is van een trillingsvorm met 1 buik naar

een trillingsvorm met 4 buiken. Vanaf dat moment loopt de waarde van de eigenfrequentie weer af.

Dit doet vermoeden dat de hypothese klopt waarin wordt gesteld dat elke trillingsmodus een apart dal vormt wanneer de lengte tegen de eigenfrequentie wordt uitgezet. Om die reden is bij alle panelen met een lengte waarbij de laagste eigenfrequentie een hogere trillingsmodus heeft, de waarde van de eigenfrequentie opgezocht van de trillingsmodus met 1 buik. Dit is vervolgens bij de grafiek uit figuur 4.2 toegevoegd als plot, wat figuur 4.3 geeft.



4.3: Eigenfrequenties met 1 buik

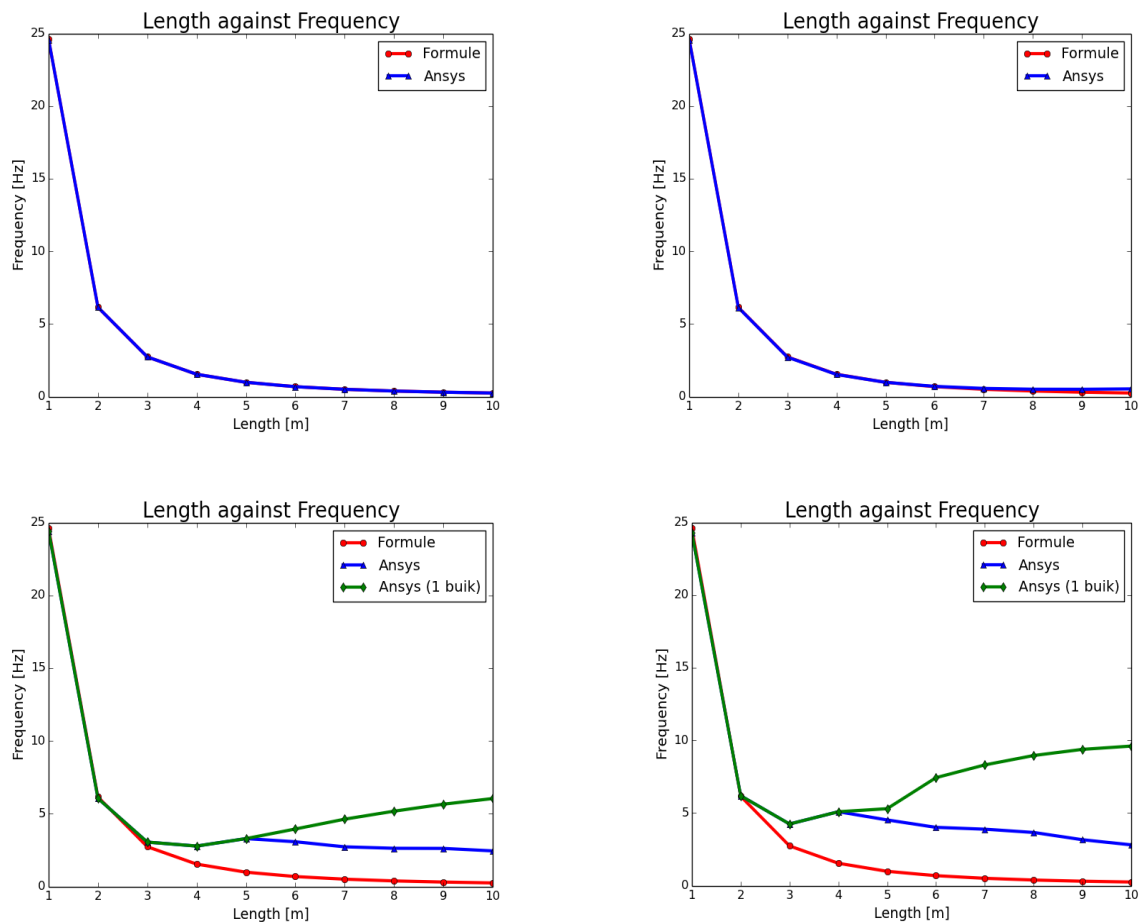
Uit de grafiek kan geconcludeerd worden dat, zoals al werd vermoed, een dalvormige grafiek ontstaat in het geval er naar één trillingsvorm wordt gekeken. Er kan echter niet meteen worden geconcludeerd dat dit voor elke situatie geldt. Daarom zal er voor nog een aantal verschillende dubbele krommingen de lengte worden uitgezet tegen de eigenfrequentie met 1 buik als trillingsvorm. Voor de volgende krommingen zal dat worden gedaan:

$$k_{xx} = -0,01 \frac{1}{m} \text{ en } k_{yy} = 0,01 \frac{1}{m}$$

$$k_{xx} = -0,05 \frac{1}{m} \text{ en } k_{yy} = 0,05 \frac{1}{m}$$

$$k_{xx} = -0,15 \frac{1}{m} \text{ en } k_{yy} = 0,15 \frac{1}{m}$$

$$k_{xx} = -0,2 \frac{1}{m} \text{ en } k_{yy} = 0,2 \frac{1}{m}$$

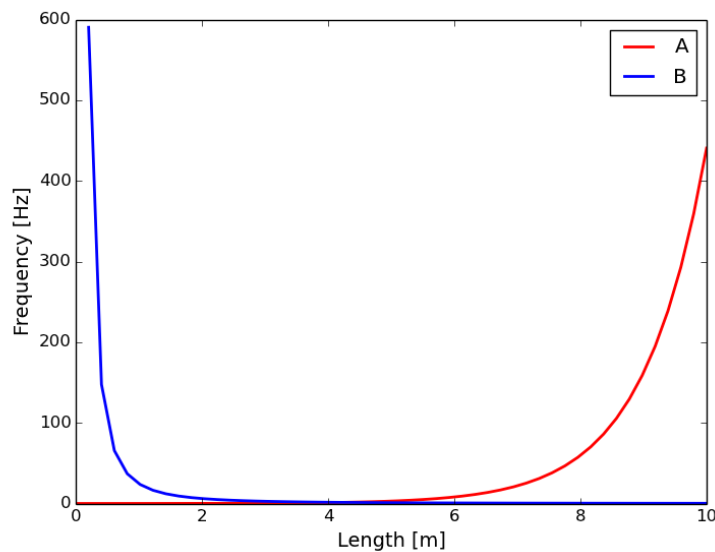


4.4: Eigenfrequenties voor $k_{xx} = -0,01$ (linksboven); $0,05$ (rechtsboven); $0,15$ (linksonder); $0,2$ (rechtsonder)

De data van deze panelen zijn verzameld in Appendix C. Het levert de grafieken op die te zien zijn in figuur 4.4. Er is zichtbaar dat voor de kleine dubbele krommingen er nog geen overgang van een trillingsvorm met 1 buik naar een trillingsvorm met meer buiken zit in het gebied van $l = 1,0 \text{ m}$ tot $l = 10,0 \text{ m}$. Om te kunnen concluderen of het 'dalvorm' effect ook hier geldt, zou eventueel de lengte verder op kunnen lopen. Bij de grotere dubbele krommingen is wel het 'dalvorm' effect te zien. Bij $k_{xx} = -0,2 \frac{1}{m}$ zijn er wat kinken, maar de opwaartse gang van de frequentie is duidelijk zichtbaar.

Er is besloten dat dit een uitgangssituatie biedt voor het vinden van een resterend deel van de ontwerpformule. De ontwerpformule zal dan de waarde voor de eigenfrequentie van de trillingsvorm met 1 buik beschrijven. Belangrijk hierbij is, dat dit niet te allen tijde de laagste eigenfrequentie is. Door het dalvorm effect kan in theorie dan voor elke trillingsvorm de laagst mogelijke eigenfrequentie bepaald worden.

De uitbreiding op de ontwerpformule zal het verschil tussen de huidige formule en de resultaten uit Ansys met 1 buik moeten opvullen. De uitbreiding wordt *A* genoemd. De bestaande formule wordt *B* genoemd, zichtbaar in figuur 4.5 hieronder.



4.5: Ontbrekende deel A van de ontwerpformule

De ontwerpformule zal er uitzien als formule (4.1). Hieruit kan A afgeleid worden. De term voor A wordt als volgt:

$$A = \frac{f_{ansys}^2 - \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4}}{\frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

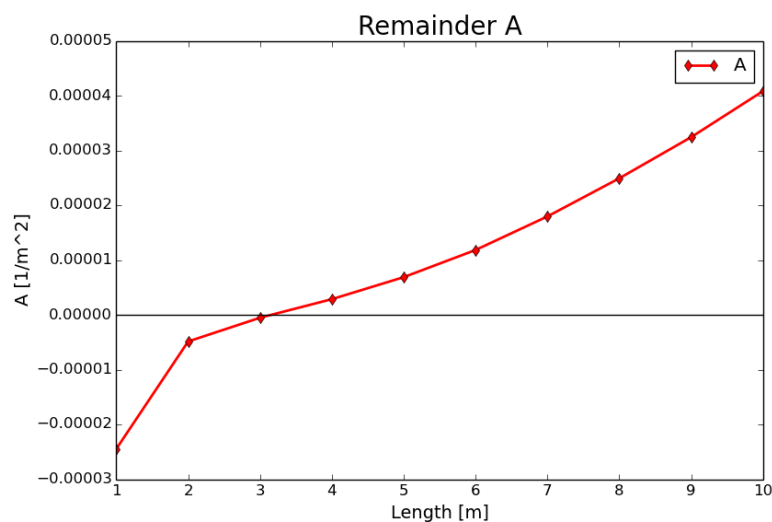
De eigenfrequentie is afhankelijk van de krommingen van het paneel. Dat zorgt er voor dat er een term bij moet komen, waarin de kromming in de x-richting, de y-richting of beide richtingen aanwezig is. In dat geval blijft alleen over dat A in de vorm van ofwel $A \sim k^3 l$ of $A \sim k^4 l^2$ of $A \sim k^6 l^4$ zal moeten zijn. De term A moet als eenheid $\left[\frac{1}{m^2}\right]$ hebben vanwege de huidige formule. Alle vormen voldoen hieraan.

4.3 Term A

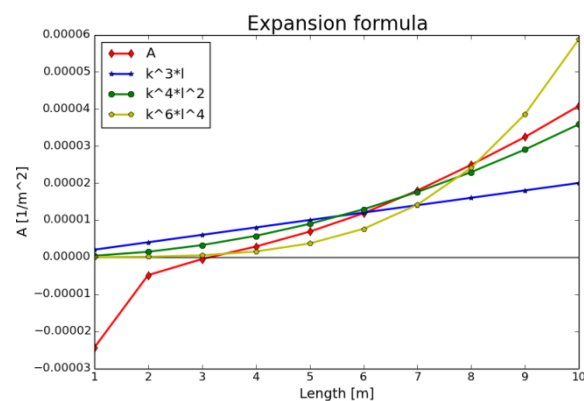
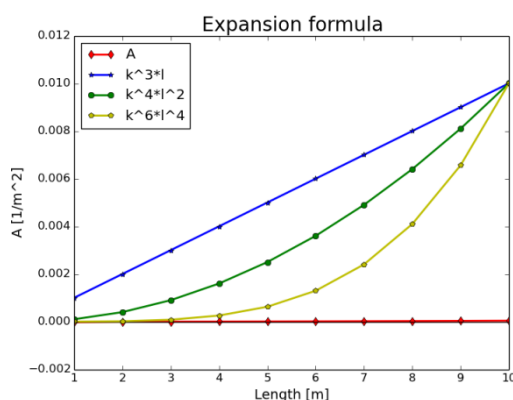
Om de missende term A in de ontwerpformule voor de eigenfrequentie te kunnen bepalen, is bij alle verschillende panelen, die eerder numeriek berekend zijn, de waarde van A bepaald. Tevens is bij al deze panelen bepaald wat de waarde is van $k^3 l$, $k^4 l^2$ en $k^6 l^4$, zodat deze allen vergeleken kunnen worden met de uitkomsten voor de waarde van A . In figuur 4.6 is het gedrag van A te zien voor een situatie met $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$. Bij panelen met een kleine lengte en breedte is A vaak kleiner dan 0. De eigenfrequentie verkregen uit Ansys is voor kleine afmetingen namelijk altijd kleiner dan de eigenfrequentie uit de huidige ontwerpformule. In de grafiek kan dit een erg groot verschil lijken met de A bij grotere afmetingen, maar het gaat om een waarde in de orde 10^{-5} onder nul. Voor het vinden van de beste fit zijn per paneel vooral de punten A boven nul van belang. Deze punten vertonen een bepaalde trend, en bij kleine afmetingen is de huidige formule nog binnen de eerder gestelde toelaatbare foutmarge. De foutmarge begint op te lopen bij grotere afmetingen, voor deze afmetingen moet dan ook een correctie gevonden worden.

Om te kunnen ontdekken of k^3l of k^4l^2 of k^6l^4 deze vorm van A kunnen weergeven en dus de correctie kunnen zijn, zijn de waarden hiervan ook uitgezet in de grafiek. Dit is te zien in figuur 4.7-1.

Uit deze grafiek valt te concluderen dat zowel de k^3l , de k^4l^2 en de k^6l^4 nog een factor afzitten van A . Daarom zal er gecorrigeerd moeten worden met een nog onbekende factor. Om een schatting van deze factor te verkrijgen, is geprobeerd om A te delen door k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 . Dit is gedaan voor alle onderzochte panelen. Deze resultaten zijn te vinden in Appendix D. Als voorbeeld staat de situatie met $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ uitgezet in figuur 4.7-2. Uit deze figuur kan worden afgelezen dat de vorm van de missende term A overeenkomt met de vorm van k^4l^2 . De term A heeft namelijk een kwadratisch verloop en het verloop van k^6l^4 komt daarbij minder goed overeen dan k^4l^2 . De schatting die is gedaan van de correctiefactor zit tussen de $\frac{1}{270}$ en $\frac{1}{280}$, dit is geen nauwkeurige bepaling. Daarvoor zal uitgebreider onderzoek moeten worden gedaan.⁴



4.7: De lengte uitgezet tegen A met $k_{xx} = -0,1$



4.6: 1 - Verhouding k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 t.o.v. A ; 2 - k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 met een correctiefactor t.o.v. A

⁴ Alle grafieken zijn voor $k_{xx} = -0,1$. Voor alle eerder genoemde krommingscombinaties zijn tevens dezelfde grafieken opgesteld. Hieruit kan hetzelfde worden geconcludeerd.

De conclusie die nu getrokken kan worden is dat A er als volgt uitziet: $C(k_{xx}k_{yy})^2 l^2$. Waarbij alleen de constante C nog ongedefinieerd is. De term kan voorlopig alleen op deze manier geschreven worden wanneer: $k_{yy} = -k_{xx}$. Met behulp van kwadratische regressie zal constante C bepaald worden.

4.4 Kwadratische regressie

Regressie is een statistische techniek voor een analyse van data, waarbij een mogelijke samenhang zit tussen de datapunten. Bij kwadratische regressie wordt een term gezocht in de vorm van: $ax^2 + bx + c$. Deze term geeft de beste fit voor een reeks aan datapunten. In dit geval wordt term $C(k_{xx}k_{yy})^2 l^2$ bepaald, dus zal alleen ax^2 afdoende zijn. Hierin word l voor x gesubstitueerd. Dit betekent dat a de term voor $C(k_{xx}k_{yy})^2$ zal worden.

Voordat kwadratische regressie kan worden toegepast, moet worden besloten of dit zal worden toegepast per paneel, of dat alle resttermen A samen worden genomen en er een kwadratische regressie wordt toegepast op alle datapunten tegelijk. Het toepassen per paneel heeft als nadeel dat achteraf alle verschillende termen C gemiddeld moeten worden tot een definitieve term C . Het nadeel van alle resttermen A samen nemen is dat de verschillende termen ook verschillende krommingen met zich meebrengen. De vorm $C(k_{xx}k_{yy})^2 l^2$ brengt problemen met zich mee. Term a in ax^2 voor de kwadratische regressie behoort een constante te zijn, maar door de uiteenlopende krommingen in x-en y-richting zal de term niet constant zijn.

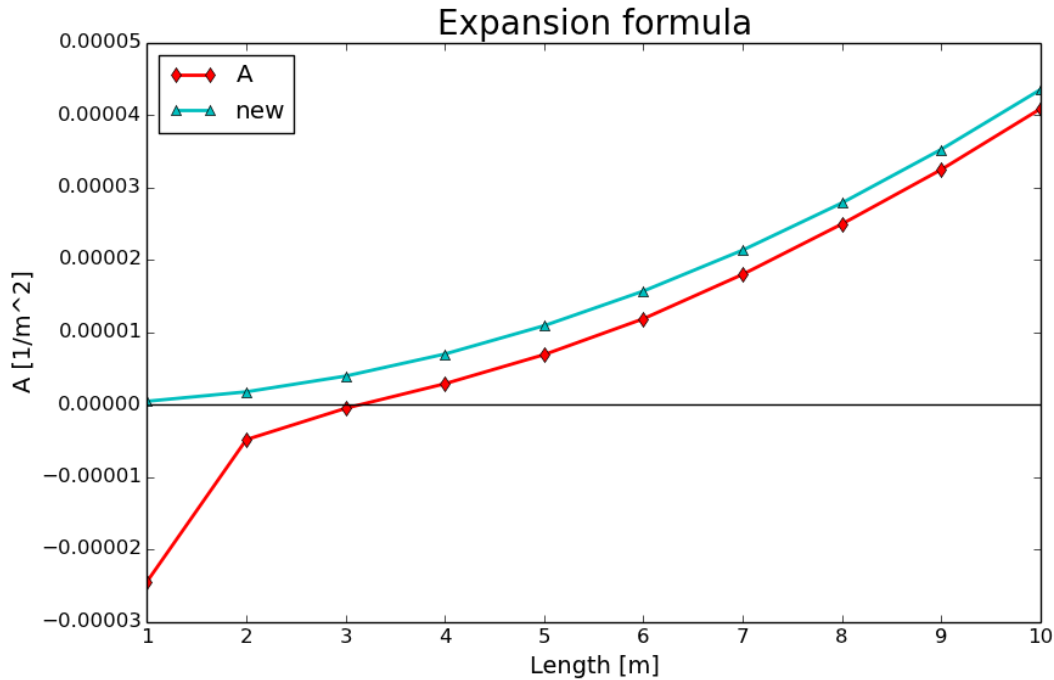
Vanwege de grotere nadelen bij het gebruik van alle resttermen A tegelijkertijd, is besloten om voor elk gekromd paneel afzonderlijk de beste fit te vinden. Waarna alle constanten C worden gemiddeld. Deze waarde wordt de uiteindelijke constante C .

De beste fit voor de data punten is gezocht voor de volgende panelen:

1. $k_{xx} = -0,01 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,01 \frac{1}{m}$
2. $k_{xx} = -0,05 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,05 \frac{1}{m}$
3. $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$
4. $k_{xx} = -0,15 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,15 \frac{1}{m}$
5. $k_{xx} = -0,2 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,2 \frac{1}{m}$

Bij al deze panelen loopt de lengte van 1 m tot 10 m en is de $k_{xy} = 0 \frac{1}{m}$.

Per geval is gekeken vanaf welk gebied qua lengte de kwadratische regressie toegepast moet worden om een fit te krijgen die het best overeen komt met de parabolische vorm van A . Dit is in de meeste gevallen uitgevallen als het gebied met als beginwaarde de lengte waarbij A groter dan 0 wordt tot aan lengte 10 m . Vanaf dit punt vertonen vrijwel alle grafieken een parabolisch verloop. In Appendix E is de gebruikte tabel met $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ voor deze kwadratische regressie getoond en zijn de grafieken van de overige krommingscombinaties te vinden. In afbeelding 4.8 is het resultaat van de kwadratische regressie te zien voor $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$.



4.8: Resultaat van kwadratische regressie bij $k_{xx}=-0,1$

De volgende formules zijn gebruikt voor kwadratische regressie:

$$B = \Sigma l^2 - \frac{(\Sigma l)^2}{n}$$

$$C = \Sigma(l * A) - \frac{\Sigma l * \Sigma A}{n}$$

$$D = \Sigma l^3 - \frac{\Sigma l * \Sigma l^2}{n}$$

$$E = \Sigma l^4 - \frac{(\Sigma l^2)^2}{n}$$

$$F = \Sigma(l^2 * A) - \frac{\Sigma l^2 * \Sigma A}{n}$$

$$a = \frac{C * D - B * F}{D^2 - B * E}$$

Dit resulteert voor $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$ in een $a = 4,34673647167e - 07$.

Vervolgens moet deze waarde a nog gedeeld worden door $(k_{xx}k_{yy})^2$ om constante C te vinden. In tabel 4.1 zijn voor alle vijf de gekromde panelen de gevonden waarden voor C uitgezet.

Paneel	Constante C
1	0.000996632
2	0.002438361
3	0.004346736
4	0.003911236
5	0.003757336

Tabel 4.1: Constante C per paneel

Alle berekeningen voor de afzonderlijke panelen zijn geprogrammeerd in Python. Het gebruikte script is afgebeeld in Appendix F. De opzet van dit script kan voor elk bekeken paneel worden gebruikt.

4.4.1 $k_{xx} = -0,01$

Uit de analyse kan worden opgemerkt dat de constante C voor $k_{xx} = -0,01 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,01 \frac{1}{m}$ erg afwijkt van de andere panelen. Dit kan worden verklaard door het feit dat de huidige ontwerpformule in deze situatie al binnen de foutmarge ligt; bij dit paneel is de kromming zo klein dat het bijna gezien kan worden als een vlakke plaat. De formule voor een vlakke plaat bestaat al, dit is namelijk het eerste deel van de ontwerpformule voor gekromde panelen:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4}}$$

Tevens is de term A bij het grootste deel van de afmetingen negatief in de orde 10^{-9} ; dit is bijna verwaarloosbaar. Daarom is besloten om bij de bepaling voor de uiteindelijke constante C niet de waarde voor C bij $k_{xx} = -0,01 \frac{1}{m}$ mee te nemen. De eigenfrequentie voor een paneel met een dergelijke kromming zal namelijk ongeacht de gekozen waarde voor C bij gebruik van de nieuwe formule gemakkelijk binnen de foutmarge van 20% vallen. Doordat de gegevens al voldoen aan de gestelde eisen, zijn deze niet meer relevant voor het bepalen van een C .

4.4.2 Definitieve constante C

De volgende stap is het bepalen van de constante C . De gevonden waarden voor constante C bij de verschillende panelen zullen worden gemiddeld:

$$C_{def} = \frac{0,002438361 + 0,004346736 + 0,003911236 + 0,003757336}{4} = 0,003613417$$

Nu er een waarde is gevonden voor constante C kan de uitbreiding worden toegevoegd aan de huidige ontwerpformule. Omdat een groot decimaal getal niet netjes staat in de ontwerpformule, zal C_{def} worden omgeschreven naar: $0,003613417 = \frac{1}{276,75}$. Dit geeft de nieuwe ontwerpformule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}]} \frac{E}{16\pi^2 \rho}$$

De manier waarop de nieuwe term in ontwerpformule is geschreven, kan voor verwarring zorgen. Om verwarring te voorkomen moet de lezer erop attent zijn dat de term alleen nog maar gebruikt kan worden voor zadelvormige panelen. Dat houdt dus in dat op dit moment alleen panelen, die in kwadrant 2 en 4 zitten op de lijn die deze kwadranten spiegelt, eventueel gebruik kunnen maken van de nieuwe ontwerpformule met de extra term. Of de nieuwe ontwerpformule tevens van toepassing zal zijn op kwadrant 1, 3 en de rest van kwadrant 2 en 4 zal in verder onderzoek nog moeten worden bepaald.

Om na te gaan of de ontwerpformule voor deze situatie in kwadrant 2 (en 4) klopt, zullen de resultaten uit Ansys worden afgezet tegen de resultaten met de nieuwe ontwerpformule. Hierover valt meer te lezen in het volgende hoofdstuk 4.5.

4.5 Bruikbaarheid nieuwe ontwerpformule

De nieuwe ontwerpformule zal worden getest op bruikbaarheid en de gestelde eisen door de nieuwe ontwerpformule te testen op de gebruikte gekromde panelen binnen de gestelde foutmarge van 20%. Dit zal worden gedaan op de situatie zonder twist en tevens op een situatie met twist.

4.5.1 Zonder twist

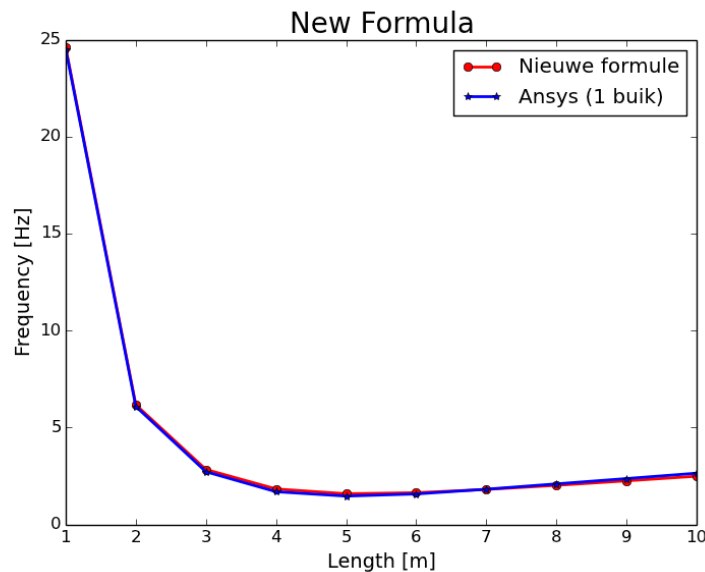
De opvallende resultaten voor de situatie zonder twist zijn uitgezet in tabel 4.2. Een tabel met alle resultaten is te vinden in appendix G

Kromming	Lengte	Ansys (1 buik)	Nieuwe Formule	Foutmarge
-0.05	1	24.5588	24.58582303	0.110034001
	2	6.12853	6.147681064	0.312490341
	3	2.71467	2.738044442	0.861041749
	4	1.52352	1.556399775	2.158145271
	5	0.98134	1.030911828	5.051442712
	6	0.704251	0.777259454	10.36682291
	7	0.564316	0.662734622	17.44033882
	8	0.507565	0.626437695	23.42019148
	9	0.503198	0.634049605	26.00399933
	10	0.530096	0.665601921	25.56252476

Tabel 4.2: Resultaten nieuwe formule bij $k_{xx}=-0,05$ met foutmarge t.o.v. resultaten uit Ansys met trillingsvorm van 1 buik

In Appendix G kan worden afgelezen dat vrijwel alle resultaten binnen de foutmarge van 20% zitten. Zoals afgelezen kan worden uit tabel 4.2 zijn bij een kromming van $k_{xx} = -0,05 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,05 \frac{1}{m}$ de laatste resultaten boven de 20%. Dit is opvallend, maar komt doordat de constante C een enigszins te grote waarde heeft. Echter is er geen waarde voor C te vinden waarbij alle foutmarges van de verschillende panelen binnen de 20% foutmarge zitten. Deze discrepantie kan worden getolereerd doordat de maximale fout 26% is en pas optreedt bij een afmeting van $9 \times 9 m$, een maat die in de praktijk niet snel gebruikt zal worden.

De nieuwe ontwerpformule wordt tevens grafisch vergeleken met de resultaten uit Ansys. In figuur 4.9 is het resultaat te zien voor: $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$. Er kan geconcludeerd worden dat de nieuwe ontwerpformule en de resultaten uit Ansys goed overeen komen.



4.9: Nieuwe ontwerpformule t.o.v. Ansys met 1 buik zonder twist

4.5.2 Met twist

De nieuwe ontwerpformule is ook getest voor de situatie waarbij er twist optreedt in de gekromde panelen. Er is gekeken naar panelen met een twist tussen $0,005 \frac{1}{m}$ en $0,04 \frac{1}{m}$. In het Bachelor eindwerk van de heer Paasman is een maximale twist van $0,04 \frac{1}{m}$ bepaald als bruikbaarheidsgrens.

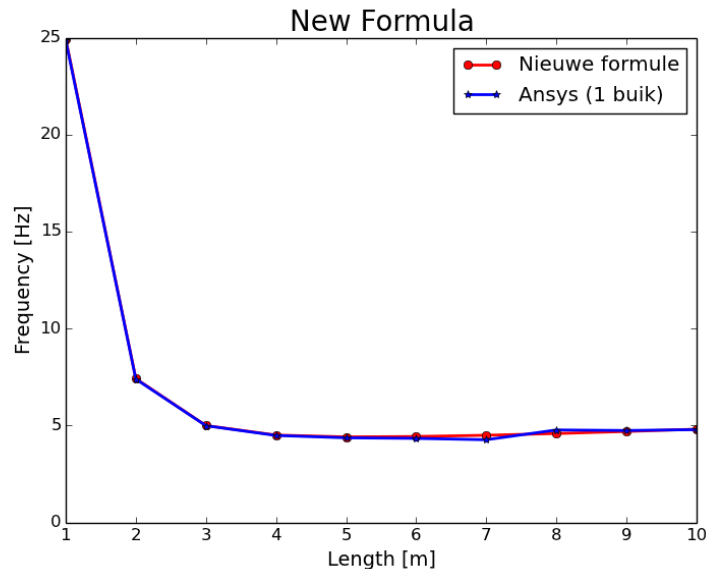
De volgende zadelvormige panelen zijn onderzocht:

$k_{xx} \left[\frac{1}{m} \right]$	$k_{yy} \left[\frac{1}{m} \right]$	$k_{xy} \left[\frac{1}{m} \right]$	Lengte [m]
-0.05	0.05	0.005	1-10
-0.1	0.1	0.005	1-10
-0.15	0.15	0.005	1-10
-0.2	0.2	0.005	1-10
-0.1	0.1	0.02	1-10
-0.1	0.1	0.04	1-10

Tabel 4.3: Onderzochte panelen met twist

Naarmate de twist groter wordt en de lengte toeneemt, zijn er geen trillingsvormen meer te onderscheiden die duidelijk één buik hebben, zoals in figuur 2.2 en 2.3. Dit is erg goed te verklaren doordat er niet alleen in x- en y-richting maar ook diagonaal (xy) een kromming optreedt. Deze krommingen zorgen er voor dat er bij grote afmetingen veel discrepanties optreden in de trillingsvorm. Dit maakt het lastig te onderscheiden of de trillingsvorm één buik heeft. Om deze reden zijn de gevonden resultaten in Ansys bij twist $0,02 \frac{1}{m}$ en $0,04 \frac{1}{m}$ bij grote afmetingen minder nauwkeurig. Deze resultaten zijn wel afgezet tegen de resultaten met de nieuwe ontwerpformule. Dit zou namelijk, in het geval dat de formule correct is, nog

steeds overeen moeten komen. Alle resultaten zijn uitgezet in een tabel, die te vinden is in Appendix H. Al deze resultaten vallen binnen de 20% foutmarge. De nieuwe ontwerpformule is grafisch afgebeeld t.o.v. de eigenfrequenties uit Ansys met 1 buik in figuur 4.10 voor de situatie: $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{xy} = 0,005 \frac{1}{m}$.



4.10: Nieuwe ontwerpformule t.o.v. Ansys met 1 buik met $k_{xy} = -0,005$

4.5.3 Verschillende parameters uitgezet tegen A

Een andere methode om de nieuwe ontwerpformule te controleren is om verschillende parameters uit te zetten tegen A. De volgende parameters zullen worden onderzocht:

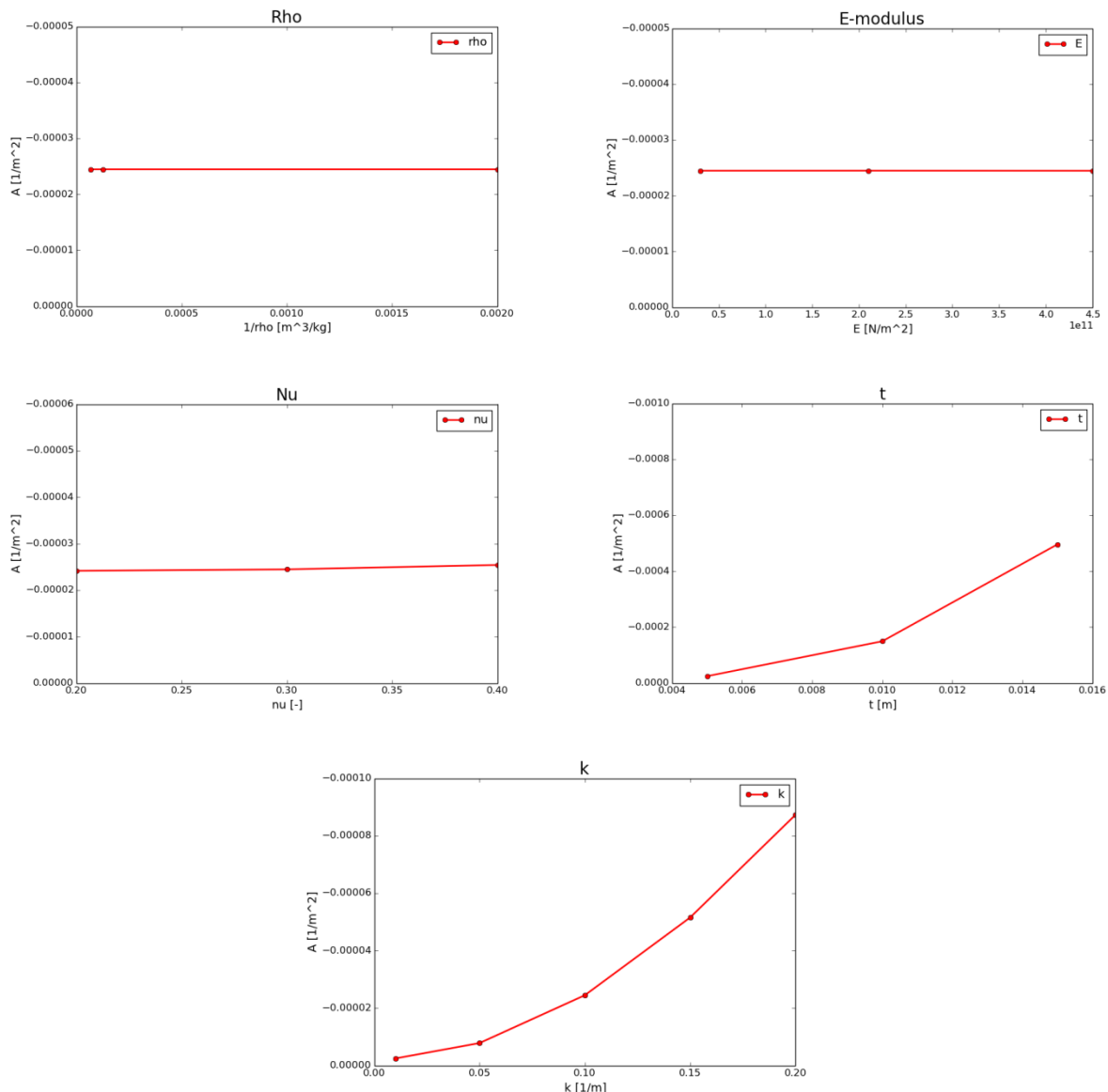
E, ρ, ν, t en k

De nieuwe ontwerpformule heeft de volgende vorm:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Volgens deze formule zouden de volgende grafische verlopen moeten ontstaan:

- $A \sim E$: constant verloop
- $A \sim \frac{1}{\rho}$: constant verloop
- $A \sim \nu$: constant verloop
- $A \sim t$: constant verloop
- $A \sim k$: kwadratisch verloop



4.11: Parameters ρ , E-modulus, ν , t en kromming k afgezet tegen term A

In figuur 4.11 zijn alle grafieken uitgezet.

Uit de grafieken is op te maken dat de verwachting voor E , ρ , ν en k klopt; deze grafieken hebben een constant verloop. Het verloop van t tegen A is niet constant en lijkt zelfs kwadratisch, tegen de verwachtingen in. Het suggereert een ander verband tussen A en dikte t . Dit zou vanwege het kwadratische verloop eventueel een verband van de vorm $Ck^6l^2t^2$ kunnen zijn, waarin C een constante is. Hier zal echter geen verder onderzoek meer naar worden gedaan tijdens dit Bachelor Eindwerk.

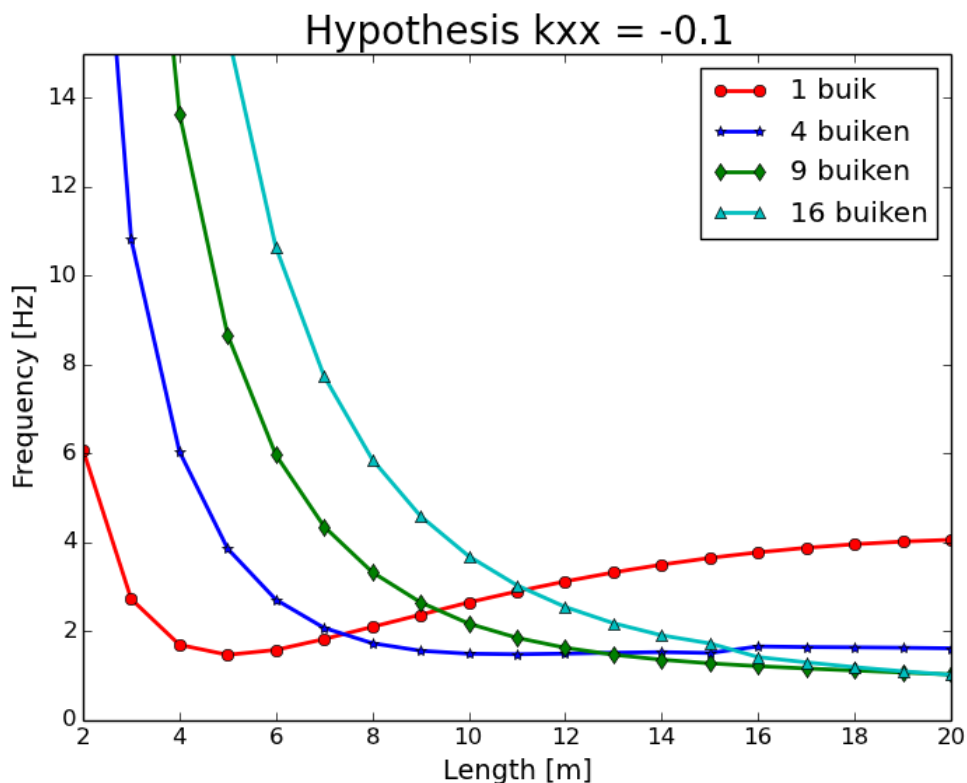
4.6 Dalvorming

In hoofdstuk 3.3 is al verwezen naar de hypothese dat er dalvormen optreden in de grafiek voor de eigenfrequentie, wanneer de lengte wordt uitgezet tegen de eigenfrequentie. Om dit te onderzoeken is er een testpaneel genomen en zijn van dit paneel de eigenfrequenties bij verschillende trillingsvormen opgezocht. Het paneel heeft de volgende eigenschappen:

- $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,1 \frac{1}{m}$ en $k_{xy} = 0 \frac{1}{m}$
- *Lengte*: 1 – 20 m

Verder zijn alle eigenschappen hetzelfde gehouden als opgesteld in hoofdstuk 3.

De resultaten uit Ansys zijn te vinden in Appendix I. Figuur 4.12 laat zien hoe de resultaten er grafisch uitzien:



4.12: Dalvorming bij $k_{xx}=-0,1$

Volgens de hypothese zouden de minima van alle grafieken voor de verschillende trillingsvormen op eenzelfde hoogte moeten zitten en op gelijke afstand l van elkaar moeten liggen.

Uit de bovenstaande grafiek kan worden geconcludeerd dat deze hypothese geldt voor de grafieken voor 1 buik en 4 buiken. Deze minima liggen op een afstand l van ongeveer 5,0 m van elkaar en hebben een frequentie van rond de 1,45 Hz. Echter geldt dit niet meer voor de situatie met 9 en 16 buiken. De eigenfrequentie van 9 buiken blijft dalen tot de opgestelde grens van het gebied van 20,0 m en ligt daar op een waarde van 1,02 Hz. Bij 16 buiken is de eigenfrequentie dan nog niet zijn laagste waarde genaderd. Er kan wel gezegd worden dat de hypothese uit hoofdstuk 3.3 (voorlopig) bevestigd wordt. Voor de eerste twee trillingsvormen loopt alles helemaal als verwacht, maar daarna zijn de minima niet meer even hoog en liggen de minima niet op een vaste afstand van elkaar. Dit gebeurt echter pas in het gebied waar door de grote lengte de kromming niet meer constant is. Er zal in een volgend onderzoek kunnen worden gekeken naar meer oorzaken van dit verschijnsel, zodat de hypothese al dan niet volledig bevestigd kan worden.

5. Conclusie & aanbevelingen

5.1 Conclusie

In het begin van dit onderzoek is er een hoofdvraag opgesteld en één deelvraag. Tijdens het onderzoek is er getracht antwoorden te vinden op deze vragen.

Hoofdvraag - Is het mogelijk om de bestaande formule voor de laagste eigenfrequentie uit te breiden, zodat de formule tevens te gebruiken is voor zadelvormige panelen, met een maximale foutmarge van 20%?

Uit het onderzoek is gebleken dat dit wel degelijk mogelijk is. Belangrijk hierbij is dat de uitbreiding voor de ontwerpformule niet vanzelfsprekend de laagste eigenfrequentie zal geven. De nieuwe ontwerpformule zal namelijk de eigenfrequentie geven met een trillingsmodus met 1 buik. Vanwege het tevens onderzochte dalvorm effect zou dit kunnen betekenen dat de laagste eigenfrequentie met 1 buik ten opzichte van de lengte tevens de laagste eigenfrequentie is bij andere trillingsvormen. Dit kan nog niet met zekerheid gezegd worden.

Een andere kanttekening is, dat er bij een $k_{xx} = -0,05 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,05 \frac{1}{m}$ met $k_{yy} = 0 \frac{1}{m}$ bij grotere afmetingen een foutmarge van boven de 20% ontstaat. Er is gebleken dat er geen uitbreiding op de formule is te vinden waarbij voor elk paneel met elke krommingscombinatie de foutmarge binnen de 20% blijft. Desalniettemin is er voor gekozen om de gevonden uitbreiding aan de ontwerpformule voor zadelvormige panelen toe te voegen. Voor de zadelvormige panelen met andere krommingen zit de nieuwe ontwerpformule namelijk wel binnen de 20% foutmarge.

De eigenfrequentie voor een zadelvormig paneel met trillingsmodus 1 buik kan daarom beschreven worden door de volgende ontwerpformule:

$$f_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^2}{\rho l^4} + [(k_{xx} + k_{yy})^2 + 4k_{xy}^2 + \frac{(k_{xx}k_{yy})^2 l^2}{276,75}] \frac{E}{16\pi^2 \rho}}$$

Discussie

De gevonden ontwerpformule kan (voorlopig) alleen gebruikt worden voor de onderzochte panelen in dit Bachelor Eindwerk waarbij geldt: $k_{yy} = -k_{xx}$. Echter zijn er geen bruikbaarheidsgrenzen gevonden. Om die reden zal er met voorzichtigheid gebruik moeten worden gemaakt van de ontwerpformule wanneer andere krommingscombinaties gebruikt worden. Wanneer naar panelen in het 1^e en 3^e kwadrant gekeken wordt, kan men niet vanzelfsprekend de nieuwe ontwerpformule gebruiken, aangezien dit eerst onderzocht zal moeten worden.

5.2 Aanbevelingen

In een volgend onderzoek naar de ontwerpformule voor de eigenfrequentie bij gekromde panelen zijn er een aantal punten die nog onderzocht kunnen worden. Ten eerste is het aan te raden om de gevonden ontwerpformule te testen met andere krommingen, materiaaleigenschappen en geometrische eigenschappen dan onderzocht in dit Bachelor Eindwerk. Door hier onderzoek naar te doen, kunnen tegelijkertijd bruikbaarheidsgrenzen opgesteld worden. Aan te raden is om de bruikbaarheidsgrenzen op te zoeken in dimensieloze eenheden.

Als dit verdere onderzoek is gedaan en de bruikbaarheidsgrenzen gevonden zijn, kan worden gekeken naar de dalvorming en worden onderzocht of dit effect daadwerkelijk bestaat. Dit kan aan de hand van analytisch onderzoek of door het genereren van verschillende data met numeriek onderzoek in Ansys.

Een extra aanbeveling is om verder te onderzoeken waarom bij panelen met $k_{xx} = -0,05 \frac{1}{m}$ en $k_{yy} = 0,05$ er een grotere foutmarge dan 20% ontstaat bij grote afmetingen. Dit is in feite haast een platte plaat die groot en dun is.

Wat nog meer opviel tijdens dit onderzoek was het afzetten van parameters tegen de term A . Bij dikte t tegen term A ontstond niet het verwachte constante verloop van de grafiek, maar een kwadratisch verloop. Dit kan betekenen dat de dikte nog op één of andere manier invloed zou hebben op term A . Om die reden is het aan te raden om hier nog verder onderzoek naar te doen.

De vorige aanbevelingen zijn gericht op dieper onderzoek naar zadelvormige panelen die in kwadrant 2 en 4 liggen op de lijn $y = -x$. Het is ook interessant om uit te zoeken of bij panelen in kwadrant 1 en 3 de gevonden ontwerpformule bruikbaar is binnen de foutmarge van 20% of dat de nieuwe ontwerpformule alleen bruikbaar is bij zadelvormige panelen.

Bibliografie

- [1] Yordi Paasman, *Eigenfrequentie van gekromde panelen; Totstandkoming van een ingenieursformule*, TU Delft, 24 oktober 2016
- [2] Marie-Louise Greijmans, *Eigenfrequenties van schalen; Uitbreiding van de ontwerpformule*, TU Delft, 20 juni 2016.
- [3] F.J. Noortman, *Ontwerpformule voor de eigenfrequentie van schalen*, TU Delft, 15 juni 2015.
- [4] Roland van Dijk, *Eigenfrequenties van schalen; Uitbreiding van de ontwerpformule*, TU Delft, 11 november 2014.
- [5] Annemette Scheltema, *Eigenfrequenties, Dubbele Krommingen & Twist*, TU Delft, 14 oktober 2013.
- [6] L. Metselaar, *Een ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen*, TU Delft, 5 juni 2013.
- [7] C.M. Moerbeek, *De invloed van kromming op de eigenfrequentie van oppervlaktes*, TU Delft, 19 oktober 2012.
- [8] Johan Blaauwendraad en Jeroen H. Hoefakker, *Structural Shell Analysis: Understanding and Application (Vol. 200)*, Dordrecht: Springer, 2014.
- [9] Stephen P. Timoshenko en S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells; International Student Edition (Second Edition)*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1959
- [10] TU Delft, CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 1
- [11] TU Delft, CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 4
- [12] TU Delft, CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application, handout 9

I. Appendix A: Ansys script

```
! Eigenfrequenties van een gekromd paneel
! Luuk Metselaar 5 mei 2013
! Gewijzigd Pierre Hoogenboom 7 mei 2013
! Gewijzigd Pierre Hoogenboom 9 september 2013
! gewijzigd Pierre Hoogenboom 23 september 2013
! gewijzigd Pierre Hoogenboom 26 september 2013
! gewijzigd Pierre Hoogenboom 9 september 2014
! gewijzigd Pierre Hoogenboom 12 september 2014

lx = 1.00      ! m lengte in de x-richting
ly = 1.00      ! m breedte in de y-richting
h = 0.005      ! m dikte
kxx = -0.01    ! 1/m kromming
kyy = 0.01     ! 1/m
kxy = 0.005    ! 1/m
E = 2.1e11     ! N/m2 elastiteitsmodulus
nu = 0.3       ! - dwarscontractiecoefficient
rho = 7850     ! kg/m3 massadichtheid
n = 50         ! - aantal elementen in beide richtingen
nxx = 0.0      ! N/m membraankrachten
nyy = 0.0      ! N/m
nxy = 0.0      ! N/m

pz = -kxx*nxx-2*kxy*nxy-kyy*nyy    ! N/m2 belasting loodrecht op het oppervlak

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,      ! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,rho
ET,1,SHELL181       ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h,,      ! element dikte

*DO,i,0,n            ! plaats knopen
*DO,j,0,n
  x=lx/n*i-lx/2
  y=ly/n*j-ly/2
  z1=0.5*x*x*kxx
  z2=x*y*kxy
  z3=0.5*y*y*kyy
  z=z1+z2+z3
  N,,x,y,z,,
*ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,n            ! plaats elementen
*DO,j,1,n
  k=i+(j-1)*(n+1)
  E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
*ENDDO
*ENDDO
```



```

*DO,i,1,(n+1)*(n+1)                ! roteer de assenstelsels van alle knopen
xx=1
xy=0
xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
lx=SQRT(1+xz*xz)
zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n                            ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=-
lx/2
yx=0
yy=1
yz=NX(i)*kxy+NY(i)*kyy
ly=SQRT(1+yz*yz)
zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,i,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n                            ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand
x=lx/2
j=n*(n+1)+i
yx=0
yy=1
yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
ly=SQRT(1+yz*yz)
zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
zz=1
lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,1,n                            ! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het
vlak
j=i
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)
D,j,UZ,0
j=i+n*(n+1)+1
D,j,UZ,0
j=i*(n+1)+1
D,j,UZ,0
*ENDDO

*DO,i,1,n+1                          ! randvoorwaarde: geen verplaatsing in de richtingen van de
randen
D,i,UY,0

```

```
*ENDDO
*DO,i,n*(n+1)+1,(n+1)*(n+1)
  D,i,UY,0
*ENDDO
*DO,i,1,n*(n+1)+1,n+1
  D,i,UX,0
*ENDDO
*DO,i,n+1,(n+1)*(n+1),n+1
  D,i,UX,0
*ENDDO
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE, 0
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,MODAL
MODOPT, LANB, 30,,,
MXPAND,30
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH
```

```
/POST1
/SHOW,WIN32C
SET,FIRST
/PLOPTS,INFO,3
/CONTOUR,ALL,18
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
/REPLOT,RESIZE
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,,1
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,,1
PLNSOL,U,Z
```

II. Appendix B: Tabel bij figuur 4.1

kxx	kyy	kxy	nu	rho	E	I	t	Frequentie Ansys	Frequentie formule	Foutmarge
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,86	24,928	0,273531778
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	7,38828	7,397	0,118024764
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	4,9858	4,94	-0,918608849
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	4,4837	4,393	-2,022882887
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	4,36293	4,232	-3,000964948
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	4,05969	4,172175357	2,770786858
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	3,61875	4,146371513	14,58021453
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	3,36839	4,133789633	22,72301107
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	3,1992	4,127078002	29,00343843
-0,1	0,1	0,005	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	3,05504	4,123	34,95731643
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,6887	24,928	0,969269342
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	20,686	7,397	-64,241516
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	14,5734	4,94	-66,10262533
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	12,4317	4,393	-64,66291818
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	8,87147	4,232	-52,29651907
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	6,62997	4,172175357	-37,07097684
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	5,10784	4,146371513	-18,82338692
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	4,0093	4,133789633	3,105021643
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	3,20277	4,127078002	28,85964345
-0,5	0,5	0,005	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	2,60518	4,123	58,26161724
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	42,1479	24,928	-40,8558908
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	30,5601	7,397	-75,79523627
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	20,244	4,94	-75,59770796
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	11,594	4,393	-62,10971192
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	7,39742	4,232	-42,79086492
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	5,05639	4,172175357	-17,48707364
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	3,64888	4,146371513	13,63408809
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	2,75169	4,133789633	50,2273015
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	2,15068	4,127078002	91,89642357
-0,9	0,9	0,005	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	1,7307	4,123	138,2273069

Tabel II.1: Lengte versus eigenfrequentie

III. Appendix C: Dataset dubbele kromming

k_{xx}	ν	ρ	E	l	t	Frequentie Ansys	Frequentie Ansys (1 buik)	Frequentie formule	Foutmarge
-0,01	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,5773	24,5773	24,58574522	0,034361891
	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	6,14684	6,14684	6,146436306	-0,006567501
	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	2,73176	2,73176	2,731749469	-0,000385486
	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	1,53633	1,53633	1,536609077	0,018165144
	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	0,982991	0,982991	0,983429809	0,044640185
	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	0,682407	0,682407	0,682937367	0,077720094
	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	0,501167	0,501167	0,501749903	0,116309045
	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	0,383543	0,383543	0,384152269	0,15885289
	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	0,302911	0,302911	0,303527719	0,203597369
	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	0,245253	0,245253	0,245857452	0,246460696
-0,05	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,5588	24,5588	24,58574522	0,109717189
	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	6,12853	6,12853	6,146436306	0,292179466
	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	2,71467	2,71467	2,731749469	0,629154536
	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	1,52352	1,52352	1,536609077	0,859133885
	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	0,98134	0,98134	0,983429809	0,212954633
	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	0,704251	0,704251	0,682937367	-3,026425612
	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	0,564316	0,564316	0,501749903	-11,08706779
	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	0,507565	0,507565	0,384152269	-24,31466529
	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	0,503198	0,503198	0,303527719	-39,68026128
	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	0,530096	0,530096	0,245857452	-53,62020233
-0,1	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,5013	24,5013	24,58574522	0,3446561
	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	6,07903	6,07903	6,146436306	1,108833255
	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	2,71502	2,71502	2,731749469	0,616182181
	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	1,68654	1,68654	1,536609077	-8,889852801
	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	1,45978	1,45978	0,983429809	-32,63164251
	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	1,57152	1,57152	0,682937367	-56,54287776
	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	1,81462	1,81462	0,501749903	-72,3495882
	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	1,72178	2,08979	0,384152269	-77,68865539
	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	1,55199	2,36306	0,303527719	-80,44267561
	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	1,48498	2,64113	0,245857452	-83,44371963
-0,15	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,4076	24,4076	24,58574522	0,729876043
	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	6,04939	6,04939	6,146436306	1,604232927
	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	3,04834	3,04834	2,731749469	-10,38566992
	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	2,77838	2,77838	1,536609077	-44,69406357

	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	3,28969	3,28969	0,983429809	-70,10569966
	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	3,07336	3,94913	0,682937367	-77,77880342
	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	2,7247	4,62439	0,501749903	-81,58513221
	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	2,62527	5,17312	0,384152269	-85,36713294
	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	2,61701	5,65353	0,303527719	-88,40173638
	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	2,44603	6,04118	0,245857452	-89,94871476
-0,2	0,3	7850	2,10E+11	1	0,005	24,2833	24,2833	24,58574522	1,245486507
	0,3	7850	2,10E+11	2	0,005	6,18446	6,18446	6,146436306	-0,614826416
	0,3	7850	2,10E+11	3	0,005	4,24073	4,24073	2,731749469	-35,58303713
	0,3	7850	2,10E+11	4	0,005	5,08469	5,08469	1,536609077	-69,77969008
	0,3	7850	2,10E+11	5	0,005	4,51984	5,29504	0,983429809	-78,24193314
	0,3	7850	2,10E+11	6	0,005	4,00948	7,42994	0,682937367	-82,96693418
	0,3	7850	2,10E+11	7	0,005	3,88339	8,30691	0,501749903	-87,07959019
	0,3	7850	2,10E+11	8	0,005	3,65778	8,95427	0,384152269	-89,49766609
	0,3	7850	2,10E+11	9	0,005	3,15762	9,37787	0,303527719	-90,38745261
	0,3	7850	2,10E+11	10	0,005	2,8048	9,60359	0,245857452	-91,23440344

Tabel III.1: Dataset dubbele kromming

IV. Appendix D: Term A

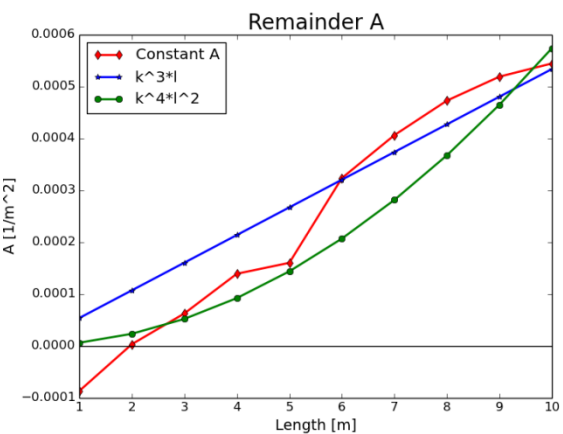
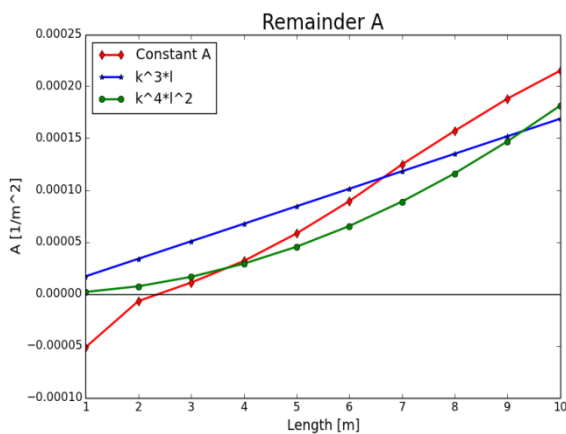
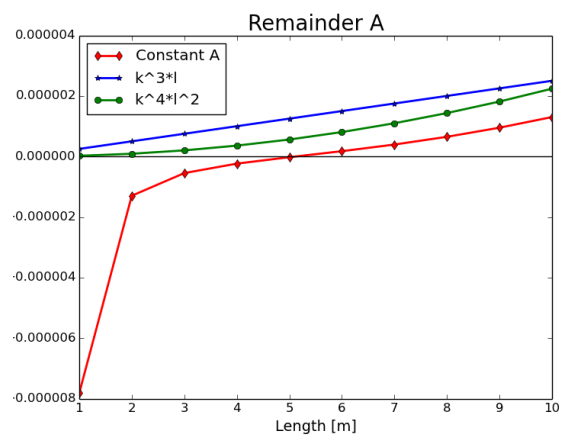
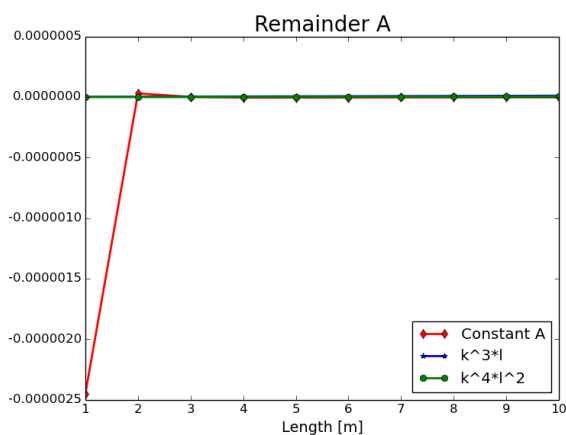
Tabel

k	l	A	$k^3 l$	$k^4 l^2$	$k^6 l^4$	$ck^3 l$	$ck^4 l^2$	$ck^6 l^4$
-0,01	1	-2.45E-01	0,000001	0,00000001	1E-12	3.33E-05	6,25E-10	5.88235E-15
	2	2.93E-03	0,000002	0,00000004	1.6E-11	6.67E-05	2,5E-09	9.41176E-14
	3	3.40E-06	0,000003	0,00000009	8.1E-11	0,000000001	5.63E-06	4.76471E-13
	4	-5.06E-04	0,000004	0,00000016	2.56E-10	1.33E-04	0,00000001	1.50588E-12
	5	-5.09E-04	0,000005	0,00000025	6.25E-10	1.67E-04	1.56E-04	3.67647E-12
	6	-4.27E-04	0,000006	0,00000036	1.296E-09	0,000000002	2,25E-08	7.62353E-12
	7	-3.45E-04	0,000007	0,00000049	2.401E-09	2.33E-04	3.06E-04	1.41235E-11
	8	-2.76E-04	0,000008	0,00000064	4.096E-09	2.67E-04	0,00000004	2.40941E-11
	9	-2.21E-04	0,000009	0,00000081	6.561E-09	0,000000003	5.06E-04	3.85941E-11
	10	-1.75E-04	0,00001	0,000001	0.00000001	3.33E-04	6,25E-08	5.88235E-11
-0,05	1	-7.82E-01	0,000125	0,00000625	1.5625E-08	1.04E-02	2.24E-03	9.19118E-11
	2	-1.30E-01	0,00025	0,000025	0.00000025	2.08E-02	8.96E-03	1.47059E-09
	3	-5.49E-02	0,000375	0,00005625	1.26563E-06	3.13E-04	2.02E-02	7.44485E-09
	4	-2.36E-02	0,0005	0,0001	0.000004	4.17E-02	3.58E-02	2.35294E-08
	5	-2.42E-03	0,000625	0,00015625	9.76563E-06	5.21E-02	5.60E-02	5.74449E-08
	6	1.75E-02	0,00075	0,000225	0.00002025	0,000000625	8.06E-02	1.19118E-07
	7	3.94E-02	0,000875	0,00030625	3.75156E-05	7.29E-02	1.10E-01	2.2068E-07
	8	6.50E-02	0,001	0,0004	0.000064	8.33E-02	1.43E-01	3.76471E-07
	9	9.51E-02	0,001125	0,00050625	0.000102516	9.38E-04	1.81E-01	6.03033E-07
	10	1.30E-01	0,00125	0,000625	0.00015625	1.04E-01	2.24E-01	9.19118E-07
-0,1	1	-2.45E+00	0,001	0,0001	0.000001	3.33E-01	3.58E-02	5.88235E-09
	2	-4.86E-01	0,002	0,0004	0.000016	6.67E-01	1.43E-01	9.41176E-08
	3	-5.38E-02	0,003	0,0009	0.000081	0,00001	3.23E-01	4.76471E-07
	4	2.85E-01	0,004	0,0016	0.000256	1.33E+00	5.73E-01	1.50588E-06
	5	6.87E-01	0,005	0,0025	0.000625	1.67E+00	8.96E-01	3.67647E-06
	6	1.18E+00	0,006	0,0036	0.001296	0,00002	1.29E+00	7.62353E-06
	7	1.80E+00	0,007	0,0049	0.002401	2.33E+00	1.76E+00	1.41235E-05
	8	2.49E+00	0,008	0,0064	0.004096	2.67E+00	2.29E+00	2.40941E-05
	9	3.24E+00	0,009	0,0081	0.006561	0,00003	2.90E+00	3.85941E-05
	10	4.08E+00	0,01	0,01	0.01	3.33E+00	3.58E+00	5.88235E-05
-0,15	1	-5.15E+00	0,003375	0,00050625	1.13906E-05	1.99E+00	1.81E-01	6.70037E-08
	2	-6.99E-01	0,00675	0,002025	0.00018225	3.97E+00	7.26E-01	1.07206E-06
	3	1.08E-01	0,010125	0,00455625	0.000922641	5.96E+00	1.63E+00	5.4273E-06
	4	3.16E+00	0,0135	0,0081	0.002916	7.94E+00	2.90E+00	1.71529E-05
	5	5.82E+00	0,016875	0,01265625	0.007119141	9.93E+00	4.54E+00	4.18773E-05

	6	8.93E+00	0,02025	0,018225	0.01476225	0,000119118	6.53E+00	8.68368E-05
	7	0,000124749	0,023625	0,02480625	0.027348891	0,000138971	8.89E+00	0.000160876
	8	0,000157099	0,027	0,0324	0.046656	0,000158824	0,000116129	0.000274447
	9	0,000188129	0,030375	0,04100625	0.074733891	0,000178676	0,000146976	0.000439611
	10	0,000215077	0,03375	0,050625	0.11390625	0,000198529	0,000181452	0.000670037
-0,2	1	-8.72E-01	0,008	0,0016	0.000064	5.33E+00	5.73E-01	3.76471E-07
	2	2.77E-02	0,016	0,0064	0.001024	0,000106667	2.29E+00	6.02353E-06
	3	6.21E+00	0,024	0,0144	0.005184	0,00016	5.16E+00	3.04941E-05
	4	0,000138678	0,032	0,0256	0.016384	0,000213333	9.18E+00	9.63765E-05
	5	0,000159795	0,04	0,04	0.04	0,000266667	0,000143369	0.000235294
	6	0,000323114	0,048	0,0576	0.082944	0,00032	0,000206452	0.000487906
	7	0,000405846	0,056	0,0784	0.153664	0,000373333	0,000281004	0.000903906
	8	0,000472422	0,064	0,1024	0.262144	0,000426667	0,000367025	0.001542024
	9	0,000518589	0,072	0,1296	0.419904	0,00048	0,000464516	0.002470024
	10	0,000544067	0,08	0,16	0.64	0,000533333	0,000573477	0.003764706

Tabel IV.1: k^3l , k^4l^2 en k^6l^4 in verhouding tot A

Figuren



IV.1: Grafische weergave k^3l en k^4l^2 ten opzichte van A met krommingen: -0,01, -0,05, -0,15 en -0,2

V. Appendix E: Kwadratische regressie

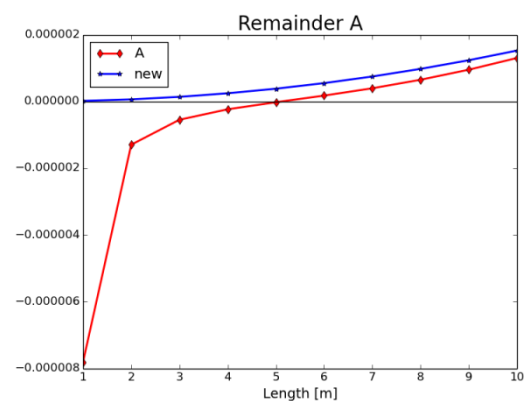
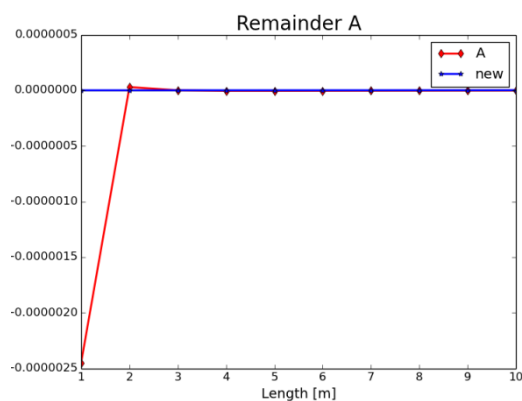
Tabel

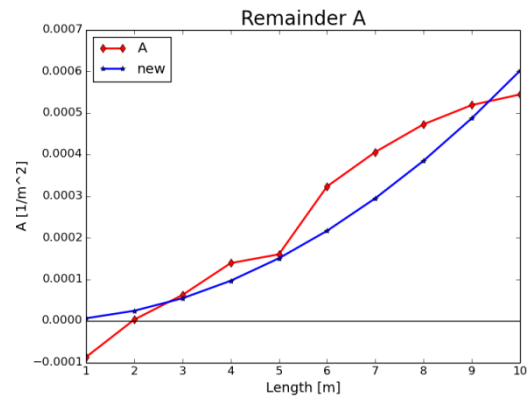
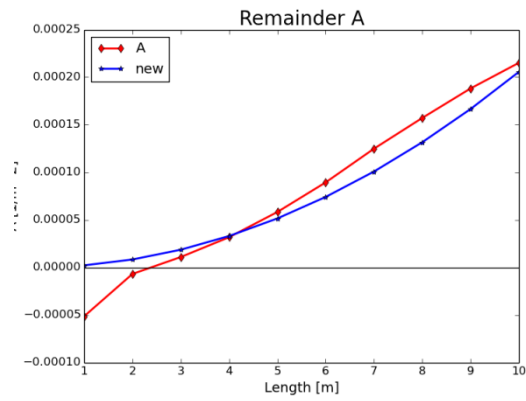
	l	A	$l * A$	l^2	$l^2 * A$	A^2	l^3	l^4
	1	-2,44688E-05	-2,44688E-05	1	-2,44688E-05	5,98721E-10	1	1
	2	-4,86448E-06	-9,72895E-06	4	-1,94579E-05	2,36631E-11	8	16
	3	-5,37887E-07	-1,61366E-06	9	-4,84099E-06	2,89323E-13	27	81
	4	2,85261E-06	1,14104E-05	16	4,56417E-05	8,13736E-12	64	256
	5	6,87001E-06	3,435E-05	25	0,00017175	4,7197E-11	125	625
	6	1,18252E-05	7,09514E-05	36	0,000425709	1,39836E-10	216	1296
	7	1,79515E-05	0,00012566	49	0,000879622	3,22255E-10	343	2401
	8	2,49084E-05	0,000199267	64	0,00159414	6,2043E-10	512	4096
	9	3,24186E-05	0,000291768	81	0,002625908	1,05097E-09	729	6561
	10	4,08197E-05	0,000408197	100	0,004081971	1,66625E-09	1000	10000
som	52	0,000137108	0,001139991	380	0,0098199	3,85536E-09	3016	25316
som²	2704	1,87987E-08	1,29958E-06	144400				
n	8							
k_{xx}	-0,1							
			$a (= k^4 * C_n)$	4,34674E-07				
B	42		C_n	0,004346736				
C	0,000248787		$\frac{1}{C_n}$	230,0576551				
D	546							
E	7266							
F	0,003307261							

Tabel V.1: Voorbeeld opzet kwadratische regressie met $k_{xx}=-0,1$

Voor $k_{xx} = -0,1 \frac{1}{m}$ zijn alle waarden vanaf lengte 3,0 m meegeteld in de berekeningen.

Figuren





V.1: De nieuwe term uit kwadratische regressie in verhouding tot A met krommingen: -0,01, -0,05, -0,15 en -0,2

VI. Appendix F: Python script

```

import math
from numpy import *
from pylab import *
import matplotlib.pyplot as plt
from pandas import *
close('all')

def frequency(pi,nu,E,t,rho,l,kxx,kyy,kxy):
    return math.sqrt((pi**2/(12*(1-
        nu**2)))*((E*t**2)/(rho*l**4))+((kxx+kyy)**2+4*kxy**2)*(E/(16*pi**2*rho))))

kxx = -0.1
kyy = 0.1
kxy = 0.0
l = [1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.0,10.0]
ff = []
for i in range(len(l)):
    f = frequency(math.pi,0.3,2.1*10**11,0.005,7850,l[i],kxx,kyy,kxy)
    ff.append(f)

fa1 = [24.5013,6.07903,2.71502,1.68654,1.45978,1.57152,1.81462,1.72178,1.55199,1.48498]
fa2 = [24.5013,6.07903,2.71502,1.68654,1.45978,1.57152,1.81462,2.08979,2.36306,2.64113]

A = []
for r in range(len(fa2)):
    a = (fa2[r]**2-ff[r]**2)/(2.1*10**11/(16*math.pi**2*7850))
    A.append(a)

zero = zeros(10)

def
kwadraat(soml,somA,somlA,soml2,soml2A,somA2,soml3,soml4,som2l,som2A,som2lA,som
2l2):
    B = soml2-som2l/n
    C = somlA-(soml*somA)/n
    D = soml3-(soml*soml2)/n
    E = soml4-som2l2/n
    F = soml2A-(soml2*somA)/n
    return (C*D-B*F)/(D**2-B*E)

l1 = l[2:]
A1 = A[2:]
lA = []
l2 = []
l2A = []
A2 = []
l3 = []
l4 = []

```

```

for q in range(len(l1)):
    l1A.append(l1[q]*A1[q])
    l2.append(l1[q]**2)
    l2A.append(l1[q]**2*A1[q])
    A2.append(A1[q]**2)
    l3.append(l1[q]**3)
    l4.append(l1[q]**4)

soml = sum(l1)
somA = sum(A1)
somlA = sum(l1A)
soml2 = sum(l2)
soml2A = sum(l2A)
somA2 = sum(A2)
soml3 = sum(l3)
soml4 = sum(l4)
som2l = soml**2
som2A = somA**2
som2lA = somlA**2
som2l2 = soml2**2
n = len(l1)
a =
kwadraat(soml,somA,somlA,soml2,soml2A,somA2,soml3,soml4,som2l,som2A,som2lA,som
2l2)
cn = a/(kxx*kyy)**2
print cn
new = []
for j in range(len(l)):
    new.append(a*l[j]**2)

k3l = []
k4l2 = []
for q in range(len(l)):
    k4l2.append((kyy**4*l[q]**2)/279.0)
    k3l.append((kyy**3*l[q])/500.0)

fig1 = plt.figure()
fig2 = plt.figure()
ax1 = fig1.add_subplot(111)
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax1.plot(l,ff,'ro-',label='Formule',lw=3)
ax1.plot(l,fa1,'b^-',label='Ansys',lw=3)
ax1.plot(l,fa2,'gd-',label='Ansys (1 buik)',lw=3)
ax1.set_xlabel('Length [m]', fontsize = 14)
ax1.set_ylabel('Frequency [Hz]', fontsize = 14)
ax1.set_title('Length against Frequency', fontsize = 20)
legend1 = ax1.legend(loc='best')
ax2.plot(l,A,'rd-',label='A',lw=2)
ax2.plot(l,zero,'k-',lw=1)
ax2.plot(l,new,'c^-',label='new',lw=2)

```

```
ax2.plot(l,k3l,'b*-',label='k^3*l',lw=2)
ax2.plot(l,k4l2,'go-',label='k^4*l^2',lw=2)
ax2.set_xlabel('Length [m]', fontsize = 14)
ax2.set_ylabel('A [1/m^2]', fontsize = 14)
ax2.set_title('Expansion formula', fontsize = 20)
legend2 = ax2.legend(loc='best')
show()
```

VII. Appendix G: Nieuwe formule zonder twist

Kromming	Ansysis (1 buik)	Nieuwe Formule	Foutmarge
-0.01	24.5773	24.58574535	0.034362397
	6.14684	6.146438298	-0.006535097
	2.73176	2.731759553	-1.63636E-05
	1.53633	1.536640945	0.020239484
	0.982991	0.983507611	0.052555026
	0.682407	0.683098685	0.101359641
	0.501167	0.50204871	0.175931424
	0.383543	0.384661836	0.291710627
	0.302911	0.304343391	0.472875294
	0.245253	0.2470992	0.752773861
-0.05	24.5588	24.58582303	0.110034001
	6.12853	6.147681064	0.312490341
	2.71467	2.738044442	0.861041749
	1.52352	1.556399775	2.158145271
	0.98134	1.030911828	5.051442712
	0.704251	0.777259454	10.36682291
	0.564316	0.662734622	17.44033882
	0.507565	0.626437695	23.42019148
	0.503198	0.634049605	26.00399933
	0.530096	0.665601921	25.56252476
-0.1	24.5013	24.58699008	0.349736861
	6.07903	6.166322282	1.435957416
	2.71502	2.830789715	4.264046474
	1.68654	1.827723265	8.371177966
	1.45978	1.580333608	8.258340839
	1.57152	1.634033177	3.97787985
	1.81462	1.803102994	-0.634678683
	2.08979	2.016232249	-3.519863301
	2.36306	2.247301999	-4.898648405
	2.64113	2.48630778	-5.861968915
-0.15	24.4076	24.59204664	0.755693485
	6.04939	6.246458082	3.257652122
	3.04834	3.201790685	5.033909754
	2.77838	2.705439826	-2.6252771
	3.28969	2.952012841	-10.26471063
	3.94913	3.409169568	-13.67289585
	4.62439	3.928912621	-15.0393323

	5.17312	4.469957691	-13.59261546
	5.65353	5.019283305	-11.21859608
	6.04118	5.572201394	-7.763029834
-0.2	24.2833	24.60565531	1.327477354
	6.18446	6.45726713	4.41117138
	4.24073	4.0344887	-4.863344277
	5.08469	4.246368509	-16.48717013
	5.29504	5.04502291	-4.721722413
	7.42994	5.977037651	-19.55469827
	8.30691	6.945688736	-16.38661384
	8.95427	7.926505233	-11.47792916
	9.37787	8.912010113	-4.967651365
	9.60359	9.899542099	3.081681939

Tabel VII.1: Resultaten nieuwe formule zonder twist

VIII. Appendix H: Nieuwe formule met twist

k_{xx}	k_{yy}	k_{xy}	l	Ansysis (1 buik)	Nieuwe Formule	Foutmarge
-0.05	0.05	0.005	1	24.9167	24.92796297	0.045202494
			2	7.43152	7.398285357	-0.447211911
			3	4.99669	4.943433132	-1.065842952
			4	4.4505	4.400343625	-1.126982916
			5	4.27247	4.243044068	-0.688733508
			6	4.17352	4.188648472	0.362487105
			7	4.05259	4.168916039	2.870412234
			8	3.80436	4.163300127	9.434967432
			9	4.43591	4.164452264	-6.119550116
			10	4.34315	4.169372816	-4.001178498
-0.1	0.1	0.005	1	24.86	24.929114	0.278012873
			2	7.38828	7.413782722	0.345178065
			3	4.9858	4.9953993	0.1925328
			4	4.4837	4.503467119	0.440866234
			5	4.36293	4.408865849	1.052866971
			6	4.33362	4.428397926	2.187038216
			7	4.26239	4.493531369	5.422811366
			8	4.76736	4.583212437	-3.862673744
			9	4.73895	4.689457329	-1.044380536
			10	4.78508	4.808572568	0.490954548
-0.15	0.15	0.005	1	24.7674	24.93410118	0.673066951
			2	7.35776	7.480566979	1.669081066
			3	5.1522	5.214605196	1.211233958
			4	4.95371	4.925449057	-0.570500551
			5	5.19803	5.065078832	-2.557722215
			6	5.52569	5.344443929	-3.280062243
			7	6.0626	5.690078923	-6.144576209
			8	6.41724	6.076278921	-5.31320442
			9	6.72651	6.491059132	-3.500342197
			10	7.0095	6.927486712	-1.170030507
-0.2	0.2	0.005	1	24.6446	24.94752326	1.229166885
			2	7.45995	7.657476252	2.647822728
			3	5.90729	5.763483568	-2.434389244
			4	6.4862	5.913737336	-8.825855883
			5	7.41573	6.510983023	-12.20037646
			6	8.32359	7.257108435	-12.81275945
			7	9.05641	8.073613552	-10.85194297

			8	9.59384	8.931412484	-6.904717148
			9	9.92855	9.816545625	-1.12810405
			10	10.0855	10.72108099	6.301928379
-0.1	0.1	0.02	1	29.7131	29.59003855	-0.414165645
			2	17.7559	17.58049575	-0.987864619
			3	16.6165	16.70519891	0.533800194
			4	18.6142	16.56474789	-11.01015415
			5	17.1885	16.53927914	-3.777065242
			6	16.6354	16.54449651	-0.546446101
			7	17.24	16.56204941	-3.932428027
			8	16.6581	16.58660582	-0.429185674
			9	16.0381	16.61627715	3.605022753
			10	16.9046	16.65028608	-1.504406607
-0.1	0.1	0.04	1	41.4861	41.09405409	-0.945005451
			2	33.0687	33.49962285	1.303113979
			3	35.038	33.04866973	-5.67763647
			4	31.2641	32.97789825	5.481681071
			5	35.3298	32.9651127	-6.693180555
			6	33.414	32.96773066	-1.335575912
			7	31.9524	32.97654289	3.205214296
			8	32.4413	32.98888287	1.687919021
			9	34.2344	33.0038114	-3.594596658
			10	30.4942	33.02094679	8.285991413

Tabel VIII.1: Resultaten nieuwe formule met twist

IX. Appendix I: Dalvorming

Mode	k_{xx}	k_{yy}	k_{xy}	I	Frequentie Ansys	Buiken
1	-0,1	0,1	0	1	24,5013	1 buik
2	-0,1	0,1	0	1	78,8013	2 buiken
3	-0,1	0,1	0	1	78,8013	2 buiken
4	-0,1	0,1	0	1	98,2542	4 buiken
9	-0,1	0,1	0	1	221,444	9 buiken
1	-0,1	0,1	0	2	6,07903	1 buik
2	-0,1	0,1	0	2	24,4785	4 buiken
5	-0,1	0,1	0	2	51,5638	2 buiken
6	-0,1	0,1	0	2	51,5638	2 buiken
7	-0,1	0,1	0	2	55,2391	9 buiken
1	-0,1	0,1	0	3	2,71502	1 buik
2	-0,1	0,1	0	3	10,8095	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	3	24,4252	9 buiken
9	-0,1	0,1	0	3	49,5042	2 buiken
10	-0,1	0,1	0	3	49,5042	2 buiken
1	-0,1	0,1	0	4	1,68654	1 buik
2	-0,1	0,1	0	4	6,03597	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	4	13,642	9 buiken
14	-0,1	0,1	0	4	48,905	2 buiken
15	-0,1	0,1	0	4	48,905	2 buiken
1	-0,1	0,1	0	5	1,45978	1 buik
2	-0,1	0,1	0	5	3,84983	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	5	8,65751	9 buiken
4	-0,1	0,1	0	5	15,457	16 buiken
25	-0,1	0,1	0	5	48,4634	2 buiken
26	-0,1	0,1	0	5	48,4634	2 buiken
1	-0,1	0,1	0	6	1,57152	1 buik
2	-0,1	0,1	0	6	2,70198	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	6	5,96015	9 buiken
4	-0,1	0,1	0	6	10,6327	16 buiken
1	-0,1	0,1	0	7	1,81462	1 buik
2	-0,1	0,1	0	7	2,06656	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	7	4,34796	9 buiken
4	-0,1	0,1	0	7	7,73142	16 buiken

1	-0,1	0,1	0	8	1,72178	4 buiken
2	-0,1	0,1	0	8	2,08979	1 buik
3	-0,1	0,1	0	8	3,32003	9 buiken
4	-0,1	0,1	0	8	5,85716	16 buiken
5	-0,1	0,1	0	8	9,18102	25 buiken
1	-0,1	0,1	0	9	1,55199	4 buiken
2	-0,1	0,1	0	9	2,36306	1 buik
3	-0,1	0,1	0	9	2,6412	9 buiken
4	-0,1	0,1	0	9	4,58201	16 buiken
5	-0,1	0,1	0	9	7,16681	25 buiken
1	-0,1	0,1	0	10	1,48498	4 buiken
2	-0,1	0,1	0	10	2,16369	9 buiken
3	-0,1	0,1	0	10	2,64113	1 buik
4	-0,1	0,1	0	10	3,68054	16 buiken
5	-0,1	0,1	0	10	5,7339	25 buiken
1	-0,1	0,1	0	11	1,47331	4 buiken
2	-0,1	0,1	0	11	1,84353	9 buiken
3	-0,1	0,1	0	11	2,88743	1 buik
4	-0,1	0,1	0	11	3,02481	16 buiken
1	-0,1	0,1	0	12	1,48712	4 buiken
2	-0,1	0,1	0	12	1,61977	9 buiken
3	-0,1	0,1	0	12	2,53788	16 buiken
4	-0,1	0,1	0	12	3,11285	1 buik
1	-0,1	0,1	0	13	1,4627	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	13	1,50795	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	13	2,17191	16 buiken
4	-0,1	0,1	0	13	3,27801	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	13	3,31507	1 buik
1	-0,1	0,1	0	14	1,35077	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	14	1,52155	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	14	1,89905	16 buiken
4	-0,1	0,1	0	14	2,80208	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	14	3,49026	1 buik
1	-0,1	0,1	0	15	1,2686	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	15	1,50202	4 buiken
3	-0,1	0,1	0	15	1,71778	16 buiken

4	-0,1	0,1	0	15	2,42409	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	15	3,4422	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	15	3,64104	1 buik
1	-0,1	0,1	0	16	1,20528	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	16	1,41006	16 buiken
3	-0,1	0,1	0	16	1,64902	4 buiken
4	-0,1	0,1	0	16	2,12107	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	16	2,98886	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	16	3,76714	1 buik
1	-0,1	0,1	0	17	1,15319	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	17	1,29093	16 buiken
3	-0,1	0,1	0	17	1,63499	4 buiken
4	-0,1	0,1	0	17	1,87612	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	17	2,61802	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	17	3,54416	49 buiken
7	-0,1	0,1	0	17	3,86974	1 buik
1	-0,1	0,1	0	18	1,10691	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	18	1,1829	16 buiken
3	-0,1	0,1	0	18	1,62875	4 buiken
4	-0,1	0,1	0	18	1,67709	25 buiken
5	-0,1	0,1	0	18	2,31167	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	18	3,11896	49 buiken
7	-0,1	0,1	0	18	3,94997	1 buik
1	-0,1	0,1	0	19	1,06258	9 buiken
2	-0,1	0,1	0	19	1,09001	16 buiken
3	-0,1	0,1	0	19	1,51523	25 buiken
4	-0,1	0,1	0	19	1,62019	4 buiken
5	-0,1	0,1	0	19	2,05642	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	19	2,76338	49 buiken
7	-0,1	0,1	0	19	3,60453	64 buiken
8	-0,1	0,1	0	19	4,00952	1 buik
1	-0,1	0,1	0	20	1,01011	16 buiken
2	-0,1	0,1	0	20	1,01736	9 buiken
3	-0,1	0,1	0	20	1,38422	25 buiken
4	-0,1	0,1	0	20	1,60713	4 buiken
5	-0,1	0,1	0	20	1,84231	36 buiken
6	-0,1	0,1	0	20	2,4636	49 buiken
7	-0,1	0,1	0	20	3,20828	64 buiken

8	-0,1	0,1	0	20	4,04988	1 buik
----------	------	-----	---	----	---------	--------

Tabel IX.1: Dalvorming bij $k_{xx}=-0,1$