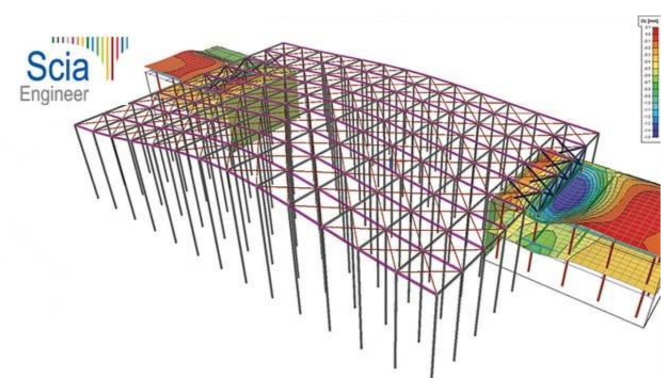
Nauwkeurigheid van Schaalelementen in SCIA Engineer

Bachelor Eindwerk

CTB3000

Delft University of Technology



Constantijn T.J.D.M. Steenbergen
Studienummer : 4190432

Februari-april 2014

TU Delft Delft University of Technology

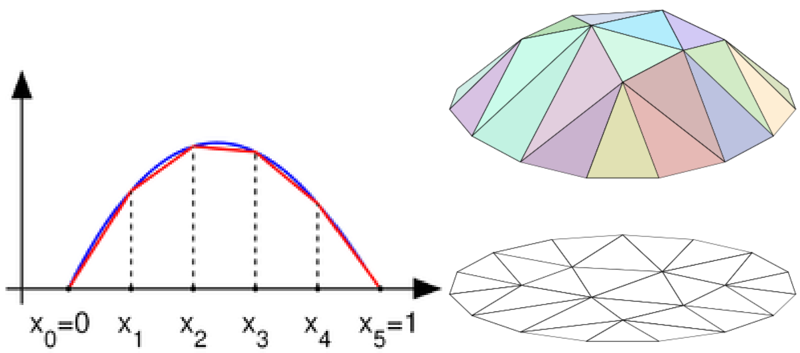
Challenge the future

Inhoudsopgave

1. Inleiding

1.1 Eindige elementen

Bij het ontwerp van ingewikkelde constructies kunnen berekeningen niet meer met de hand worden uitgerekend en wordt er in computerprogramma's met de eindige elementenmethode gewerkt. Een voorbeeld hiervan is SCIA Engineer. Hierbij wordt de constructie opgedeeld in een beperkt aantal elementen. Er wordt als het ware een rooster over de constructie gelegd. Met matrixvergelijkingen kan dan het gedrag van de constructie worden bepaald onder verschillende omstandigheden worden bepaald.



Figuur 1 Links: stapsgewijze lineaire benadering van een functie, rechts: lineaire benadering van een functie in 2 dimensies

Bij de keuze van de grootte van de elementen moet er rekening worden gehouden met de afwijking die elk element geeft op de werkelijke waarde. Bij bijvoorbeeld de berekening van de verplaatsing van een deel van de constructie geldt [5]:

- Werkelijke verplaatsing = berekende verplaatsing + fout

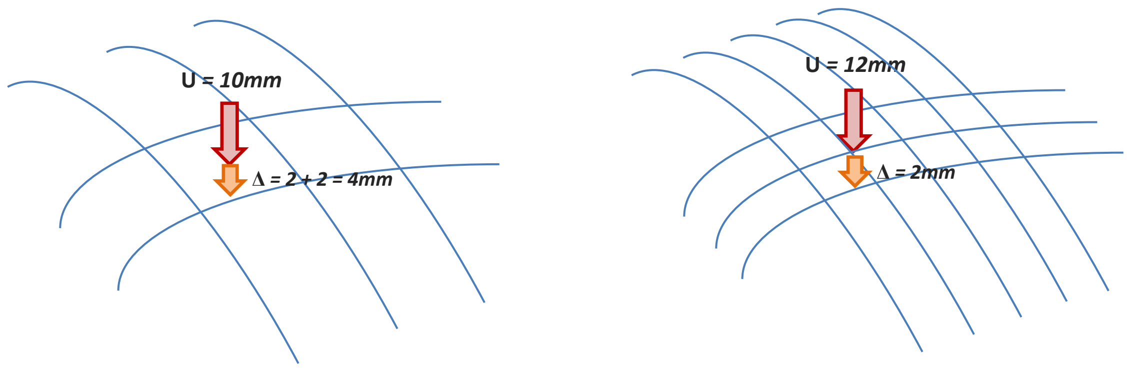
De fout is afhankelijk van de gekozen elementgrootte en is dus bij een afmeting h van een element van de orde van h. Dit wordt geschreven als de fout = $O(h^\alpha)$ met $\alpha = 1,2,3,...$ Er geldt dat $\alpha \neq 0$ want dan is de fout is $C*h^0 = C$ (met C is een constante). Er zou dan dus sprake zijn van een constante fout, hetgeen zou betekenen dat er sprake is van een onbruikbaar element. Bovenstaande bewering wordt dus:

- $U_{exact} = U_{berekend} + C*h^\alpha$

De hypothese is dus dat de fout kan worden benaderd door $C*h^\alpha$.

Als een constructeur met de eindige elementenmethode werkt moet hij rekening houden met de fout in zijn berekeningen.

In de onderstaande figuur zijn de verschillende groottes van de berekende zakkingen te zien bij een bepaalde elementgrootte en de waarden van de zakkingen bij een zelfde belasting maar een twee keer zo kleine elementgrootte.



Figuur 2 Regel voor schatting van de fout bij O(h) elementen

In bovenstaand geval wordt er bij een halvering van de elementgrootte een verschil in verplaatsing gevonden van 2mm. Er geldt dat deze afwijking mag worden genomen als de fout bij elementen met O(h). De werkelijke waarde van de verplaatsing waarmee moet worden gerekend wordt hiermee 12 + 2 = 14mm.

De bovenstaande regel geldt echter alleen voor O(h) elementen; bij een hogere orde gelden er andere en ingewikkeldere regels voor het bepalen van de fout. Dit is verderop uitgelegd.

Bij hogere orde elementen O(h^{α}) (α = 2,3,...) is de fout kleiner dan bij O(h) elementen, zodat als de orde van het element niet bekend is het rekenen met een fout van O(h) een veilige bovengrens geeft. Ook dit is verderop verduidelijkt.

Schaalelementen

Uit het bovenstaande blijkt dat het belangrijk is dat de elementen klein zijn om voldoende nauwkeurigheid te bereiken. Daarnaast moeten er ook niet te veel elementen worden gebruikt omdat de computer deze niet kan verwerken. Als de elementgrootte namelijk twee keer zo klein wordt vereist dit vier keer zo veel computergeheugen en acht keer zo veel rekentijd. Dit is het geval omdat het om matrixberekeningen gaat. Het is dus belangrijk om te weten wat de nauwkeurigheid van de gebruikte elementen is, zodat er zo weinig mogelijk behoeven te worden gebruikt. Ook de vorm van de elementen is van belang.

Het meest gebruikte constructieve eindige elementen-programma bij ingenieursbureau's is SCIA Engineer. De nauwkeurigheid van de schaalelementen in dit programma is echter onbekend. Schaalelementen worden gebruikt bij de eindige elementen-berekeningen van koeltorens, boortunnels, buisverbindingen en dergelijke.

1.2 Doelstelling onderzoek

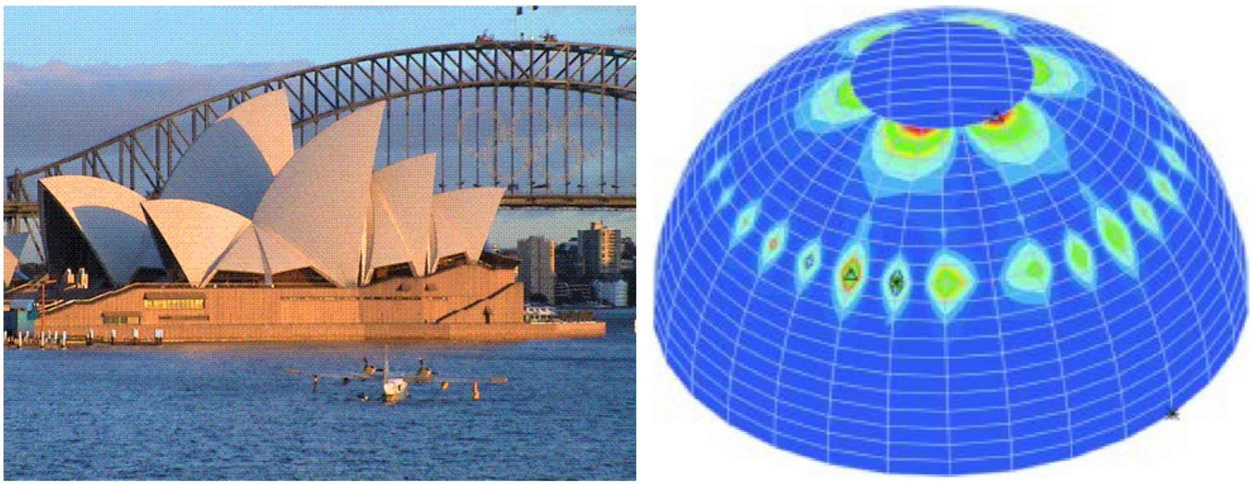
Het doel van dit onderzoek is het bepalen van de nauwkeurigheid (grootte van de orde van de afwijking) van schaalelementen in SCIA Engineer voor doorbuiging, normaalkracht, moment en dwarskracht.

1.3 Beschrijving Onderzoek

Voor het bepalen van de orde van de elementen in schaalmodellen in SCIA-engineer wordt als schaalmodel eerst een eenvoudige halve bol gebruikt. De analytisch oplossing van de krachtsverdeling hiervan is namelijk ook bekend. De exacte oplossing kan dus worden gecontroleerd door de analytische oplossing. Door later ook nog een ingewikkelder model te modelleren kunnen de resultaten worden gecontroleerd en kan bovendien worden aangetoond of de vorm van het schaalmodel van invloed is op de mate van de nauwkeurigheid van de elementen. Hiervoor kan bijvoorbeeld een van de schaalconstructies van het dak van Sydney Opera House worden gebruikt. Dit gebouw is een muziekcentrum in de Australische stad Sydney, ontworpen door de Deense architect Jørn Utzon.

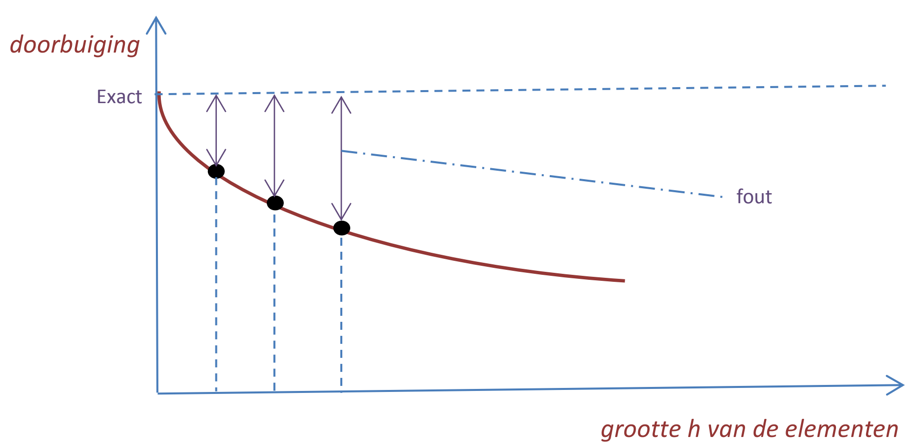
Figuur 3 Sydney Opera House van binnen

Het dak van het gebouw aan de haven van Sydney moet niet alleen schelpen maar ook de zeilen van zeilschepen voorstellen. In werkelijkheid is het dak uitiendelijk niet dubbelgekromd uitgevoerd zoals bij een schaalconstructie -omdat het lastig was de bekisting dubbelgekromd uit te voeren- maar is opgebouwd uit cilindrische betonnen delen (dus enkelgekromd). Het model zal dan niet geheel nauwkeurig kunnen worden overgenomen, omdat de exacte afmetingen niet zijn te vinden. Vereenvoudigingen zullen dus moeten worden toegepast.

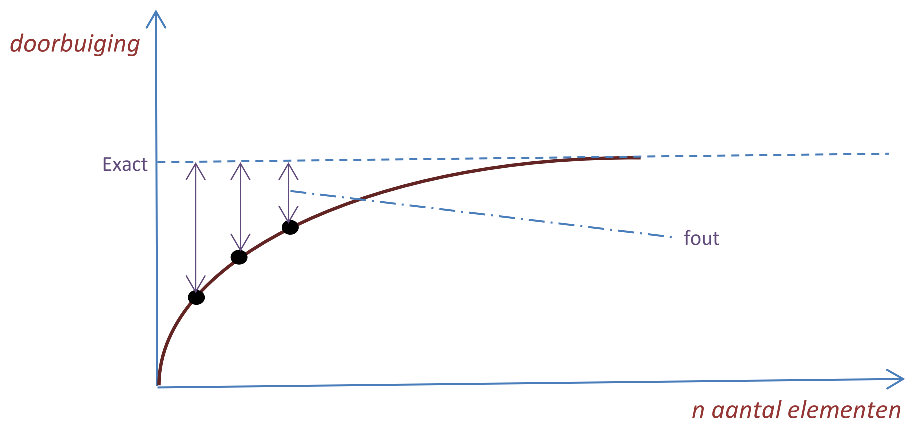


Figuur 4 Sydney Opera House; rechts: modellering van een schaalmodel in SCIA Engineer

Na de invoering van een model in SCIA Engineer, kan er een grafiek worden gemaakt zoals hieronder is weergegeven. Er kan dus door bijvoorbeeld drie verschillende elementgroottes te kiezen een schatting worden gemaakt van het aantal elementen dat nodig is om de berekening betrouwbaar te maken. De exacte waarde wordt gevonden door n groot te kiezen.



Figuur 5 Relatie tussen de fout van de resultaten en de grootte van de elementen met de eindige elementenmethode



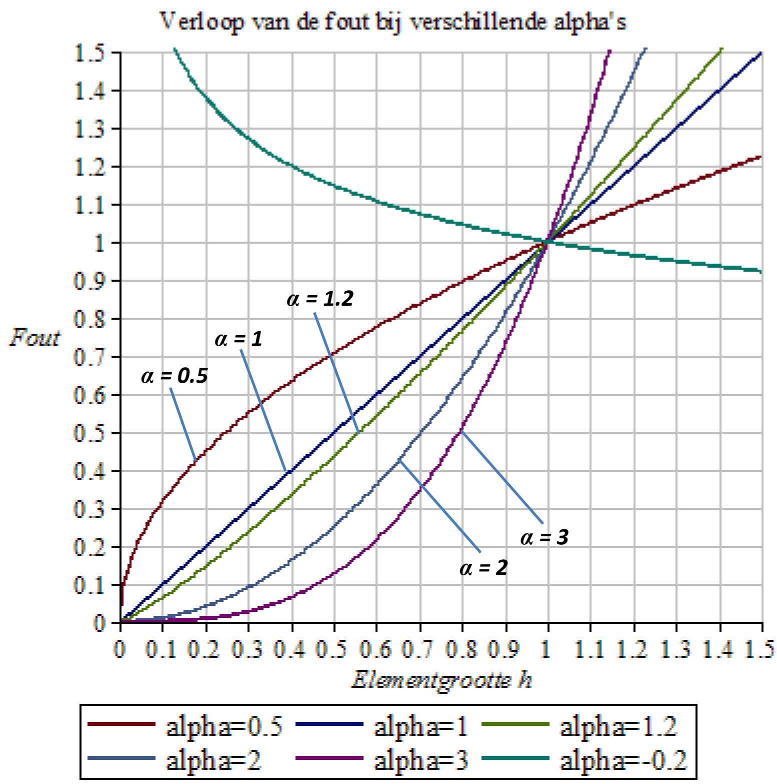
Figuur 6 Convergentie van de resultaten met de eindige elementenmethode

In bovenstaande grafiek wordt geïllustreerd dat in principe met 3 elementgroottes kan worden volstaan.

Door telkens de waarde h van de elementen de veranderen in SCIA (de grootte van het element) kan de fout van de elementen worden bepaald.

Er geldt (bij de verplaatsing): $U_{exact} = U_{berekend} + O(h^{\alpha})$. Dit wil zeggen dat de fout van een orde h^{α} is.

De convergentie van de resultaten verschilt door de grootte van alpha. Dit is door middel van onderstaande figuur geprobeerd duidelijk te maken. De maple-invoer is te vinden in bijlage 1. Telkens is h^{α} geplot voor verschillende alpha’s. De afname van de fout bij verkleining van de elementgrootte h verschilt dus voor verschillende ordes alpha van de fout. Ook is een plot gemaakt voor een negatieve alpha, waarbij de fout groter wordt bij een kleinere elementgrootte. Dit zal dus in principe nooit voorkomen.



Figuur 7 Verloop van de fout bij verschillende alpha's

Oplossingsmodel 1

Als nu voor h achtereenvolgens wordt gekozen:

- $h_1 = h$
- $h_2 = ½*h$
- $h_3 = ¼*h$

kunnen de volgende vergelijkingen worden opgesteld:

- $U_{ex} = U_{ber.1} + C*h^{\alpha}$
- $U_{ex} = U_{ber.2} + C*(½*h)^{\alpha}$
- $U_{ex} = U_{ber.3} + C*(¼*h)^{\alpha}$

Er zijn dus 3 vergelijkingen met 3 onbekenden α, U_{ex} en C. Door 3 modelleringen met de gekozen h te berekenen zijn deze op te lossen.

De bovenstaande berekening kan niet alleen worden uitgevoerd voor de doorbuiging bij verschillende belastingen maar ook voor de normaalkracht, de spanning ($\sigma = N/t + M/(^1/_6*t^2)$) en het moment en eventueel voor knik.

Bij de verschillende belastingen kan worden gedacht aan:

- Eigen gewicht van de schaal (globaal)
- Puntbelasting (locaal)

Oplossingsmodel 2

Door de hierboven beschreven formule om te schrijven kan ook nog een andere interessante grafiek worden getekend.

$U_{ex} = U_{ber} + C*h^{\alpha}$

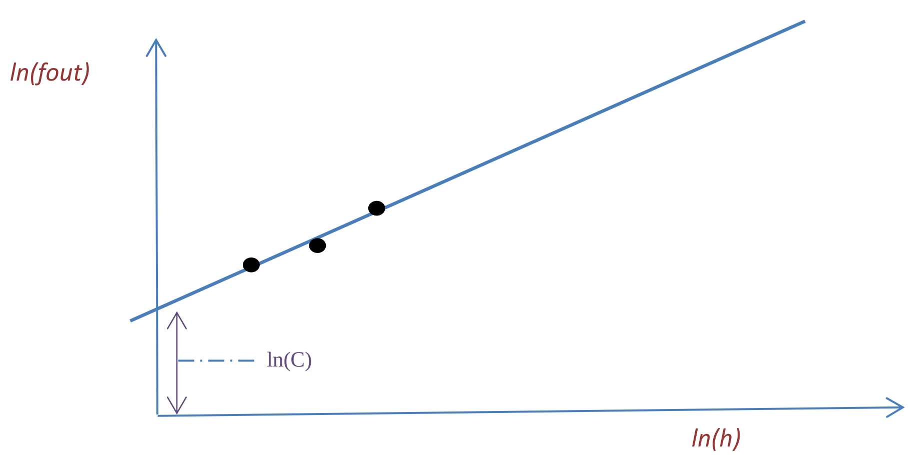
$fout = U_{ex} - U_{ber} = C*h^{\alpha}$

$\ln(fout) = \ln(C*h^{\alpha}) = \ln(C) + \alpha \ln(h)$

Waarbij de bovenstaande formule is te lezen als y = a*x + b, waarbij ln(C) dus een constante is.

Weergeven in een grafiek ziet dit er als in onderstaande figuur uit. De drie punten worden bepaald door $U_{ex} - U_{ber}$ te bepalen. Volgens de hypothese van de gebruikte formule voor de fout zou de grafiek een rechte lijn moeten zijn. α is de helling van de lijn, ln(C) is het doorgangspunt.

Als dit niet het geval is, zou de gebruikte formule voor de fout niet kloppen en is er blijkbaar een andere relatie. Dit moet dus worden gecontroleerd.



Figuur 8 Andere grafische weergave van de fout (fit door drie punten) (oplossingsmodel 2)

Als eenmaal de orde alpha is bepaald, kan vervolgens een formule worden opgesteld om uit twee berekeningsresultaten de exacte waarde van de oplossing te bepalen. Zie de onderstaande vergelijkingen.

verg.1 = $U_{ex} = U_{ber.1} + C*h^{\alpha}$
verg.2 = $U_{ex} = U_{ber.2} + C*(½h)^{\alpha}$

Uit de vergelijkingen kan als alpha bekend is een formule worden gevonden waarin U_{ex} is uitgedrukt in $U_{ber.1}$ en $U_{ber.2}$. Bijvoorbeeld voor $\alpha = 2$ wordt gevonden:

$U_{ex} = U_{ber.2} + (U_{ber.2} – U_{ber.1})/3$.

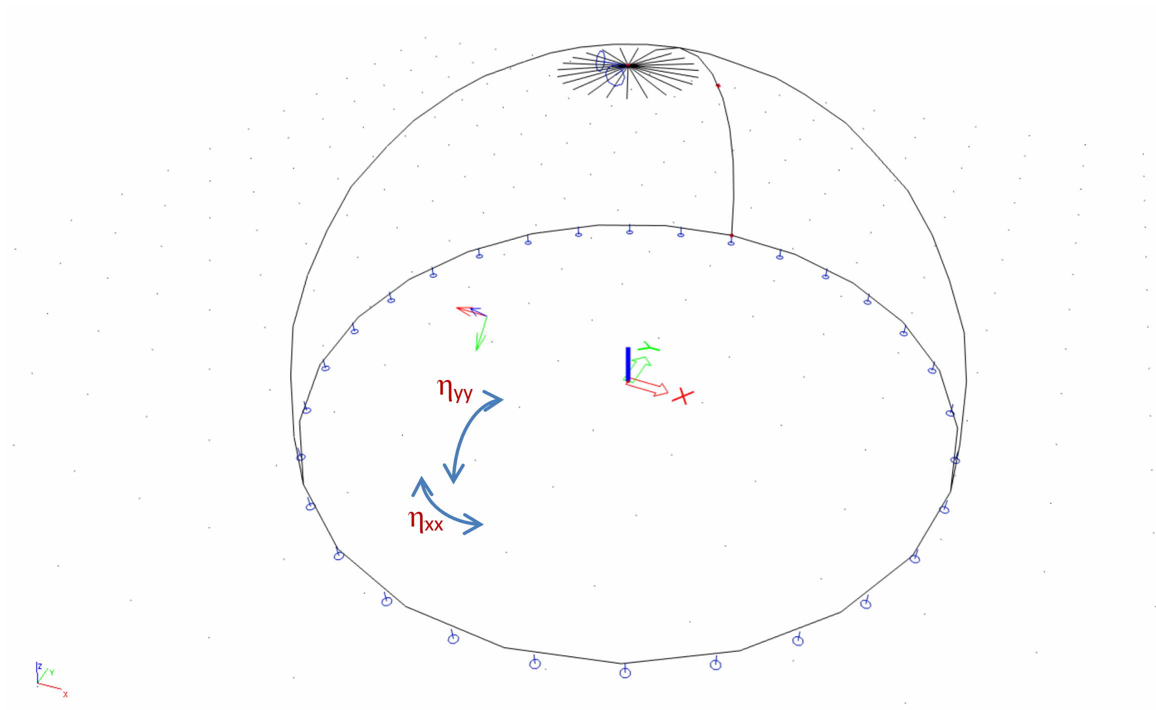
Op deze manier is dus met twee berekeningen het exacte resultaat bekend.

2. Modellering schaalmodellen voor berekening onder e.g.

2.1 Modellering eenvoudig model

Om de numerieke oplossing uit SCIA Engineer te kunnen toetsen aan een analytische oplossing is er eerst voor gekozen om een eenvoudig model in te voeren. Er is gekozen voor een halve bol met een straal R van 4m. Voor de wand van de bol is gekozen voor beton C12/15 met een dikte t van 10mm (een kleine dikte om de randstoringen zo klein mogelijk te houden). De dikte is eveneens van belang voor de soort berekening. Als R/t = ongeveer 500 kan er de berekening voor dunne schaalelementen worden toegepast. Vanaf R/t = 30 moet er met een berekening voor een dikwandige schaal worden gewerkt. In dit geval is R/t = 4/0.01 = 400, dus de normale berekening kan worden toegepast. [ref. P.C.J. Hoogenboom].

De rand van de bol is over de hele lengte lijnvormig ondersteund door scharnierende opleggingen (vrij in x- en y-richting) en een oplegging aan de top (vast in x- en y-richting en vrij in z-richting), zodat de bol dus als het ware vrij op de ondergrond staat. Zie onderstaande figuur.



Figuur 9 Halve bol met een straal van 4m

In de bovenstaande figuur zijn is de meridiaankracht (normaalkracht) aangegeven met η_{yy} en de ringkracht met η_{xx}.

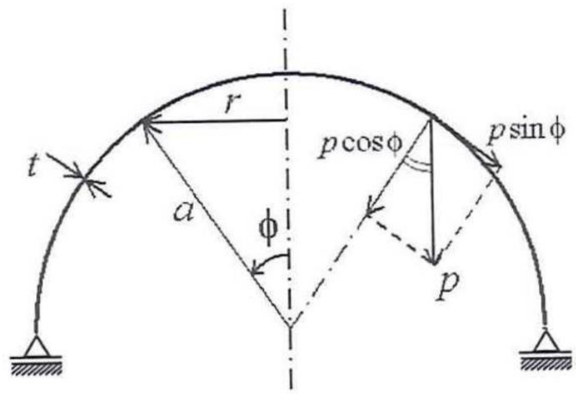
2.1.1 Belasting onder eigen gewicht

Als belasting is eerst gekozen voor de belasting met het eigengewicht. De soortelijke massa van beton C12/15 is 2500kg/m^3. Dit levert een verdeelde belasting van 2500*0.01*10= 250N/m^2. Om de resultaten nauwkeuriger te kunnen aflezen wordt gerekend met een waarde van 2500000kg/m^3 dus 2500000*0.01*10= 250000N/m^2. Dit heeft verder geen invloed omdat alle berekeningen lineair elastisch zijn.

Analytische oplossing eenvoudig schaalmodel

Ringkrachten en normaalkrachten

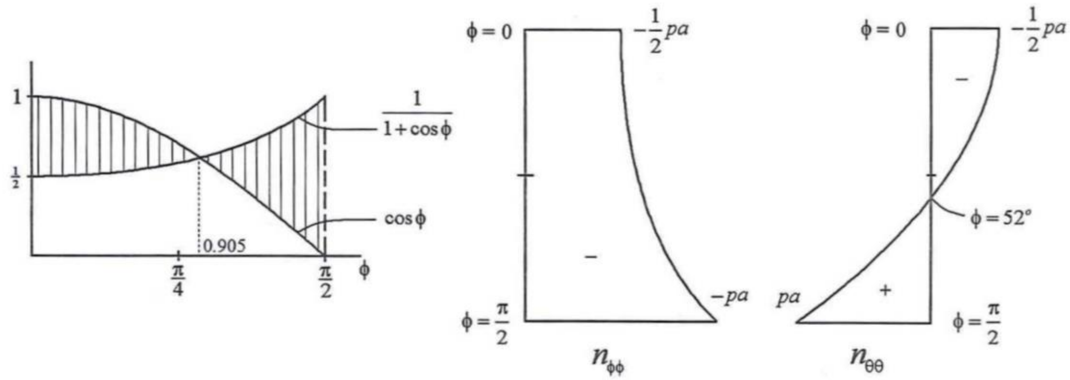
Voor een door eigengewicht belaste bol is de grootte van de ringkrachten en van de meridiaankrachten analytisch te bepalen. In de onderstaande figuur is een halve bol weergegeven, belast onder zijn eigen gewicht p en a = R = 4m.



Figuur 10 Belasting van een door rolopleggingen ondersteunde halve bol[1]

In de onderstaande figuur is de spanningsverdeling in de halve bol gegeven ten gevolge van de belasting onder het eigen gewicht. De analytische afleiding wordt hier niet geheel uitgeschreven. Het linker spanningsdiagram geeft het verloop van de meridiaankrachten weer over de hoogte ($\eta_{\Phi\Phi} = \eta_{yy}$) en de rechterfiguur het verloop van de ringkrachten over de hoogte ($\eta_{\Theta\Theta} = \eta_{xx}$). Er is te zien dat de meridiaankracht over de gehele hoogte een drukkracht is die verloopt van -0.5pa aan de bovenzijde naar –pa aan de onderzijde. De ringkracht verloopt van een drukkracht aan de bovenzijde met een grootte van -0.5pa (dus gelijk aan de meridiaankracht, gezien er in de top evenwicht moet heersen) naar een trekkracht van pa aan de onderzijde.

[1] Blauwendraad, Johan, and Hoefakker, Jeroen H. *Structural Shell Analysis*. Dordrecht: Springer Science Business Media, 2014. eBook., p.236



Figuur 11 Verdeling van de spanningsresultanten over de halve bol[2]

Voor het verloop van de meridiaankracht en de ringkracht gelden de volgende uitdrukkingen:[3]

$$\eta_{\Phi\Phi} = -pa\frac{1}{1+\cos(\Phi)}$$

$$\eta_{\Theta\Theta} = pa(\frac{1}{1+\cos(\Phi)} - \cos(\Phi)$$

De verdeelde belasting p = 2500000[kg/m^3]*0.01[m]*9.81[m/s^2]/1000 = 245.25kN/m^2. Hiermee kunnen de volgende krachten worden bepaald.

- De meridiaankracht aan de top van de halve bol wordt: $\eta_{yy,top}$ = -0.5*245.25*4 = -490.5kN/m.
- De meridiaankracht aan de onderzijde van de halve bol wordt: $\eta_{yy,onder}$ = -245.25*4 = -981kN/m.
- De ringkracht aan de top van de halve bol wordt: $\eta_{xx,top}$ = $\eta_{yy,top}$ = -490.5kN/m.
- De ringkracht aan de onderzijde van de halve bol wordt: $\eta_{xx,onder}$ = 245.25*4 = 981kN/m.

Deze waarden kunnen worden getoetst aan de numerieke oplossing die hieronder is uitgewerkt.

Numerieke oplossing

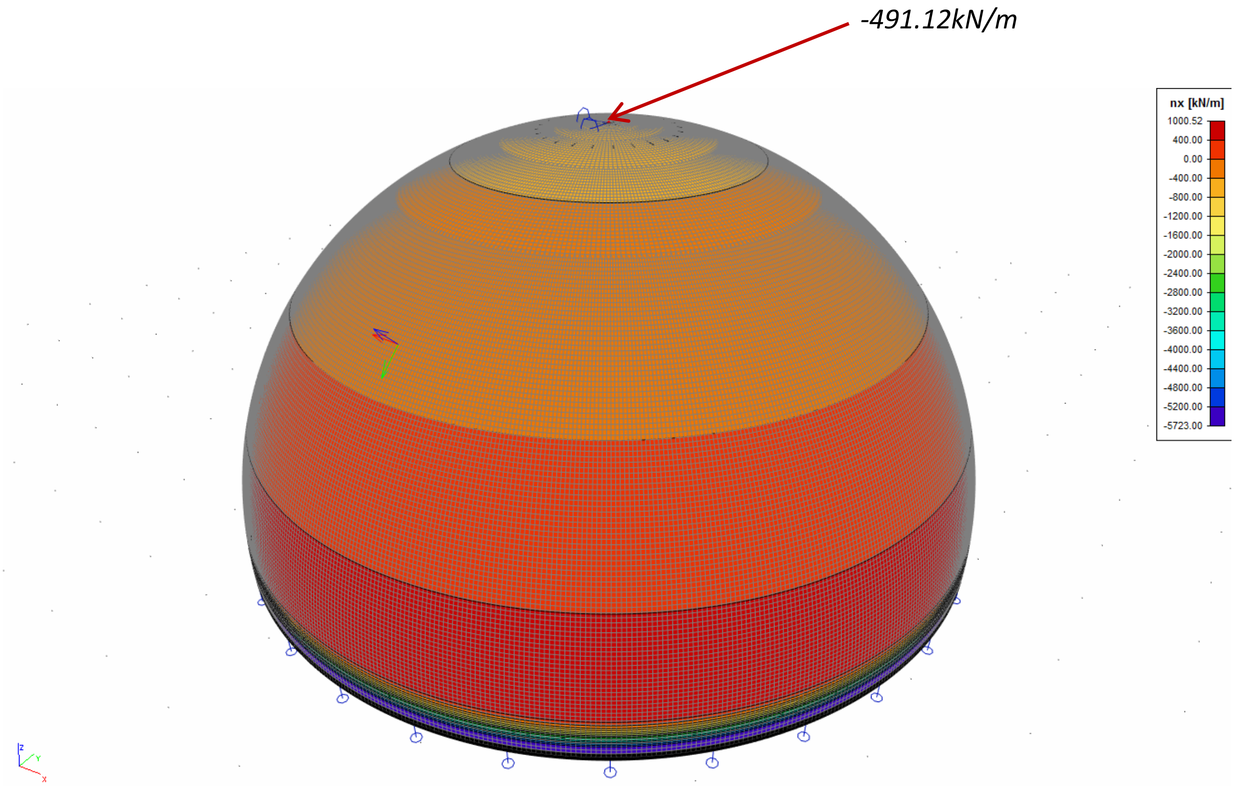
Ringkrachten

Voor de ringkrachten moet worden gekeken naar de kracht η_{xx}. Deze is in de onderstaande figuur te zien zoals hij numeriek door SCIA Engineer is berekend.

---

[2] Blauwendraad, Johan, and Hoefakker, Jeroen H. *Structural Shell Analysis*. Dordrecht: Springer Science Business Media, 2014. eBook., p.237

[3] Blauwendraad, Johan, and Hoefakker, Jeroen H. *Structural Shell Analysis*. Dordrecht: Springer Science Business Media, 2014. eBook., p.237



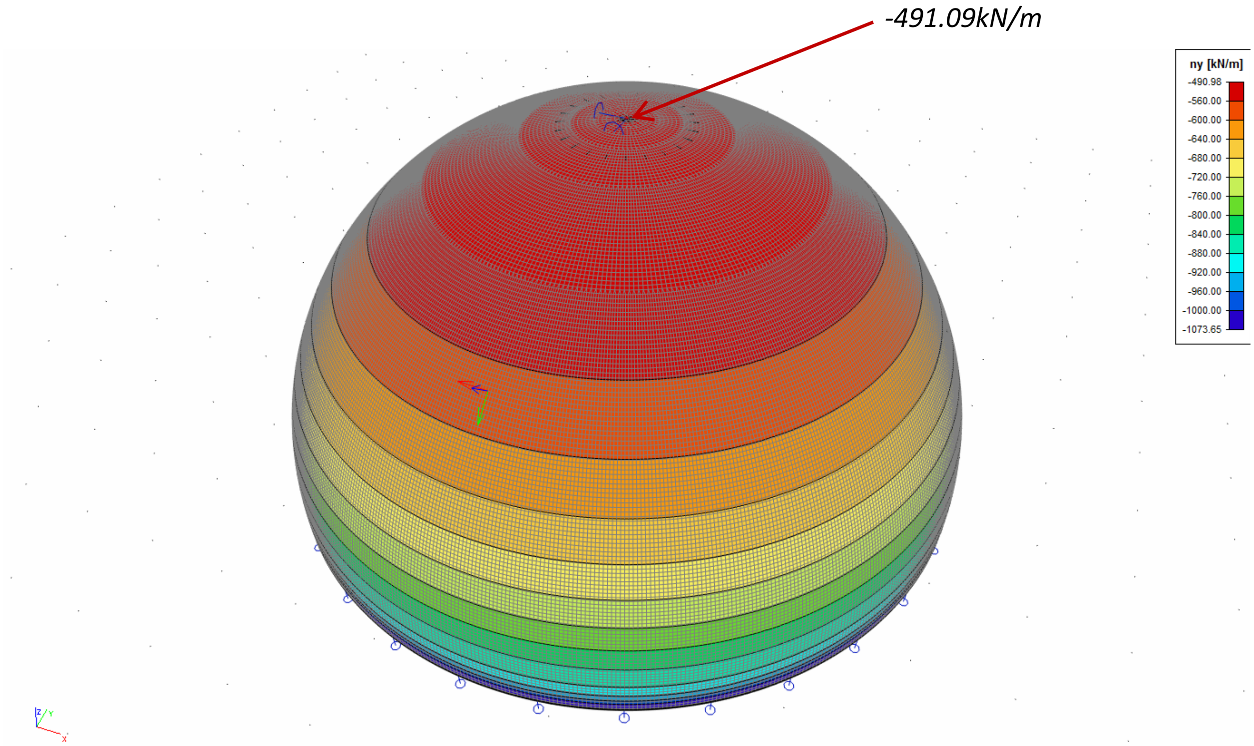
Figuur 12 Verloop van de ringkrachten (η_{xx})

Er is te zien dat $\eta_{xx,top}$ = ongeveer -500kN/m (exacte aflezing: -491.12kN/m) en $\eta_{xx,onder}$ = ongeveer 1000kN/m. Hierbij moet erop worden gelet dat de waarde boven de randstoring wordt afgelezen.

De numerieke en de analytische oplossing komen dus goed overeen.

Normaalkrachten

De numerieke oplossing van het verloop van de normaalkrachten/meridiaankrachten (η_{yy}) is hieronder te zien.



Figuur 13 Numerieke oplossing van het verloop van de normaalkrachten/meridiaankrachten (η_{yy})

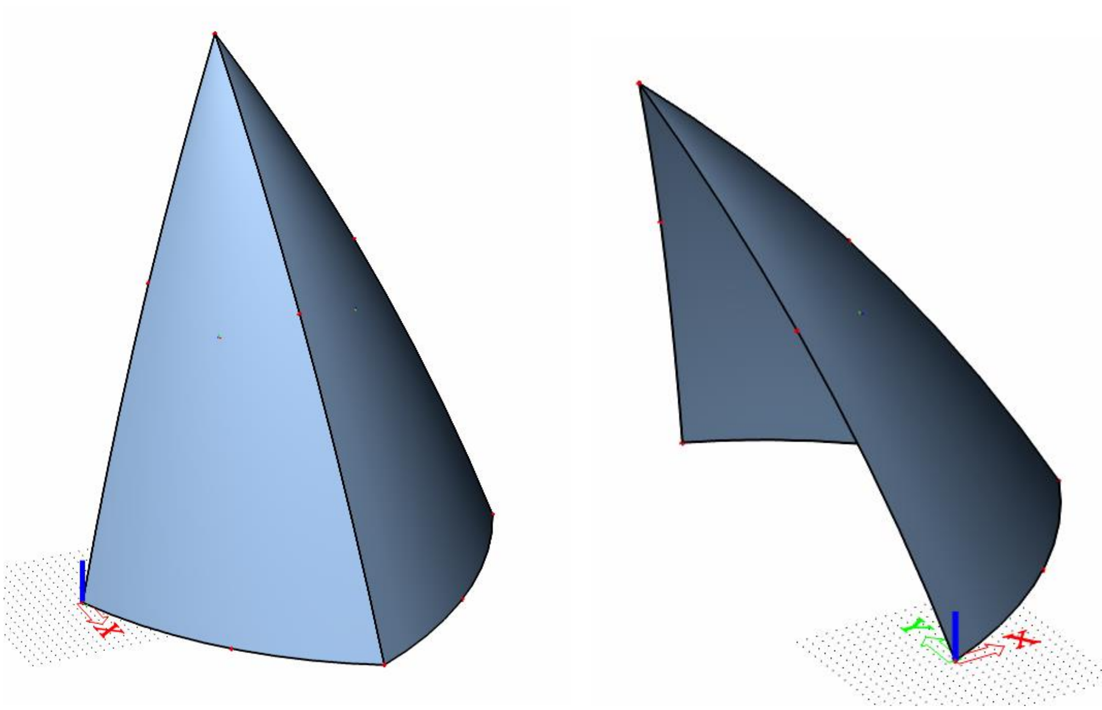
Er is te zien dat $\eta_{yy,top}$ = ongeveer -500kN/m (exacte aflezing: -491.09kN/m) en $\eta_{yy,onder}$ = ongeveer -1000kN/m. Ook hier moet er weer op worden gelet dat de waarde niet op de uiterste rand wordt afgelezen.

Ook hier komen de numerieke en de analytische oplossing dus goed overeen.

2.2 Modellering Sydney Opera House

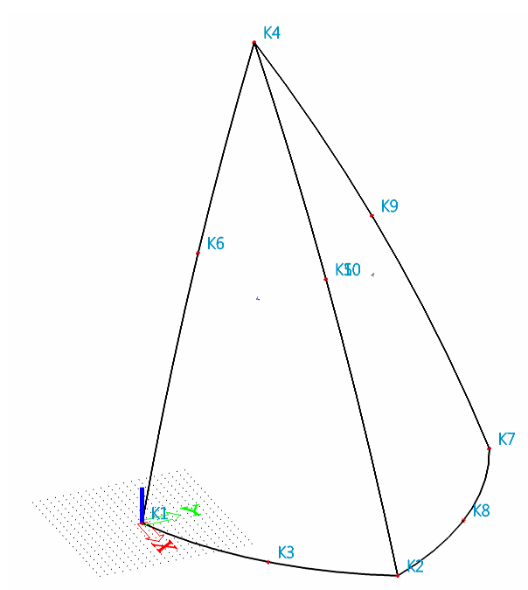
Ook wordt nu een modellering gemaakt van de grootste schaal van het dak van Sydney Opera House. De afmetingen zijn gevonden door de maten uit een tekening op te meten. Deze tekening is in bijlage 5 te vinden[4].

[4] http://gallery.records.nsw.gov.au/wp-content/gallery/sydney-opera-house-the-gold-book/12706_2_8645_0021.jpg



Figuur 14 Modellering Sydney Opera House

De maten met de exacte locaties van de knopen zijn in onderstaande tabel te vinden. Voor de betonnen schaal is een dikte van 200mm aangenomen.



Figuur 15 Ligging van de knopen

Knoop	*x-coördinaat*	*y-coördinaat*	*z-coördinaat*
K1	0.00	0.00	0.00
K2	24.4	22.85	0.00
K3	15.00	10.00	0.00
K4	-18.30	22.85	51.80
K5	3.05	22.85	30.00
K6	-9.15	11.40	30.00
K7	0.00	45.70	0.00
K8	15.00	35.70	0.00
K9	-9.15	34.30	30.00
K10	3.05	22.85	30.00

Tabel 1 Coördinaten van de knopen

3. Bepalen van de orde van de fout van de elementen voor belasting onder e.g.

3.1 Doorbuiging

3.1.1 Eenvoudig schaalmodel

Voor het bepalen van de orde van de fout van de elementen voor belasting onder eigen gewicht zal de verticale verplaatsing op een bepaalde plek in de constructie voor verschillende elementgroottes achtereenvolgens worden berekend.

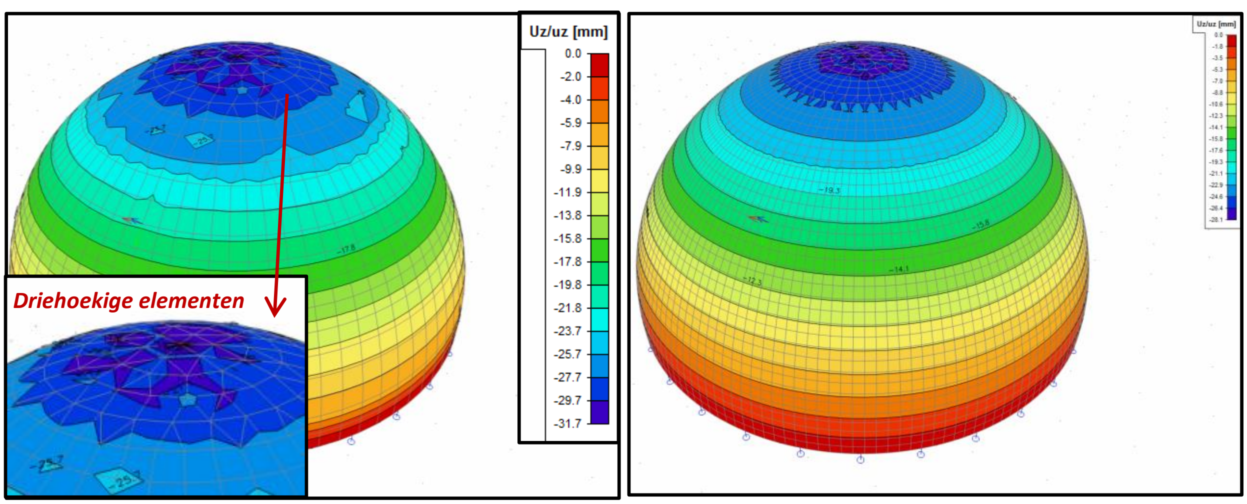
Voor de grootte van de elementen wordt achtereenvolgens gekozen:

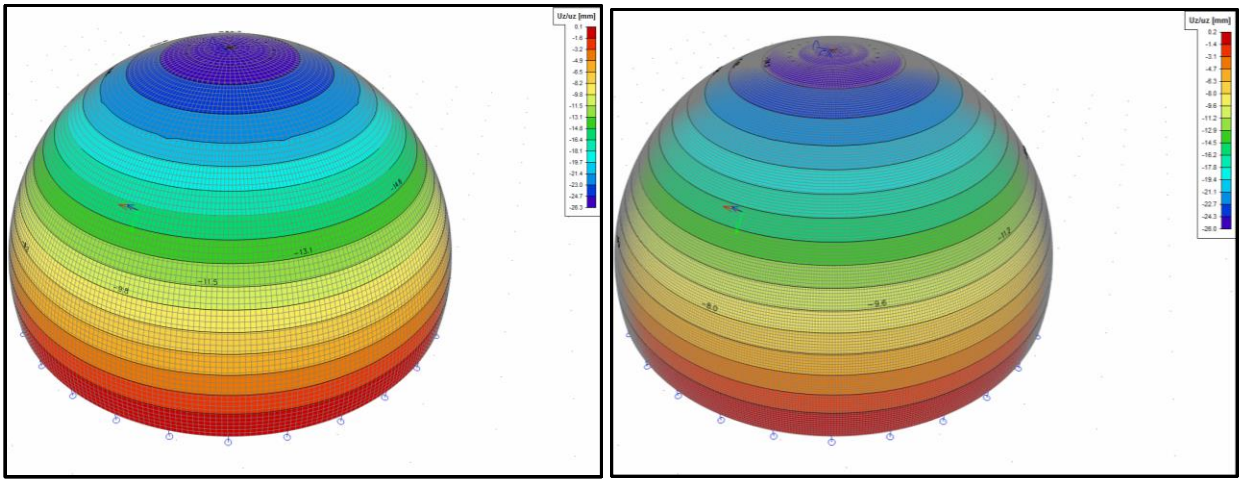
- h = 0.32m
- ½*h = 0.16m
- ¼*h = 0.08m
- ⅛*h = 0.04m

Deze elementgrootte wordt gekozen omdat, zoals eerder in de inleiding is beschreven, de opslagcapaciteit van de gebruikte computer moet volstaan om het aantal elementen te kunnen doorrekenen. In dit geval was de grootte van 0.04m de kleinste grootte waarmee de gebruikte computer nog kon rekenen.

Hieronder zijn de resultaten uit SCIA Engineer weergegeven.

De vorm van de elementen is ook van belang. We zijn namelijk op zoek naar de orde van de rechthoekige elementen. Er wordt vanuit gegaan dat de verplaatsing aan de top het gevolg is van de krachtswerking in de gehele constructie. Er is te zien dat er slechts enkele driehoekige elementen aanwezig zijn aan de bovenzijde in verhouding tot de rechthoekige elementen. De bijdrage hiervan wordt verwaarloosbaar aangenomen.





Figuur 16 Verandering van de elementgrootte van h naar ⅛h en de resultaten van de verplaatsing uit SCIA Engineer

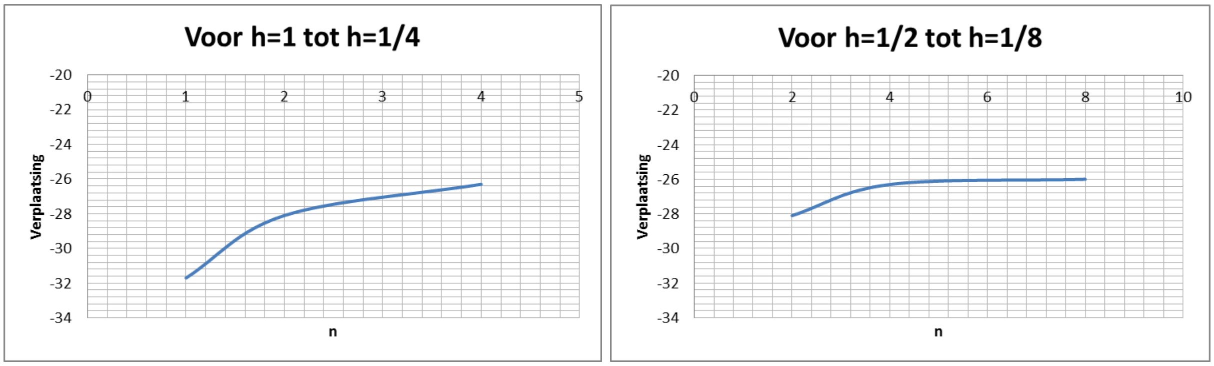
De maximale verplaatsing wordt in de top gemeten. Deze waarden zijn voor de verschillende elementgroottes hieronder in tabellen gezet.

Elementgrootte	$U_{verticaal,top}$ (mm)
h	-31.7
½*h	-28.1
¼*h	-26.3
	O(h^α) $\alpha = 1.00$

½*h	-28.1
¼*h	-26.3
⅛*h	-26.0
	O(h^α) $\alpha = 2.58$

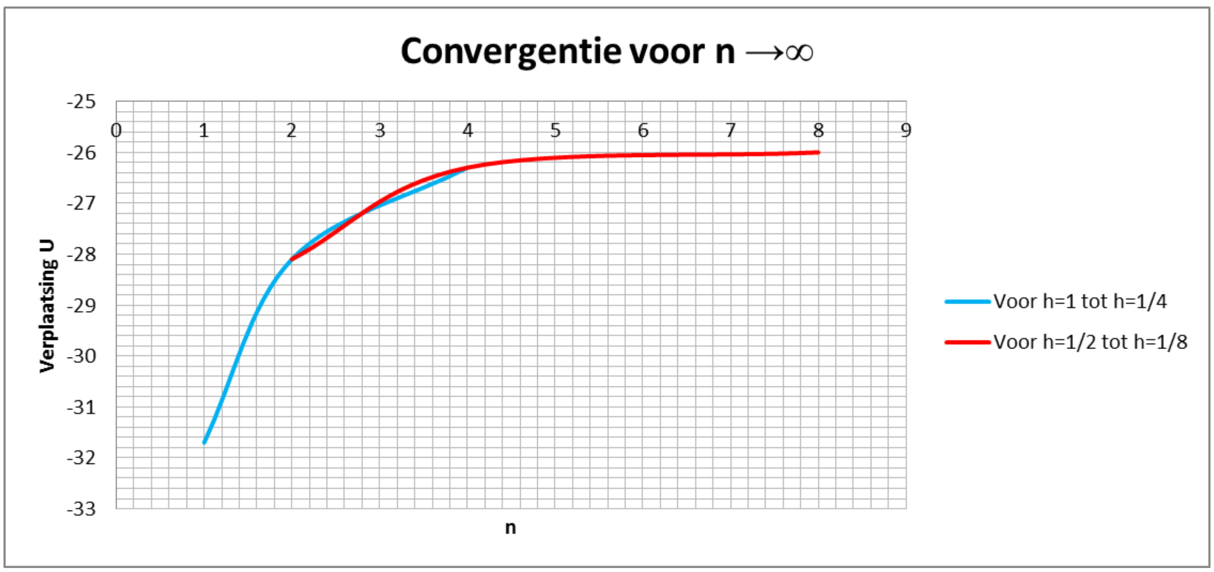
Tabel 2a en 2b Resultaten berekening met e.g. voor doorbuiging/verplaatsing

Hieronder zijn de verplaatsingen uit de bovenstaande tabel uitgezet tegen het aantal elementen, waarbij voor het aantal elementen de waarde van 1 gedeeld door de elementgrootte is genomen.



Figuur 17 Resultaten verplaatsing onder e.g.

In onderstaande figuur zijn beide resultaten in één grafiek geplot waar de convergentie van het resultaat voor n gaat naar oneindig duidelijk is te zien.



Figuur 18 Convergentie van de resultaten voor n→∞

Doordat met vier elementgroottes is gewerkt is de orde van de fout twee keer te bepalen zodat er een controle wordt uitgevoerd. Deze ordes zouden gelijk moeten zijn. Met de eerder vermelde formules (oplossingsmodel 1) is de orde nu te berekenen. Zie de berekening in maple in bijlage 2.

Er wordt gevonden dat:

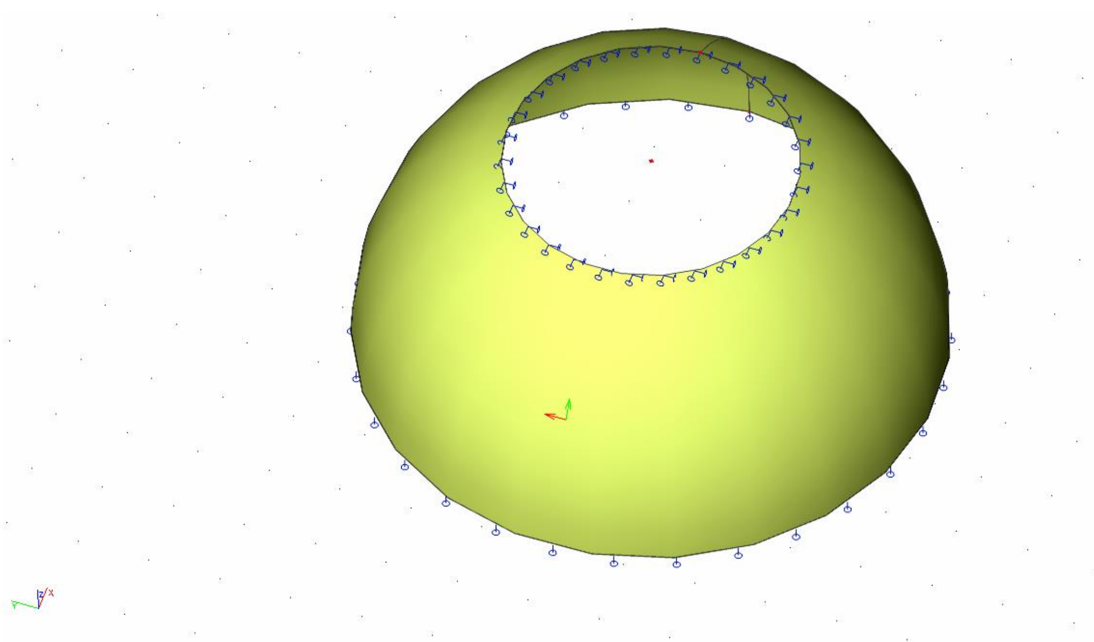
- $\alpha = 1.00$ (met de resultaten uit tabel 2a)
- $\alpha = 2.58$ (met de resultaten uit tabel 2b)

Er is te zien dat de gevonden alpha's niet overeen komen. De alpha die berekend wordt met een als laatste resultaat de kleinste gekozen elementgrootte is groter dan de alpha berekend met de grotere elementgroottes. Dit is overigens wel voordelig omdat de fout bij een hogere orde snel uitdempt. Het verschil kan verschillende oorzaken hebben. Hieronder zijn mogelijke oorzaken gegeven.

- De reken-onnauwkeurigheid wordt groot bij heel veel vrijheidsgraden en dus bij een kleine elementgrootte. SCIA Engineer controleert echter zelf aan het einde van de berekening of de som van belasting en oplegreacties gelijk is aan nul. Dit was bij alle gedane berekeningen het geval, waardoor deze mogelijke oorzaak afvalt. (Er wordt aangenomen dat SCIA met een nauwkeurigheid tussen de gevonden resultaten van ongeveer 1% rekent).
- De invloed van de driehoekige elementen is mogelijk groter dan aangenomen. Dit kan worden gecontroleerd door een halve ronde bol met een opening in het midden of een cilinder eveneens door te rekenen. Het gebruikte net bestaat dan alleen uit rechthoekige elementen.

Andere modellering

Hieronder is het model gegeven dat gebruikt wordt voor de controle van deze mogelijke oorzaak. De straal onder is 4m en de straal van de opening is 2m. De wanddikte is 0.01m. De soortelijke massa is wederom met 1000 vermenigvuldigd om het resultaat nauwkeuriger te maken. De onderrand is lijnvormig ondersteund met alleen een verhindering van de verplaatsing in z-richting; de bovenrand is lijnvormig ondersteund met een verhindering van de verplaatsing in x- en y-richting.

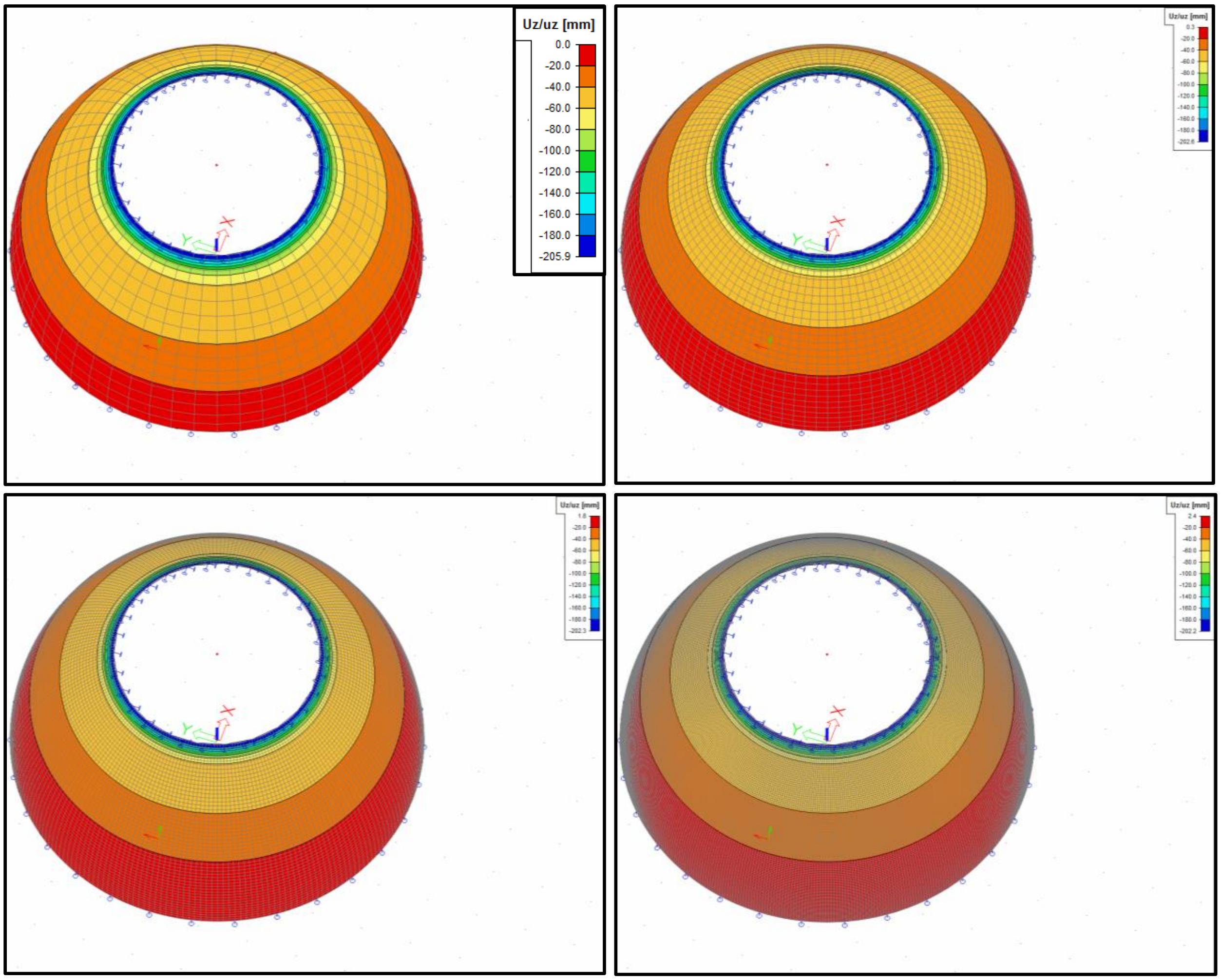


Figuur 19 Nieuwe modellering

Voor de grootte van de elementen wordt achtereenvolgens gekozen:

- h = 0.32m
- ½*h = 0.16m
- ¼*h = 0.08m
- ⅛*h = 0.04m

Hieronder zijn de resultaten uit SCIA Engineer weergegeven.



Figuur 20 Verandering van de elementgrootte van h naar ⅛h en de resultaten van de verplaatsing uit SCIA Engineer

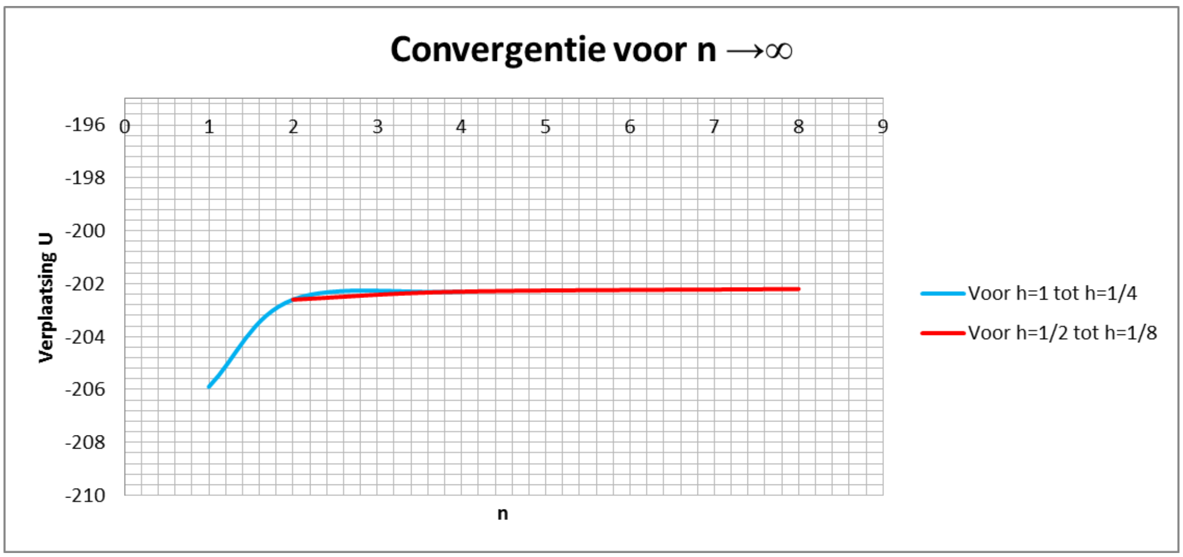
De maximale verplaatsing wordt weer in de top gemeten. Deze waarden voor de verschillende elementgroottes zijn in de onderstaande tabellen gezet.

Elementgrootte	$U_{verticaal,top}$ (mm)
h	-205.9
½*h	-202.6
¼*h	-202.3
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 3.46$

½*h	-202.6
¼*h	-202.3
⅛*h	-202.2
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.58$

Tabel 3a en 3b Resultaten berekening met e.g. voor doorbuiging/verplaatsing met nieuwe modellering

De bovenstaande resultaten zijn in de onderstaande grafiek uitgezet. Een convergentie is weer duidelijk te zien.



Figuur 21 Convergentie van de resultaten voor n→∞

De berekening van alpha is in bijlage 3 met maple uitgewerkt (met oplossingsmodel 1). De gevonden waarden van alpha zijn:

- α = 3.46 (met de resultaten uit tabel 3a)
- α = 1.58 (met de resultaten uit tabel 3b)

Er is te zien dat de waarde van alpha nu weer verandert. Blijkbaar ligt het niet direct aan de driehoekige elementen en moet de verandering op een ander gebied worden gezocht.

Gebruik van de afgeleide logaritmische formule

De mogelijkheid bestaat dat er bij het oplossen van de formules voor alpha iets mis gaat in de berekening . Daarom wordt hieronder gebruik gemaakt van de methode zoals deze in de inleiding reeds is beschreven waarbij gebruik wordt gemaakt van de onderstaande formulering (oplossingsmodel 2).

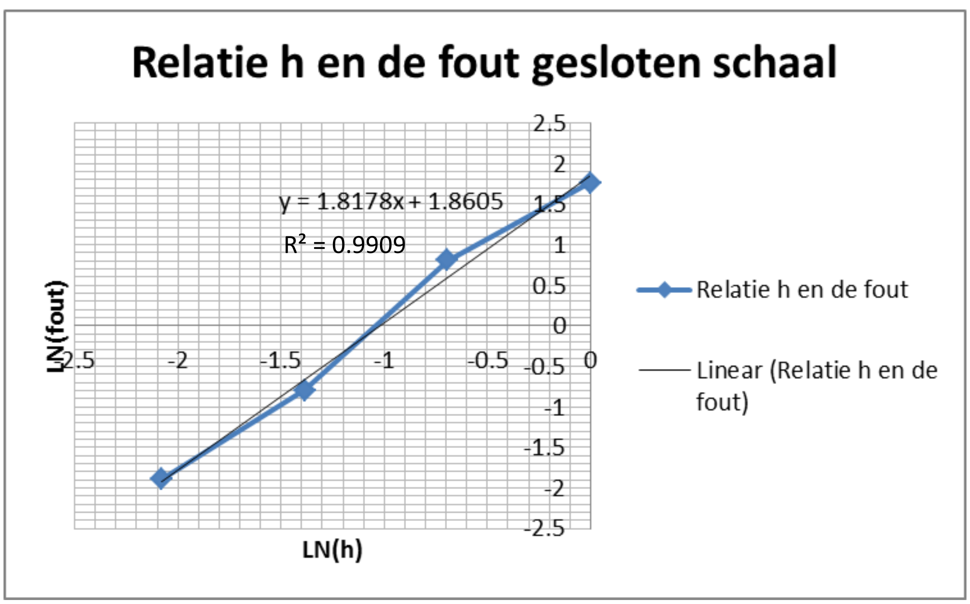
$\ln(\text{fout}) = \alpha \ln(C) + \alpha \ln(h)$

Voor het model waarbij de halve bol is gesloten zijn de gevonden waarden in de onderstaande tabel gezet. De exacte waarde is geschat zodat de lijn in de onderstaande grafiek zoveel mogelijk een rechte lijn benadert. Daarbij is voor R^2 (de correlatie) een zo groot mogelijke waarde (zo dicht mogelijk bij 1) gekozen, wat betekent dat de standaardafwijking zo klein mogelijk is. Hoe dichter R^2 bij 1 ligt, hoe beter de data fit met de lineare relatie. De ln(fout) van de vier uitgezette punten is steeds bepaald door de berekende waarde van de benaderde exacte waarde af te trekken. De exacte waarde is benaderd door te calibreren met de punten is de grafiek zodat deze op één lijn komen te liggen.

	U	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-31.7	1.766442	0
Meting 2	-28.1	0.81093	-0.69315
Meting 3	-26.3	-0.79851	-1.38629
Meting 4	-26	-1.89712	-2.07944
U_{exact} (geschat)	**-25.85**		

Tabel 4 Resultaten (logaritmisch) verplaatsing van het gesloten schaalmodel onder e.g.

Deze punten uitzetten in een grafiek levert de volgende figuur.



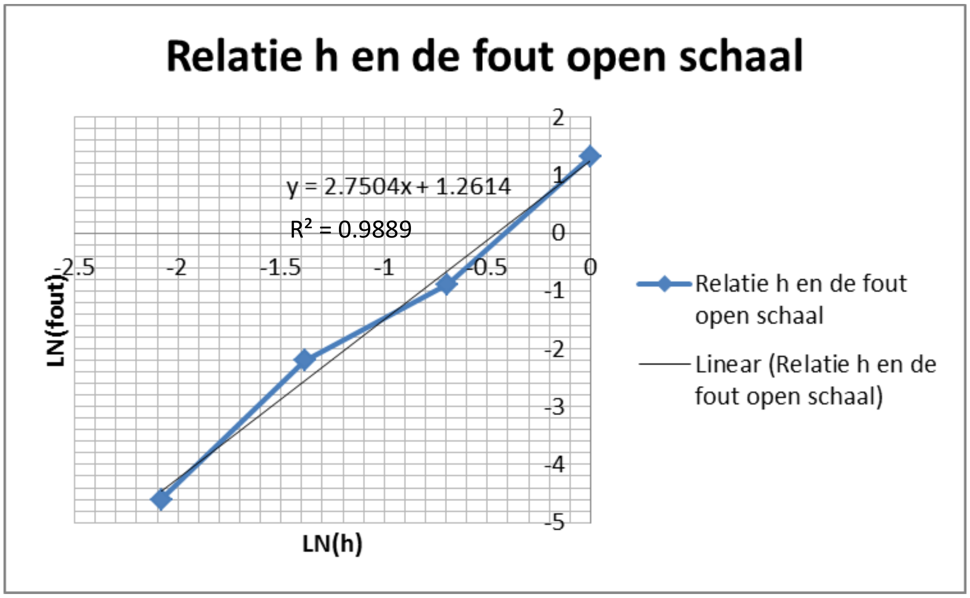
Figuur 22 Relatie tussen h en de grootte van de fout verplaatsing bij het gesloten schaalmodel onder e.g., logaritmisch

De waarde van α ln(C) en van α zijn rechtstreeks af te lezen uit de grafiek. α = 1.82 en ln(C) = 1.86, dus C = 6.43.

Voor het gesloten schaalmodel wordt nogmaals dezelfde operatie toegepast hetgeen leidt tot de onderstaande resultaten.

	U	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-205.9	1.311032	0
Meting 2	-202.6	-0.8916	-0.69315
Meting 3	-202.3	-2.20727	-1.38629
Meting 4	-202.2	-4.60517	-2.07944
U_{exact} (geschat)	**-202.19**		

Tabel 5 Resultaten (logaritmisch) verplaatsing van het open schaalmodel onder e.g.



Figuur 23 Relatie tussen h en de grootte van de fout verplaatsing bij het open schaalmodel onder e.g., logaritmisch

Ook hier zijn de waarden van α en C rechtstreeks te bepalen. α = 2.75 en ln(C) = 1.26, hetgeen leidt tot C = 3.53.

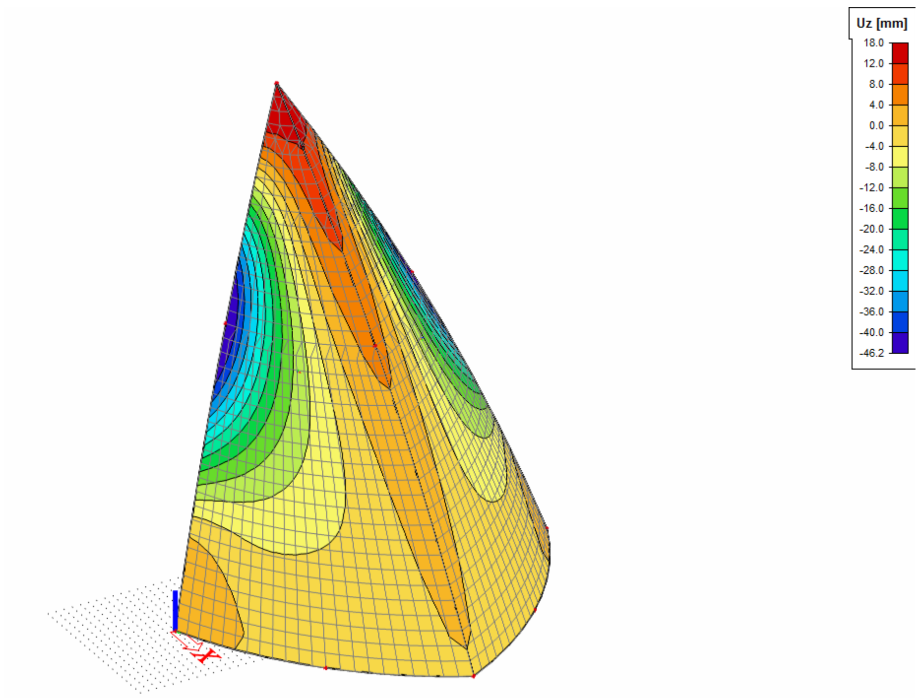
Er is dus te zien dat de gevonden waarden van alpha voor beide methoden niet overeen komen en dat de orde van de fout in de buurt ligt van α = 2. Er is dus niet te zeggen of de invloed van de driehoekige elementen is te verwaarlozen. De waarde van C verschilt voor beide methoden, hetgeen kan aantonen dat de vorm van de constructie van invloed is op de grootte hiervan. De variatie in grootte van alpha kan het gevolg zijn van meerdere oorzaken, zoals de driehoekige elementen of een onjuiste hypothese voor de benadering van de fout.

3.1.2 Syney Opera House

Voor de grootte van de elementen achtereenvolgens worden de volgende afmetingen gekozen (ook deze elementgrootte is weer gekozen afhankelijk van de capaciteit van de gebruikte computer).

- h = 1.6m
- ½*h = 0.8m
- ¼*h = 0.4m
- ⅛*h = 0.2m

Hieronder is eerst het verloop van de verticale verplaatsing U_z weergegeven.



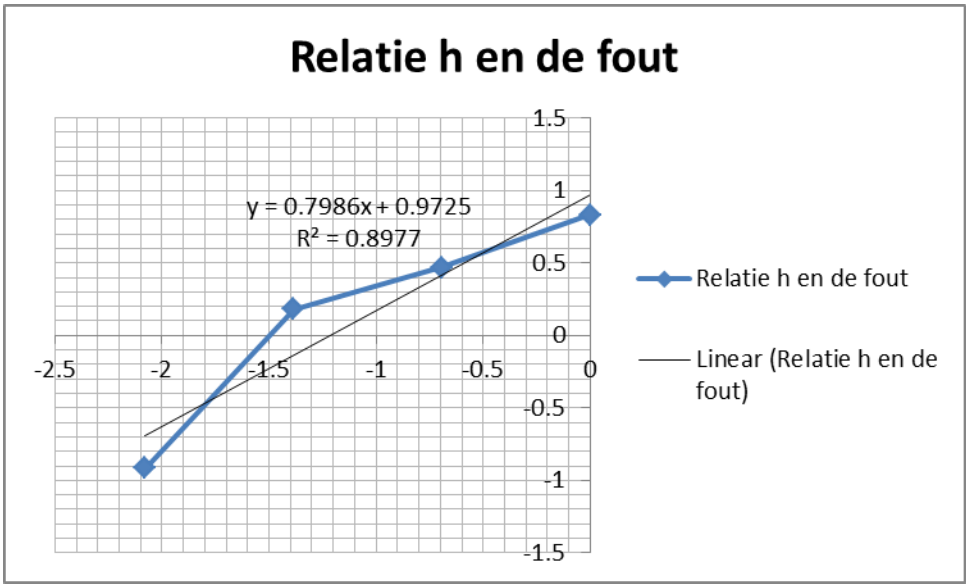
Figuur 24 Verloop van de verplaatsing Uz

De waarden van de verplaatsing zijn bij de netverfijning telkens in knoop K9 afgelezen. Dit levert de onderstaande resultaten. U_{exact} is hierbij weer geschat.

	U_z (mm)	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-68.7	0.832909	0
Meting 2	-69.4	0.470004	-0.69315
Meting 3	-69.8	0.182322	-1.38629
Meting 4	-70.6	-0.91629	-2.07944
U_{exact} (geschat)	**-71**		

Tabel 6 Resultaten verplaatsing schaal Sydney Opera House onder e.g.

Dit levert met de logaritmische formule (oplossingsmodel 2) de onderstaande grafiek.



Figuur 25 Relatie tussen h en de grootte van de fout verplaatsing, schaal Sydney Opera House onder e.g., logaritmisch

Er is te zien dat voor alpha nu een waarde van α = 0.80 wordt gevonden. Dit is een stuk lager dan eerder is gevonden. Ook is te zien dat ln(C) = 0.97, dus C = 2.64. Een afwijking van C is niet verwonderlijk omdat de vorm van de schaal en dus de situatie anders is dan bij de eerdere berekening. Maar de invloed hiervan is niet te bewijzen omdat C niet dimensieloos is en de eenheid afhangt van alpha, zoals eerder is besproken.

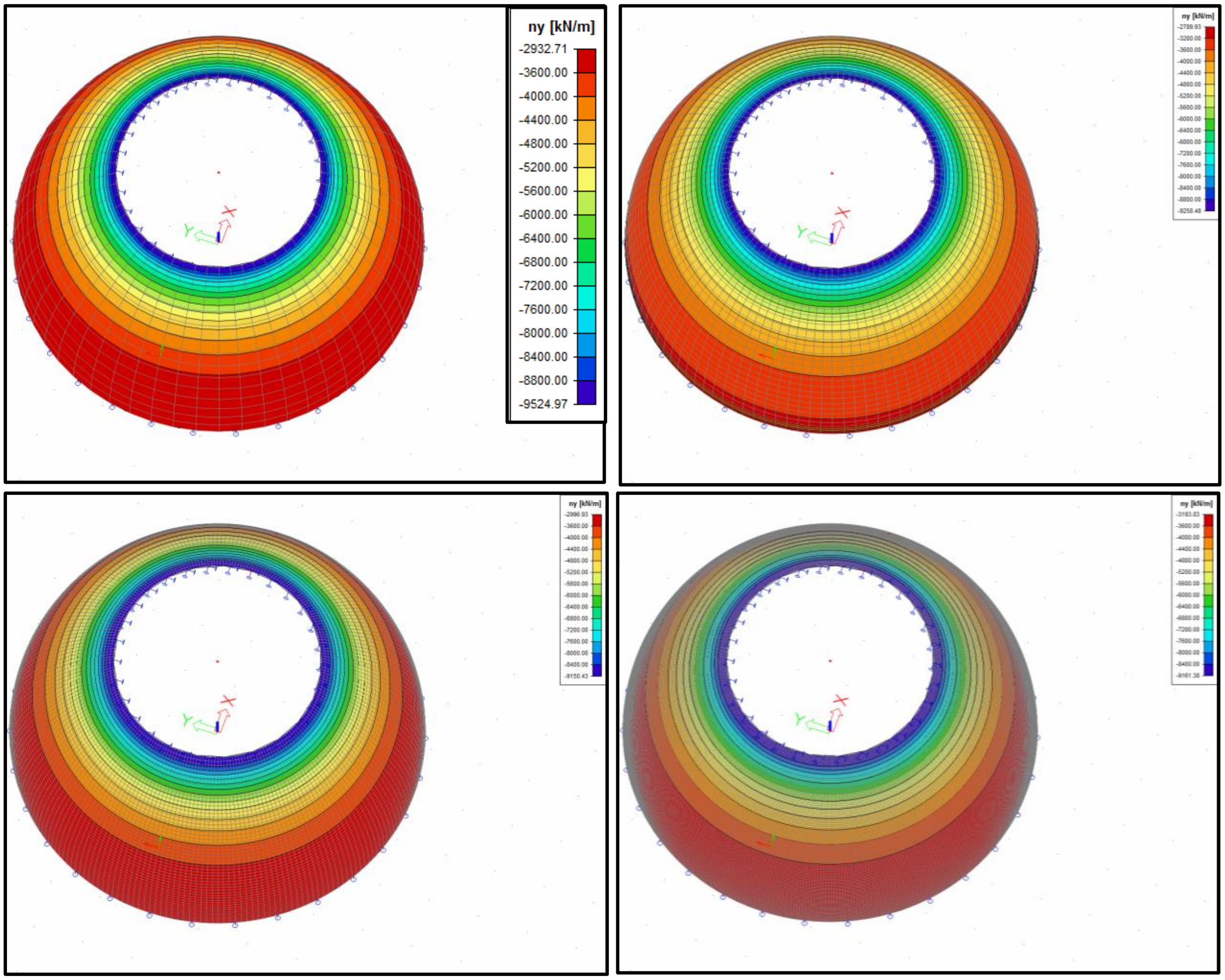
3.2 Normaalkracht/meridiaankracht

3.2.1 Eenvoudig schaalmodel

Voor de berekening van de orde van de fout van de elementen voor de normaalkracht wordt weer gebruik gemaakt van het model van de halve bol met een opening in het midden zodat in elk geval de invloed van de driehoekige elementen kan worden uitgesloten. Er moet dan dus worden gekeken naar η_{yy} zoals eerder is besproken. De meridiaankracht wordt op een bepaalde coördinaat bekeken. Op de bovenrand treedt namelijk een randstoring op. Daarbij moet er worden gekozen waar er geen gradient is bij meshverfijning.

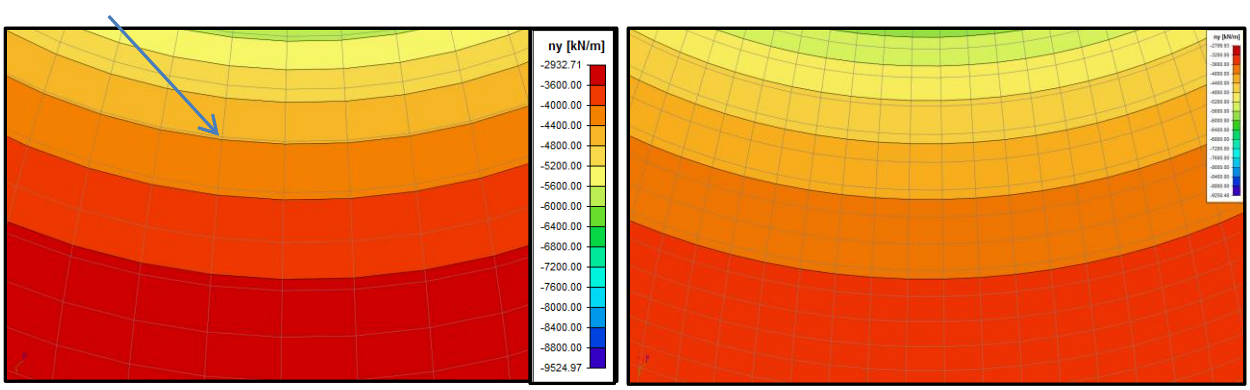
Voor de grootte van de elementen wordt weer achtereenvolgens gekozen:

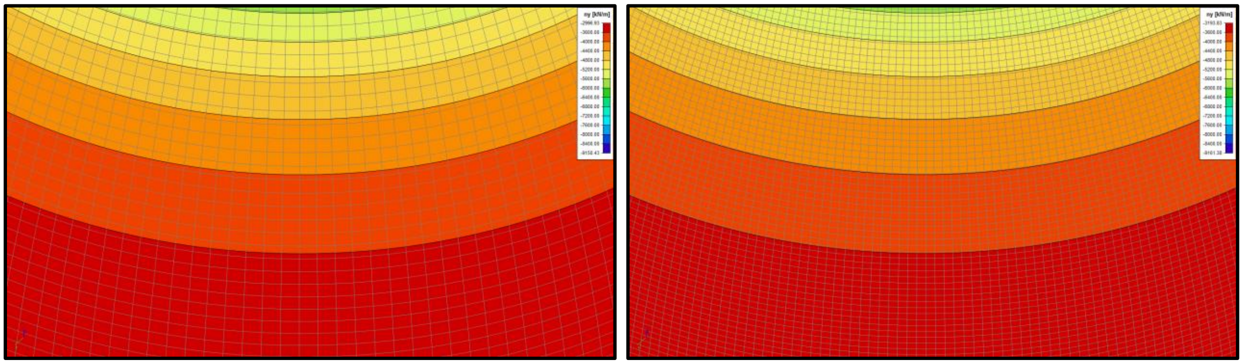
- h = 0.32m
- ½*h = 0.16m
- ¼*h = 0.08m
- ⅛*h = 0.04m



Figuur 26 Verandering van de elementgrootte van h naar ⅛h en de resultaten van de normaalkracht uit SCIA Engineer

Voor de x-y-z-coördinaat van de hoek van de elementen waar het resultaat is afgelezen is geprobeerd de x-, y- en z-waarden zoweinig mogelijk te laten afwijken. Hieronder is het gebiedje te zien waar het net is verfijnd en de coördinaat waar de waarde telkens is afgelezen bevindt zich bovenaan (zie pijl).





Figuur 27 Netverfijning (verkleining van de elementgrootte) en de resultaten van de normaalkracht onder e.g.

De berekende normaalkracht op het punt is voor de verschillende elementgroottes in de onderstaande tabellen verzameld. De coördinaten zijn ook telkens aangegeven om de afwijkingen hierin inzichtelijk te maken.

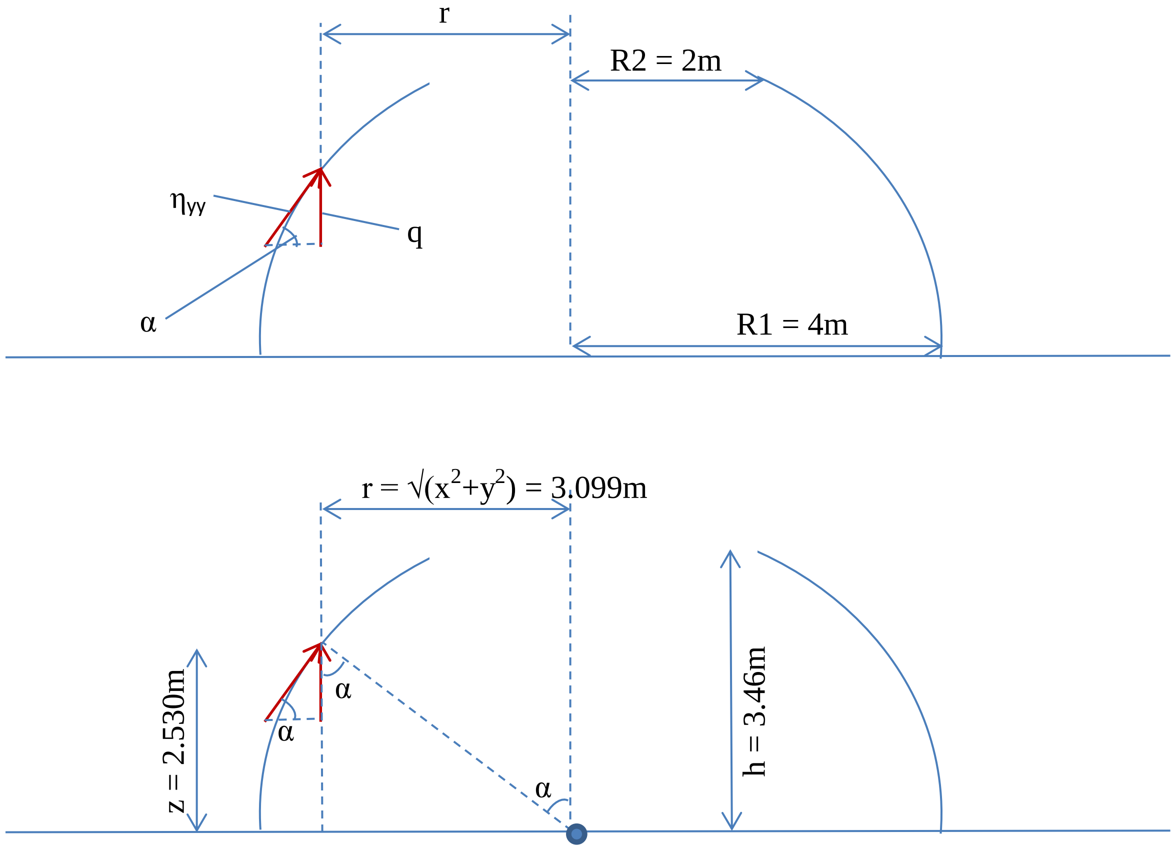
Elementgrootte	N_y (kN/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-4419.38	-1.664	2.648	2.494
½*h	-4475.2	-1.648	2.624	2.530
¼*h	-4470.8	-1.648	2.624	2.530
	$O(h^{\alpha})$			

½*h	-4475.2	-1.648	2.624	2.530
¼*h	-4470.8	-1.648	2.624	2.530
⅛*h	-4393.67	-1.642	2.666	2.490
	$O(h^{\alpha})$			

Tabel 7a en 7b Resultaten berekening met e.g. voor meridiaankracht open schaalmodel

Er is te zien dat de waarde van de normaalkracht fluctueert en niet alleen toe- of afneemt. Dit betekent dat voor de gevonden waarden de grootte van alpha niet kan worden bepaald door gebruik te maken van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

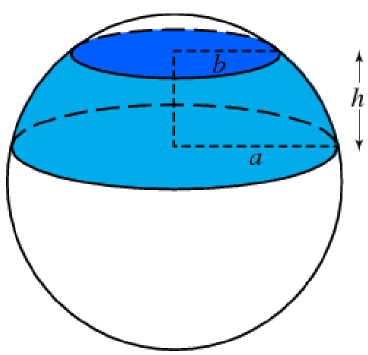
Er wordt eerst gekeken naar de verklaring van de fluctuatie. Hiervoor wordt eerst de exacte waarde van de meridiaankracht op analytische wijze bepaald, zodat er een referentie is van waaruit de resultaten kunnen worden geanalyseerd.



Figuur 28 Analytisch bepalen van de meridiaankracht η_{yy}

De oppervlakte van een bolsegment is A = 2π*R1*(h-z).[5] Zie onderstaande figuur. Het volume is dus V = A*t. De massa wordt hiermee M = V*ρ. Voor de dichtheid van het gebruikte beton was gekozen ρ = 2500000kg/m^3.

Er geldt dat q = (M*g)/(2π*r) en η_{yy} = q/sin(α). Hierin zijn de bovenstaande formuleringen in te vullen.



Figuur 29 Oppervlakte van een bolsegment[6]

[5] http://mathworld.wolfram.com/SphericalSegment.html
[6] http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/SphericalSegment_1000.gif

r is de afstand van het meetpunt tot het middelpunt van de halve bol.

Er geldt dus dat r = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1.648^2+2.624^2} = 3.099m$. (Ook geldt dat r = $\sqrt{R1^2-z^2} = \sqrt{4^2-2.530^2} = 3.099m$).

Uit de voorgaande figuren is te zien dat h=$\sqrt{R1^2-R2^2}$ = 3.46m.

Hiermee wordt gevonden dat A = 2π*4*(3.46-2.530) = 23.48m^2. Dus V = 23.48*0.01 = 0.235m^3. M = 0.235*2500000 = 586913.4kg.

q = (586913.4*9.81)/(2π*3.099) = 295693.3N/m

Voor het bepalen van de hoek alpha geldt (zie de voorgaande figuren):

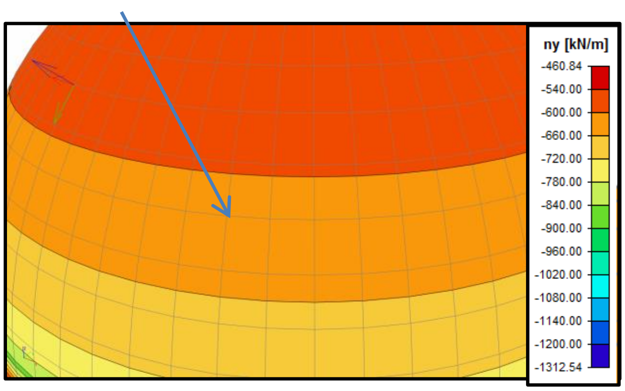
sin(α) = 3.099/4, dus α = 50.8°

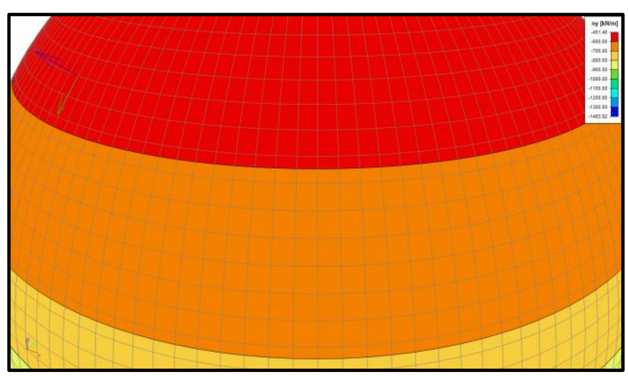
(Ook geldt dat tan(α) = 3.099/2.530, dus α = 50.8°)

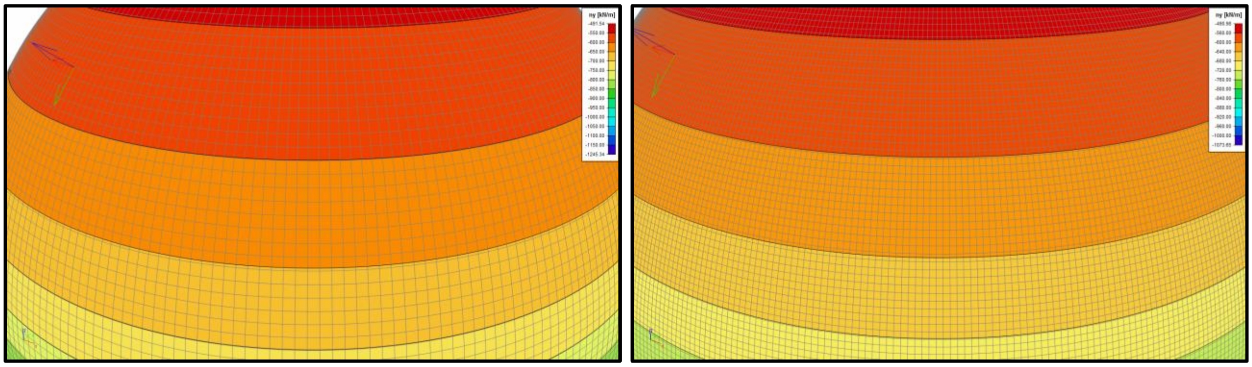
Nu geldt dus voor η_{yy} = q/sin(α) = 295693.4/(3.099/4) = 381662.9N/m.

Dit resultaat komt niet overeen met SCIA Engineer. Een mogelijke oorzaak hiervan is de vorm van de opleggingen. Mogelijk is doordat de verplaatsing in de x-en z-richting verhinderd worden aan de bovenrand dat de normaalkracht wordt beïnvloed door het verplaatsingsgedrag. Het bepalen van de analytische oplossing is dan echter erg lastig. Dit kan in eventueel verder onderzoek worden aangetoond.

Om deze reden is ervoor gekozen om de orde van de fout van de elementen te bepalen met het model van de gesloten halve bol en met de logaritmische benadering. De invloed van de driehoekige elementen is waarschijnlijk toch erg klein. De normaalkracht wordt weer lokaal op een bepaald punt afgelezen en de resultaten zijn hieronder verzameld. De grootte van de elementen is achtereenvolgens hetzelfde als eerder is aangegeven gekozen.







Figuur 30 Gebiedje waarin de waarde van de normaalkracht onder eigen gewicht bij gesloten schaalmodel is afgelezen met netverfijning

De resultaten die zijn afgelezen in een punt zijn hieronder weergegeven.

Elementgrootte	N_y (kN/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-575.16	1.837	-2.151	2.828
½*h	-574.68	1.837	-2.151	2.828
¼*h	-574.66	1.856	-2.134	2.828
⅛*h	-574.66	1.844	-2.144	2.828
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.86$			

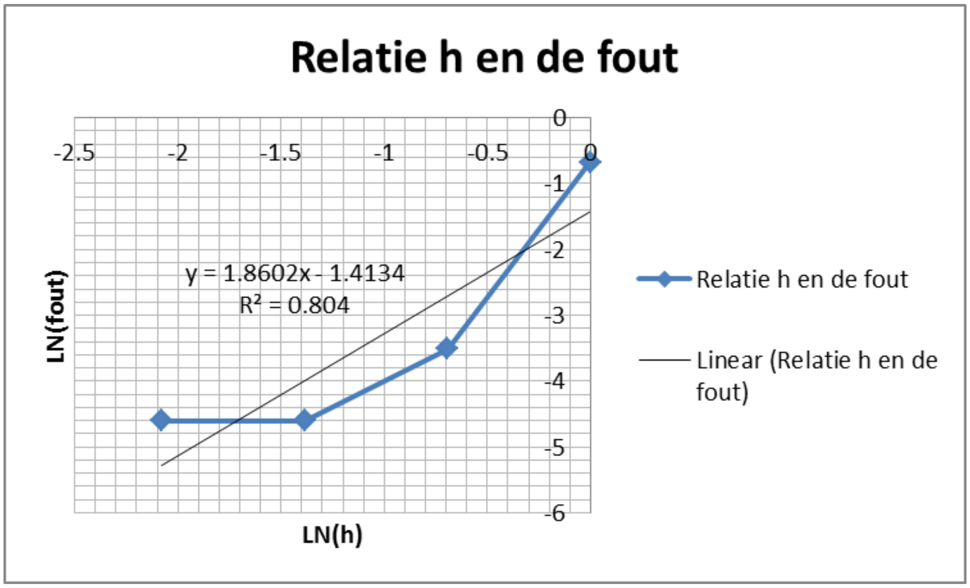
Tabel 8 Resultaten berekening met e.g. voor meridiaankracht gesloten schaalmodel

Het gebruik van de logaritmische formule leidt tot de onderstaande resultaten. $N_{y,exact}$ is geschat.

	Ny	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-575.16	-0.67334	0
Meting 2	-574.68	-3.50656	-0.69315
Meting 3	-574.66	-4.60517	-1.38629
Meting 4	-574.66	-4.60517	-2.07944
U_{exact} (geschat)	**-574.65**		

Tabel 9 Resultaten (logaritmisch) normaalkracht van het gesloten schaalmodel onder e.g.

Het gebruik van de logaritmische benadering (oplossingmodel 2) leidt tot de onderstaande grafiek.



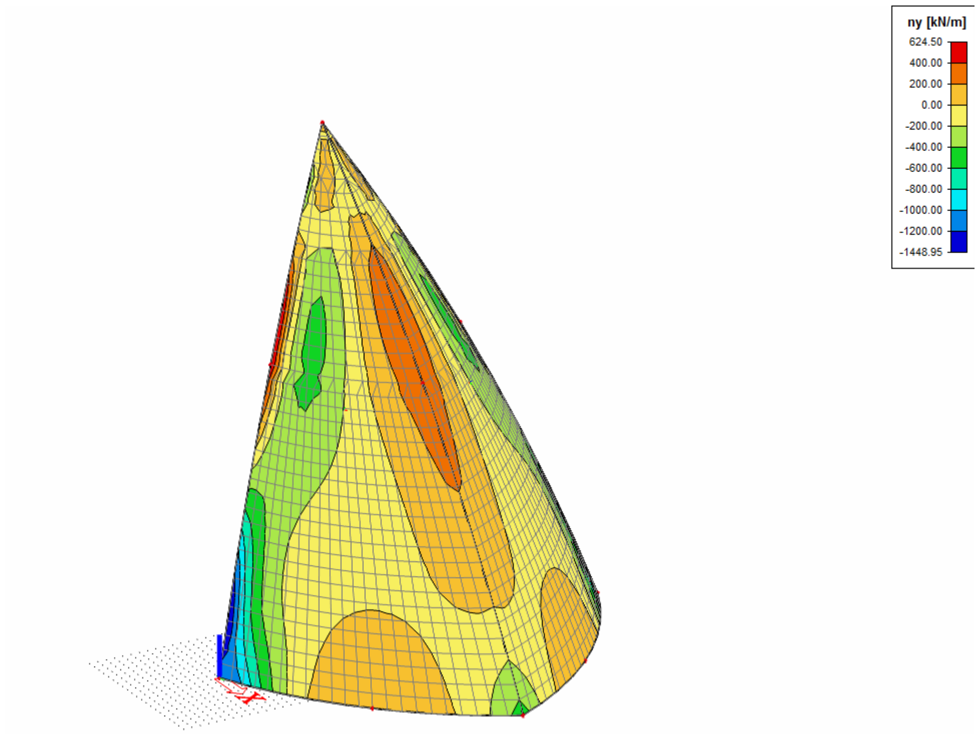
Figuur 31 Relatie tussen h en de grootte van de fout normaalkracht bij het gesloten schaalmodel onder e.g., logaritmisch

Er is te zien dat α = 1.86 en ln(C) = -1.41, hetgeen leidt tot C = 0.24.

3.2.2 Sydney Opera House

Voor de elementgroottes worden weer achtereenvolgens dezelfde groottes gekozen als eerder bij de berekening van de doorbuiging.

Hieronder is het verloop van de normaalkrachten te zien.



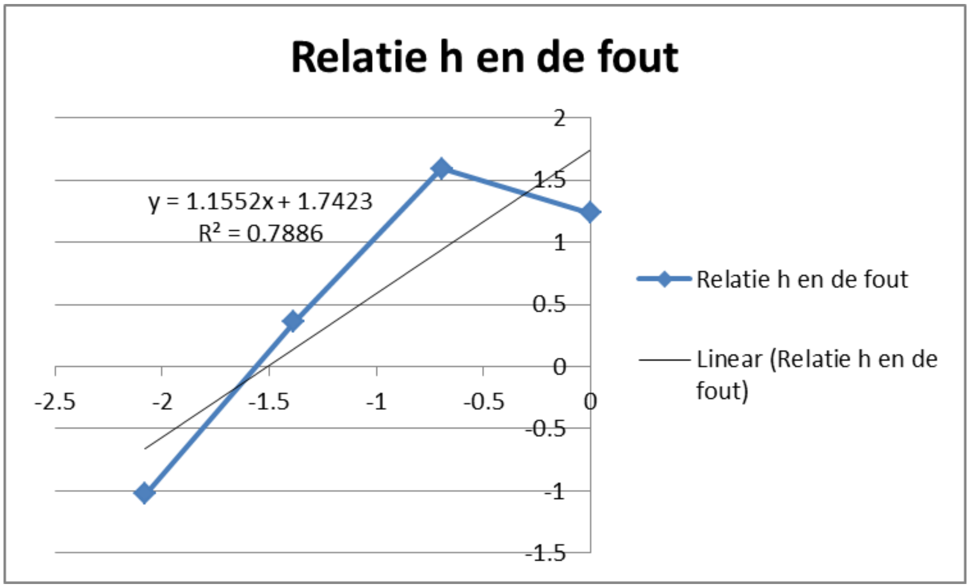
Figuur 32 Verloop van de normaalkrachten

De waarden van de normaalkracht zijn bij de netverfijning telkens in knoop K5/k10 afgelezen. Dit levert de onderstaande resultaten. N_{exact} is hierbij weer geschat.

	N_y (kN/m)	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	256.16	1.425515	0
Meting 2	257.64	1.593308531	-0.693147181
Meting 3	254.15	0.765468	-1.38629
Meting 4	253.08	0.076961	-2.07944
N_{exact} (geschat)	**252.72**		

Tabel 10 Resultaten normaalkracht schaal Sydney Opera House onder e.g.

Er is te zien dat meting 2 afwijkt van de trent. Deze is wel meegenomen in de onderstaande grafiek en dus bij de berekening van alpha. Als bijvoorbeeld een constructeur een berekening maakt treedt zo'n afwijkende waarde namelijk ook op.



Figuur 33 Relatie tussen h en de grootte van de fout normaalkracht, schaal Sydney Opera House onder e.g., logaritmisch

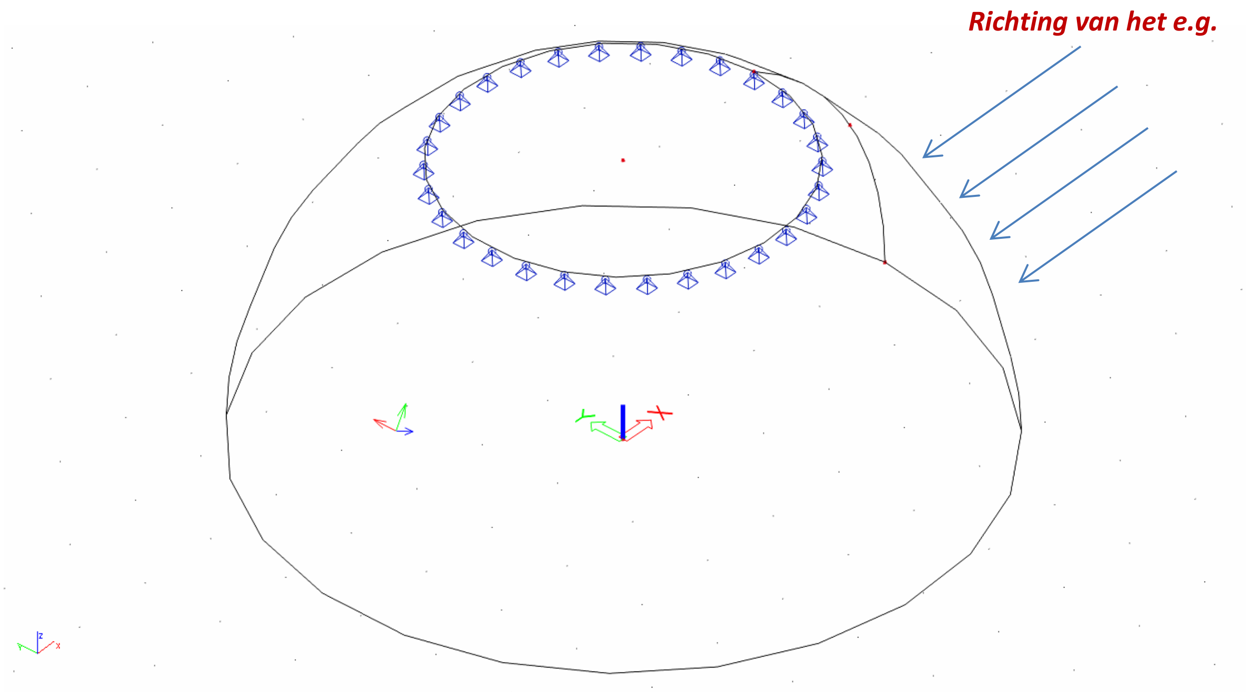
Er is te zien dat voor alpha een waarde van α = 1.16 wordt gevonden. Dit komt redelijk in de buurt van de eerder gevonden waarden voor alpha voor belasting onder eigen gewicht. Er is te zien dat ln(C) = 1.74, dus C = 5.70.

3.3 Moment

3.3.1 Eenvoudig schaalmodel

Voor de gekozen modellering treedt er in principe geen moment op in de schaal onder het eigengewicht omdat de rand vrij is opgelegd. Er treden alleen randstoringen op, maar hier valt niet direct iets af te leiden. In principe is het mogelijk het moment in de randstoring te gebruiken om de orde van de fout te bepalen maar dan zou er een lokale netverfijning moeten worden toegepast hetgeen veel tijd vergt.

Om bovenstaande reden is er voor gekozen om de schaalconstructie als in onderstaande figuur op te leggen en het eigengewicht in de x-richting te laten werken. Op de bovenrand is de beweging in x-,y- en z-richting verhinderd en zijn alle rotaties vrij; de onderrand is niet opgelegd. Er is voor gekozen om weer de open schaalconstructie te gebruiken, zodat in ieder geval de invloed van driehoekige elementen kan worden uitgesloten. Nu treden er over het oppervlak van de schaal wel momenten op waarvan de waarde in een bepaald punt bij variatie van elementgrootte kan worden afgelezen.

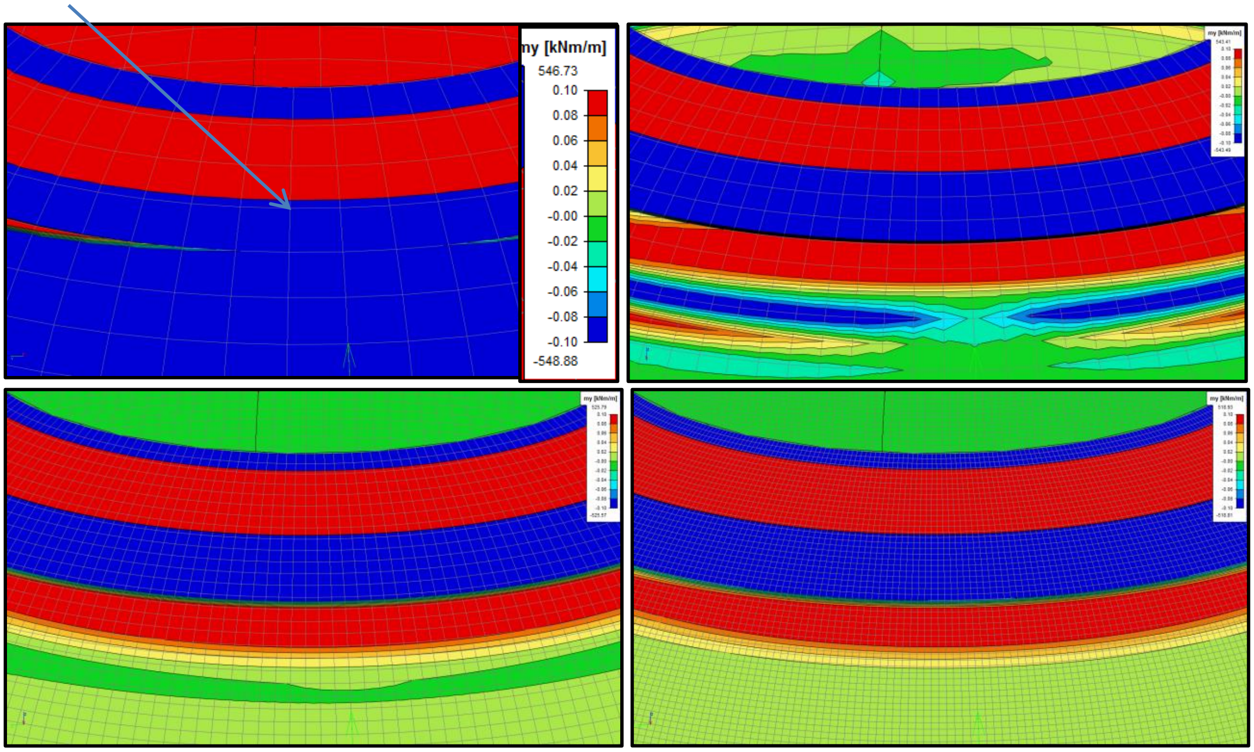


Figuur 34 Modellering voor moment

Voor de grootte van de elementen wordt weer achtereenvolgens gekozen:

- h = 0.32m
- ½*h = 0.16m
- ¼*h = 0.08m
- ⅛*h = 0.04m

Ook hier is weer geprobeerd de x-y-z-coördinaat van de hoek van de elementen waar het resultaat is afgelezen de x-, y- en z-waarden zoweinig mogelijk te laten afwijken. Hieronder is het gebiedje te zien waar het net is verfijnd en de coördinaat waar de waarde telkens is afgelezen bevindt zich middenin (zie pijl). Er is gekozen voor een gebiedje waar de gradiënt niet verandert bij verandering van de elementgrootte, waardoor de resultaten onbetrouwbaar zouden worden (het blauwe gebiedje blijft blauw in de onderstaande figuren).



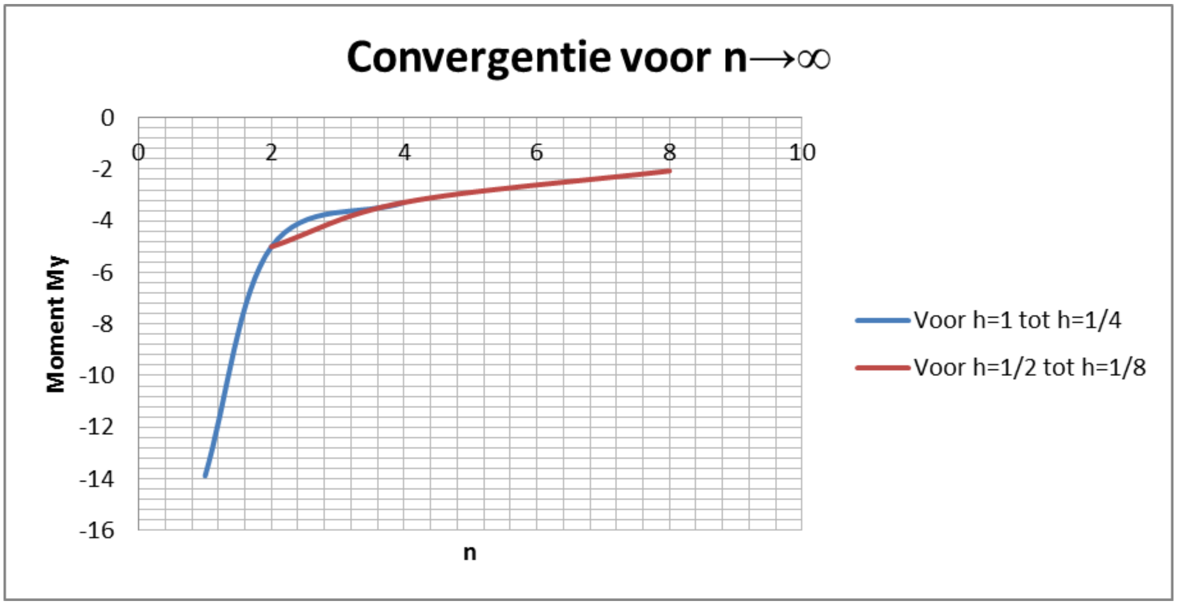
Figuur 35 Netverfijning en de resultaten van het moment onder eigen gewicht

De gevonden resultaten zijn in de onderstaande tabel verzameld.

Elementgrootte	M_y (kNm/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-13.89	-2.652	0.605	2.932
½*h	-5.00	-2.586	0.590	2.994
¼*h	-3.28	-2.586	0.590	2.994
⅛*h	-2.06	-2.631	0.606	2.951
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.52$			

Tabel 11 Resultaten berekening met e.g. voor moment

Hier treedt er een duidelijke convergentie van de resultaten op en kan alpha dus worden bepaald.



Figuur 36 Convergentie van de resultaten voor n→∞

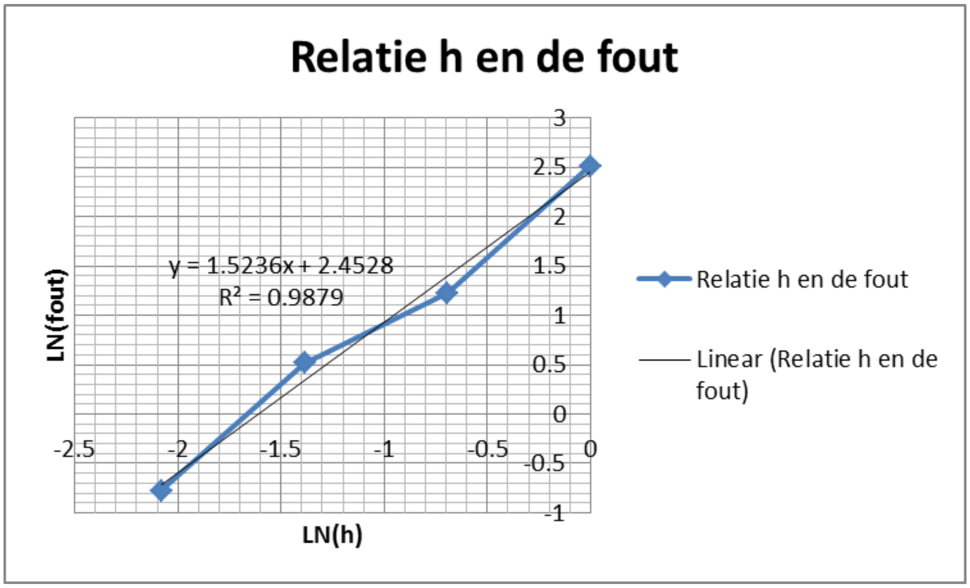
Voor het bepalen van alpha wordt weer gebruik gemaakt van de onderstaande logaritmische formule.

$\ln(\text{fout}) = \ln(C) + \alpha \ln(h)$

Voor de exacte waarde is wederom een aannemelijke waarde geschat zodat de lijn in de onderstaande grafiek zoveel mogelijk een rechte lijn benadert.

	My	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-13.89	2.508786	0
Meting 2	-5.00	1.223775	-0.69315
Meting 3	-3.28	0.518794	-1.38629
Meting 4	-2.06	-0.77653	-2.07944
M_{exact} (geschat)	**-1.6**		

Tabel 12 Resultaten (logaritmisch) moment van het open schaalmodel onder e.g.



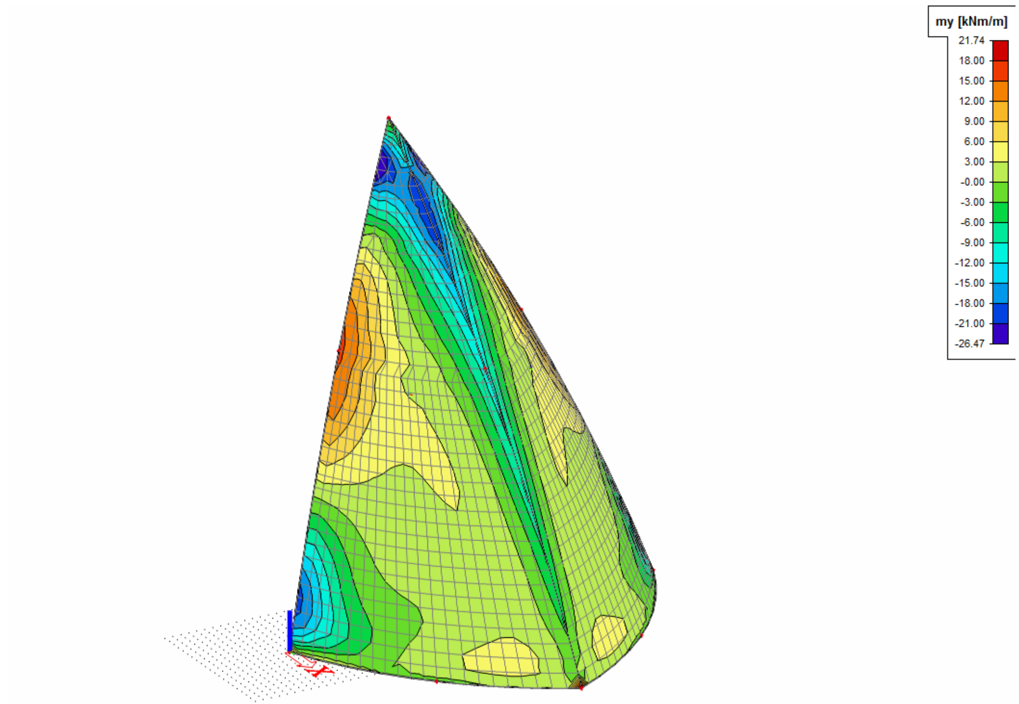
Figuur 37 Relatie tussen h en de grootte van de fout moment bij het open schaalmodel onder e.g., logaritmisch

Er is te zien dat α = 1.52 en dat ln(C) = 2.45, dus C = 11.62.

3.3.2 Sydney Opera House

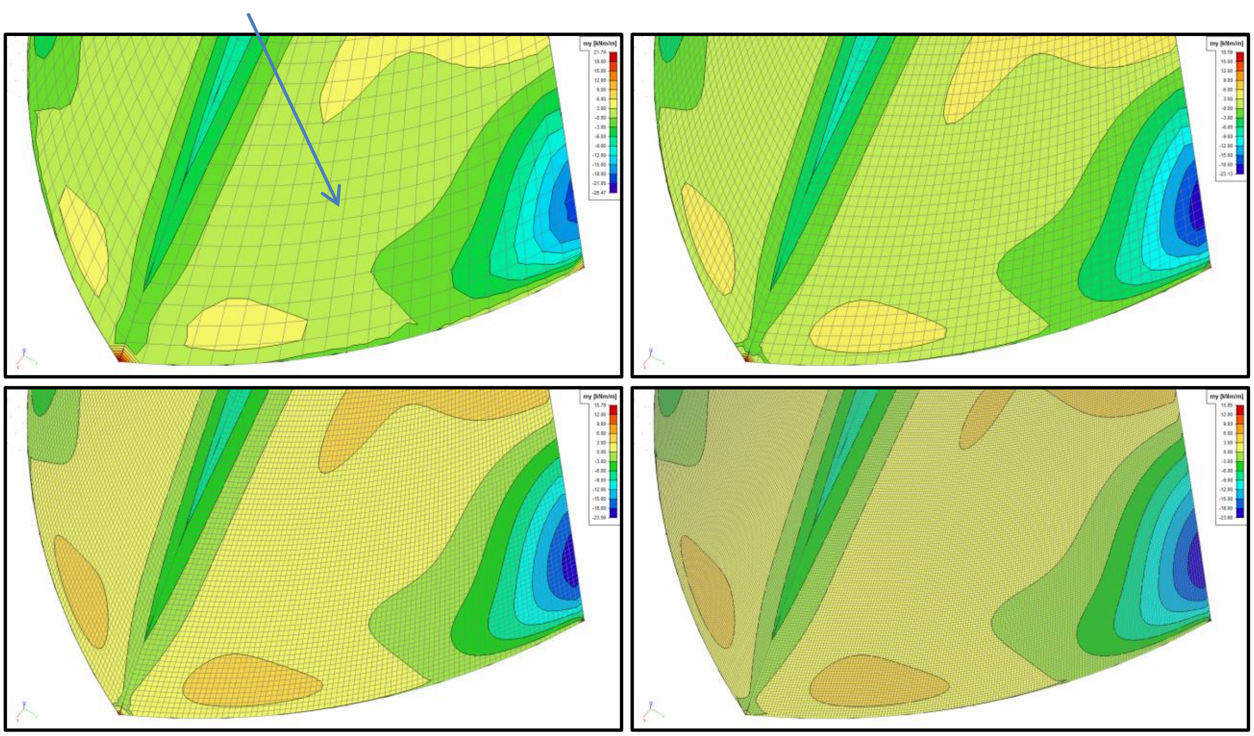
Voor de elementgroottes worden weer achtereenvolgens dezelfde groottes gekozen als eerder bij de berekening van de doorbuiging.

Hieronder is het verloop van de momenten te zien.



Figuur 38 Verloop van de momenten

De waarden het moment zijn bij de netverfijning telkens op de plaats van de pijl (geen gradiënt, niet in de randstoring) in onderstaand gebiedje afgelezen.



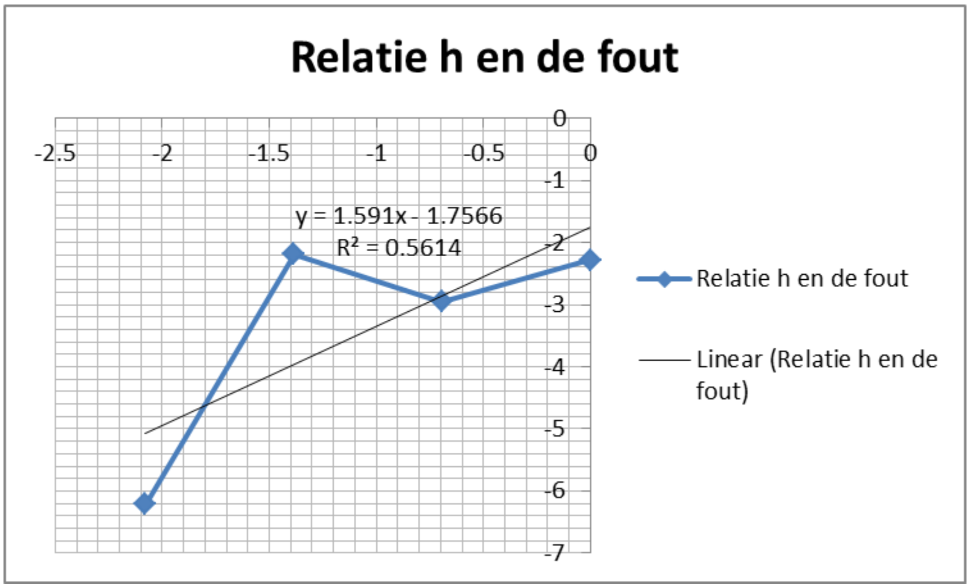
Figuur 39 Netverfijning en de resultaten van het moment onder e.g., schaal Sydney Opera House

Dit levert de onderstaande resultaten. M_{exact} is hierbij weer door calibratie geschat.

	M_y (kNm/m)	LN(fout)	LN(h)	x - coördinaat	y - coördinaat	z - coördinaat
Meting 1	0.92	-2.23493	0	11.905	33.109	8.483
Meting 2	0.87	-2.8647	-0.69315	11.838	33.238	8.402
Meting 3	0.93	-2.145581344	-1.386294361	11.817	33.120	8.594
Meting 4	0.82	-4.96185	-2.07944	11.840	33.167	8.497
M_{exact} (geschat)	**0.818**					

Tabel 13 Resultaten moment schaal Sydney Opera House onder e.g.

Er is te zien dat meting 3 afwijkt van de trent. Deze is wel meegenomen in de onderstaande grafiek en dus bij de berekening van alpha.



Figuur 40 Relatie tussen h en de grootte van de fout moment, schaal Sydney Opera House onder e.g., logaritmisch

Er is te zien dat voor alpha de waarde α = 1.59 wordt gevonden. Dit komt goed overeen met de eerder gevonden resultaten. ln(C) = -1.76, dus C = 0.17.

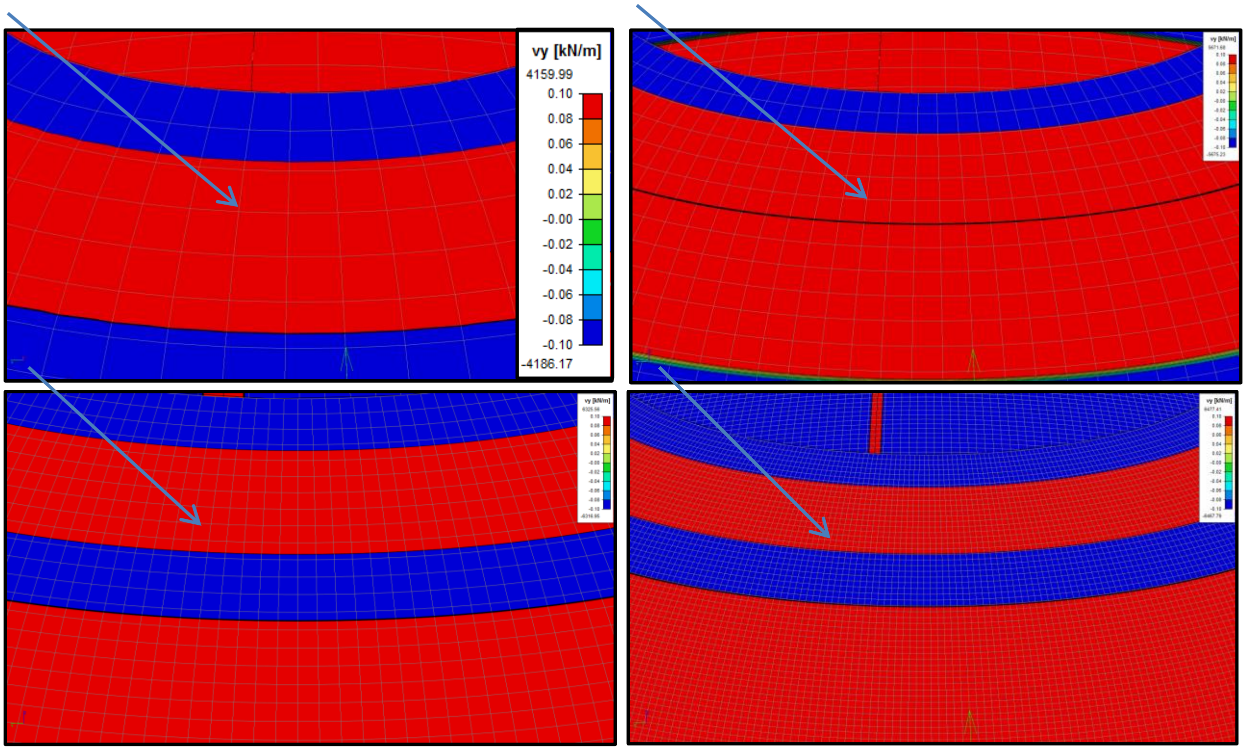
3.4 Dwarskracht

3.4.1 Eenvoudig schaalmodel

Voor de dwarskracht wordt exact dezelfde modellering gebruikt als voor het bepalen van de orde van de fout van het moment. De waarde van de dwarskracht bij de verschillende elementgroottes wordt afgelezen op dezelfde locatie.

Voor de elementen worden achtereenvolgens ook weer dezelfde groottes als eerder aangegeven aangenomen.

Het gebiedje waarin het net is verfijnd is hieronder voor de verschillende elementgroottes weergegeven.



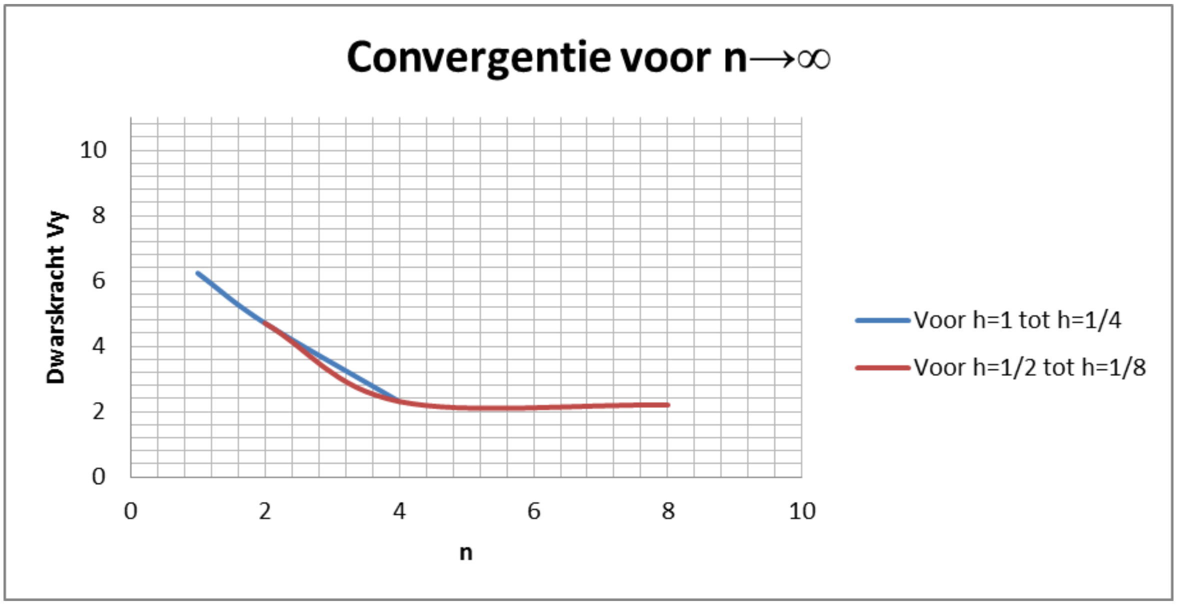
Figuur 41 Verfijning van de netgrootte en resultaten van de dwarskracht onder e.g.

Er is te zien dat het beschouwde punt (telkens aangegeven met een pijl) in een gebied ligt met een gradiënt. Er wordt daarom voor gekozen om de waarde van de dwarskracht in het onderste deel van het gebied af te lezen. De resultaten zijn hieronder weergegeven.

Elementgrootte	V_y (kN/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	6.24	-3.049	0.696	2.494
½*h	4.71	-3.021	0.689	2.530
¼*h	2.31	-3.070	0.701	2.467
⅛*h	2.20	-3.027	0.697	2.520
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.98$			

Tabel 14 Resultaten berekening met e.g. voor dwarskracht

De resultaten convergeren zoals is te zien in de onderstaande figuur.

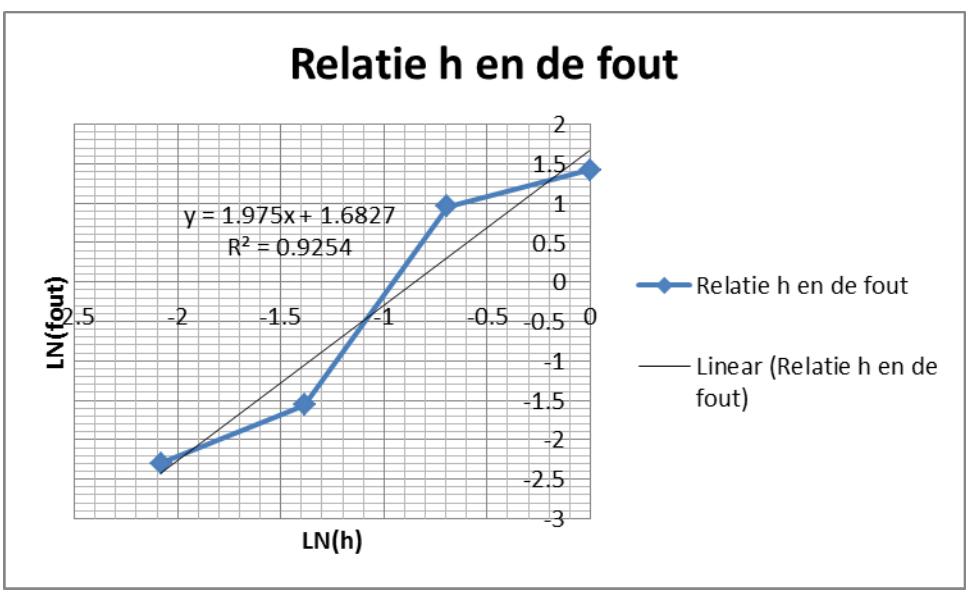


Figuur 42 Convergentie van de resultaten van de dwarskracht voor n→∞

Gebruik van ln(fout) = ln(C) + α ln(h) levert de onderstaande resultaten.

	Vy	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	6.24	1.420696	0
Meting 2	4.71	0.95935	-0.69315
Meting 3	2.31	-1.56065	-1.38629
Meting 4	2.20	-2.30259	-2.07944
V_{exact} (geschat)	**2.15**		

Tabel 15 Resultaten (logaritmisch) dwarskracht van het open schaalmodel onder e.g.



Figuur 43 Relatie tussen h en de grootte van de fout dwarskracht bij het open schaalmodel onder e.g., logaritmisch

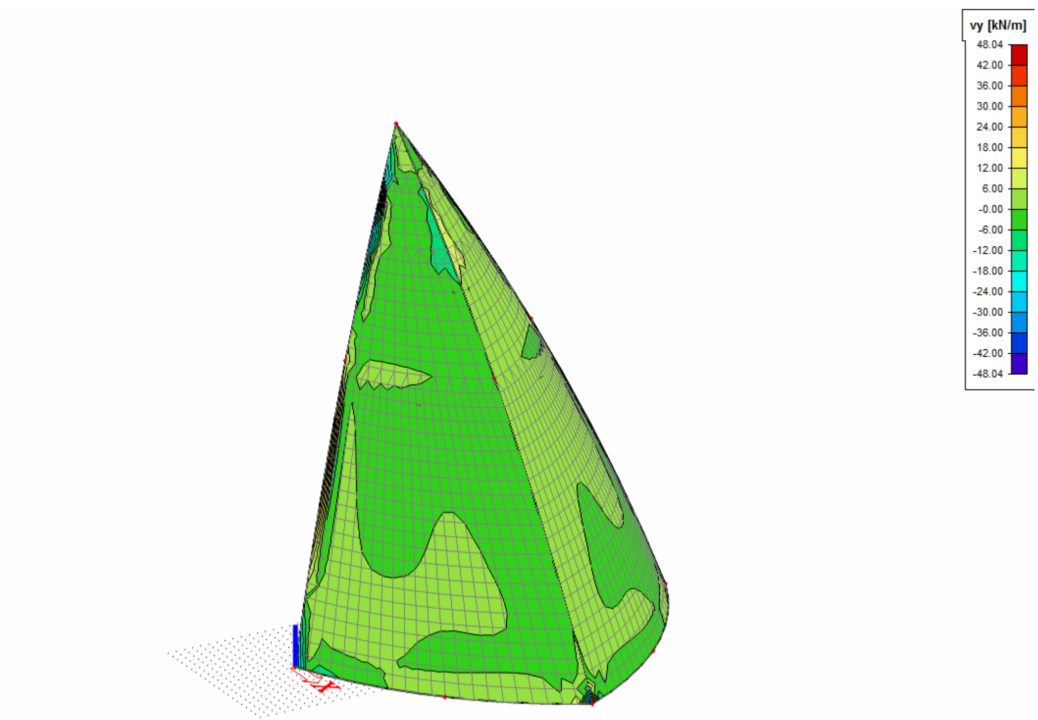
Er is te zien dat α = 1.98 en ln(C) = 1.68, dus C = 5.38.

De grootte van alpha komt dus in de buurt van de gevonden waarde van alpha voor het moment, hetgeen een logisch resultaat oplevert.

3.4.2 Sydney Opera House

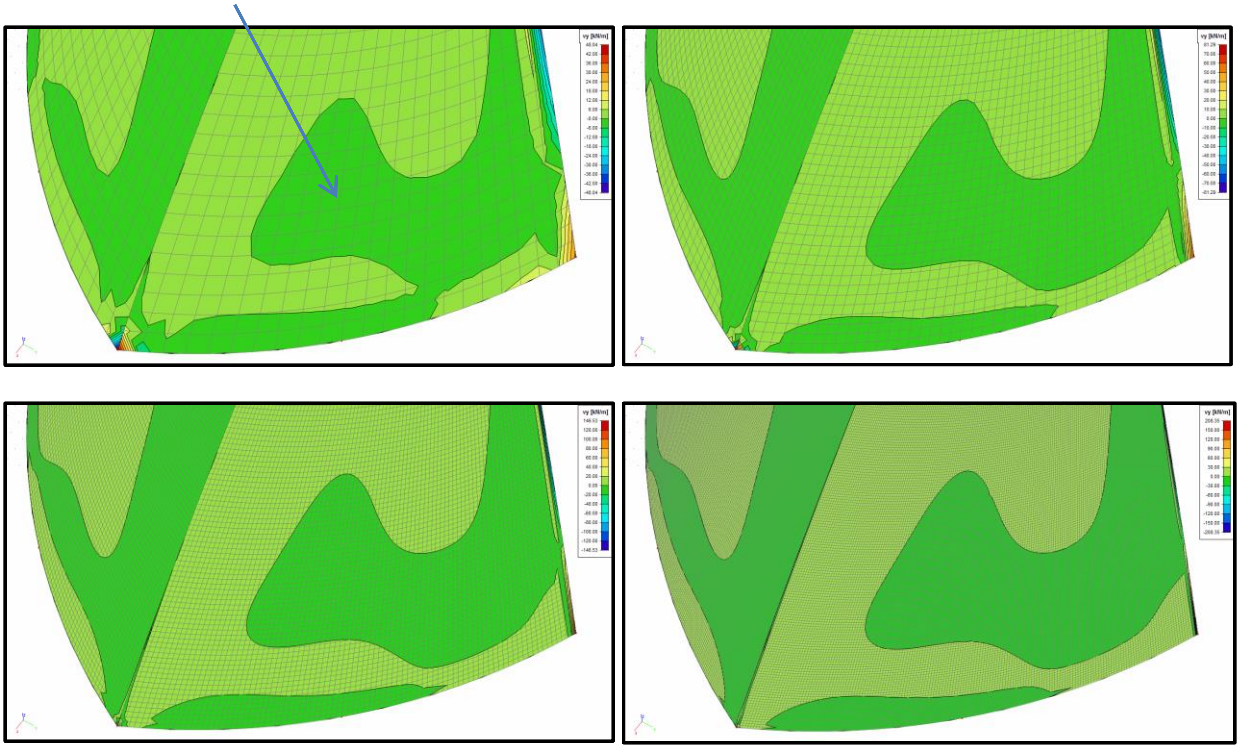
Voor de elementgroottes worden weer achtereenvolgens dezelfde groottes gekozen als eerder bij de berekening van de doorbuiging.

Hieronder is het verloop van de dwarskrachten te zien.



Figuur 44 Verloop van de dwarskrachten

De waarden de dwarskracht zijn bij de netverfijning telkens op de plaats van de pijl (geen gradiënt,niet in de randstoring) in onderstaand gebiedje afgelezen.



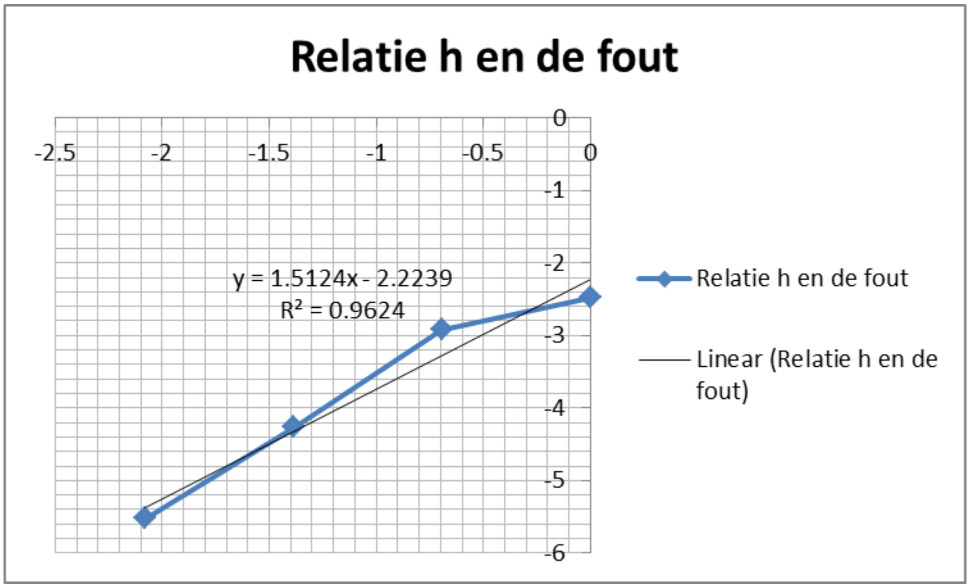
Figuur 45 Netverfijning en de resultaten van de dwarskracht onder e.g., schaal Sydney Opera House

Dit leidt tot de onderstaande resultaten. De coördinaten waar is afgelezen zijn hetzelfde als eerder bij het moment zijn aangegeven.

	V_y (kN/m)	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-0.27	-2.47694	0
Meting 2	-0.3	-2.91877	-0.69315
Meting 3	-0.34	-4.2687	-1.38629
Meting 4	-0.35	-5.52146	-2.07944
V_{exact} (geschat)	-0.354		

Tabel 16 Resultaten dwarskracht schaal Sydney Opera House onder e.g.

De bovenstaande resultaten leiden tot de onderstaande grafiek.



Figuur 46 Relatie tussen h en de grootte van de fout dwarskracht, schaal Sydney Opera House onder e.g., logaritmisch

Er is te zien dat $\alpha = 1.51$. Dit komt goed overeen met de eerder gevonden resultaten. Verder is $\ln(C) = -2.22$, dus $C = 0.11$.

4. Kanttekeningen berekening onder e.g.

4.1 Kanttekening gebruikte oplossingsmodellen

Er is verschillende keren van zowel oplossingsmodel 1 (drie vergelijkingen met drie onbekenden) als van oplossingsmodel 2 (de logaritmische benadering) gebruik gemaakt. Dit is gedaan bij de berekeningen van de waarden van alpha bij de verplaatsing en de normaalkracht van een schaalmodel onder belasting van het eigen gewicht. Tijdens het onderzoek is gebleken dat oplossingsmodel 2 ongeveer de gemiddelde waarde van alpha geeft van de twee waarden die worden gevonden bij oplossingsmodel 1. De methode met de logaritmische benadering blijkt het inzichtelijkst om mee te werken en wordt daarom in het vervolg telkens gebruikt.

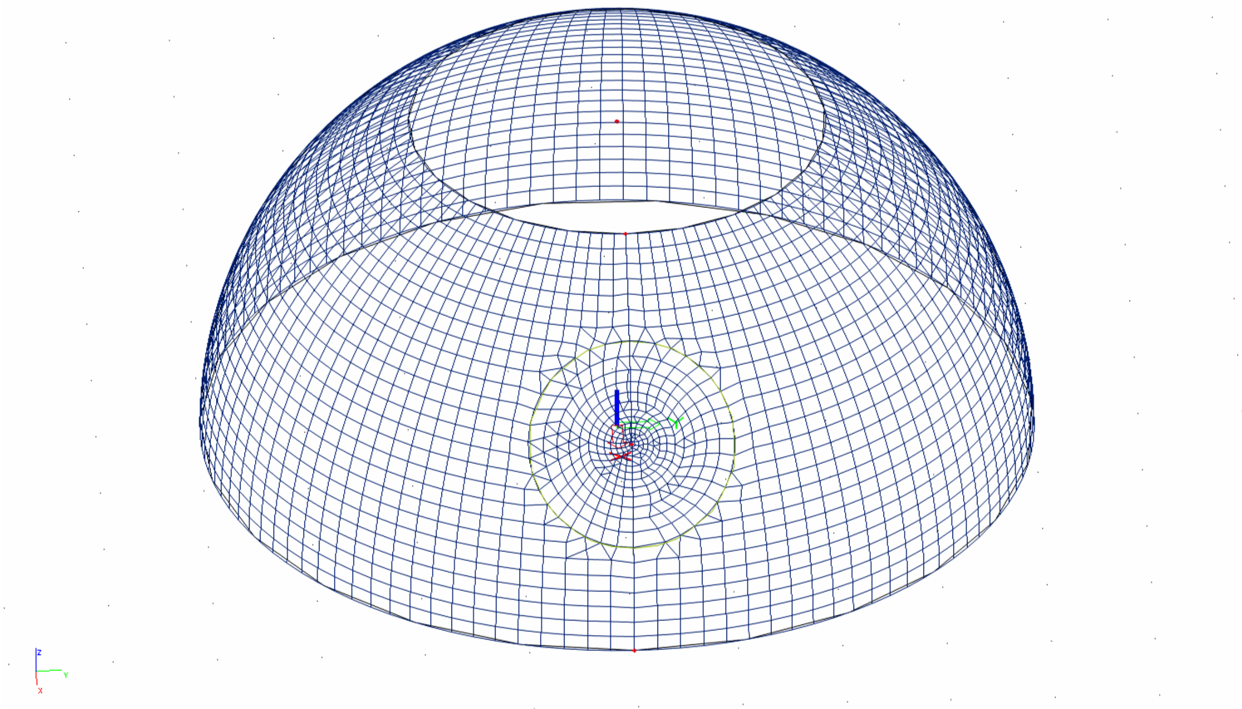
4.2 Kanttekening resultaten Sydney Opera House

Er zijn bij het schaalmodel van Sydney Opera House ook nog op andere locaties metingen verricht waaruit andere en ook soms lagere waarden van alpha werden gevonden. Het is nochthans op basis van de gekozen oplossingsmodellen te verwachten dat de resultaten per locatie niet verschillen. De waarde van alpha zou dan per locatie verschillend zijn. Om deze reden is het verstandig om bij het gebruik van de orde van de fout wel enige marge in te bouwen. Mogelijk zijn het gebruikte oplossingsmodellen niet kloppend en/of is de hypothese voor de fout niet juist.

5. Modellering schaalmodel voor berekening onder puntbelasting

Voor de berekening met een puntbelasting is alleen een berekening gemaakt met het eerder beschreven eenvoudige open schaalmodel en dus niet met het model van Sydney Opera House.

Voor het bepalen van de orde van de elementen onder belasting van een puntlast moet er een lokale netverfijning worden toegepast, omdat de grootte van de berekende krachten rondom de puntlast erg afhankelijk is van de grootte van het net ter plaatse. Daarom is in een straal van 1m om de knoop waarin de puntlast is geplaatst een lokaal netverfijningsgebied aangebracht. De puntlast is gericht in de globale z-richting en heeft een grootte van 50kN. In de onderstaande figuur is het gebied te zien waarin de netverfijning wordt toegepast.



Figuur 47 Modellering voor berekening met een puntlast met lokale meshverfijning

De vraag of de grootte van het algemene net van belang is voor de grootte van de krachten binnen het omcirkelde gebied moet hierbij wel worden beantwoord. Bij de normaalkrachtenverdeling zal dit waarschijnlijk ook het geval zijn. Bij het gebruik van SCIA zal echter waarschijnlijk vaak alleen lokale netverfijning worden uitgevoerd. Als dit systematisch gebeurt zonder de grootte van het algemene net te veranderen, zal dit ook geen invloed hebben op de grootte van alpha voor de elementen die binnen het verfijningsgebied liggen.

Voor de algemene grootte van de elementen wordt gekozen:

- h = 0.08m

Voor de verfijningsfactor wordt achtereenvolgens gekozen: ½ = 0.5, ¼ = 0.25, ⅛ = 0.125 en $^1/_{16}$ = 0.0625. De grootte van de elementen in het verfijningsgebied -ter plaatse van de puntlast- wordt hiermee achtereenvolgens:

- h = 0.04m
- ½*h = 0.02m
- ¼*h = 0.01m
- ⅛*h = 0.005m

Deze grootte is de grootte van de elementen ter plaatse van de puntlast. Deze grootte moet naar buiten toe weer steeds verder toenemen om aan de buitenrand van het verfijningsgebied weer aan te sluiten op het algemene net. Dit is ook te zien in de bovenstaande figuur.

Voor het resultaat wordt telkens niet exact op de locatie van de puntlast gekeken maar iets ernaast omdat op die locatie de resultaten oneindig worden. Hierbij moet de afstand van het meetpunt tot de loactie van de puntlast een grootte hebben van tenminste de grootste elementlengte h waarmee wordt gerekend. (Het zou ook mogelijk zijn een kleine verdeelde belasting aan te brengen in plaats van de puntlast). De controle hiervan is in bijlage 4 te vinden. Het eigen gewicht wordt bij de berekening niet meegenomen. De resultaten zijn dus alleen de oorzaak van de aangebrachte puntlast. Met de invloed van de driehoekige elementen in het gebied waarin de netverfijning plaatsvindt moet worden rekening gehouden. Bij de berekening van alpha moet rekening worden gehouden met een mogelijke afwijking hierdoor.

Op basis van het voorgaande kan worden geconcludeerd dat voor de grootte van de elementen op het meetpunt alleen bij de eerste berekening de elementgrootte h kan worden gebruikt. Voor de tweede en navolgende berekeningen kan niet zomaar ½*h, ¼*h enzovoorts worden gebruikt omdat de elementgrootte afneemt naar de buitenkant van het verfijningsgebied toe. Daarom kan ervoor worden gekozen om telkens met de x-, y- en z-coördinaat van twee punten ter plaatse van het meetpunt op de volgende manier de elementgrootte te bepalen.

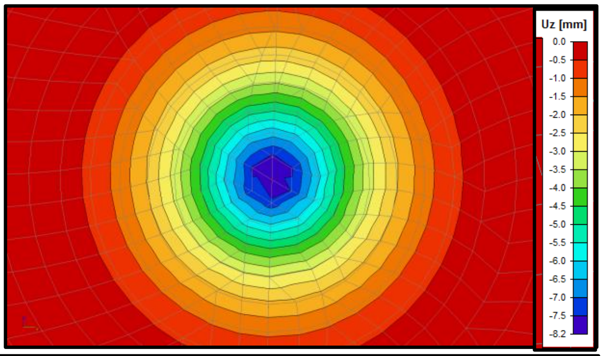
h = $\sqrt{(abs(x1-x2))^2+(abs(y1-y2))^2+(abs(z1-z2))^2}$

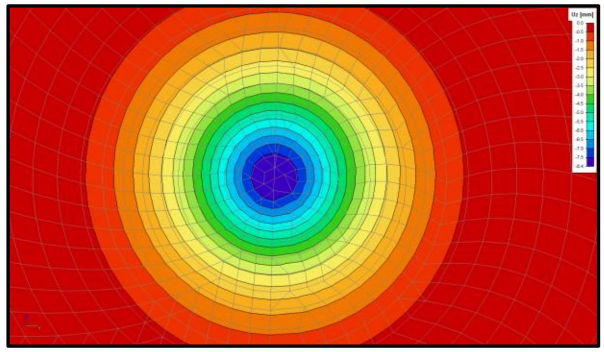
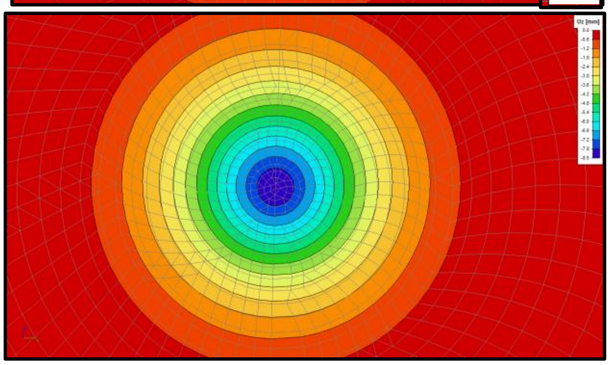
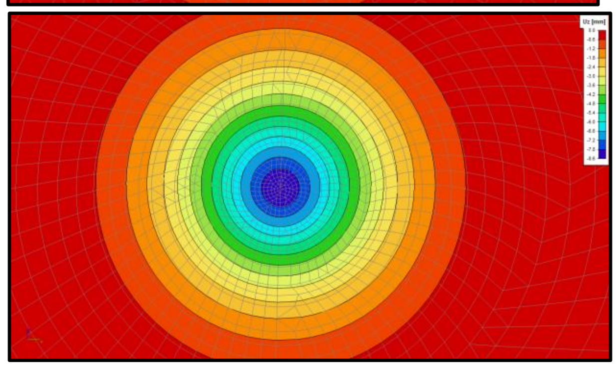
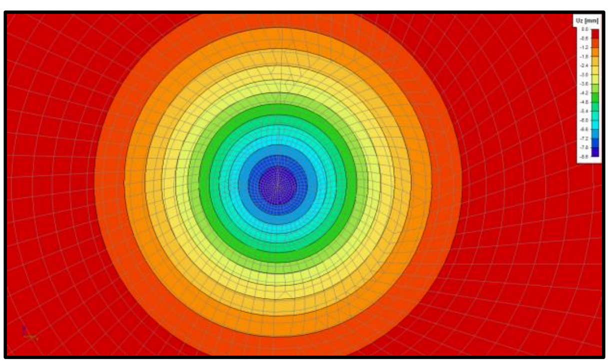
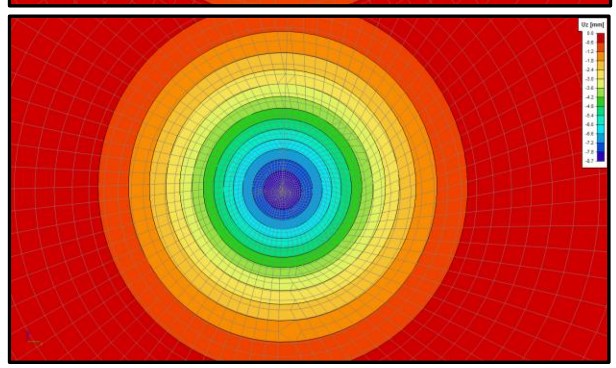
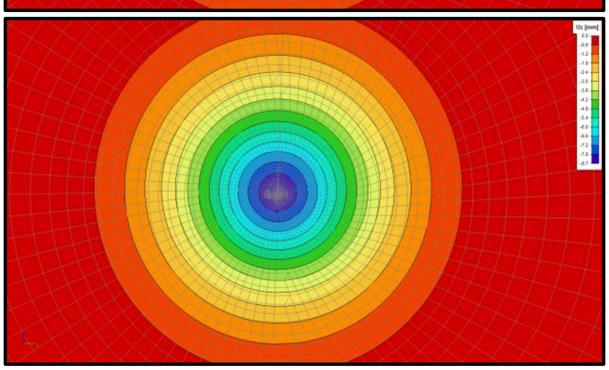
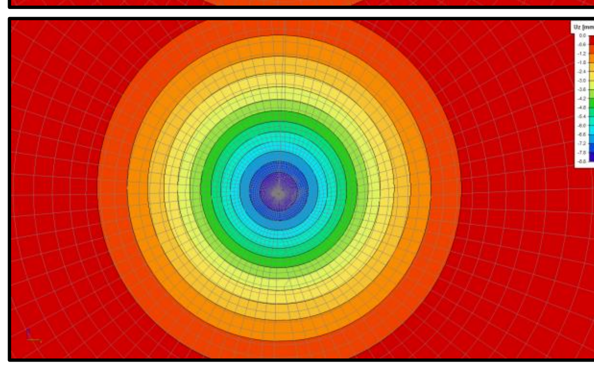
Zoals echter in het voorgaande ook telkens is gedaan zal gewoon de LN(fout) worden uitgezet tegen LN(h) met h=1 tot h=1/8 omdat relatief gezien de grootte van h ook op het meetpunt zo verandert. De grootte van h is dan niet van belang.

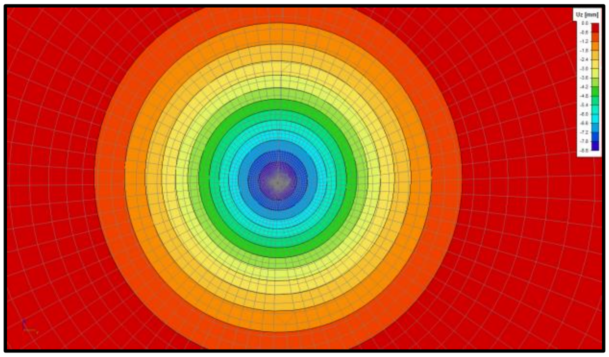
6. Bepalen van de orde van de fout van de elementen voor belasting onder puntbelasting

6.1 Doorbuiging

De resultaten van de berekening zijn hieronder weergegeven. Op de afbeeldingen is telkens hetzelfde deel van de schaal te zien. De schaalverdeling van de grootte van de krachten is wel veranderd.





Figuur 48 Verfijning van de lokale netgrootte en de berekende verplaatsingen bij een puntlast

De resultaten afgelezen in een punt zijn hieronder weergegeven. De berekening is uiteindelijk uitgevoerd met een 100 keer zo grote puntlast, zodat de resultaten twee decimalen nauwkeuriger worden. Dit bleek nodig vanwege de kleine verschillen tussen de resultaten.

Elementgrootte	U_z(mm)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-761.3	3.443	0.000	2.036
½*h	-765.0	3.442	0.000	2.037
¼*h	-761.2	3.441	0.000	2.039
⅛*h	-759.6	3.441	0.000	2.040
$^{1}/_{16}$*h	-770.0	3.443	0.000	2.037
$^{1}/_{32}$*h	-765.8	3.442	0.000	2.038
$^{1}/_{64}$*h	-773.1	3.443	0.000	2.036
$^{1}/_{128}$*h	-774.1	3.443	0.000	2.035
$^{1}/_{256}$*h	-770.0	3.443	0.000	2.037
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 0.37$			

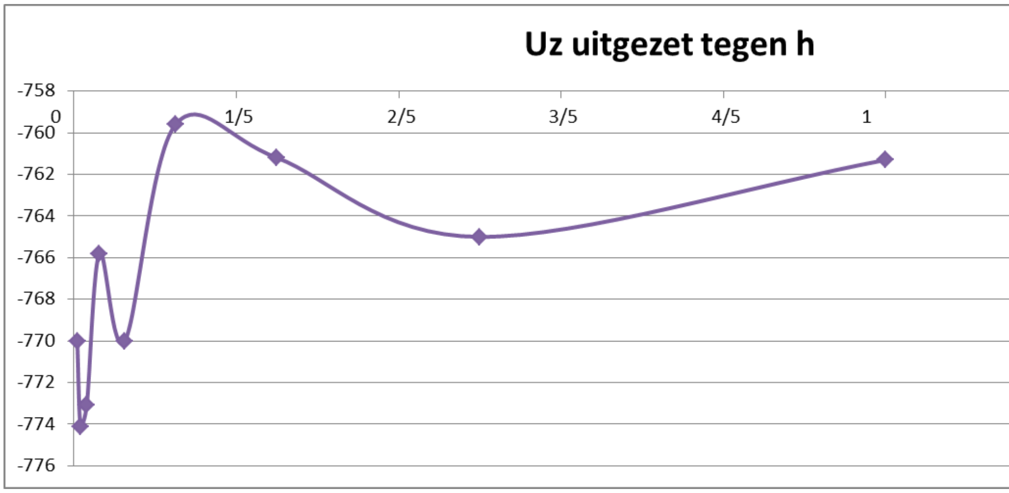
Tabel 17 Resultaten berekening met puntlast voor verplaatsing

Omdat de waarde van U_z zoals is te zien in de bovenstaande tabel voor h tot ⅛*h vrijwel hetzelfde blijft en niet convergeert is de netgrootte nog verder verfijnd om een convergentie van de resultaten te kunnen verkrijgen om alsnog alpha te kunnen te bepalen.

Voor de verfijningsfactor wordt nu nog extra gekozen: $^{1}/_{32}$ = 0.03125, $^{1}/_{64}$ = 0.015625, $^{1}/_{128}$ = 0.0078125, $^{1}/_{256}$ = 0.00390625, $^{1}/_{512}$ = 0.001953125. Hiermee geldt dus voor de elementgrootte in het verfijningsgebied ter plaatse van de puntlast:

- $^{1}/_{16}$*h = 0.0025m
- $^{1}/_{32}$*h = 0.00125m
- $^{1}/_{64}$*h = 0.000625m
- $^{1}/_{128}$*h = 0.0003125m
- $^{1}/_{256}$*h = 0.00015625m

Er is te zien dat de resultaten ook nu blijven fluctueren. Zie onderstaande figuur.



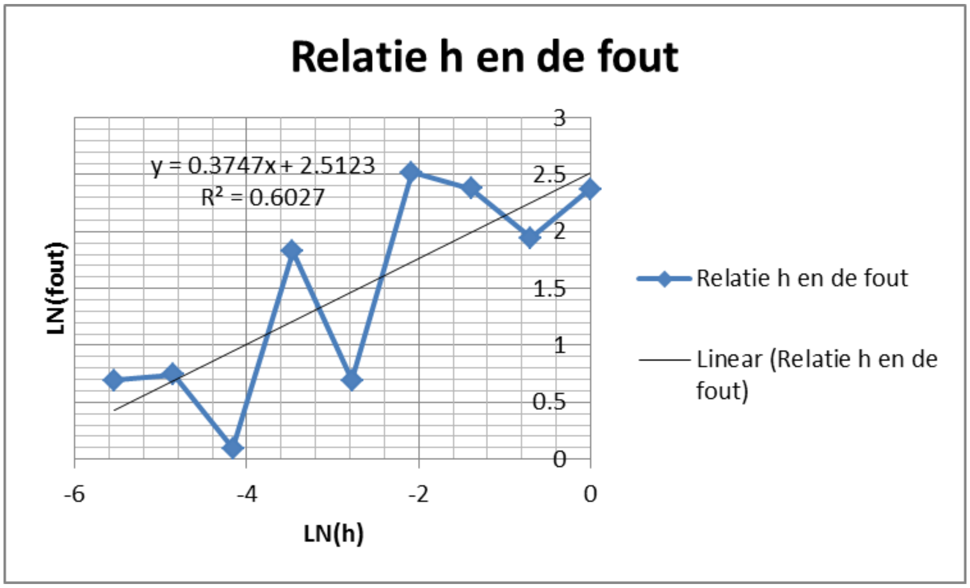
h	Uz
1	-761.3
1/2	-765.0
1/4	-761.2
1/8	-759.6
1/16	-770.0
1/32	-765.8
1/64	-773.1
1/128	-774.1
1/256	-770.0

Figuur 49 Fluctuatie van de resultaten van de verplaatsing onder invloed van een puntlast

De waarde van alpha kan nu wel worden bepaald door geen rekening te houden met een positieve dan wel negatieve afwijking van de exacte waarde, dus door de absolute waardes van de fout uit te zetten tegen h. Het resultaat is dan wel een fluctuerende lijn. De helling van de rechte lijn als interpolatie geeft dan de waarde van alpha. De waarde van R^2 is weer zo groot mogelijk gekozen, zodat de standaardafwijking zo klein mogelijk is.

	Uz	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-761.3	2.370244	0
Meting 2	-765.0	1.94591	-0.69315
Meting 3	-761.2	2.379546	-1.38629
Meting 4	-759.6	2.517696	-2.07944
Meting 5	-770.0	0.693147	-2.77259
Meting 6	-765.8	1.824549	-3.46574
Meting 7	-773.1	0.09531	-4.15888
Meting 8	-774.1	0.741937	-4.85203
Meting 9	-770.0	0.693147	-5.54518
U_{exact} (geschat)	**-772**		

Tabel 18 Resultaten (logaritmisch) verplaatsing van het open schaalmodel bij een puntbelasting



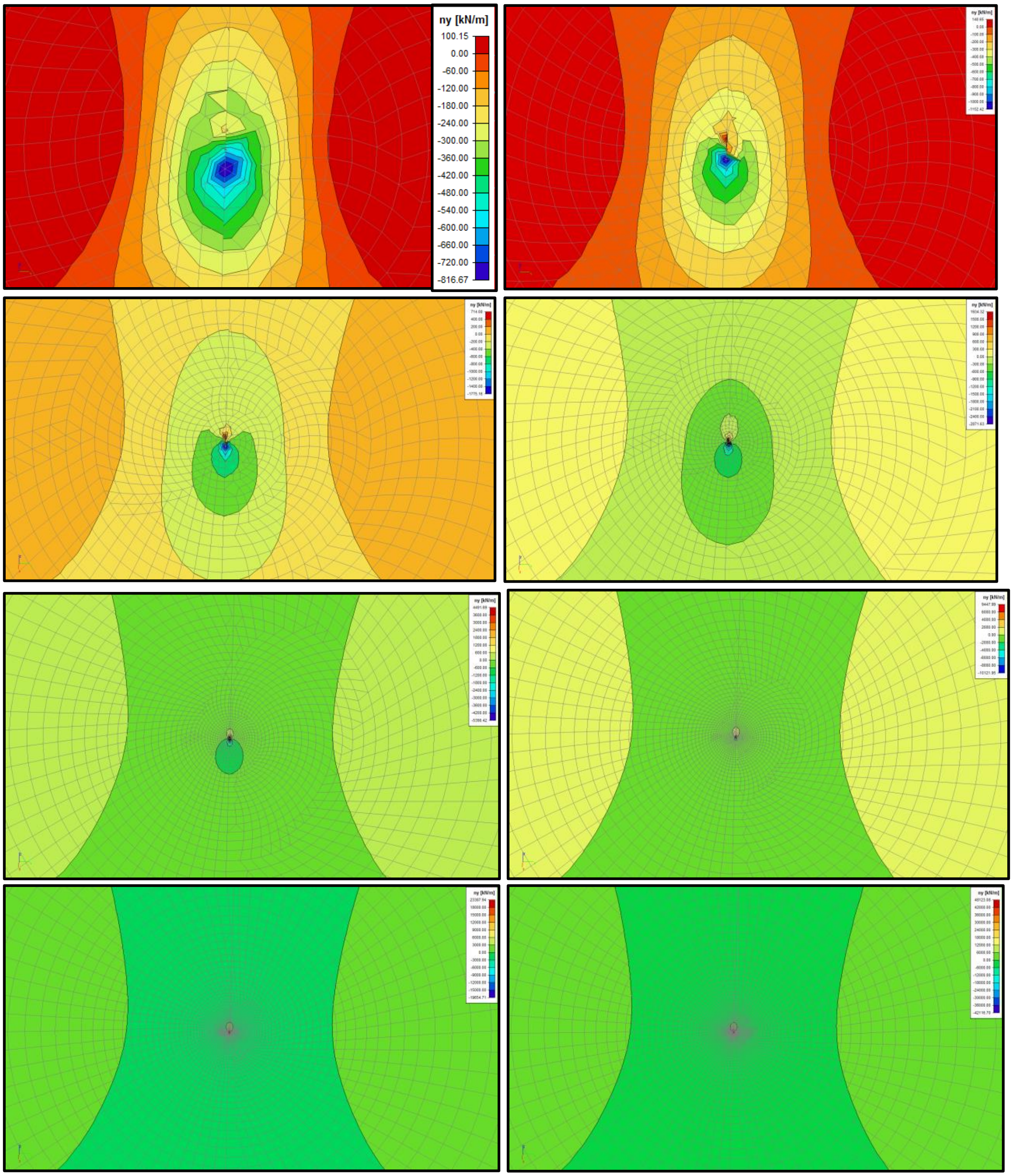
Figuur 50 Relatie tussen h en de grootte van de fout van de verplaatsing bij het open schaalmodel bij puntlast, logaritmisch

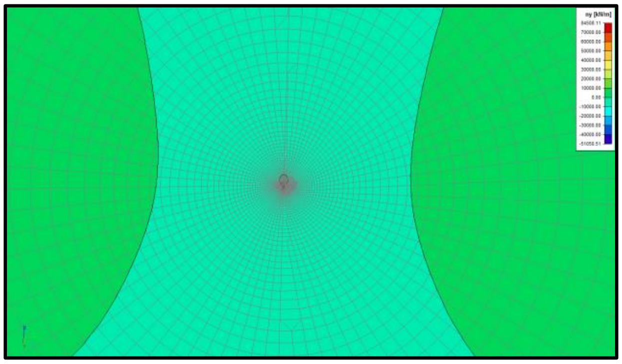
Er is een waarde van α = 0.37 af te lezen en ln(C) = 2.51, dus C = 12.33.

De gevonden waarden zijn erg onbetrouwbaar, gezien de kleine waarde van alpha. De convergentie van de resultaten zijn ook niet zoals verwacht. Mogelijk zijn de aannames over de hier gebruikte elementen ofwel de gebruikte methodes (de hypothese voor de fout) niet kloppend.

6.2 Normaalkracht/meridiaankracht

In onderstaande figuren zijn de resultaten weergegeven. Er is wel te zien dat de schaalverdeling is veranderd maar er is wel telkens hetzelfde deel van schaal in beeld genomen.


ny [kN/m]
100.15
0.00
-60.00
-120.00
-180.00
-240.00
-300.00
-360.00
-420.00
-480.00
-540.00
-600.00
-660.00
-720.00
-816.67



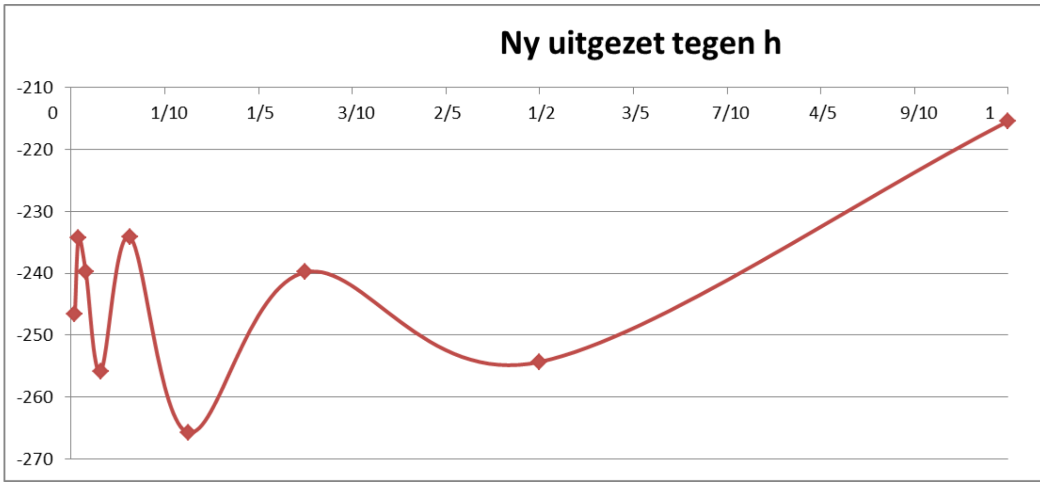
Figuur 51 Verfijning van de lokale netgrootte en de resultaten van de normaalkracht bij een puntbelasting (schaalverdeling verandert)

De resultaten afgelezen in een punt zijn hieronder weergegeven.

Elementgrootte	N_y(kN/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-215.42	3.443	0.000	2.036
½*h	-254.31	3.442	0.000	2.037
¼*h	-239.82	3.441	0.000	2.039
⅛*h	-265.72	3.441	0.000	2.040
$^{1}/_{16}$*h	-234.12	3.443	0.000	2.037
$^{1}/_{32}$*h	-255.87	3.442	0.000	2.038
$^{1}/_{64}$*h	-239.83	3.443	0.000	2.036
$^{1}/_{128}$*h	-234.29	3.443	0.000	2.035
$^{1}/_{256}$*h	-246.57	3.443	0.000	2.037
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 0.29$			

Tabel 19 Resultaten berekening met puntlast voor normaalkracht

Ook hier is weer niet een directe convergentie van de resultaten te zien maar een fluctuatie. Hierom is besloten ook hier de elementen nog verder te verkleinen tot $^{1}/_{16}$*h ,$^{1}/_{32}$*h, $^{1}/_{64}$*h, $^{1}/_{128}$*h en $^{1}/_{256}$*h om te zien of er dan wel convergentie optreedt. De resultaten zijn ook in bovenstaande tabel weergegeven. Er moet ook hier weer bij het bepalen van alpha worden gerekend met in elk geval drie waarden die convergeren. De waarden convergeren echter ook bij het verdere lokale netverfijning niet maar blijven fluctueren. Het resultaat is in onderstaande figuur te zien.



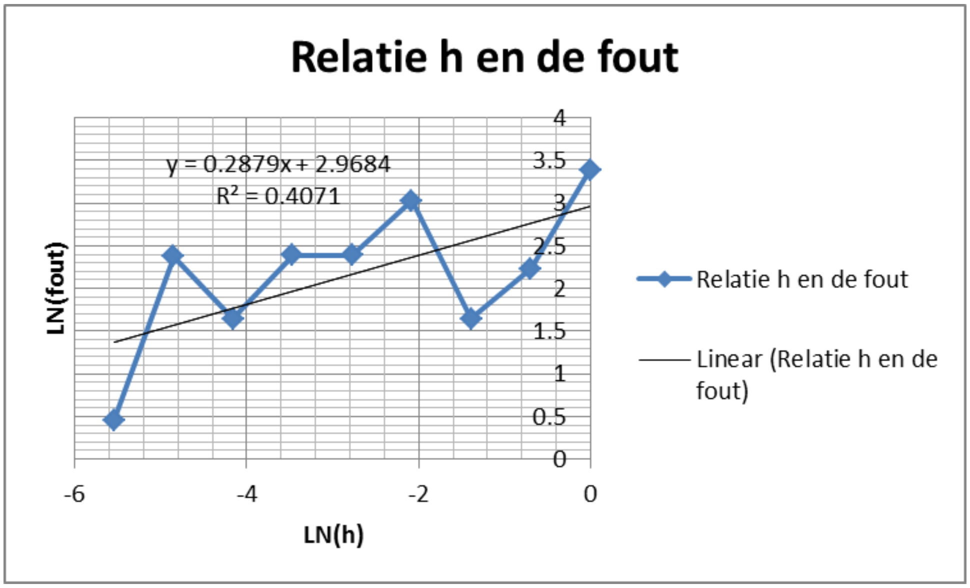
h	Ny
1	-215.42
1/2	-254.31
1/4	-239.82
1/8	-265.72
1/16	-234.12
1/32	-255.87
1/64	-239.83
1/128	-234.29
1/256	-246.57

Figuur 52 Fluctuatie van de resultaten van de meridiaankracht onder invloed van een puntlast

Ook hier wordt weer op dezelfde manier als bij de verplaatsing de waarde van alpha bepaald. Zie onderstaande resultaten.

	Ny	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-215.42	3.387098	0
Meting 2	-254.31	2.231089	-0.69315
Meting 3	-239.82	1.644805	-1.38629
Meting 4	-265.72	3.031099	-2.07944
Meting 5	-234.12	2.386926	-2.77259
Meting 6	-255.87	2.386007	-3.46574
Meting 7	-239.83	1.642873	-4.15888
Meting 8	-234.29	2.371178	-4.85203
Meting 9	-246.57	0.451076	-5.54518
U_{exact} (geschat)	-245		

Tabel 20 Resultaten (logaritmisch) normaalkracht van het open schaalmodel bij een puntbelasting



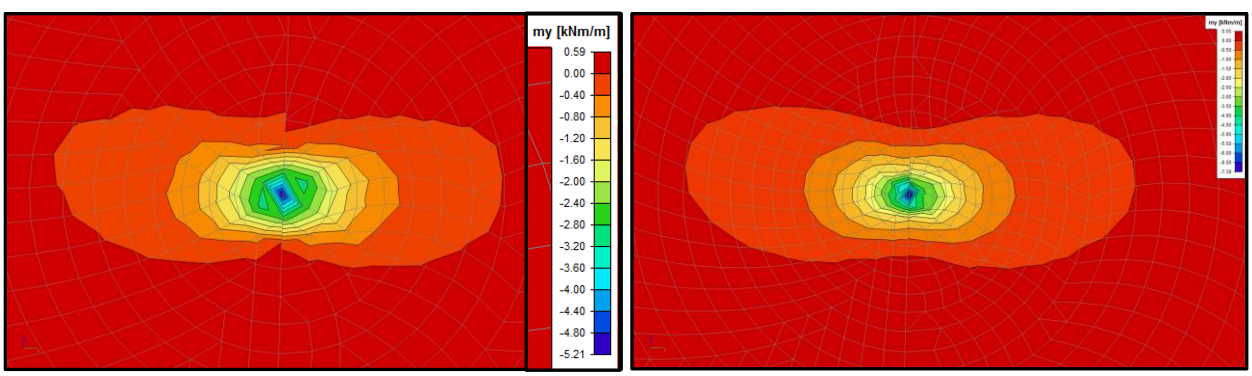
Figuur 53 Relatie tussen h en de grootte van de fout van de normaalkracht bij open schaalmodel bij puntlast, logaritmisch

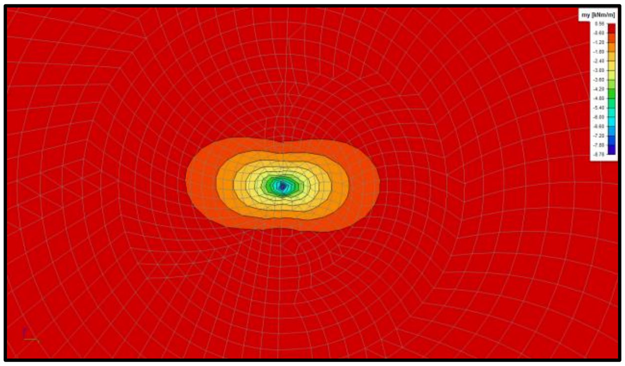
Een waarde van α = 0.29 is af te lezen en ln(C) = 2.97, dus C = 19.46

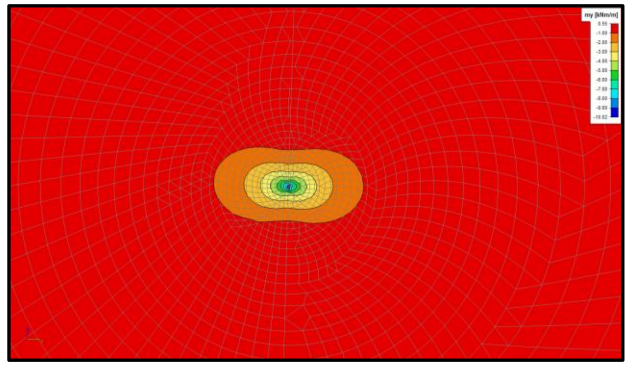
Ook hier zijn de gevonden waarden net als bij de verplaatsing erg onbetrouwbaar, gezien de kleine waarde van alpha. Het resultaat gedraagt zich wel net zo als bij de verplaatsing hetgeen aantoont dat er inderdaad een afwijkend gedrag optreedt door mogelijk een afwijkende programmering voor deze situaties in SCIA Engineer.

6.3 Moment

De resultaten van het moment bij verfijning van het lokale net zijn hieronder weergegeven. Weer moet er op worden gelet dat de schaalverdeling rechtsboven in de figuren telkens wat verandert.







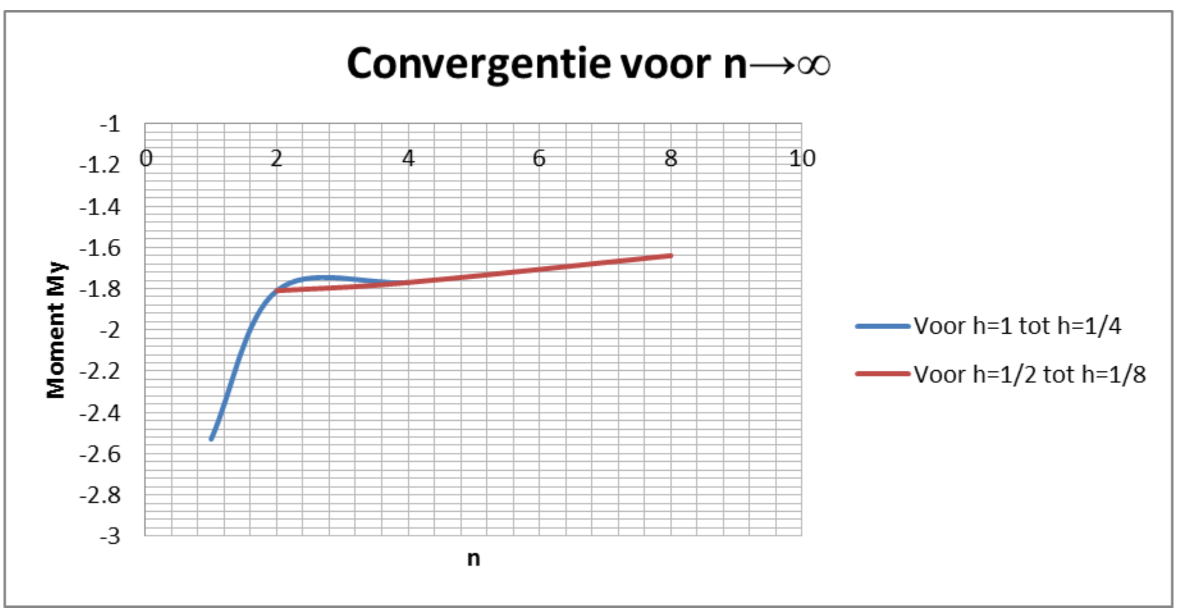
Figuur 54 Verfijning van de lokale netgrootte en resultaten van het moment onder een puntbelasting

De resultaten die zijn afgelezen in een punt zijn hieronder te zien.

Elementgrootte	M_y(kNm/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-2.53	3.443	0.000	2.036
½*h	-1.81	3.442	0.000	2.037
¼*h	-1.77	3.441	0.000	2.039
⅛*h	-1.64	3.441	0.000	2.040
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.30$			

Tabel 21 Resultaten berekening met puntlast voor moment

De convergentie van resultaten is in onderstaande figuur te zien. Alpha kan dus worden bepaald. Hier wordt weer gebruik gemaakt van de logaritmisch afgeleide formule. $M_{y,exact}$ wordt hierbij geschat.

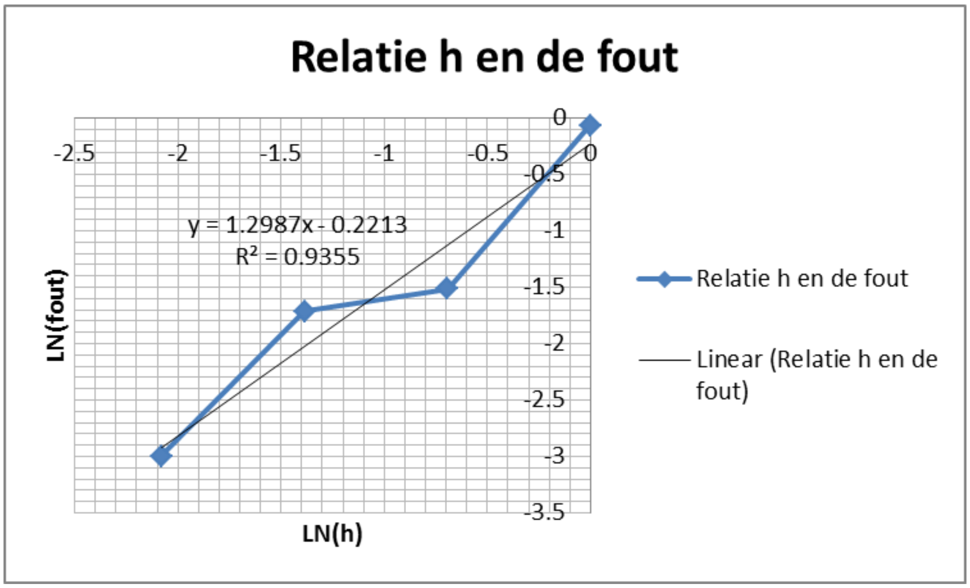


Figuur 55 Convergentie van de resultaten van het moment bij een puntbelasting

De resultaten voor het bepalen van alpha zijn hieronder te zien. Voor R^2 is weer een zo groot mogelijke waarde (zo dicht mogelijk bij 1 gekozen), zodat de standaardafwijking zo klein mogelijk is.

	My	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-2.53	-0.06188	0
Meting 2	-1.81	-1.51413	-0.69315
Meting 3	-1.77	-1.7148	-1.38629
Meting 4	-1.64	-2.99573	-2.07944
M_{exact} (geschat)	**-1.59**		

Tabel 22 Resultaten (logaritmisch) moment van het open schaalmodel bij puntbelasting

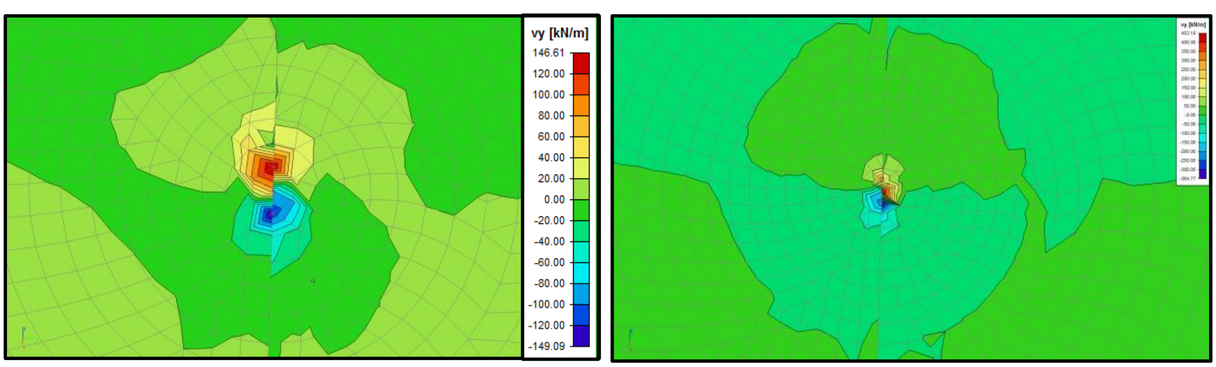


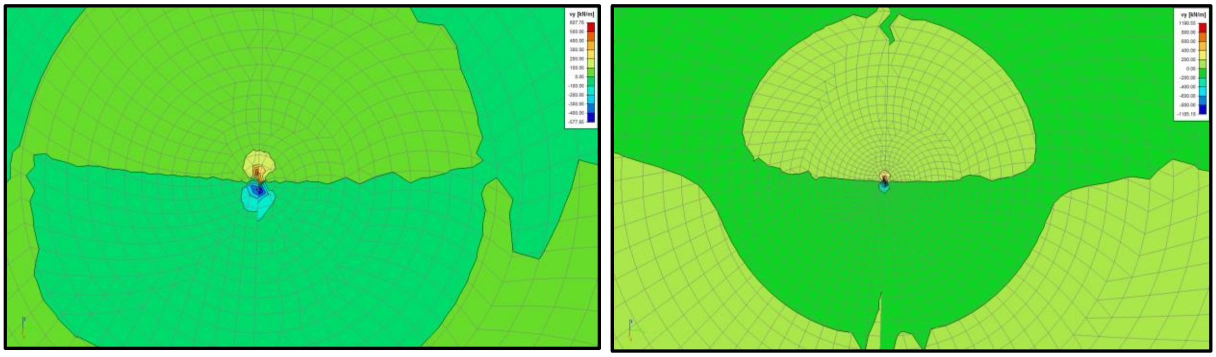
Figuur 56 Relatie tussen h en de grootte van de fout moment bij het open schaalmodel bij puntlast, logaritmisch

Er is af te lezen dat α = 1.30 en ln(C) = -0.22, dus C = 0.80.

6.4 Dwarskracht

De verkregen resultaten voor de dwarskracht zijn hieronder weergegeven.





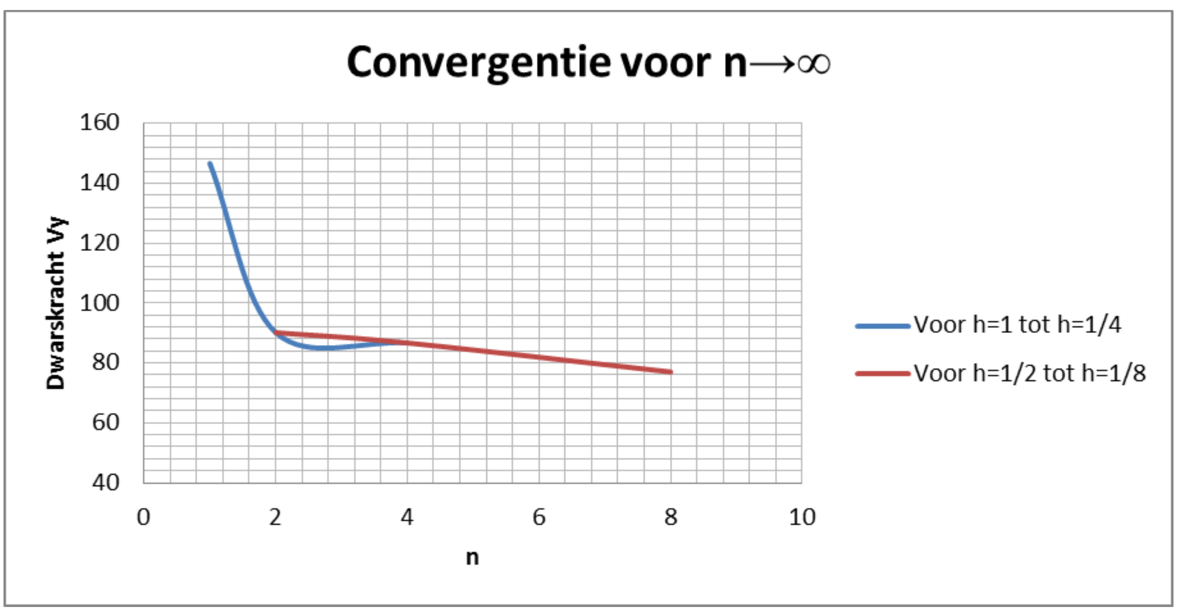
Figuur 57 Verfijning van de lokale netgrootte en resultaten van de dwarskrachten onder een puntbelasting

De afgelezen waarden in een bepaald punt zijn in onderstaande tabel te zien.

Elementgrootte	V_y(kN/m)	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	z-coördinaat (m)
h	-2.53	3.443	0.000	2.036
½*h	-1.81	3.442	0.000	2.037
¼*h	-1.77	3.441	0.000	2.039
⅛*h	-1.64	3.441	0.000	2.040
	$O(h^{\alpha})$ $\alpha = 1.43$			

Tabel 23 Resultaten berekening met puntlast voor dwarskracht

Een convergentie van de resultaten is duidelijk te zien in de onderstaande figuur.

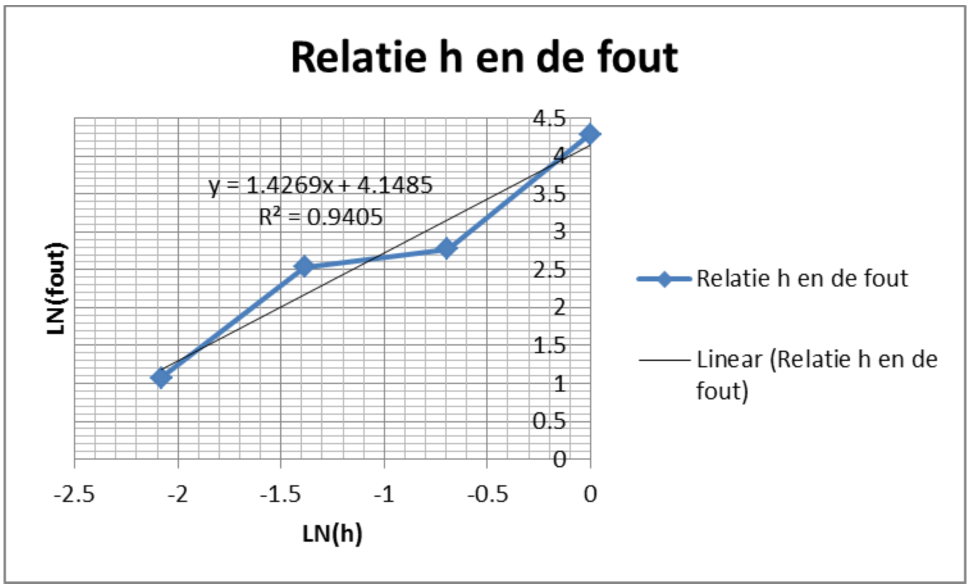


Figuur 58 Convergentie van de resultaten van de dwarskracht bij een puntbelasting

De resultaten van de berekening van alpha met gebruik van de logaritmische formule zijn hieronder te zien. $V_{y,exact}$ wordt hierbij geschat.

	Vy	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	146.61	4.283724	0
Meting 2	90.15	2.775709	-0.69315
Meting 3	86.68	2.532108	-1.38629
Meting 4	77.01	1.068153	-2.07944
V_{exact} (geschat)	**74.10**		

Tabel 24 Resultaten (logaritmisch) dwarskracht van het open schaalmodel bij puntbelasting



Figuur 59 Relatie tussen h en de grootte van de fout dwarskracht bij het open schaalmodel bij puntlast, logaritmisch

Er is te zien dat $\alpha = 1.43$ en $\ln(C) = 4.15$, dus $C = 63.3$.

7. Intermezzo: andere benadering van alpha

Bij het kijken naar de eenheid van de constante C zien we dat de eenheid afhankelijk is van alpha.

Er is tot nu toe namelijk vanuit gegaan dat de fout = $C*h^{\alpha}$, waarbij de fout = U_{ex}-U_{ber}. Dit betekent dat als de eenheden worden uitgewerkt dat [mm] = [1/mm$^{\alpha-1}$]*[mm$^{\alpha}$]. Dit betekent dat de eenheid van C, dus [1/mm$^{\alpha-1}$] afhankelijk is van de grootte van alpha. C kan dan dus niet als een echte constante worden gezien. De verschillen tussen de gevonden waarden van C zijn ook telkens afhankelijk van de grootte van de bijbehorende alpha. Hierom is het ook niet direct mogelijk een uitspraak te doen over de invloed van de vorm en de situatie op C, ondanks dat een invloed hiervan vrijwel zeker is.
Hierom is een andere benadering van de fout wenselijk.

Een mogelijke definiëring van de fout is

fout = $C'*(\frac{h}{U_{ex}})^{\alpha}$, waarbij de fout = $\frac{U_{ex}-U_{ber}}{U_{ex}}$. In dit geval is C' wel een dimensieloze constante.

De eerder afgeleide formule

$\ln(\text{fout}) = \ln(C) + \alpha \ln(h)$ kan nu worden herschreven tot

$$\ln(\text{fout}) = \ln(C') + \alpha \ln(\frac{h}{U_{ex}})$$

Dit levert bij uitschrijven:

$\ln(\text{fout}) = \alpha \ln(h) - \alpha \ln(U_{ex}) + \ln(C')$, waarbij

$$\ln(\text{fout}) = \ln(\frac{U_{ex}-U_{ber}}{U_{ex}})$$

Hierbij zijn dus $- \alpha \ln(U_{ex}) + \ln(C')$ samen het doorgangspunt in de grafiek door de y-as en α is de helling van de grafiek.

Om een indruk te krijgen of deze methode betere resultaten oplevert dan de eerder gebruikte formule wordt hieronder nogmaals ter illustratie de grootte van de fout moment bij het open schaalmodel onder e.g. bepaald met de nieuwe formule.

	My	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-13.89	2.508786	0
Meting 2	-5.00	1.223775	-0.69315
Meting 3	-3.28	0.518794	-1.38629
Meting 4	-2.06	-0.77653	-2.07944
M_{exact} (geschat)	**-1.6**		

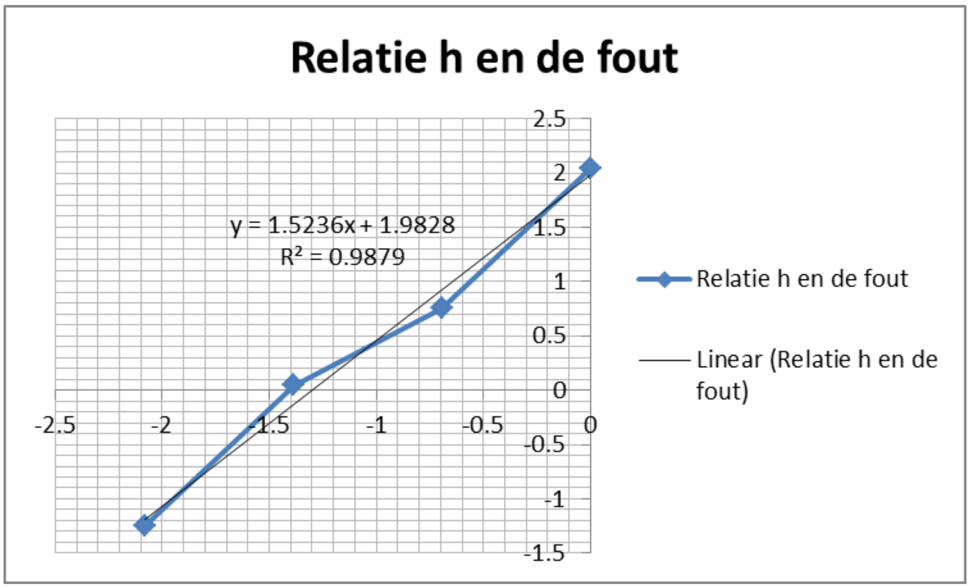
Tabel 25 Resultaten (logaritmisch) moment van het open schaalmodel onder e.g.

De bovenstaande tabel kan bij toepassing van de nieuwe methode worden vervangen door onderstaande tabel.

	My	LN(fout)	LN(h)
Meting 1	-13.89	2.038782	0
Meting 2	-5.00	0.753772	-0.69315
Meting 3	-3.28	0.04879	-1.38629
Meting 4	-2.06	-1.24653	-2.07944
M_{exact} (geschat)	**-1.60**		

Tabel 26 Resultaten (logaritmisch) moment van het open schaalmodel onder e.g. aangepaste methode

Deze resultaten leiden tot de onderstaande grafiek.



Figuur 60 Relatie tussen h en de grootte van de fout moment, open schaalmodel onder e.g., logaritmisch, nieuwe methode

Er is te zien dat de waarde van alpha niet verandert. De dimensieloze C' kan dus zonder nieuwe berekening worden bepaald uit C door uit beide formules de componenten die gelijk blijven aan elkaar gelijk te stellen. In formulevorm:

De gevonden waarde van C' is dan een dimensieloze constante, afhankelijk van de modelvorm, de situatie en de belasting.

Deze afleiding geldt echter alleen voor de verplaatsing. Bij het moment, normaalkracht etc. treedt wederom het probleem op dat C' niet dimensieloos is. Om de waarden van de constantes met elkaar te kunnen vergelijken zal dus een vergelijking moeten worden gevonden waar voor alle gevallen een dimensieloze constante wordt gevonden. Zo'n formulering is echter niet direct op het eerste gezicht af te leiden. Om deze reden zijn de waarden van de gevonden constantes die in de uiteindelijke resultaten zijn opgenomen niet direct te vergelijken.

8. Conclusie en evaluatie

Uit de gemaakte berekeningen blijkt dat de orde van de fout bepalen in vele gevallen lastiger is dan in eerste instantie werd gedacht. De resultaten convergeren wel maar niet altijd monotoon. In sommige gevallen kan zelfs geen betrouwbaar resultaat worden gevonden. Ook zit er veel variatie in de resultaten.

De hypothese dat de fout kan worden beschreven met $O(h\alpha)$ is niet juist voor de elementen in SCIA Engineer. Meer onderzoek zou nodig zijn voor andere programma's.

De resultaten zijn te interpreteren in een grafiek met een dubbele logaritmische schaalverdeling. De helling van deze grafiek komt overeen met de orde van de fout.

Uit de berekeningen van SCIA Engineer werd duidelijk dat verplaatsingen in absolute zin te klein worden benaderd. Normaalkrachten, momenten en dwarskrachten worden in absolute zin te groot benaderd en zijn dus aan de veilige kant.

In de onderstaande tabel zijn de gevonden resultaten weergegeven. Hierbij is voor de spanning de laagste orde van moment en die van normaalkracht maatgevend omdat de spanning een functie is van moment en normaalkracht: $\sigma = M/W + N/A$. De niet betrouwbare resultaten zijn schuingedrukt weergegeven en zijn ook niet meegenomen in de gemiddelden.

De berekende waarden van C zijn niet direct vergelijkbaar zoals eerder is besproken. Ze hangen af van α, de gekozen eenheden en de situatie. Om deze reden zijn deze waarden ook niet opgenomen in de onderstaande tabel.

		α *(gemiddelde orde van de fout)*	R^2 *(correlatie)*
Doorbuiging	*Eigen gewicht*	1.82 en 2.75	0.9909 en 0.9889
	Puntlast	*0.37*	*0.627*
	Eigen gewicht Sydney Opera House	*0.80*	*0.8977*
	Gemiddeld	**2.29**	**0.9899**
Moment	*Eigen gewicht*	1.52	0.9879
	Puntlast	1.30	0.9355
	Eigen gewicht Sydney Opera House	1.59	0.5614
	Gemiddeld	**1.47**	**0.8283**
Dwarskracht	*Eigen gewicht*	1.98	0.9254
	Puntlast	1.43	0.9405
	Eigen gewicht Sydney Opera House	1.51	0.9877
	Gemiddeld	**1.64**	**0.9512**
Normaalkracht	*Eigen gewicht*	1.86	0.804
	Puntlast	*0.29*	*0.4071*
	Eigen gewicht Sydney Opera House	1.16	0.7886
	Gemiddeld	**1.51**	**0.7963**
Spanning	*Eigen gewicht*	1.52	0.9879
	Puntlast	1.30	0.9355
	Eigen gewicht Sydney Opera House	1.34	0.9877
	Gemiddeld	**1.39**	**0.9704**

Tabel 27 Onderzoeksresultaten

Met de bovenstaande resultaten voor alpha kan voor doorbuiging, moment, dwarskracht, normaalkracht en spanning de formules worden afgeleid waarmee uit twee resultaten de exacte waarde kan worden berekend. Dit is in de inleiding besproken.

Hieronder zijn de formules gegeven. De afleiding is in bijlage 5 te vinden.

- Doorbuiging: $U_{ex} = U_{ber.2} + (U_{ber.2} - U_{ber.1})/3.89$
- Moment: $M_{ex} = M_{ber.2} + (M_{ber.2} - M_{ber.1})/1.77$
- Dwarskracht: $V_{ex} = V_{ber.2} + (V_{ber.2} - V_{ber.1})/2.12$
- Normaalkracht: $N_{ex} = N_{ber.2} + (N_{ber.2} - N_{ber.1})/1.85$
- Spanning: $S_{ex} = S_{ber.2} + (S_{ber.2} - S_{ber.1})/1.77$

Bij het gebruik van de ordes van de fout en de bovenstaande formuleringen moet wel veiligheidshalve een foutmarge worden toegepast omdat is gebleken dat bij aanvullende berekeningen ook lagere waarden van alpha werden gevonden.

De bovenstaande regels kunnen dus niet gebruikt worden omdat de hypothese niet klopt waar ze mee zijn afgeleid.

Lijst van tabellen

Literatuur

[1] Blauwendraad, Johan, and Hoefakker, Jeroen H. *Structural Shell Analysis*. Dordrecht: Springer Science Business Media, 2014. eBook.

[2] . N.p.. Web. 5 Mar 2014. <http://mathworld.wolfram.com/SphericalSegment.html>.

[3] http://gallery.records.nsw.gov.au/wp-content/gallery/sydney-opera-house-the-gold book/12706_2_8645_0021.jpg

[4] P.C.J. Hoogenboom, Notes on shell structures, Dictaat CIE4143, TUDelft, April 2014

[5] A.W.M. Kok, Numerical Mechanics, The displacement method, Dictaat b18, TUDelft, July 1991

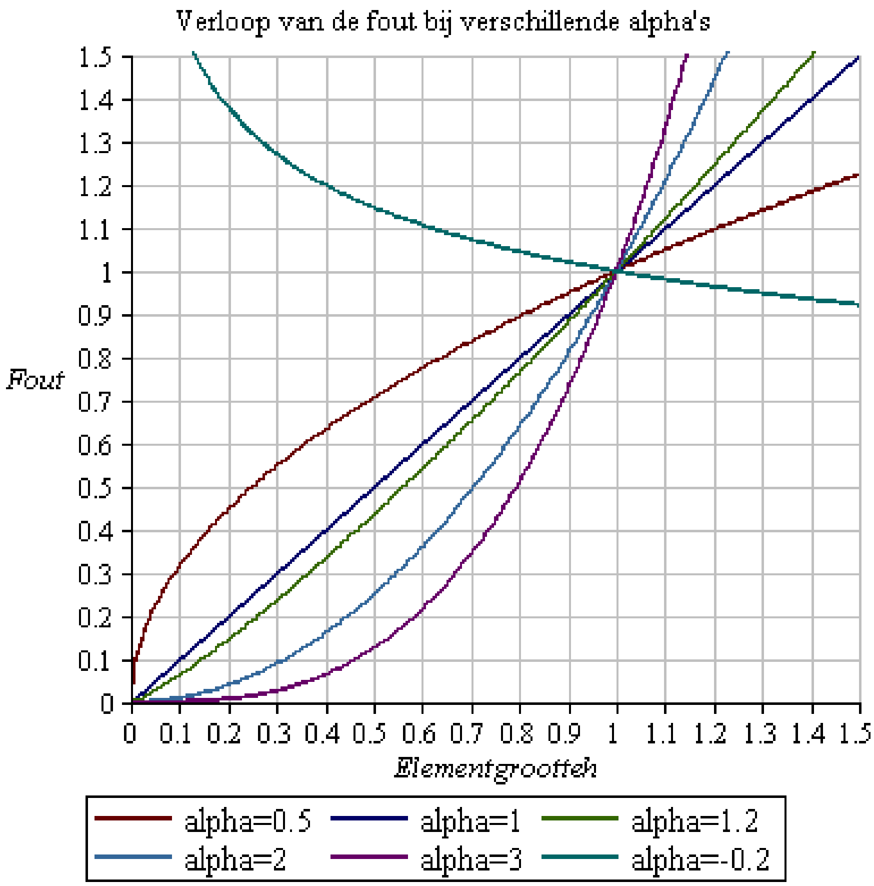
Bijlagen

Bijlage 1 Maple invoer voor de grafiek van het verloop van de fout bij verschillende alpha's

> $restart:$

> $fout1 := h^{0.5} : fout2 := h^{1} : fout3 := h^{1.2} : fout4 := h^{2} : fout5 := h^{3} :$
> $fout6 := h^{(-0.2)} :$

> *plot*([*fout1*, *fout2*, *fout3*, *fout4*, *fout5*, *fout6*], *h* = 0 ..1.5, 0 ..1.5, *legend* = ["alpha=0.5", "alpha=1", "alpha=1.2", "alpha=2", "alpha=3", "alpha=-0.2"], *title* = "Verloop van de fout bij verschillende alpha's", *labels* = [*Elementgrootte h*, *Fout*], *axis* = [*gridlines* = [20, *color* = *grey*]]);



Bijlage 2 Maple berekening van alpha gesloten schaalmodel halve bol voor verplaatsing onder e.g.

```
> # Berekening voor een halve bol met straal van r=4 m onder belasting van eigen gewicht
> # Berekening 1
> restart;
> eq1 := Uex = Uber1 + C* h^alpha :
> eq2 := Uex = Uber2 + C* (h/2)^alpha :
> eq3 := Uex = Uber3 + C* (h/4)^alpha :
> solve({eq1, eq2, eq3}, {alpha, Uex, h});
```

$$\left\{ Uex = Uber1 + C \left(e^{\frac{\ln\left(-\frac{(Uber1-Uber2)^2}{C\,(Uber1-2\,Uber2+Uber3)}\right)\ln(2)}{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}} \right)^{\frac{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}{\ln(2)}},\ \alpha = \frac{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}{\ln(2)},\ h = e^{\frac{\ln\left(-\frac{(Uber1-Uber2)^2}{C\,(Uber1-2\,Uber2+Uber3)}\right)\ln(2)}{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}} \right\} \quad (1)$$

```
> Dus alpha (de orde van h ) is onafhankelijk van h en van Uex. C is hier wel van afhankelijk. Daarom is hieronder voor de bepaling van alpha geen gebruik gemaakt van de grootte van h.
> restart;
> #h:=0.04·8=0.32;
> Uber1 := 31.7; Uber2 := 28.1; Uber3 := 26.3;
```

$$Uber1 := 31.7$$
$$Uber2 := 28.1$$
$$Uber3 := 26.3 \quad (2)$$

> $eq1 := Uex = Uber1 + C \cdot h^{alpha};$

$$eq1 := Uex = 31.7 + C\,h^{\alpha} \quad (3)$$

> $eq2 := Uex = Uber2 + C \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h\right)^{alpha};$

$$eq2 := Uex = 28.1 + C\left(\frac{1}{2}\,h\right)^{\alpha} \quad (4)$$

> $eq3 := Uex = Uber3 + C \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot h\right)^{alpha};$

$$eq3 := Uex = 26.3 + C\left(\frac{1}{4}\,h\right)^{\alpha} \quad (5)$$

> $sol := solve(\{eq1, eq2, eq3\}, \{Uex, h, alpha\}); assign(sol):$

$$sol := \left\{ Uex = 24.50000000,\ \alpha = 1.,\ h = -\frac{7.200000000}{C} \right\} \quad (6)$$

> $restart : Uber1 := 31.7 : Uber2 := 28.1 : Uber3 := 26.3 : \alpha = \frac{\ln\left(\frac{Uber1 - Uber2}{Uber2 - Uber3}\right)}{evalf(\ln(2))};$

$$\alpha = 1.000000000 \quad (7)$$

```
> # Berekening 2 (controle)
> restart;
> #h:=0.04·8=0.32;
> Uber1 := 28.1; Uber2 := 26.3; Uber3 := 26.0;
```

$$Uber1 := 28.1$$
$$Uber2 := 26.3$$
$$Uber3 := 26.0 \quad (8)$$

> $eq1 := Uex = Uber1 + C \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h\right)^{alpha};$

$$eq1 := Uex = 28.1 + C\left(\frac{1}{2}\,h\right)^{\alpha} \quad (9)$$

> $eq2 := Uex = Uber2 + C \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot h\right)^{alpha};$

$$eq2 := Uex = 26.3 + C\left(\frac{1}{4}\,h\right)^{\alpha} \quad (10)$$

> $eq3 := Uex = Uber3 + C \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot h\right)^{alpha};$

$$eq3 := Uex = 26.0 + C\left(\frac{1}{8}\,h\right)^{\alpha} \quad (11)$$

> $sol := solve(\{eq1, eq2, eq3\}, \{Uex, h, alpha\}); assign(sol):$

$$sol := \left\{ Uex = 26. + C\left(e^{0.3868528072\ln\left(-\frac{0.06000000000}{C}\right)}\right)^{2.58496250072},\ \alpha = 2.584962501,\ h = 8.\,e^{0.3868528072\ln\left(-\frac{0.06000000000}{C}\right)} \right\} \quad (12)$$

> $restart : Uber1 := 28.1 : Uber2 := 26.3 : Uber3 := 26.0 : \alpha = \frac{\ln\left(\frac{Uber1 - Uber2}{Uber2 - Uber3}\right)}{evalf(\ln(2))};$

$$\alpha = 2.584962500 \quad (13)$$

Bijlage 3 Maple berekening van alpha open schaalmodel halve bol voor verplaatsing onder e.g.

> # Berekening voor een halve bol met straal van r=4 m met een opening van r=2m onder belasting van eigen gewicht
> # Berekening 1
> restart;
> eq1 := Uex = Uber1 + C*h^alpha :
> eq2 := Uex = Uber2 + C*(h/2)^alpha :
> eq3 := Uex = Uber3 + C*(h/4)^alpha :
> solve({eq1, eq2, eq3}, {alpha, Uex, h});

$$\left\{ Uex = Uber1 + C\left(e^{\frac{\ln\left(-\frac{(Uber1-Uber2)^2}{C\,(Uber1-2\,Uber2+Uber3)}\right)\ln(2)}{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}}\right)^{\frac{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}{\ln(2)}}, \alpha = \frac{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}{\ln(2)}, h = e^{\frac{\ln\left(-\frac{(Uber1-Uber2)^2}{C\,(Uber1-2\,Uber2+Uber3)}\right)\ln(2)}{\ln\left(\frac{Uber1-Uber2}{Uber2-Uber3}\right)}} \right\} \quad (1)$$

> # Dus alpha (de orde van h) is onafhankelijk van h en van Uex. C is hier wel van afhankelijk. Daarom is hieronder voor de bepaling van alpha geen gebruik gemaakt van de grootte van h.
> restart;
> #h:=0.04·8=0.32;
> Uber1 := -205.9; Uber2 := -202.6; Uber3 := -202.3;

$$Uber1 := -205.9$$
$$Uber2 := -202.6$$
$$Uber3 := -202.3 \quad (2)$$

> eq1 := Uex = Uber1 + C·h^alpha;

$$eq1 := Uex = -205.9 + C\,h^{\alpha} \quad (3)$$

> eq2 := Uex = Uber2 + C·(1/2·h)^alpha;

$$eq2 := Uex = -202.6 + C\left(\frac{1}{2}\,h\right)^{\alpha} \quad (4)$$

> eq3 := Uex = Uber3 + C·(1/4·h)^alpha;

$$eq3 := Uex = -202.3 + C\left(\frac{1}{4}\,h\right)^{\alpha} \quad (5)$$

> sol := solve({eq1, eq2, eq3}, {Uex, h, alpha}); assign(sol) :

$$sol := \left\{ Uex = -205.9000000 + C\left(e^{0.2890648263\ln\left(\frac{3.630000000}{C}\right)}\right)^{3.4594316186373}, \alpha = 3.459431619, h = e^{0.2890648263\ln\left(\frac{3.630000000}{C}\right)} \right\} \quad (6)$$

> restart : Uber1 := -205.9 : Uber2 := -202.6 : Uber3 := -202.3 : α = ln((Uber1-Uber2)/(Uber2-Uber3)) / evalf(ln(2));

$$\alpha = 3.459431619 \quad (7)$$

> # Berekening 2 (controle)
> restart;
> #h:=0.04·8=0.32;
> Uber1 := -202.6; Uber2 := -202.3; Uber3 := -202.2;

$$Uber1 := -202.6$$
$$Uber2 := -202.3$$
$$Uber3 := -202.2 \quad (8)$$

> eq1 := Uex = Uber1 + C·(1/2·h)^alpha;

$$eq1 := Uex = -202.6 + C\left(\frac{1}{2}\,h\right)^{\alpha} \quad (9)$$

> eq2 := Uex = Uber2 + C·(1/4·h)^alpha;

$$eq2 := Uex = -202.3 + C\left(\frac{1}{4}\,h\right)^{\alpha} \quad (10)$$

> eq3 := Uex = Uber3 + C·(1/8·h)^alpha;

$$eq3 := Uex = -202.2 + C\left(\frac{1}{8}\,h\right)^{\alpha} \quad (11)$$

> sol := solve({eq1, eq2, eq3}, {Uex, h, alpha}); assign(sol) :

$$sol := \left\{ Uex = -202.2000000 + C\left(e^{0.6309297536\ln\left(\frac{0.05000000000}{C}\right)}\right)^{1.5849625007211}, \alpha = 1.584962501, h = 8.\,e^{0.6309297536\ln\left(\frac{0.05000000000}{C}\right)} \right\} \quad (12)$$

> restart : Uber1 := -202.6 : Uber2 := -202.3 : Uber3 := -202.2 : α = ln((Uber1-Uber2)/(Uber2-Uber3)) / evalf(ln(2));

$$\alpha = 1.584962501 \quad (13)$$

Bijlage 4 Maple controle afstand meetpunt tot aangrijpingspunt puntlast

> *# Er moet gelden dat de afstand van het meetpunt tot het aangrijpingspunt groter of gelijk moet zijn dat de elementgrootte h in het grootste net om invloed van de verstoring tegen te gaan.*

> *#Knoop waarin de puntlast aangrijpt:*

> $x := 3.464 : y := 0.000 : z := 2.000 :$

>

> *#Meetpunt:*

> $x1 := 3.443 : y1 := 0.000 : z1 := 2.036 :$

> $verschil := \mathrm{sqrt}\left((\mathrm{abs}(x - x1))^2 + (\mathrm{abs}(y - y1))^2 + (\mathrm{abs}(z - z1))^2 \right);$

$$verschil := 0.04167733197$$

>

> $h := 0.5 \cdot 0.08;$ *# grootste elementgrootte in het verfijningsgebied*

$$h := 0.040$$

> *# Dit klopt dus.*

Bijlage 5 Maple afleiding formules voor bepalen exacte waarde

> #Doorbuiging

> restart :

> $eq1 := Uex = Uber1 + C \cdot h^{\text{alpha}}$:

> $eq2 := Uex = Uber2 + C \cdot (0.5 \cdot h)^{\text{alpha}}$:

> alpha := 2.29 : sol := solve({eq1, eq2}, {Uex, C}); assign(sol) :

$$sol := \left\{ C = -\frac{1.257032333\ (Uber1 - 1.\ Uber2)}{h^{\frac{229}{100}}},\ Uex = -0.2570323332\ Uber1 + 1.257032333\ Uber2 \right\}$$

> $fact := \frac{1}{0.2570323332}$;

$$fact := 3.890561112$$

> restart : $Uex = Uber2 + \frac{(Uber2 - Uber1)}{3.89}$;

$$Uex = 1.257069409\ Uber2 - 0.2570694087\ Uber1$$

> #Moment

> restart :

> $eq1 := Mex = Mber1 + C \cdot h^{\text{alpha}}$:

> $eq2 := Mex = Mber2 + C \cdot (0.5 \cdot h)^{\text{alpha}}$:

> alpha := 1.47 : sol := solve({eq1, eq2}, {Mex, C}); assign(sol) :

$$sol := \left\{ C = -\frac{1.564901877\ (Mber1 - 1.\ Mber2)}{h^{\frac{147}{100}}},\ Mex = -0.5649018772\ Mber1 + 1.564901877\ Mber2 \right\}$$

> $fact := \frac{1}{0.5649018772}$;

$$fact := 1.770218936$$

> restart : $Mex = Mber2 + \frac{(Mber2 - Mber1)}{1.77}$;

$$Mex = 1.564971751\ Mber2 - 0.5649717514\ Mber1$$

> #Dwarskracht

> restart :

> $eq1 := Vex = Vber1 + C \cdot h^{\text{alpha}}$:

> $eq2 := Vex = Vber2 + C \cdot (0.5 \cdot h)^{\text{alpha}}$:

> alpha := 1.64 : $sol := solve(\{eq1, eq2\}, \{Vex, C\}); assign(sol)$:

$$sol := \left\{C = -\frac{1.472442808\,(Vber1 - 1.\,Vber2)}{h^{41/25}},\ Vex = -0.4724428082\,Vber1 + 1.472442808\,Vber2\right\}$$

> $fact := \frac{1}{0.4724428082};$

$$fact := 2.116658319$$

> $restart : Vex = Vber2 + \frac{(Vber2 - Vber1)}{2.12};$

$$Vex = 1.471698113\,Vber2 - 0.4716981132\,Vber1$$

> #Normaalkracht

> $restart$:

> $eq1 := Nex = Nber1 + C \cdot h^{alpha}$:

> $eq2 := Nex = Nber2 + C \cdot (0.5 \cdot h)^{alpha}$:

> alpha := 1.51 : $sol := solve(\{eq1, eq2\}, \{Nex, C\}); assign(sol)$:

$$sol := \left\{C = -\frac{1.541096146\,(Nber1 - 1.\,Nber2)}{h^{\frac{151}{100}}},\ Nex = -0.5410961464\,Nber1 + 1.541096146\,Nber2\right\}$$

> $fact := \frac{1}{0.5410961464};$

$$fact := 1.848100391$$

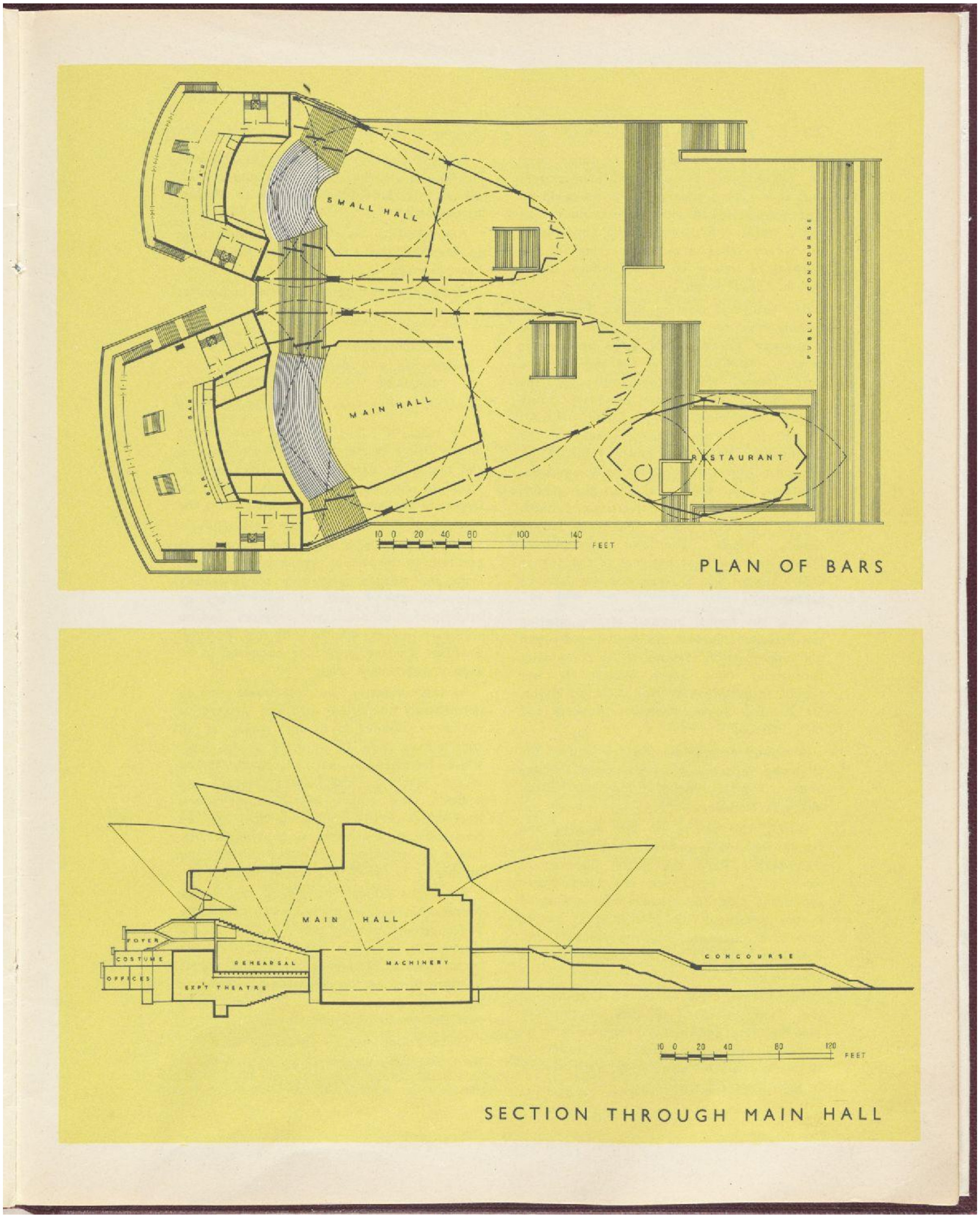
> $restart : Nex = Nber2 + \frac{(Nber2 - Nber1)}{1.85};$

$$Nex = 1.540540540\,Nber2 - 0.5405405405\,Nber1$$

> #Spanning

> #Zie moment

Bijlage 6 Overzichtstekening van Sydney Opera House



(1 foot = 0.3048m)