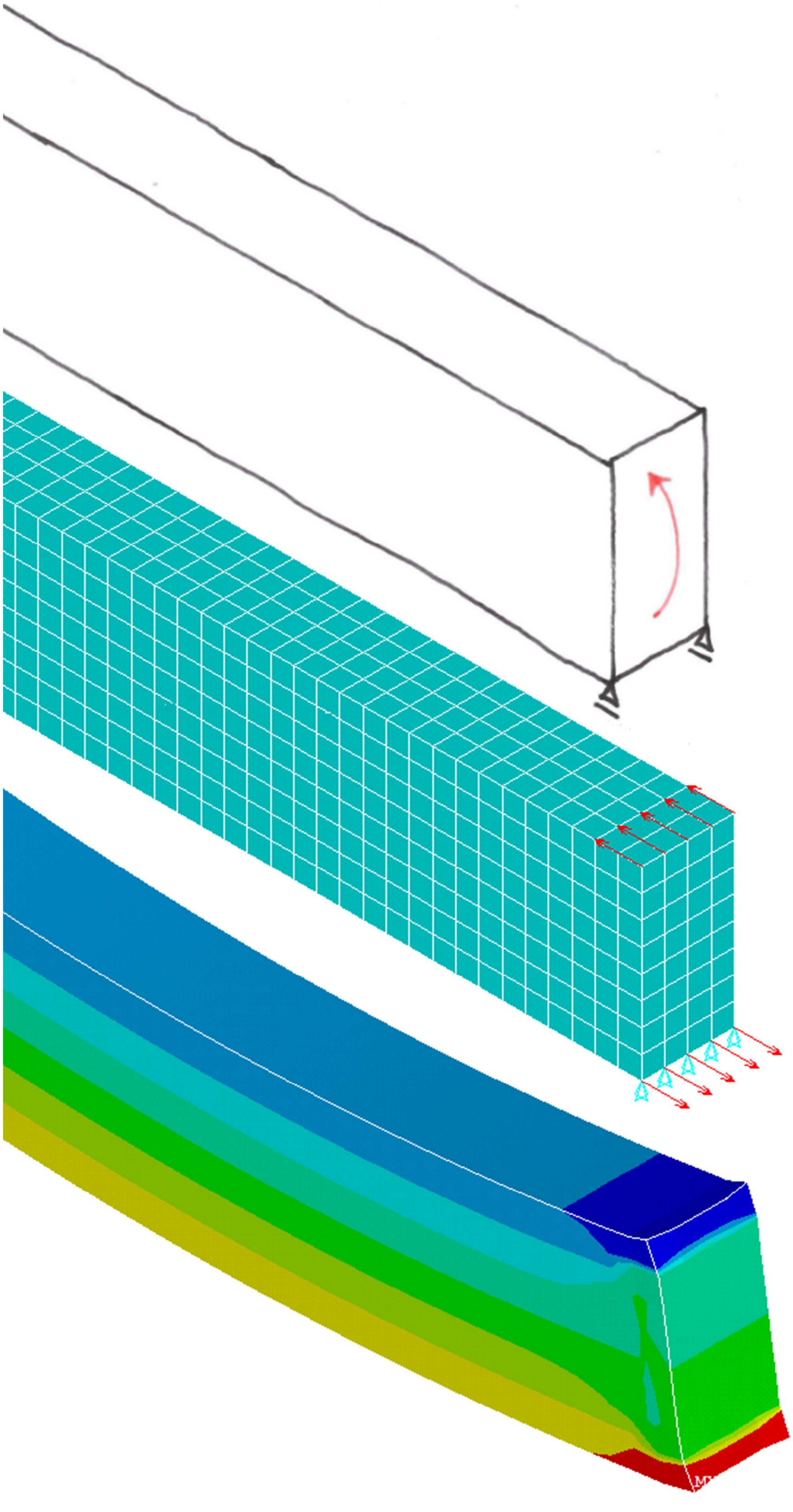
CT3000: Bachelor eindwerk, Wouter Steenstra (1361481)

Spanningen berekenen met volume-elementen

Begeleiding: dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. P.A. de Vries

juni 2012



1 Voorwoord

Als afsluitend onderdeel van mijn Bachelor opleiding Civiele Techniek aan de TU Delft heb ik in het vierde kwartaal van collegejaar 2011-2012 de nauwkeurigheid van spanningsberekeningen onderzocht voor een ligger opgedeeld in volume-elementen.
Ik dank mijn directe begeleider dhr. P.C.J. Hoogenboom en mijn secundaire begeleider dhr. P.A. de Vries voor de assistentie en dhr. P.C.J. Hoogenboom tevens voor het beschikbaar stellen van zijn ruimte en faciliteiten gedurende dit kwartaal.
Met plezier heb ik aan het onderzoek gewerkt. De lezer wens ik dan ook veel plezier tijdens het doornemen van dit verslag. Schroom niet contact met mij op te nemen, voor vragen of opmerkingen.

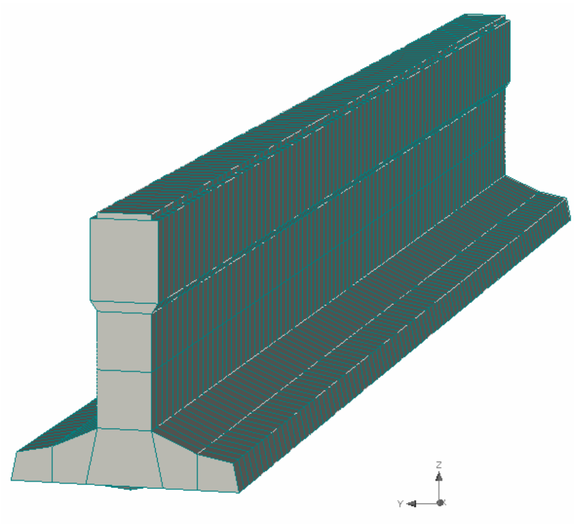
Wouter Steenstra
w.steenstra@student.tudelft.nl

Delft, juni 2012

Inhoudsopgave

2 Inleiding

Constructies worden bij het gebruik van analysesoftware veelal geschematiseerd tot geometrische lijn- en vlakmodellen. Bij de modelkeuze speelt de snelheid van het analyseproces en de totale doorlooptijd een grote rol.
Tot de jaren '90 werd vaak in 1D, 2D en $2\frac{1}{2}$D gemodelleerd, maar inmiddels zijn computer zo krachtig dat constructiedelen ook in volume-elementen kunnen worden opgedeeld zoals bijvoorbeeld de ligger in figuur 1 uit de master thesis van Evert van Vliet [9].



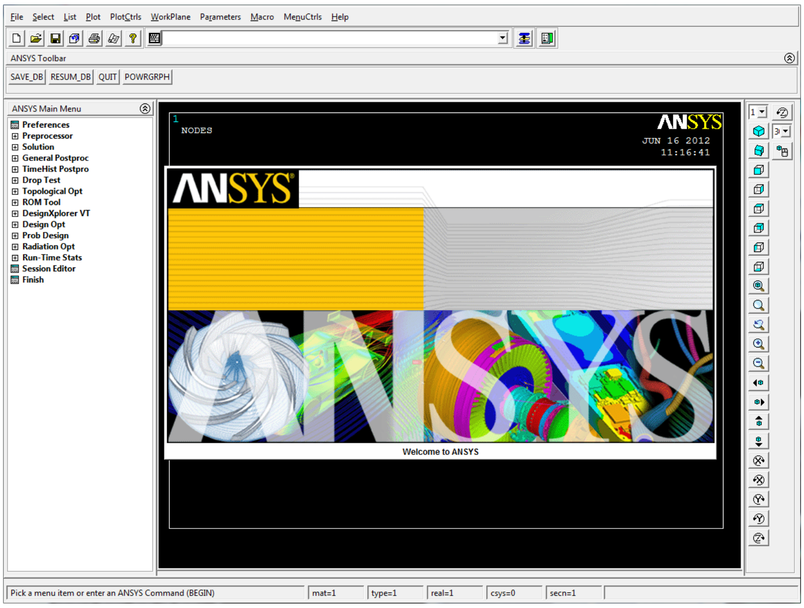
Figuur 1: Een ZIP-balk opgedeeld in volume-elementen

Het werken met volume-elementen heeft een aantal voordelen ten opzichte van het werken met lijn- of schaalelementen. Zo kan de geometrie uit de visualisatiesoftware, gepresenteerd als volumemodellen, in de ontwerpsoftware worden (her)gebruikt. Constructies hoeven niet te worden geschematiseerd tot lijn- of schaalelementen, waardoor spanningen en rekken in alle richtingen van een volumineuze constructie gemakkelijk kunnen worden berekend. Voor een architect is dat vooral in het beginstadium van het ontwerpproces zeer wenselijk. Als meteen al duidelijk wordt dat er in een ontwerp te hoge spaningen optreden, dan kan er nog iets aan het ontwerp worden veranderd voordat onderdelen verder worden uitgewerkt. Dit past binnen de BIM werkmethodiek waarbij in een 3 dimensionaal Bouw Informatiemodel (BIM) integraal wordt samengewerkt door diverse disciplines (architect, constructeur, installateur en aannemer).

Om onder andere spanningen voldoende nauwkeurig te benaderen dienen de volume-elementen wel klein genoeg te worden gekozen. Maar door een constructie op te delen in een te hoog aantal volume-elementen bestaat er de kans dat een computer de analyse niet kan uitvoeren. Ook kan het zo zijn dat de computer wel kan rekenen met een zelf ingevoerd 'mesh', maar dat het een week aan manuren kost om zo'n model te bouwen. Het zou een constructeur veel tijd besparen als hij een automatisch gegenereerd mesh, enkel door het aantal volume-elementjes in de doorsnede te tellen, kan testen op nauwkeurigheid.
De hoofdvraag van dit onderzoek luidt dan ook:

Hoeveel volume-elementen zijn minimaal nodig om een ligger of kolom nauwkeurig te modelleren?

Het onderzoek beperkt zich tot een homogene lineair elastische ligger met de vier belastingsgevallen normaalkracht, buiging, dwarskracht en wringing.
Voor berekeningen met volume-elementen zijn veel eindige elementenprogramma's beschikbaar. Voor dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van de 8- en 20-knoops elementen in *ANSYS* waarvan het hoofdmenu is weergeven in figuur 2. In hoofdstuk 3 wordt eerst ingegaan op de theorie van zowel de handberekening als de numerieke berekeningen.
De modelvorming met de bijbehorende variabelen zijn toegelicht in hoofdstuk 4.
Van de verschillende belastingsgevallen worden in hoofdstuk 5, 6, 7 en 8 de analytische en numerieke waarden met elkaar vergeleken waarbij de numerieke waarde volgt door te modelleren in *ANSYS*.
Conclusies en aanbevelingen volgen in hoofdstuk **??**.



Figuur 2: Eindig elementen programma *ANSYS*

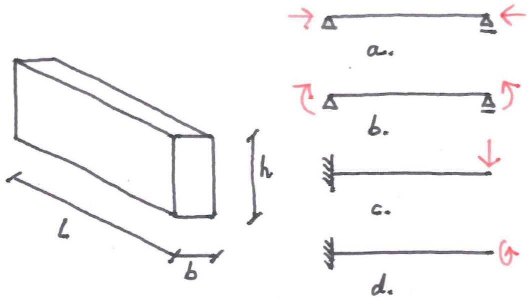
3 Theorie

3.1 Handberekeningen

Om de spanningen in de constructie analytisch te berekenen wordt uitgegaan van een homogene staafdoorsnede en een materiaal dat zich lineair elastisch gedraagt. Deze aannamen liggen ten grondslag van het vezelmodel, zoals beschreven de constructiemechanica boeken van Coenraad Hartsuijker [8]. Uitgegaan wordt van de evenredigheid tussen spanning σ en vervorming ε volgens de wet vaan Hooke (in zijn eenvoudigste vorm):

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

Voor de berekening van de verschillende belastingsgevallen a, b, c en d in Figuur 3 wordt uitgegaan van een rechthoekige doorsnede $b * h$.



Figuur 3: Balk belast op normaalkracht, buiging, dwarskracht en wringing

3.1.1 Normaalkracht

Voor een constructie met een homogene doorsnede, belast puur op normaalkracht geldt:

$$N = EA \tag{2}$$

Dit combineren met de wet van Hooke geeft voor de spanning in alle vezels:

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{3}$$

3.1.2 Buiging

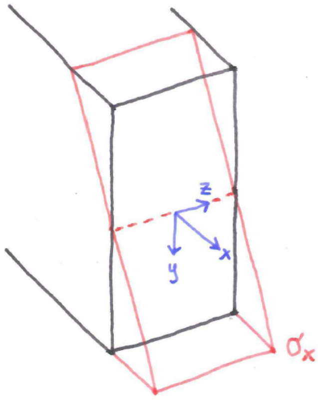
Als de x-as samenvalt met de staafas en de y- en z-as samenvallen met de hoofdrichtingen geldt:

$$M_y = EI_{yy}\kappa_y \tag{4}$$

Met $\kappa = \frac{M_y}{EI_{yy}}$ geldt dan voor het spanningsverloop in een homogene doorsnede:

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E(\varepsilon + \kappa_y y) = \frac{M_y y}{I_{yy}} \tag{5}$$

Hierbij wordt aangenomen dat de schuifspanningen gelijkmatig verdeeld zijn over de breedte b.
Voor een rechthoekige doorsnede, beslast op pure buiging is de spanning maximaal in de uiterste vezels op $y = \frac{h}{2}$ en $y = \frac{-h}{2}$. De spanning verloopt lineair over de hoogte zoals afgebeeld in figuur 4



Figuur 4: Spanningsverloop in de doorsnede in geval van buiging

3.1.3 Dwarskracht

Voor de schuifspanning σ_{xy} op een afstand y onder het normaalkrachtencentrum NC geldt de volgende formule:

$$\sigma_{xy} = -\frac{F_y S_y^a}{b I_{yy}} \tag{6}$$

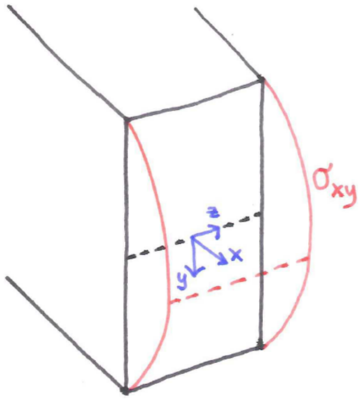
met

$$S_y^a = A^a * y_C^a = \frac{1}{2} b(\frac{1}{4} h^2 - y^2) \tag{7}$$

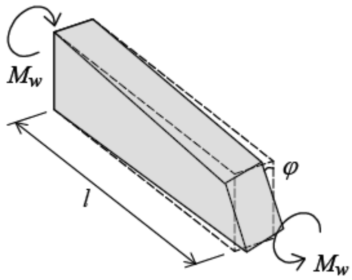
De schuifspanningsformule wordt dan:

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{2} \frac{V}{bh} (1 - 4\frac{y^2}{h^2}) \tag{8}$$

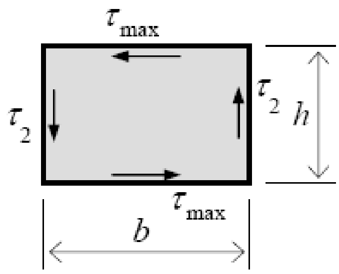
Hierbij wordt aangenomen dat de schuifspanningen gelijkmatig verdeeld zijn over de breedte b.
Voor een rechthoekige doorsnede, belast op puur dwarskracht is de spanning maximaal op in het midden van de doorsnede op $y = 0$. De spanning verloopt parabolisch over de hoogte als in figuur 5.



Figuur 5: Spanningsverloop in de doorsnede in geval van dwarskracht



(a) Balk



(b) Doorsnede

Figuur 6: Wringing

3.1.4 Wringing

Voor een balk als in figuur 6a is de wringstijfheid alsvolgt gedefinieerd:

$$GI_W = \frac{M_w l}{\varphi} \tag{9}$$

Voor de berekening van de wringstijfheid GI_W wordt vaak het polair traagheidsmoment I_p gebruikt. Echter *alleen* voor cirkelvormige doorsneden geldt: $GI_w = GI_p$. Voor andere doorsneden geldt: $GI_w < GI_p$.

In veel tabellenboeken staan formules voor de wringstijfheid GI_w en de grootste schuifspanning τ_{max}. tabel 1 is door P.C.J. Hoogenboom met behulp van een programma voor doorsnedeberekeningen samengesteld [1]. Voor een doorsnede als in figuur 6b die 1,4 maal zo breed is als hoog, geldt bijvoorbeeld:

$$I_w = 0,187bh^3 \text{ en } \tau_{max} = \frac{M_w}{0,230bh^2} \tag{10}$$

$\frac{b}{h}$	$\frac{I_w}{bh^3}$	$\frac{I_p}{bh^3}$	$\frac{M_w}{\tau_{max}bh^2}$	$\frac{M_w}{\tau_2 bh^2}$
1,0	0,141	0,167	0,210	0,210
1,2	0,166	0,203	0,221	0,237
1,4	0,187	0,247	0,230	0,262
1,6	0,204	0,297	0,237	0,281
1,8	0,218	0,353	0,243	0,299
2,0	0,229	0,417	0,249	0,314
2,5	0,250	0,604	0,261	0,342
3,0	0,264	0,833	0,271	0,362
4,0	0,281	1,417	0,288	0,388
5,0	0,292	2,167	0,299	0,398
10,0	0,314	8,417	0,323	0,400
50,0	0,331	208,417	0,329	0,400
∞	$\frac{1}{3}$	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$

Tabel 1: Wringeigenschappen van rechthoekige doorsneden

3.2 Numerieke methoden

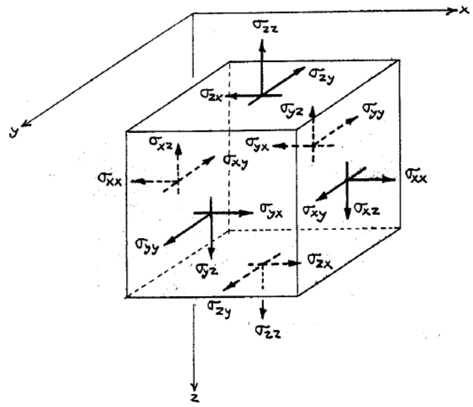
3.2.1 *ANSYS*

ANSYS eindige elementen software is ontwikkeld rond 1970 in de VS door wat toen nog Swanson Analysis Systems, Inc. heette (SASI). Aanvankelijk werd het programma rechtstreeks vanuit de VS verkocht, maar sinds het midden van de jaren 80 waren er zogenaamde *ANSYS* Support Distributors (ASD's) gestart in Engeland, Duitsland en Frankrijk. In Nederland waren er de eerste vroege klanten, zoals Hollandsche Signaal Apparaten (nu Thales) en ECN in Petten.
Wereldwijk wordt *ANSYS* gebruikt in zeer uiteenlopende industrieen zoals Oil & Gas, Offshore, Energie, Electronica, Automotive en Civiele Techniek. Door de Workbench Interface levert *ANSYS* inzicht in spanningen, vervormingen, eigenfrequenties, knik, temperatuurverdeling, thermische spanningen en vermoeiing.

3.2.2 Benadering van spanningen

De benadering van spanningen in een constructie wordt verkregen door de constructie op te delen in een eindig aantal elementen. Deze elementen kunnen lijn-, schaal- of zoals in dit geval volume-elementen zijn.
De knooppunten van deze volume-elementen hebben een (deels) onbekend verplaatsingsveld. Knooppunt-vrijheidsgraden kunnen worden uitgedrukt met benaderingsfuncties. Deze benaderingsfuncties zijn ruimtelijke verplaatsingen of afgeleiden daarvan.
Spanningen kunnen worden uitgedrukt in de knooppunt-vrijheidsgraden met behulp van de stijfheids-matrix, die wordt verkregen met behulp van de rek-verplaatsingsrelaties en de wet van Hooke [8]:

Kinematische vergelijkingen voor een elementje als in figuur 7



Figuur 7: Spanning in 3D

Verplaatsing:
u_x, u_y en u_z
Vervorming:
$\varepsilon_{xx} = u_{x,x}$
$\varepsilon_{yy} = u_{y,y}$
$\varepsilon_{zz} = u_{z,z}$
$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y}$
$\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} = u_{z,x} + u_{x,z}$
$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x}$

Constitutieve vergelijkingen voor een isotroop lineair elastisch materiaal met behulp van de wet van Hooke:

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \nu E(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$
$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \nu E(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})$
$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \nu E(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$
$2\varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{yz}$
$2\varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{yz}$
$2\varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{yz}$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus en ν de dwarsontractiecoëfficient (Poisson's ratio). De term $\frac{2(1+\nu)}{E}$ wordt wel de glijdingsmodulus genoemd, aangegeven met de letter G. In matrix-schrijfwijze volgt $\overline{\varepsilon} = \overline{F}_\sigma \overline{\sigma}$ waarin $\overline{F}_\sigma$ de flexibiliteitsmatrix is:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

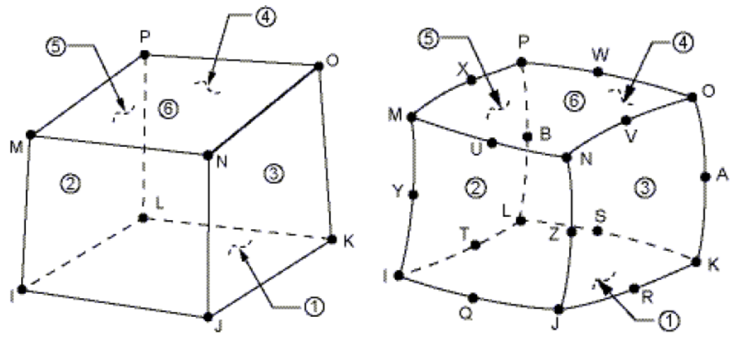
De stijfheidsmatrix $\overline{S}_\varepsilon$ is de inverse van de flexibiliteitsmatrix, zodat geldt: $\overline{\sigma} = \overline{S}_\varepsilon \overline{\varepsilon}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Door deze uitdrukkingen te substitueren in de evenwichtsvergelijkingen met de kinematische randvoorwaarden kan voor elk element de spanning worden bepaald.

3.2.3 Soorten elementen

De gebruiker van een eindig elementenprogramma is vrij in de keuze van het soort element dat wordt gebruikt voor de berekening. Ook als is gekozen om met volume-elementen te werken, zijn er nog steeds meerdere soorten elementen beschikbaar. Voor een balk lijkt het voor de hand liggend kubusvormige elementen te gebruiken. In *ANSYS* zijn die onder andere beschikbaar met 8 of 20 knopen onder de naam *solid185* en *solid186*. De elementen zijn weergeven in figuur 8a en 8b [2].



(a) Solid185 (b) solid186

Figuur 8: Volume elementen in *ANSYS*

De knooppunten van de 8-knoops elementen bevinden zich op alle hoekpunten. De 20-knoops elementen hebben ook nog een knoop op het midden van alle ribben. Dit heeft als voordeel dat berekeningen veel nauwkeuriger zijn. Per element wordt de berekening wel complexer met $12 * 6 = 72$ vrijheidsgraden. Het nadeel van *solid186* ten opzichte van *solid185* is dus dat er meer rekentijd nodig is, als de berekening al haalbaar is met de huidig beschikbare computers. De tijd die een computer nodig heeft is direct afhankelijk van het aantal vrijheidsgraden, oftewel het aantal knooppunten. In tabel 2 zijn het aantal knooppunten gegeven voor een divers aantal 8- en 20-knoops elementen in de breedte en hoogte van een balk.

Solid185		n_b					*Solid186*		n_b				
		2	4	6	8	10			2	4	6	8	10
n_h	2	9	15	21	27	33	n_h	2	21	37	53	69	85
	4	15	25	35	45	55		4	37	65	93	121	149
	6	21	35	49	63	77		6	53	93	133	173	213
	8	27	45	63	81	99		8	69	121	173	225	277
	10	33	55	77	99	121		10	85	149	213	277	341

Tabel 2: Aantal knooppunten in de doosnede

4 Model en variabelen

Een balk wordt belast op pure normaalkracht, buiging, dwarskracht en wringing als in figuur 3, waarbij het eerste belastingsgeval voornamelijk dient ter controle van het model. De analystisch berekende spanning in de kritieke doorsnede wordt vervolgens berekend en vergeleken met de numeriek verkregen waarde. De numeriek verkregen waarde wordt gevonden door een balk in *ANSYS* te modeleren met volume-elementen. De nauwkeurigheid wordt berekend volgens:

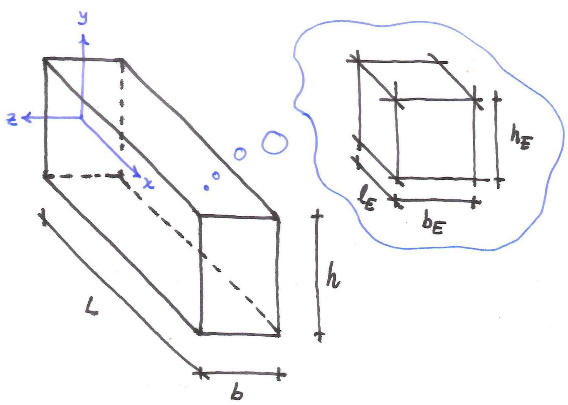
$$Fout(\%) = \frac{Analytische\ waarde - Numerieke\ waarde}{Analytische\ waarde} * 100\%.$$

Door in *ANSYS* met x-, y-, en z-coördinaten verschillende knooppunten te definiëren, kunnen vervolgens elementen worden gedefinieerd door per element 8 of 20 knooppunten toe te wijzen. Voor een aantal knooppunten worden verplaatsingen opgelegd en een aantal knooppunten worden voorzien van een puntlast. Het assenstelsel is gedefinieerd als in figuur 9. In bijlage A zijn de scripts te lezen waarin deze stappen staan beschreven. De modellen voor de verschillende belastingsgevallen kennen de volgende variabelen:

- Kracht, $F\ (N)$, of moment, $M\ (Nmm)$,
- elasticiteitsmolulus, $E\ (Nmm^2)$,
- dwarscontractiecoëfficiënt, $v\ (-)$,
- afmetingen van de construcite: L, b en h,
- afmetingen van de elementen: l_E, b_E, en h_E.

Het aantal elementen in de hoogte, breedte en lengte is te schrijven als:

$$n_h = \frac{h}{h_E}; n_b = \frac{b}{b_E}; n_L = \frac{L}{l_E}$$



Figuur 9: Ligger en elementen

5 Normaalkracht

Figuur 10: Vrij opgelegde balk, belast op normaalkracht

De uitkomst van een vrij opgelegde ligger, in *ANSYS* belast op normaalkracht, zal niet verbazingwekkend zijn. Maar om het model te testen en de numerieke nauwkeurigheid te bepalen wordt een consequente aanpak gehanteerd waarbij de variabelen van het model afzonderlijk worden gevarieerd om de invloed op de nauwkeurigheid te bepalen.

5.1 Krachten en verplaatsingen

De scharnierende oplegging op $x = 0$ en de horizontale roloplegging op $x = L$ worden gemodelleerd door voor alle knooppunten op $x = 0$ en $y = -h/2$ de verplaatsing in alle richtingen gelijk te stellen op 0. Voor de knooppunten op $x = L$ en $y = -h/2$ wordt dit ook gedaan, maar voor enkel de verplaatsing in de y-richting.
Door aan beide uiteinden van de balk puntlasten in te voeren op in tegengestelde richting wordt de normaalkracht gesimuleerd. De grootte van de puntlast F_x hangt af van het aantal knooppunten in de z- en y-richting volgens:

$$F_x = \frac{F}{(n_b + 1)(n_z + 1)}$$

Hierin is F de vooraf ingevoerde normaalkracht. De krachten en verplaatsingen per knooppunt worden in *ANSYS* weergeven als in figuur 11. Hier zijn het aantal elementen in de z-richting ingesteld op 2 en het aantal elementen in de y-richting op 3. De krachtgrootte heeft geen invloed op de nauwkeurigheid.

5.2 Spanningsverloop in de doorsnede

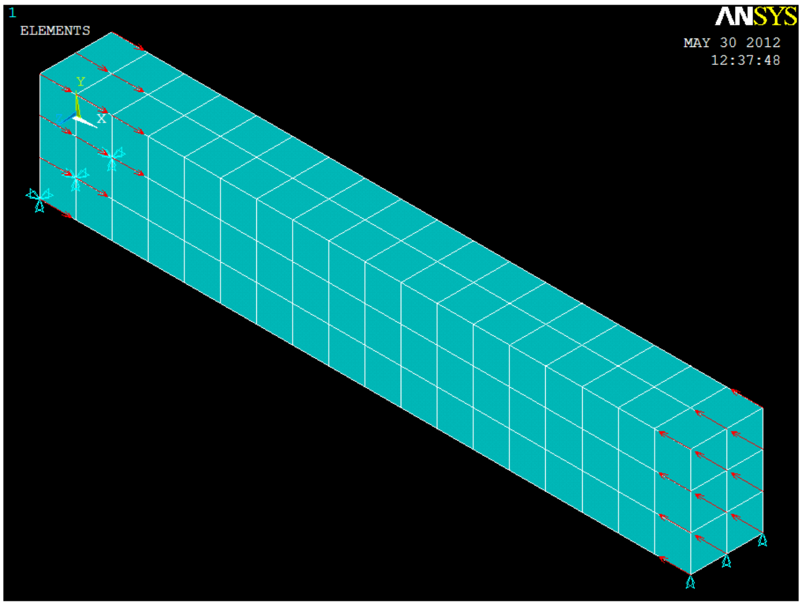
Uit verschillende simulaties volgt dat de numeriek verkregen spanningen over de gehele doorsnede gelijk zijn, zoals men aan de hand van analytische berekeningen ook zou verwachten. Het verschil in analytische en numerieke waarde zou dus op elke plek in de doorsnede kunnen worden berekend, maar wordt voor het gemak nu in het midden van de balk gedaan op $z = y = 0$.

5.3 Afmetingen

L (mm)	200	400	600	800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000
fout, $z = 0$ (%)	46,499	6,621	0,194	-0,205	-0,098	-0,022	-0,001	0,001	0,000	0,000

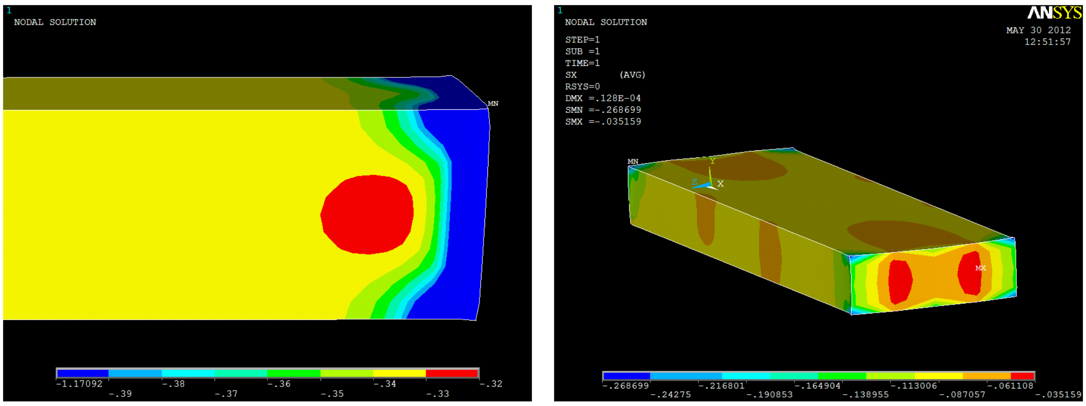
$h = 300\ mm,\ b = 200\ mm,\ n_y = 6,\ n_z = 4,\ n_x = \frac{L}{b_E}$
$E = 210e3\ N/mm^2,\ v = 0.3\ (-),\ F = 20e3\ N$

Tabel 3: Nauwkeurigheid bij variërende lengte



Figuur 11: Balk met 8-knoops-elementen, belast op normaalkracht

Volgens formule 3 heeft de lengte van de balk geen invloed op de spanning in de doorsnede. Bij een variërende lengte blijkt echter ook de nauwkeurigheid te variëren als in tabel 3. Dit heeft er mee te maken dat de spanningen aan de uiteinden niet gelijkmatig over de doorsnede verdeeld is, door de invoering van puntlasten op verschillende knooppunten. In figuur 12a is dit duidelijk te zien.



(a) Oplegging

(b) Zeer brede balk

Figuur 12: Verstoord gebied voor een op normaalkracht belaste balk

In de lijn der verwachting blijken de breedte en de hoogte van de balk geen invloed te hebben op de nauwkeurigheid, zoals te zien is in tabel 4. De numeriek verkregen waarde voor de spanning in de balk is precies gelijk aan de analytisch berekende spanning. De kleine afwijking die bij een h/b-verhouding van $1/3$ ontstaat is weer het gevolg van het verstrooide gebied, dat ook bij een relatief grote breedte ten opzichte van de lengte een rol speelt zoals blijkt in figuur 12b.

$h = 300$ mm, $b =$ (mm)	100	200	300	400	500	600	…	900
h/b	3	3/2	1	3/4	3/5	1/2		1/3
fout, $z = 0$ (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002		-0,118
$b = 200$ mm, $h =$ (mm)	100	200	300	400	500	600	…	900
h/b	1/3	2/3	1	3/4	3/5	2		3
fout, $z = 0$ (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		-0,112

$L = 3000\ mm$, $n_y = 6$, $n_z = 4$, $l_E = 50\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $F = 20e3\ N$

Tabel 4: Nauwkeurigheid bij variërende hoogte en breedte

5.4 Materiaalgegevens

Het variëren van de elasticiteitsmodulus E en de dwarsontractiecoëfficient ν resulteert niet in een verschil in nauwkeurigheid. In geval van puur normaalkracht is de nauwkeurigheid dus onafhankelijk van de materiaalgegevens.

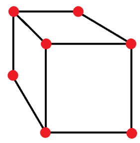
5.5 Aantal elementen

Aangezien al bleek dat de numeriek verkregen waarde en de analytisch berekende waarde voor een balk belast op puur normaalkracht aan elkaar gelijk zijn, zal de fout ook voor een variërend aantal elementen gewoon 0 zijn.

5.6 Resultaten

De numeriek verkregenen waarde voor een balk, puur belast op normaalkracht, blijkt onafhankelijk van de variabelen b, h, L, b_E, h_E en l_E zolang de krachtverdeling over het hele vlak van de doorsnede gelijk is. Dit is te bereiken door een kracht op een vlak te definiëren, of door de puntlasten op de randen en hoeken respectievelijk één en twee keer te halveren. Voor andere belastingsgevallen is dit lastiger. Het beschreven model wordt dus aangehouden, waarbij op de helft van een balk ($x = L/2$) met voldoende lengte ($L = min\{10 * h; 10 * b\}$) de spanning wordt berekend.

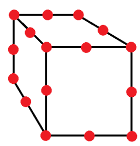
De resultaten zijn verwerkt in tabel 5 voor 8-knoops volume-elementen, afgerond op één decimaal. Een tabel met de nauwkeurigheden ziet er voor 20-knoops elementen niet anders uit. Ook voor 20-knoops elementen vind men zowel numeriek als analytisch dezelfde waarde voor de normaalspanning, zoals verwerkt in tabel 6.



		n_b									
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n_h	2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	16	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0			

Fout in (%) met ANSYS, 8-knoops volume-elementen

Tabel 5: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een vrij opgelegde ligger, belast op normaalkracht.



		nb		
		2	4	6
nh	2	0,0	0,0	0,0
	4	0,0	0,0	0,0
	6	0,0	0,0	0,0

Fout in (%) met ANSYS, 20-knoops volume-elementen

Tabel 6: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een vrij opgelegde ligger, belast op normaalkracht.

6 Buiging

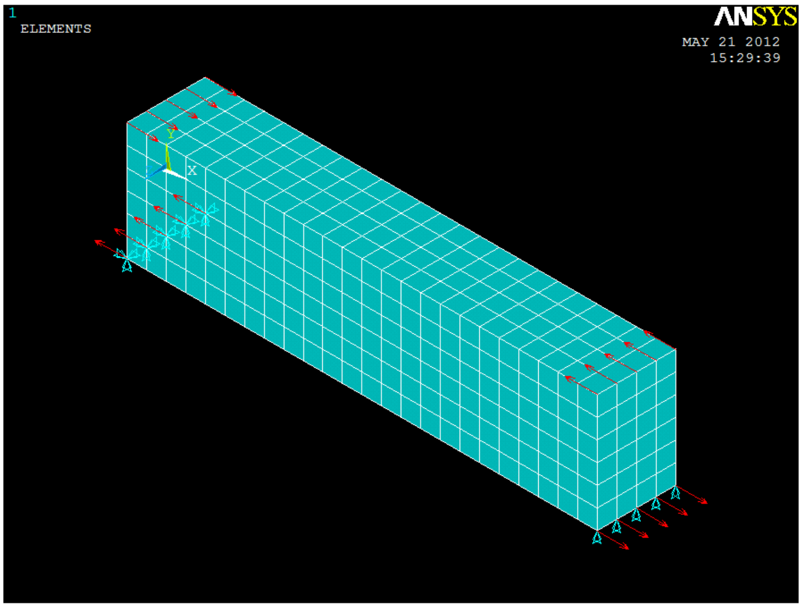
Figuur 13: Vrij opgelegde balk, belast op buiging

6.1 Krachten en verplaatsingen

De scharnierende oplegging op $x = 0$ en de horizontale roloplegging op $x = L$ worden gemodelleerd door voor alle knooppunten op $x = 0$ en $y = -h/2$ de verplaatsing in alle richtingen gelijk te stellen aan 0. Voor de knooppunten op $x = L$ en $y = -h/2$ wordt dit ook gedaan, maar voor enkel de verplaatsing in de y-richting.
Door aan beide uiteinden van de balk puntlasten in te voeren op de bovenste en onderste knooppunten in tegengestelde richting wordt het buigend moment gesimuleerd. Door de grootte van de puntlast (F_x) hangt af van het aantal knooppunten in de z-richting en de hoogte van de balk (h) volgens:

$$F_x = \frac{M}{h(n_b + 1)}$$

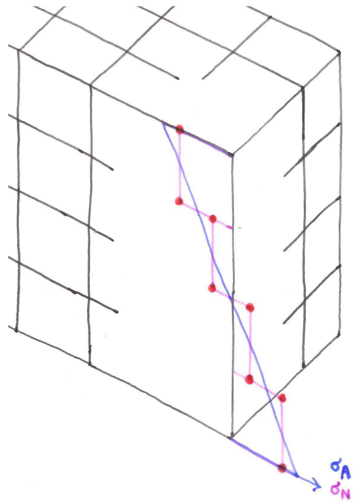
Hierin is M het vooraf ingevoerde buigend moment. De krachten en verplaatsingen per knooppunt worden in *ANSYS* weergeven als in figuur 14. Hier zijn het aantal elementen in de z-richting ingesteld op 4 en het aantal elementen in de y-richting op 6. De krachtgrootte heeft geen invloed op de nauwkeurigheid.



Figuur 14: Balk met 8-knoops-elementen, belast op buiging

6.2 Spanningsverloop in de doorsnede

Eerder is aangenomen dat de spanningen in de breedte van de balk gelijkmatig verdeeld zijn (als in figuur 4). Voor de 20-knoops elementen *solid186* lijkt dat een juiste aanname: De numeriek verkregen spanningen over de gehele breedte zijn voor die elementen precies gelijk aan de analytisch berekende waarden. In het horizontale spanningsverloop in de bovenste laag knooppunten in figuur 16 is te zien dat dit voor de 8-knoops elementen *solid185* niet opgaat. De bovenste en onderste knooppunten vormen in het spanningsverloop in de hoogte echter een uitzondering. Uit de tabel is op te maken dat 8-knoops elementen het analytisch berekende lineaire spanningsverloop zeer goed benaderen met uitzondering van die bovenste en onderste knooppunten, die helaas wel de kritieke waarde geven. 20-knoops elementen geven ook in het spanningsverloop in de hoogte geen afwijking met de analytisch berekende waarde. Dit vershil is het gevolg van het middelen van de waarden van verschillende knooppunten door *ANSYS*. Voor het gemak wordt even gekeken naar het spanningsverloop voor 8-knoops elementen in twee dimensies. De spanningen worden alsvolgt verkregen, met C_k als constante onbekende waarden:



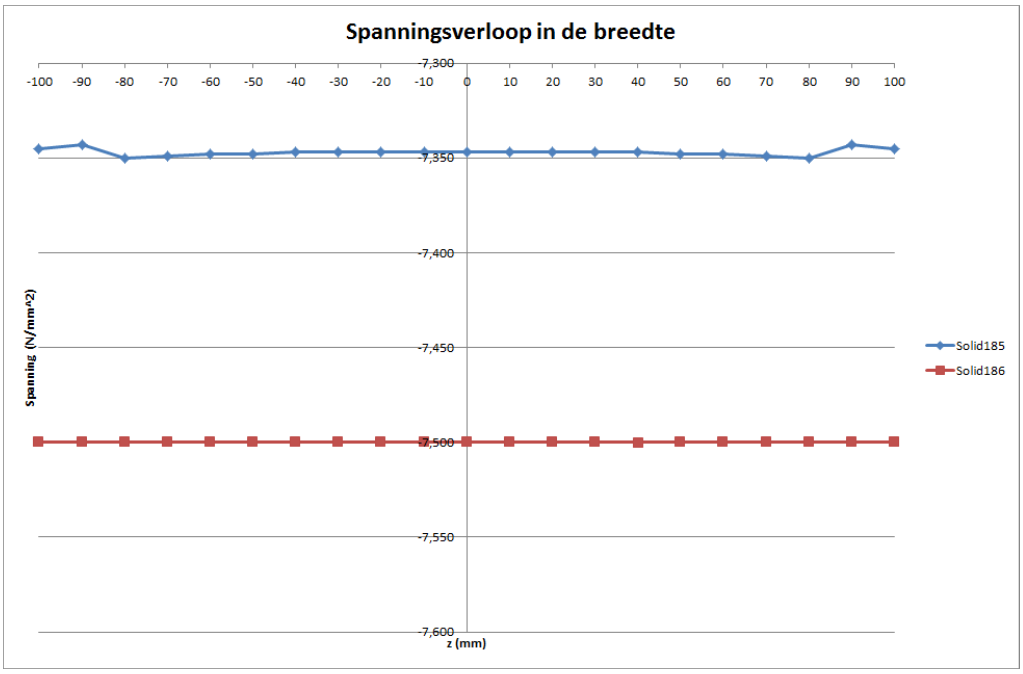
Figuur 15: Numeriek en analytisch spanningsverloop voor 8-knoops elementen

$$u_x = C_1 + C_2 x + C_3 y$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = C_2$$
$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

De numerieke spanning is dus constant over de hoogte van een element in tegenstelling tot het analytische spanningsverloop. Door echter de waarden van twee op elkaar liggende knooppunten te middelen wordt de analytische spanning zeer goed benaderd. Zoals figuur 15 verduidelijkt zijn er voor de bovenste en onderste knooppunten geen omliggende knooppunten om mee te middelen en dus blijft de fout daar staan.
De spanningen voor 20-knoops elementen worden verkregen door:

$$u_x = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = C_2 + C_4 y + C_5 x$$
$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

De spanning loopt dus lineair over de hoogte van een 20-knoops element en is daarom ook zonder te middelen al gelijk aan het analytische spanningsverloop. Dit kan met 8-knoops elementen ook worden bereikt door gebruik te maken van interne vrijheidsgraden per element. Standaart hanteerd *ANSIS* de ‘selective reduced integration’ voor kubusvormige elementen. Wanneer in plaats daarvan de ‘enhaced strain formulation’ zoals beschreven in [2][p5] worden 13 interne vrijheidsgraden aan het element toegevoegd en wordt voor pure buiging met 8-knoops elementen ook precies de analytische waarde gevonden.



Figuur 16: Spanningsverloop in de breedte van de balk

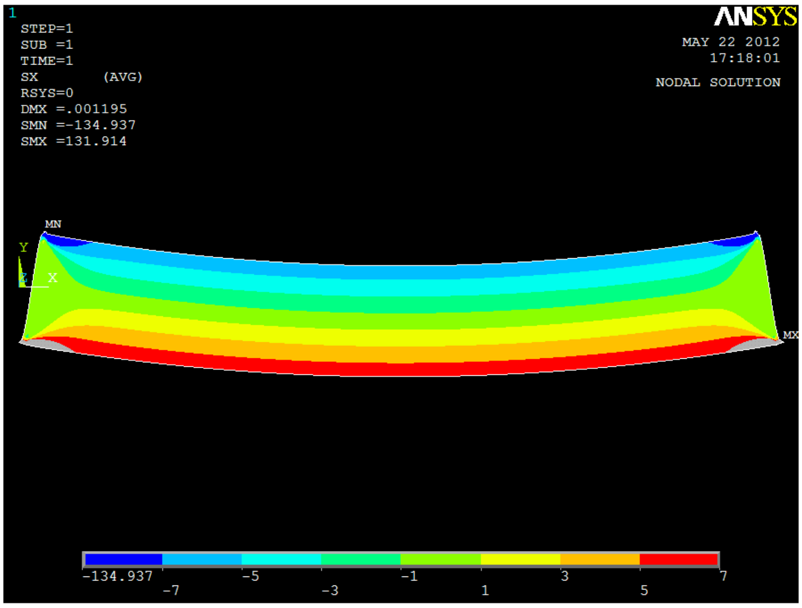
y	Numeriek (8 knp.)	Analytisch	Verschil (N/mm^2)	Verschil $(\%)$
-100	-7,3467	-7,5000	0,1533	-2,044
-90	-6,7507	-6,7500	-0,0007	0,010
-80	-6,0007	-6,0000	-0,0007	0,012
-70	-5,2506	-5,2500	-0,0006	0,011
-60	-4,5005	-4,5000	-0,0005	0,011
-50	-3,7504	-3,7500	-0,0004	0,011
-40	-3,0003	-3,0000	-0,0003	0,010
-30	-2,2502	-2,2500	-0,0002	0,009
-20	-1,5001	-1,5000	-0,0001	0,007
-10	-0,7500	-0,7500	0,0000	0,000
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,000
10	0,7500	0,7500	0,0000	0,000
20	1,5001	1,5000	0,0001	0,007
30	2,2502	2,2500	0,0002	0,009
40	3,0003	3,0000	0,0003	0,010
50	3,7504	3,7500	0,0004	0,011
60	4,5005	4,5000	0,0005	0,011
70	5,2506	5,2500	0,0006	0,011
80	6,0007	6,0000	0,0007	0,012
90	6,7507	6,7500	0,0007	0,010
100	7,3467	7,5000	-0,1533	-2,044

$L = 2000\ mm$, $h = 200\ mm$, $b = 200\ mm$, $ny = 20$, $nz = 20$, $l_E = 20\ mm$
$E = 21e5\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $M = 10e6\ Nmm$

Tabel 7: Spanningsverloop in de hoogte

6.3 Afmetingen

Volgens formule 5 hebben de lengte en de breedte van de balk geen invloed op de spanning in de kritieke doorsnede. In hoofdstuk 5 bleek echter ook al dat de spanningen in de buurt van de uiteinden niet lineair verlopen door de invoering van puntlasten op verschillende knooppunten. In figuur 17 is te zien dat dit ook voor buiging het geval is.



Figuur 17: Verstoord gebied voor een op buiging belaste balk

Om na te gaan hoe lang dit 'verstoord gebied' is, is voor een balk enkel de lengte gevarieerd van 200 tot 4000 mm. De resultaten staan verwerkt in tabel 8.

L (mm)	200	400	600	800	1.000	1.200	1.400	1.600	1.800	2.000	4.000
fout, $z = 0$ (%)	54,7	6,084	16,343	15,092	15,180	15,157	15,174	15,167	15,169	15,169	15,169
fout, $z = b/2$ (%)	-30,2	9,992	17,534	13,157	14,368	14,130	14,169	14,162	16,163	16,163	16,163

$h = 300\ mm,\ b = 200\ mm,\ n_y = 3,\ n_z = 2,\ n_x = \frac{L}{b_E}$
$E = 210e3\ N/mm^2,\ v = 0.3\ (-),\ M = 10e6\ Nmm$

Tabel 8: Nauwkeurigheid bij variërende lengte

Het blijkt inderdaad zo te zijn dat na een bepaalde lengte de nauwkeurigheid van de spanning niet meer veranderd. In dit geval is dat vanaf 1800 mm ($\frac{h}{L} = \frac{1}{6}$). Het verstoord gebied is niet alleen afhankelijk van b en h, maar bijvoorbeeld ook van het aantal elementen in de doorsnede. Om er zeker van te zijn dat de manier van aanbrengen van de belasting geen invloed heeft op de resultaten wordt voor de lengte $L = min\{10 * h; 10 * b\}$ aangehouden.

Als bij gelijkblijvende parameters enkel de breedte van de balk verandert, neemt de nauwkeurigheid nauwelijks toe, zoals te zien is in tabel 9. Bij een toenemende hoogte lijkt de nauwkeurigheid te convergeren naar een bepaalde waarde volgens de resultaten in diezelfde tabel. Dit kan te maken hebben met de verhouding l_E/h_E die door het oprekken van de elementen drastisch verandert. Hier wordt in hoofdstuk 6.5 op teruggekomen.

$h = 300$ mm, $b =$ (mm)	100	200	300	400	500	600	…	900
h/b	3	3/2	1	3/4	3/5	1/2		1/3
fout, $z = 0$ (%)	6,985	6,773	6,739	6,745	6,753	6,759		6,896
$b = 200$ mm, $h =$ (mm)	100	200	300	400	500	600	…	900
h/b	1/3	2/3	1	3/4	3/5	2		3
fout, $z = 0$ (%)	14,127	7,975	6,739	6,320	6,152	6,086		6,095

$L = 3000\ mm$, $n_y = 6$, $n_z = 4$, $l_E = 50\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $M = 10e6\ Nmm$

Tabel 9: Nauwkeurigheid bij variërende hoogte en breedte

6.4 Materiaalgegevens

Voor verschillende waarden van de elasticiteitsmodulus E wordt dezelfde spanning in de kritieke doorsnede verkregen. De nauwkeurigheid is wel afhankelijk van de dwarsontractiecoëfficient ν, die de beschrijft welke rek er loodrecht op de trekrichting ontstaat. In tabel 10 zijn de resultaten van buigspanning in een balk met 8-knoops elementen gegeven met ν als variabele. Voor 20-knoops elementen is de numerieke waarde gelijk aan de analytisch gevonden waarde en speelt ν geen rol.

	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,499$
$\sigma_{Numeriek}$	-3,130	-3,120	-3,113	-3,108	-3,101
$\sigma_{Analytisch}$	-3,333	-3,333	-3,333	-3,333	-3,333
fout (%)	6,112	6,399	6,614	6,773	6,983

$L = 3000\ mm$, $h = 300\ mm$, $b = 200\ mm$, $n_y = 6$, $n_z = 4$, $l_E = 50\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $M = 20e6\ Nmm$

Tabel 10: Nauwkeurigheid bij variërende dwarscontractiecoëfficient

6.5 Aantal elementen

Naast dat de breedte geen invloed heeft op de nauwkeurigheid, blijkt uit tabel 11 dat ook het aantal elementen in de breedte amper invloed heeft op de nauwkeurigheid.

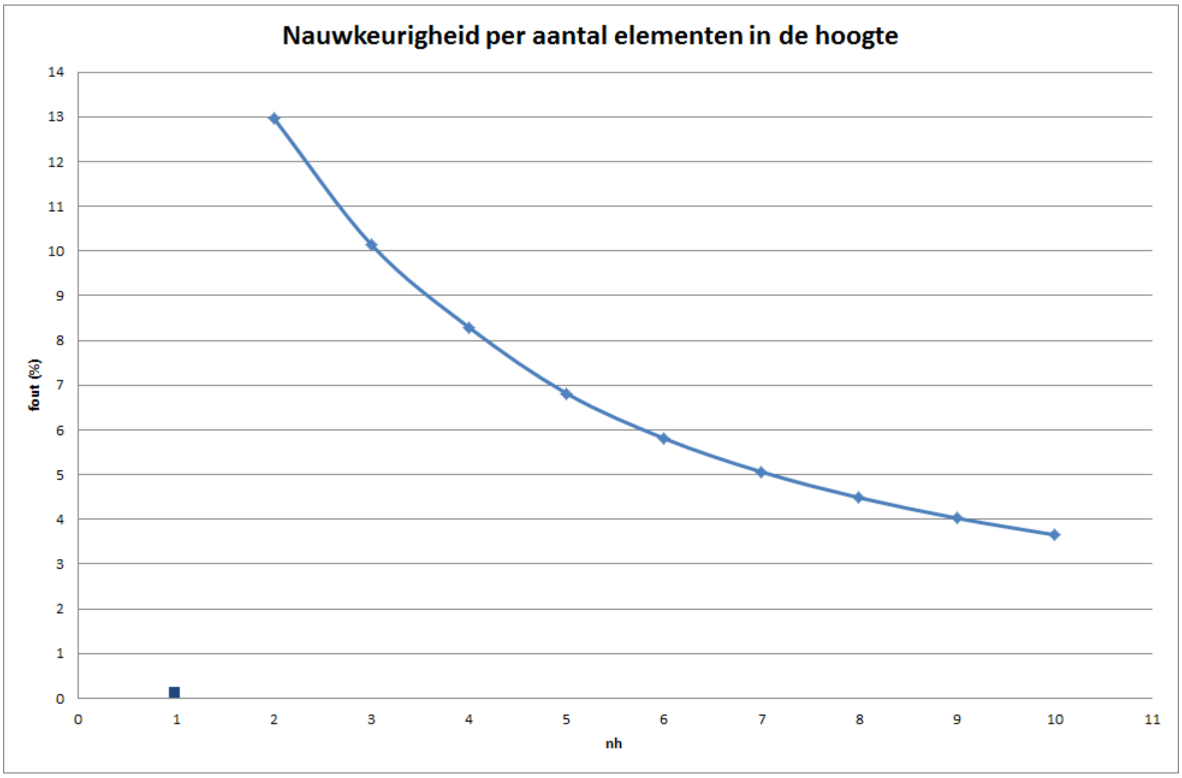
n_b	2	4	6	8	10	...	20	...	30	...	40
fout, $z = 0$ (%)	7,421	6,985	6,960	6,952	6,948		6,943		6,943		6,942

$L = 2000\ mm$, $h = 300\ mm$, $b = 200\ mm$, $n_y = 6$, $l_E = 50\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $M = 10e6\ Nmm$

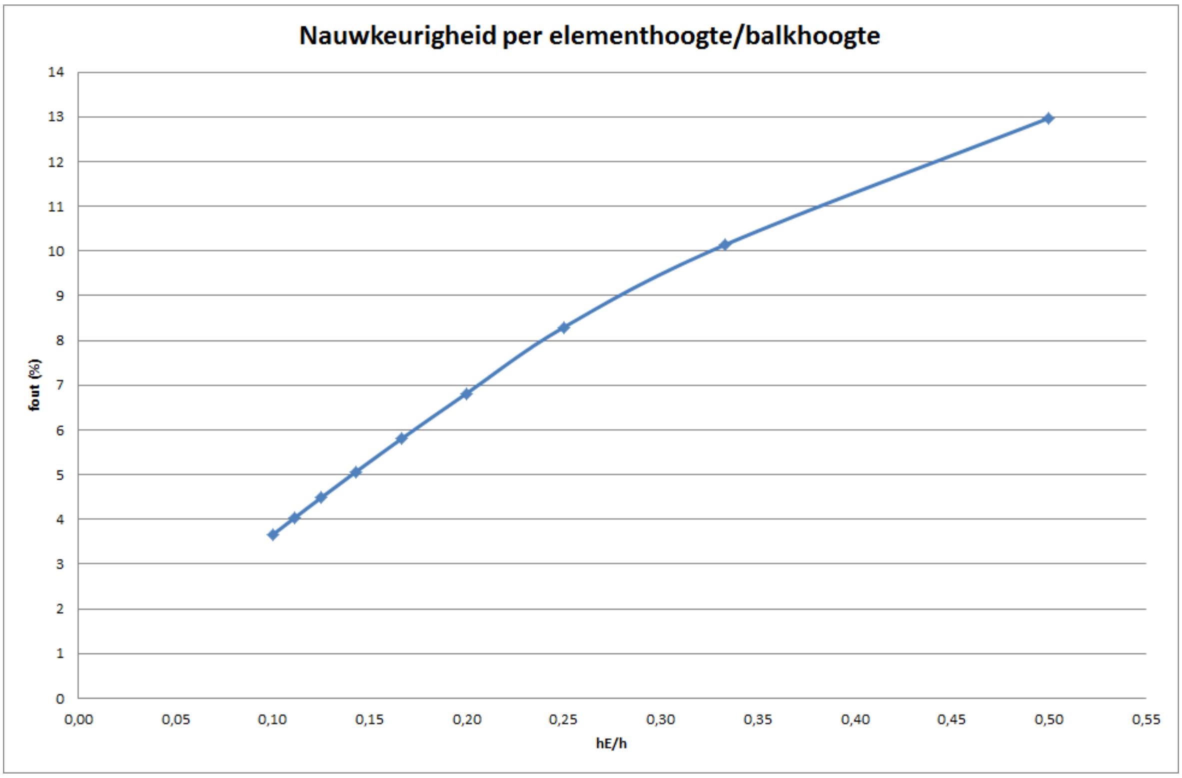
Tabel 11: Nauwkeurigheid bij variërend aantal elementen in de breedte

In hoofdstuk 6.3 bleek al dat de nauwkeurigheid wel veranderd als de hoogte van de balk wordt aangepast. Door het uitrekken (of platdrukken) van de balk verandert echter ook de verhouding l_E/h_E. Als die verhouding een bepaalde waarde overschrijdt kunnen de krachten in de lengterichting niet goed worden overgebracht, waardoor de spanning net als in het storingsgebied niet lineair verlopen over de hoogte. Om deze onnauwkeurigheid in de resultaten te voorkomen wordt voor l_E van 8-knoops elementen de kleinste waarde van b_E en h_E van het fijste element gekozen. Met 20-knoops elemente wordt voor verschillende elementlengtes l_E/h_E precies de analytische waarde gevonden.

De nauwkeurigheid blijkt enkel afhannkelijk van het aantal elementen per hoogte van de balk. Als slechts één element in de hoogte wordt gebruikt is de numerieke waarde bijna gelijk aan de analytische waarde, terwijl dat met meer elementen in de hoogte niet het geval is. Dit heeft te maken met de 'selective reduced integration method' die *ANSYS* gebruikt voor de volume-elementen.
De nauwkeurigheid is in figuur 18b uitgezet tegen h_E/h en is in principe een weergave van het omgekeerd evenredige verband tussen de fout en het aantal elementen in de hoogte in figuur 18a.



(a) Nauwkeurigheid per n_h



(b) Nauwkeurigheid per h_E/h

Figuur 18: Voor buiging blijkt de nauwkeurigheid van de spanning enkel afhankelijk van het aantal elementen in de hoogte

n_h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_E/h	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
fout, $z = 0$ (%)	0,110	12,972	10,144	8,294	6,817	5,810	5,060	4,484	4,027	3,655

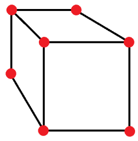
$L = 3000\ mm$, $h = 300\ mm$, $b = 200\ mm$, $n_z = 4$, $l_E = 10\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $M = 10e6\ Nmm$

Tabel 12: Nauwkeurigheid bij variërend aantal elementen in de hoogte

6.6 Resultaten

Van de 6 onafhankelijke variabelen b, h, L, b_E, h_E en l_E dient L voldoende groot te worden gekozen en l_E voldoende klein, om te voorkomen dat er metingen in een storingsgebied worden gedaan. De nauwkeurigheid blijkt dan enkel afhankelijk van het aantal elementen in de hoogte, oftewel h/h_E.

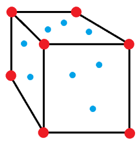
De resultaten zijn verwerkt in tabel 13 voor 8-knoops volume-elementen, afgerond op één decimaal. Door slechts één 8-knoops volume-element in de hoogte te gebruiken wordt erg snel een zeer nauwkeurige benadering van de buigspanning gevonden.
De gepresenteerde waarden zijn gevonden voor een balk van $L = 2000\ mm$ met vierkante doorsnede $b = h = 200\ mm$. Het is een goede benadering op 1% nauwkeurig voor alle h/b-verhoudingen. De elementlengte l_E is in dit geval zeer klein genomen, namelijk het minimum van $b/20$ en $h/20$. De nauwkeurigheid zal sterk afwijken van de gevonden percentages als de elementlengte wordt gevarieerd.
De afwijkingen gelden alleen in de uiterste knooppunten, daar waar de buigspaning het grootst is. Als men geïnteresseerd is in het verloop van de spanning in de doorsnede, zijn 8-knoops elementen op deze manier goed te gebruiken. Voor de waarde van de maximale spanning zijn 8-knoops elementen met interne vrijhijdsgraden of 20-knoops elementen zo nauwkeurig dat ze voor elke hoeveelheid elementen in de doorsnede de analytische waarde weergeven.
Voor 20-knoops volume-elementen is een tabel met nauwkeurigheden een stuk eentoniger. Bij 2 elementen in de hoogte en breedte wordt namelijk al precies de analytische waarde gevonden. Een fijner mesh dan 6 bij 6 is dan ook niet doorgerekend aangezien de rekentijd met 20-knoops volume-elementen aanzienlijk groter is.
Een berekening met één 20-knoops volume-element in de hoogte is niet mogelijk.



		n_b 2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n_h	2	13,2	13,1	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0	13,0
	4	9,1	8,1	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2
	6	6,5	5,8	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9
	8	5,0	4,5	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6
	10	4,1	3,7	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,8
	12	3,4	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
	14	2,9	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8

Fout in (%) met ANSYS, 8-knoops volume-elementen

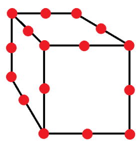
Tabel 13: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een vrij opgelegde ligger, belast op buiging.



		n_b 2	4	6
n_h	2	0,0	0,0	0,0
	4	0,0	0,0	0,0
	6	0,0	0,0	0,0

Fout in (%) met ANSYS, 8-knoops volume-elementen met interne vrijheidsgraden

Tabel 14: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een vrij opgelegde ligger, belast op buiging.

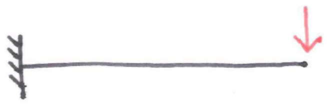


		n_b 2	4	6
n_h	2	0,0	0,0	0,0
	4	0,0	0,0	0,0
	6	0,0	0,0	0,0

Fout in (%) met ANSYS, 20-knoops volume-elementen

Tabel 15: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een vrij opgelegde ligger, belast op buiging.

7 Dwarskracht



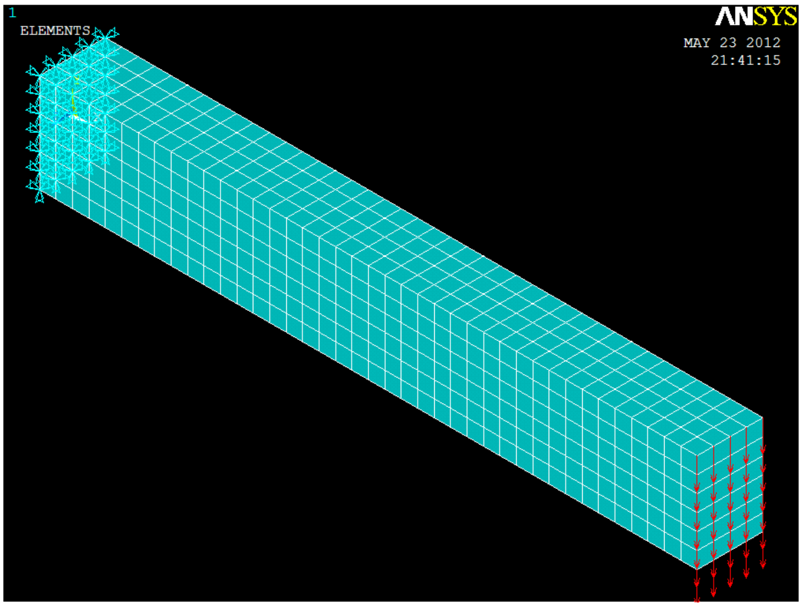
Figuur 19: Eenzijdig ingeklemde balk, belast op dwarskracht

7.1 Krachten en verplaatsingen

De inklemming op $x = 0$ wordt gemodelleerd door voor alle knooppunten op $x = 0$ de verplaatsing in alle richtingen gelijk te stellen op 0.
Door aan het uiteinde van de balk puntlasten in te voeren op de knooppunten in de y-richting wordt de dwarskracht gesimuleerd. De grootte van de puntlast (F_y) hangt af van het aantal knooppunten in de y- en z-richting volgens:

$$F_y = \frac{F}{(n_h + 1)(n_b + 1)}$$

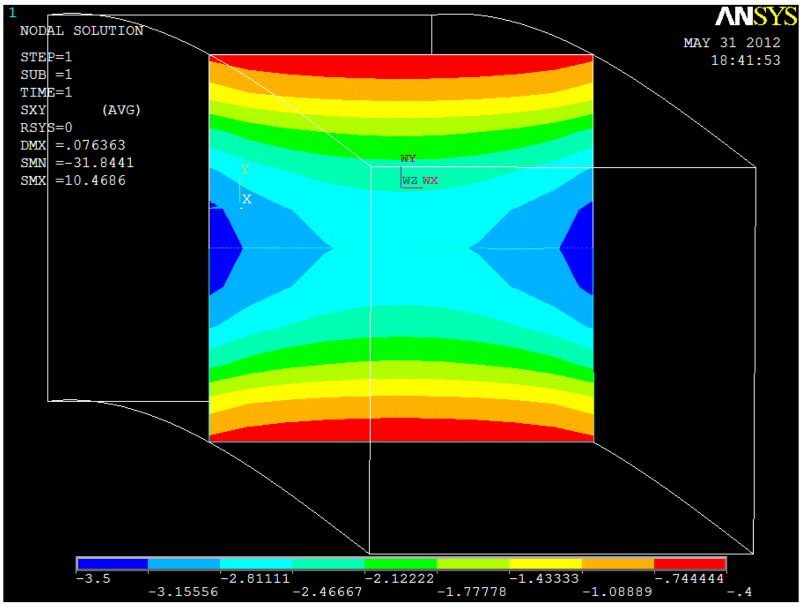
Hierin is F de vooraf ingevoerde dwarskracht. De krachten en verplaatsingen per knooppunt worden in *ANSYS* weergeven als in figuur 10. Hier zijn het aantal elementen in de z-richting ingesteld op 4 en het aantal elementen in de y-richting op 6. De krachtgrootte heeft geen invloed op de nauwkeurigheid.



Figuur 20: Balk met 8-knoops-elementen, belast op dwarskracht

7.2 Spanningsverloop in de doorsnede

Zolang de dwarscontractiecoëfficient niet gelijk is aan 0, is de spanning niet gelijkmatig verdeeld over de breedte van de balk. In figuur 21 en 22 is te zien dat de maximale spanning zich aan de zijden van de balk bevinden op $y = 0$ en $z = \pm b/2$. De maximale spanning is afhankelijk van de h/b-verhouding en kan voor bijvoorbeeld $b/h = 4$ wel oplopen tot tweemaal de analytisch gevonden waarde. Hoewel de gemiddelde waarde van de spanningen in de knooppunten op $y = 0$ zeer goed overeenkomen met de analytisch gevonden waarde voor een univorme spanningsverdeling over de breedte, dient de fout te worden onderzocht voor de grootst voorkomende spanning.



Figuur 21: Spanningsverloop in de doorsnede

7.3 Afmetingen

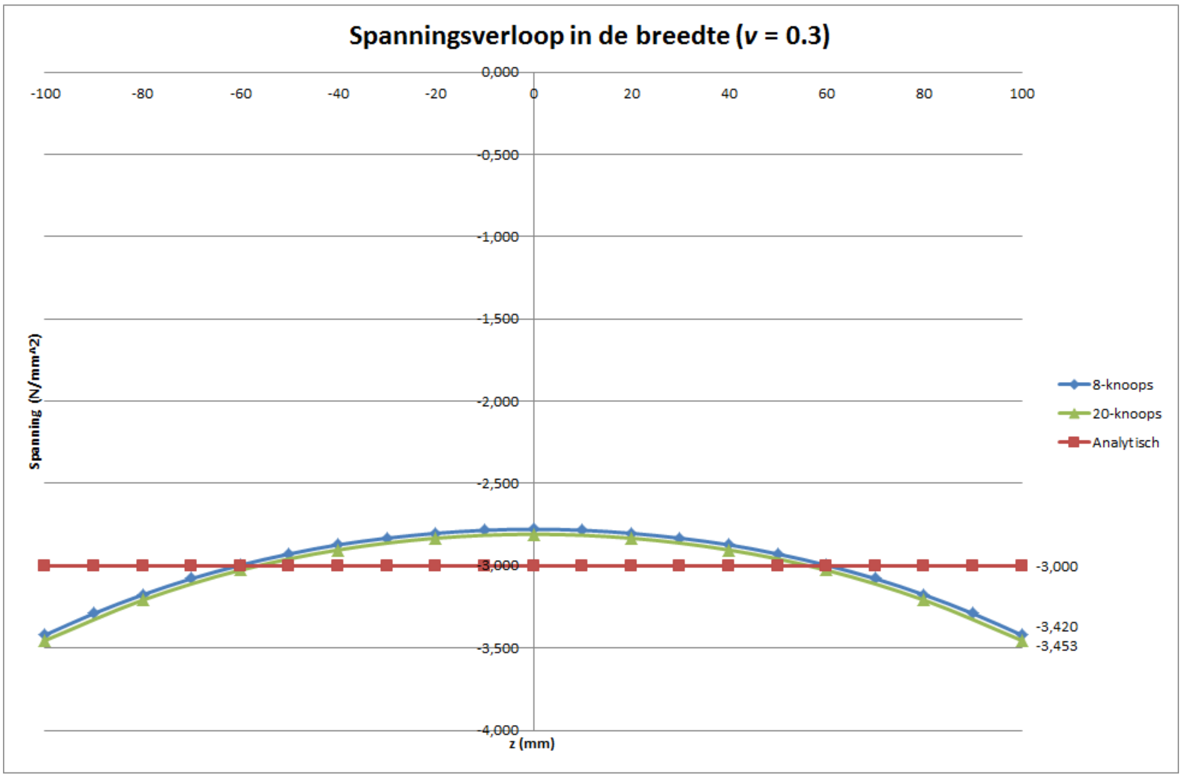
Volgens formule 8 heeft de lengte van de balk geen invloed op de spanning in de kritieke doorsnede. In voorgaande hoofdstukken bleek echter ook al dat de spanningen in de buurt van de uiteinden niet lineair verlopen door de invoering van puntlasten op verschillende knooppunten. In figuur 12a is te zien dat dit ook voor dwarskracht het geval is.

L (mm)	200	400	600	800	1.000	1.200	1.400	...	4.000
fout, $z = 0$ (%)	3,732	5,322	6,535	6,584	6,577	6,577	6,577		6,577
fout, $z = b/2$ (%)	-5,63	-4,445	-3,513	-3,436	-3,413	-3,430	-3,430		-3,430

$h = 300\ mm,\ b = 200\ mm,\ n_y = 6,\ n_z = 4,\ nx = \frac{L}{b_E}$
$E = 210e3\ N/mm^2,\ v = 0.3\ (-),\ F = 20e3\ N$

Tabel 16: Nauwkeurigheid met variërende lengte

Bij een meting op $x = L/2$ blijkt de nauwkeurigheid van de spanning niet meer te veranderen vanaf $L = 1200$ mm ($\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$). Het verstoord gebied is niet alleen afhankelijk van b en h, maar bijvoorbeeld ook van het aantal elementen in de doorsnede. Om er zeker van te zijn dat de manier van aanbrengen



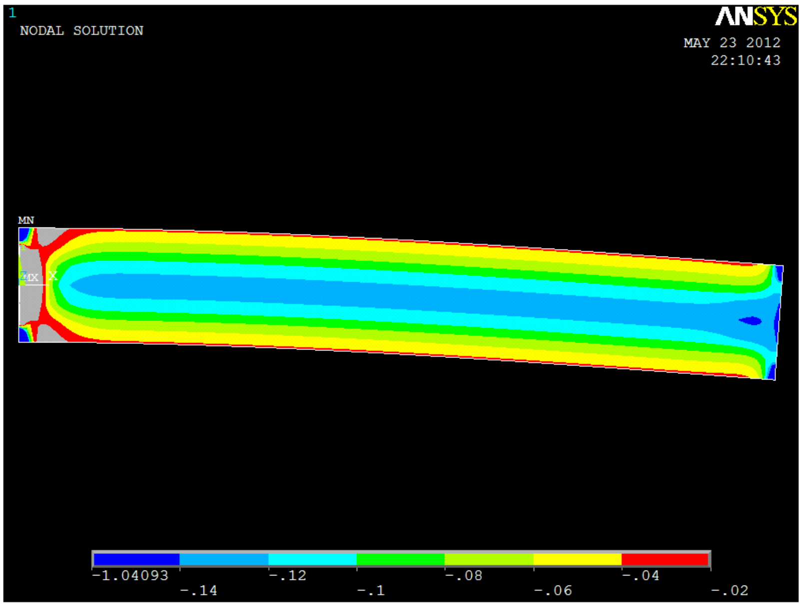
Figuur 22: Spanningsverloop in het midden van de doorsnede met $\nu = 0.3$ en een hoog aantal elementen

van de belasting geen invloed heeft op de resultaten wordt een lengte $L = min\{10 * h; 10 * b\}$ aangehouden.

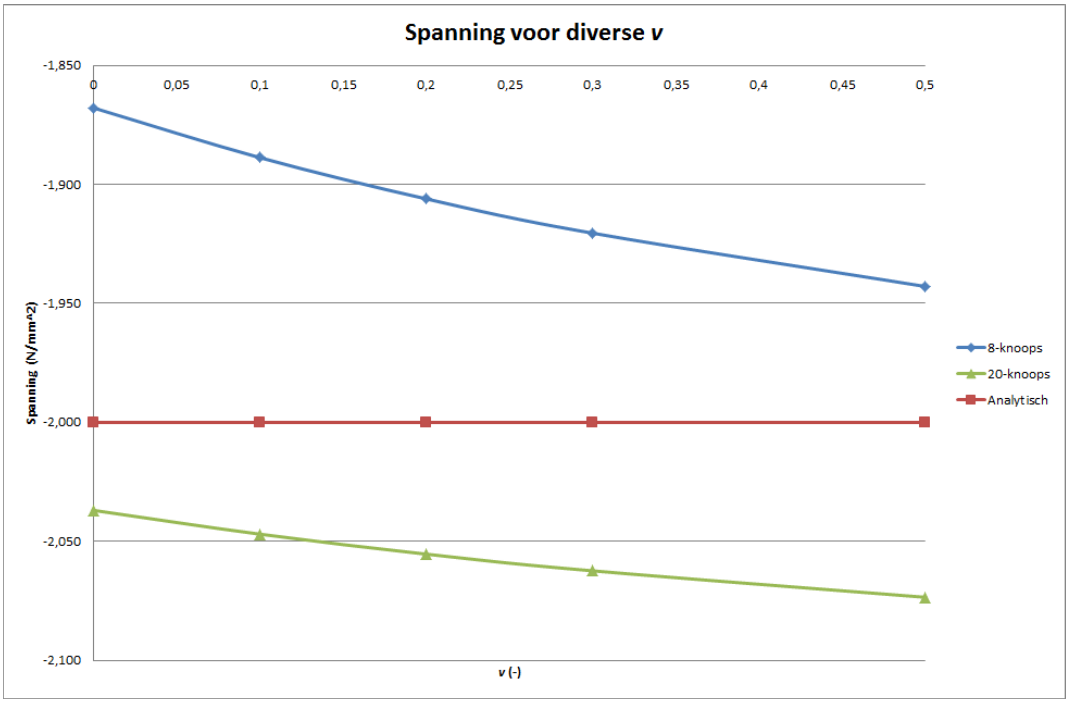
Eerder bleek al dat het spanningsverlooop in de doorsnede afhankelijk is van de verhouding h/b. Ook de nauwkeurigheid van de gevonden (gemiddelde) spanning is voor de verschillende verhoudingen niet gelijk.

7.4 Materiaalgegevens

Voor verschillende waarden van de elasticiteitsmodulus E wordt dezelfde spanning in de kritieke doorsnede verkregen. De nauwkeurigheid is voor zowel 8- als 20-knoops elementen wel afhankelijk van de dwarsontractiecoëfficient ν. In figuur 24 is te zien dat voor 8-knoops elementen de numerieke waarde de annalytische waarde onderschat en nadert naarmate ν toeneemt, terwijl voor 20-knoops elementen de numerieke waarde de analytische waarde juist overschat en nadert naarmate ν afneemt.



Figuur 23: Verstoord gebied voor een op dwarskracht belaste balk



Figuur 24: Spanning voor verschillende ν met 8- en 20-knoops elementen

7.5 Aantal elementen

Om een idee te krijgen hoeveel elementen in de hoogte of breedte moeten worden gebruikt voor een nauwkeurigheid moet eerst een referentiewaarde voor de kritieke spanning worden verkregen, daar de analytisch berekende waarde volgens formule 8 de werkelijke situatie niet goed benaderd. Een berekening met 10 bij 10 20-knoops elementen kan een computer op dit moment nog net uitvoeren in de duur van een uitgebreide koffiepauze. De resultaten voor de verkregen spanningen staan met de analytisch gevonden waarde voor verschillende h/b-verhoudingen in tabel 17.

$h\ (mm)$	100	100	200	300	1000
$b\ (mm)$	200	100	100	100	100
h/b	1/2	1	2	3	10
$\sigma_{Numeriek}$	-8,725	-13,810	-6,268	-4,094	
$\sigma_{Analytisch}$	-6	-12	-6	-4	

$L = min\{10 * h; 10 * b\}$, $n_y = 10$, $n_z = 10$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $F = 80e3\ N$

Tabel 17: Nauwkeurigheid met veel 20-knoops elementen

Opvallend is dat voor 8-knoops elementen de nauwkeurigheid sterk afhankelijk is van de verhouding l_E ten opzichte van h_E en b_E terwijl voor 20-knoops elementen de nauwkeurigheid niet veranderd bij een variërende afwijking van die verhouding zolang l_E kleiner is dan h_E en b_E zoals volgt uit tabel 18.

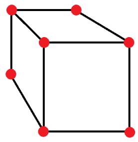
	l_E	100	50	25	10	5
Solid185	gemiddelde fout (%)	21,30	6,327	2,242	1,071	0,903
Solid186	gemiddelde fout (%)	-1,75	-1,761	-1,761	-1,761	-1,761

$L = 2000\ mm$, $h = 200\ mm$, $b = 100\ mm$, $n_y = 8$, $n_z = 4$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $\nu = 0.3\ (-)$, $F = 80e3\ N$

Tabel 18: Nauwkeurigheid met variërend aantal elementen in de lengte

7.6 Resultaten

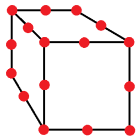
De afwijkingen met de referentiewaarden uit tabel 17 zijn weergeven in tabel 19 en 20 voor de verschillende verhoudingen $h/b = 0,5; 1; 2; 3$ en 10.
Wat opvalt is dat de verhouding van het aantal elementen maatgevend is voor de relatieve fout, en niet zozeer het aantal elementen. Voor een h/b verhouding van 1,0 hoort ook de verhouding van het aantal elementen in de hoogte en breedte 1,0 gekozen te worden. Voor een toenemende h/b verhouding levert een hoger aantal elementen in de hoogte meer nauwkeurigheid dan een hoger aantal elementen in de breedte.



$h/b =$	$0,5$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	41,7	35,7	33,6	32,8	32,3
	4	22,2	12,7	9,7	8,5	8,0
	6	19,1	9,0	6,0	4,9	4,4
	8	18,0	7,8	4,7	3,6	3,1
	10	17,5	7,2	4,1	3,0	2,5
$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	31,3	29,4	29,0	28,9	28,8
	4	10,8	8,2	7,6	7,4	7,3
	6	7,7	4,9	4,4	4,2	4,1
	8	6,6	3,8	3,2	3,0	2,9
	10	6,1	3,2	2,7	2,5	2,4
$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	27,6	27,2	27,1	27,0	27,0
	4	7,4	6,8	6,6	6,6	6,6
	6	4,4	3,7	3,5	3,5	3,5
	8	3,2	2,5	2,4	2,4	2,3
	10	2,7	2,0	1,9	1,8	1,8
$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	27,0	26,8	26,8	26,8	26,7
	4	6,7	6,7	6,6	6,6	6,6
	6	3,9	3,5	3,5	3,4	3,4
	8	2,7	2,4	2,3	2,3	2,3
	10	2,1	1,8	1,8	1,7	1,7

Fout in (%) met ANSYS, 8-knoops volume-elementen

Tabel 19: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een eenzijdig ingeklemde ligger, belast op dwarskracht.



$h/b =$	$0,5$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-5,1	-13,1	-15,5	-16,4	-16,8
	4	6,8	0,0	-2,0	-2,8	-3,2
	6	8,8	2,1	0,2	-0,6	-1,0
	8	9,5	2,8	0,9	0,1	-0,3
	10	9,8	3,2	1,2	0,4	0,0
$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-12,8	-15,6	-16,0	-16,2	-16,2
	4	-0,1	-2,5	-3,0	-3,2	-3,3
	6	2,0	-0,3	-0,8	-1,0	-1,1
	8	2,8	0,4	-0,1	-0,3	-0,3
	10	3,1	0,8	0,3	0,1	0,0
$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-15,0	-15,7	-15,8	-15,8	-15,9
	4	-2,5	-3,2	-3,4	-3,4	-3,4
	6	-0,3	-0,9	-1,1	-1,1	-1,1
	8	0,5	-0,2	-0,3	-0,3	-0,4
	10	0,9	0,2	0,1	0,0	0,0
$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-15,4	-15,7	-15,8	-15,8	-15,8
	4	-3,1	-3,4	-3,4	-3,5	-3,5
	6	-0,8	-1,1	-1,1	-1,2	-1,2
	8	0,0	-0,3	-0,3	-0,4	-0,4
	10	0,4	0,1	0,0	0,0	0,0

Fout in (%) met ANSYS, 20-knoops volume-elementen

Tabel 20: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een eenzijdig ingeklemde ligger, belast op dwarskracht.

8 Wringing

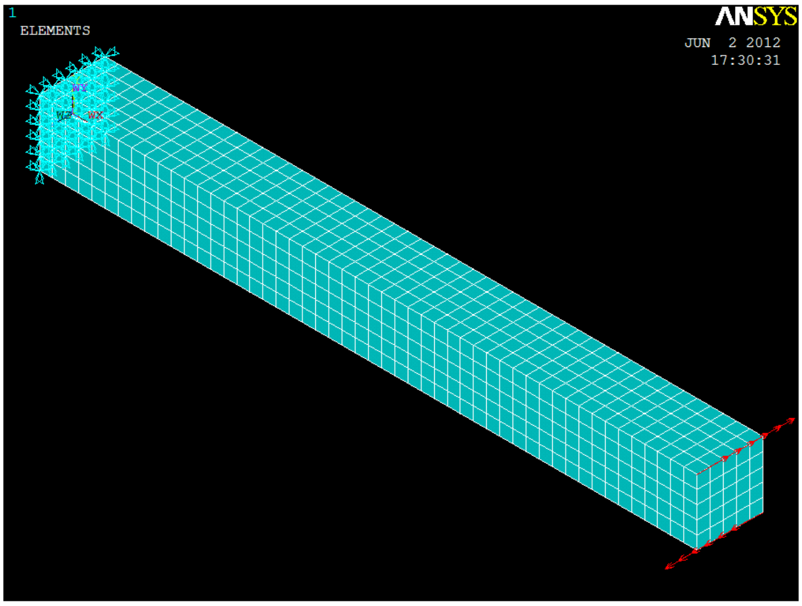
Figuur 25: Eenzijdig ingeklemde balk, belast op wringing

8.1 Krachten en verplaatsingen

De inklemming op $x = 0$ wordt gemodelleerd door voor alle knooppunten op $x = 0$ de verplaatsing in alle richtingen gelijk te stellen op 0.
Door aan het uiteinde van de balk puntlasten in te voeren op de knooppunten in de bovenste laag in de z-richting en in de onderste laag in tegengestelde richting, wordt het wringend moment gesimuleerd. De grootte van de puntlast (F_z) hangt af van het aantal knooppunten in de z-richting en de hoogte van de balk volgens:

$$F_z = \frac{M}{(n_b + 1) * h}.$$

Hierin is M het vooraf ingevoerde wringend moment. De krachten en verplaatsingen per knooppunt worden in *ANSYS* weergeven als in figuur 26. Hier zijn het aantal elementen in de z- en y-richting ingesteld op 5. De krachtgrootte heeft geen invloed op de nauwkeurigheid.



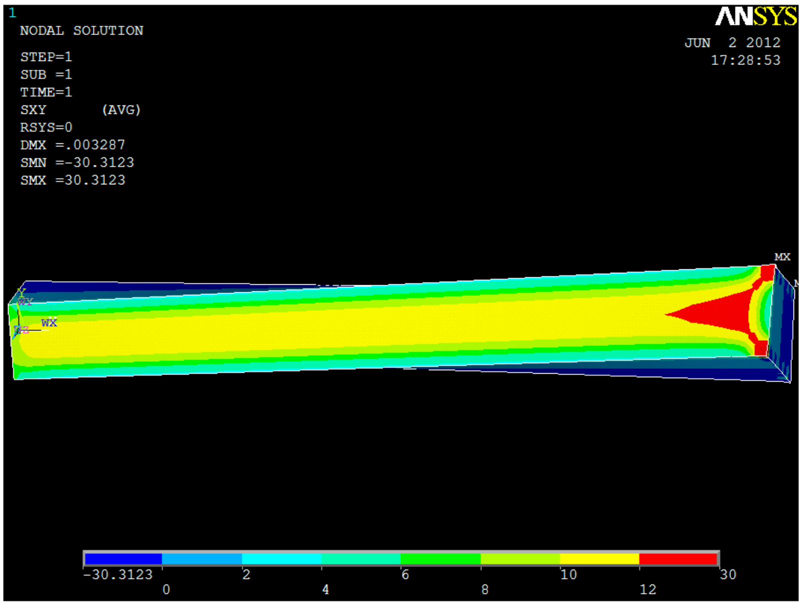
Figuur 26: Balk met 8-knoops-elementen, belast op wringing

8.2 Materiaalgegevens

Het variëren van de elasticiteitsmodulus E en de dwarscontractiecoëfficient ν verandert niets aan de gevonden numerieke spanning in de doorsnede en dus ook niet aan de nauwkeurigheid.

8.3 Afmetingen

Zoals ook in voorgaande hoofdstukken bleek, lopen ook voor wringing de spanningen in de buurt van de uiteinden niet lineair door de invoering van puntlasten op verschillende knooppunten. In figuur 27 is dat goed te zien.



Figuur 27: Verstoord gebied voor een op wringing belaste balk

Om na te gaan hoe lang dit 'verstoord gebied' is, is voor een balk enkel de lengte gevarieerd van 200 tot 4000 mm. De resultaten staan verwerkt in tabel 21. Bij een meting op $x = L/2$ blijkt de nauwkeurigheid niet meer te veranderen vanaf $L = 800$ mm ($h/b = 1/4$). Het verstoord gebied is niet alleen afhankelijk van b en h, maar bijvoorbeeld ook van het aantal elementen in de doorsnede. Om er zeker van te zijn dat er geen meting in het verstoorde gebied wordt gedaan, wordt $L = min10 * h; 10 * b$ gehanteerd.

L (mm)	200	400	600	800	1.000	1.200	1.400	...	4.000
fout, $y = 0$; $z = b/2$ (%)	3,159	7,577	7,720	7,718	7,718	7,718	7,718		7,718
fout, $y = b/2$; $z = 0$ (%)	12,26	7,859	7,717	7,718	7,718	7,718	7,718		7,718

$h = 200\ mm$, $b = 200\ mm$, $n_y = 4$, $n_z = 4$, $n_x = \frac{L}{b_E}$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $v = 0.3\ (-)$, $M = 20e6\ Nmm$

Tabel 21: Nauwkeurigheid met variërende lengte

De nauwkeurigheid blijkt niet gelijk bij verschillende h/b-verhoudingen met dezelfde aantal elementen in de lengte en breedte. In tabel 22 is te zien dat de nauwkeurgheid naar een waarde rond 0 convergeert voor zowel een toenemend aantal elementen in de breedte als in de hoogte in geval van 8-knoops elementen.

20-knoops elementen gedragen zich anders in geval van wringing, zoals in de paragraaf resultaten te zien is. Voor bepaalde h/b-verhoudingen wordt de kritieke spanning beter benaderd door 8-knoops elementen dan door 20-knoops.

$n_z = 10, n_y =$	2	4	6	8	10
fout, $y = 0; z = b/2$ (%)	21,828	3,182	1,163	0,189	-0,259
$n_y = 10, n_z =$	2	4	6	8	10
fout, $y = 0; z = b/2$ (%)	2,455	0,487	0,006	-0,174	-0,259

$L = 2000\ mm$, $h = 200\ mm$, $b = 200\ mm$, $n_x = 10\ mm$
$E = 210e3\ N/mm^2$, $\nu = 0.3\ (-)$, $M = 20e6\ Nmm$

Tabel 22: Nauwkeurigheid met variërend aantal elementen in hoogte en breedte

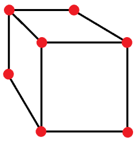
8.4 Resultaten

Voor verschillende h/b-verhoudingen zijn de resultaten voor 8- en 20-knoops elementen verwerkt in tabel 23. Omdat ook de analytisch gevonden waarde met behulp van tabel 1 een onbekende fout bevat wordt in tabel 24 de numeriek verkregen waarde vergeleken met een numeriek verkregen waarde bij gebruik van $10 * 10$ 20-knoops elementen. De fout voor $10 * 10$ 20-knoops elementen gaat dan per definitie naar 0. Andere waarden worden uit tabel 23 verkregen volgens:

$$Relatieve\ fout\ (\%) = \frac{Referentiewaarde - Numerieke\ waarde}{Referentiewaarde} * 100\%$$
$$Referentiewaarde = -\frac{fout_{Referentiewaarde} * Analytische\ waarde}{100\%} + Analytische\ waarde$$
$$Numerieke\ waarde = -\frac{fout_{Numerieke\ waarde} * Analytische\ waarde}{100\%} + Analytische\ waarde$$
$$Relatieve\ fout\ (\%) = \frac{fout_{Numerieke\ waarde} - foutReferentiewaarde}{100 - fout_{Referentiewaarde}} * 100\%$$

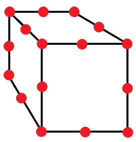
Voor een h/b-verhouding van $1,0$ is de tabel per definitie symmetrisch. Als met bijvoorbeeld $2 * 4$ elementen een grotere fout wordt gevonden dan met $4 * 2$ elementen, dan moet vanwege de symmetrie de grootste fout worden weergeven. Voor andere h/b verhoudingen is de spanning aan de lange zijde echter ook altijd de grootste spanning waardoor de tabel niet symmetrisch is.

Wat opvalt is dat evenals bij dwarskracht in hoofdstuk 7 de verhouding van het aantal elementen maatgevend is voor de relatieve fout, en niet zozeer het aantal elementen. Voor een h/b verhouding van 1,0 hoort ook de verhouding van het aantal elementen in de hoogte en breedte 1,0 gekozen te worden. Voor een toenemende h/b verhouding levert een hoger aantal elementen in de hoogte meer nauwkeurigheid dan een hoger aantal elementen in de breedte.



ANSYS 8-knoops elementen

$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	37,0	29,0	27,1	26,3	26,0
	4		7,7	6,0	5,4	5,1
	6			3,1	2,5	2,2
	8				1,4	1,1
	10					0,6
$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	25,3	22,7	22,1	21,9	21,8
	4	5,8	3,9	3,4	3,3	3,2
	6	3,8	1,9	1,4	1,3	1,2
	8	2,9	0,9	0,5	0,3	0,2
	10	2,5	0,5	0,0	-0,2	-0,3
$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	18,7	17,4	17,2	17,1	17,0
	4	3,3	2,3	2,1	2,0	2,0
	6	2,6	1,4	1,1	1,0	0,9
	8	1,8	0,5	0,2	0,1	0,0
	10	1,4	0,1	-0,2	-0,4	-0,4



ANSYS 20-knoops elementen

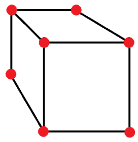
$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-11,2	-17,1	-18,1	-18,3	-18,5
	4		-1,8	-3,0	-3,6	-3,8
	6			-1,1	-1,5	-1,7
	8				-0,9	-1,2
	10					-0,9
$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-20,7	-20,4	-20,3	-20,2	-20,2
	4	-2,7	-3,6	-3,9	-3,9	-4,0
	6	-1,1	-1,8	-1,9	-2,0	-2,1
	8	-0,6	-1,4	-1,5	-1,6	-1,6
	10	-0,4	-1,2	-1,4	-1,4	-1,5
$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-20,9	-20,1	-19,9	-19,9	-19,8
	4	-3,0	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5
	6	-1,6	-1,8	-1,9	-1,9	-2,0
	8	-1,4	-1,6	-1,6	-1,6	-1,6
	10	-1,3	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5

Fout in (%)

Tabel 23: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een eenzijdig ingeklemde ligger, belast op wringing.

ANSYS 8-knoops elementen

$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	37,6	29,6	27,7	27,0	26,6
	4		8,5	6,8	6,2	5,9
	6			4,0	3,4	3,1
	8				2,3	2,0
	10					1,5

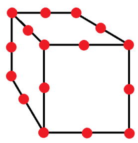


$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	26,4	23,9	23,3	23,1	23,0
	4	7,2	5,2	4,8	4,7	4,6
	6	5,2	3,3	2,9	2,7	2,6
	8	4,3	2,4	1,9	1,7	1,6
	10	3,9	1,9	1,5	1,3	1,2

$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	19,9	18,7	18,4	18,3	18,3
	4	4,8	3,8	3,6	3,5	3,4
	6	4,1	2,9	2,6	2,5	2,4
	8	3,3	2,0	1,7	1,6	1,5
	10	2,8	1,6	1,3	1,2	1,1

ANSYS 20-knoops elementen

$h/b =$	$1,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-10,2	-16,1	-17,1	-17,3	-17,4
	4		-0,9	-2,1	-2,6	-2,9
	6			-0,1	-0,6	-0,8
	8				0,0	-0,2
	10					0,0



$h/b =$	$2,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-18,9	-18,7	-18,5	-18,5	-18,5
	4	-1,3	-2,1	-2,4	-2,4	-2,4
	6	0,4	-0,3	-0,5	-0,5	-0,6
	8	0,8	0,1	-0,1	-0,1	-0,2
	10	1,0	0,3	0,1	0,0	0,0

$h/b =$	$3,0$	n_b				
		2	4	6	8	10
n_h	2	-19,1	-18,3	-18,1	-18,1	-18,0
	4	-1,4	-1,9	-1,9	-1,9	-1,9
	6	-0,1	-0,3	-0,3	-0,4	-0,4
	8	0,2	0,0	-0,1	-0,1	-0,1
	10	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0

Fout in (%), met spanning bij $10 * 10$ *ANSYS 20-knoops elementen als referentiewaarde*

Tabel 24: Nauwkeurigheid voor spanningsberekening van een eenzijdig ingeklemde ligger, belast op wringing.

9 Conclusies en aanbevelingen

9.1 Conclusies

- **8-knoopselementen** zijn geschikt om snel inzicht te krijgen in het spanningsverloop. Bijvoorbeeld bij een vierkante doorsnede ($h = b$) wordt voor beide elementsoorten een nauwkeurigheid van ongeveer 10% gehaald bij 4×4 elementen respectievelijk 2×2 elementen. In geval van 8-knoopselementen bevinden zich dan 25 knooppunten in de doorsnede terwijl er voor 20-knoopselementen 21 aanwezig zijn. Derhalve zijn voor de 20-knoopselementen minder geheugen en rekentijd benodigd. Voor grotere nauwkeurigheden is dit ook het geval.
  Het is aan te raden **20-knoops elementen** te gebruiken wanneer de waarde van de maximaal optredende spanning moet worden bepaald. De nauwkeurigheid convergeert veel sneller bij een toenemend aantal 20-knoops elementen ten opzichte van 8-knoops elementen.
  Zie tabel 2, 5, 6, 13 15, 19, 20 en 24.

- Voor **normaalkracht** is het aantal elementen onbelangrijk aangezien voor elke elementenverhouding de exacte waarde wordt gevonden
  Zie tabel 5 en 6.

- Voor **buiging** wordt met 2×2 20-knoopselementen[1] al de analytische waarde gevonden. 8-knoops elementen zijn minder geschikt omdat de maximale spanning, afhankelijk van het aantal elementen in de hoogte, flink wordt onderschat.
  Zie tabel 13 en 15.

- Voor **dwarskracht** en **wringing** wordt voor beide elementsoorten dezelfde trent gevonden. Bij een h/b verhouding van 1,0 dienen evenveel elementen in de breedte als in de hoogte worden gekozen, maar naarmate de verhouding h/b toeneemt wordt het aantal elementen in de hoogte bepalend voor de nauwkeurigheid.
  Zie tabel 19, 20 en 24.

  – **3% nauwkeurigheid** wordt verkregen door 4×2 20-knoopselementen te gebruiken. Vierkante en platte doorsneden ($h/b \leq 1,0$) vormen hierop een uitzondering, daarvoor zijn minimaal 4×4 elementen nodig.
  – **1% nauwkeurigheid** wordt verkregen door 6×2 20-knoopselementen te gebruiken. Vierkante en platte doorsneden ($h/b \leq 1,0$) vormen hierop een uitzondering, daarvoor zijn minimaal 6×6 elementen nodig.

9.2 Aanbevelingen

- Het is aan te bevelen dit onderzoek uit te breiden met verschillende constructies en verschillende belastingsgevallen gecombineerd.

- Met de gevonden resultaten kan worden onderzocht welke constructies momenteel met de gewenste nauwkeurigheid kunnen worden berekend. Het is mogelijk om 3D AutoCAD tekeningen in te voeren in *ANSYS* en zo een autmatisch ‘mesh’ te genereren.

- Wanneer blijkt dat de huidige computers niet binnen de gewenste tijd een berekening met de gewenste nauwkeurigheid kunnen uitvoeren, is het interessant om een schatting te maken van wanneer dit wel mogelijk is.

[1] Minder elementen kan waarschijnlijk ook, maar dat is niet onderzocht

Appendices

A *ANSYS* Macro's

A.1 Vrij opgelegde ligger, belast op normaalkracht

A.1.1 8-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! Free supported beam with normal force (8 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid08compression.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    8-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 3000                     ! Lenght                        mm
  ay = 300                      ! Height                        mm
  az = 200                      ! Width                         mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 4                        ! Number of elements in width
  EY = 6                        ! Number of elements in height
  dEX = 50                      ! Lenght of elements            mm
  F  = 20e3                     ! Force                         N
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID185                 ! Element type: 8 node

  nz=EZ+1                       ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+2
  *ENDDO

  nodenr=1
  *DO,i,0,(nx-1)                ! Put nodes
    x=i*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,(nx-1)                ! Put elements
    *DO,j,1,(ny-1)
      *DO,k,1,(nz-1)

E,(i-1)*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*
ny*nz+(j-1)*nz+k,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+
k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
```

```
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

EX  = nx-1
dEX = ax/EX
dEY = ay/EY
dEZ = az/EZ

*DO,j,1,nz                         ! Put boundary conditions
  D,(j+(ny-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
  D,j+(ny-1)*nz+(nx-1)*ny*nz,,0,,,,,UY,,,,
*ENDDO

*DO,k,1,nz*ny                      ! Put forces
  F,k,FX,F/(nz*ny)
  F,k+(nx-1)*ny*nz,FX,-F/(nz*ny)
*ENDDO
FINISH

/SOLU                              ! Perform analysis
SOLVE
FINISH!

*DIM,NStress,,ny,nz                ! stresses (numerical)
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    *GET,NSTR,NODE,(i-1)*nz+j+((nx+1)/2-1)*ny*nz,S,x
    NStress(i,j)=NSTR
  *ENDDO
*ENDDO

*DIM,AStress,,ny,nz                ! stresses (analytic)
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    ASTR=-F/(ay*az)
    AStress(i,j)=ASTR
  *ENDDO
*ENDDO

*DIM,Difference,,ny,nz             ! error
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    Diff=AStress(i,j)-NStress(i,j)
    Difference(i,j)=Diff
  *ENDDO
*ENDDO

*VWRITE,
Gegevens...................................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Kracht',F,' N'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen...........................................
*VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
```

```
Numeriek bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).......
*VWRITE,NStress(1,1),NStress(1,(nz+1)/2),NStress(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).....
*VWRITE,AStress(1,1),AStress(1,(nz+1)/2),AStress(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (analytisch-numeriek).................................
*VWRITE,Difference(1,1),Difference(1,(nz+1)/2),Difference(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=0, z=0)...................................
*VWRITE,100*(Difference((ny+1)/2,(nz+1)/2)/AStress((ny+1)/2,(nz+1)/2)),' %'
(F10.3,A)

FINISH

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.1.2 20-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! Free supported beam with normal force (20 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid20compression.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    8-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 2000                     ! Lenght                         mm
  ay = 200                      ! Height                         mm
  az = 200                      ! Width                          mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus                N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio                -
  EZ = 2                        ! Number of elements in width
  EY = 3                        ! Number of elements in height
  dEX = 100                     ! Lenght of elements             mm
  F  = 20e3                     ! Force                          N
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia              mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID186                 ! Element type: 20 node

   nz=2*EZ+1                    ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=2*EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+4
  *ENDDO
  EX=(nx-1)/2

  nodenr=1
  *DO,i,1,nx                    ! Put nodes
    x=(i-1)*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,1,nx
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,1,ny,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
```

```
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,1,nz,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,EX                      ! Put elements
    *DO,j,1,EY
      *DO,k,1,EZ

E,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i
*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*
2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(
i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+
k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2
*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  /VIEW,1,1,1,1
  /ANG,1
  /REP,FAST
  EPLOT

  dEX = ax/EX
  dEY = ay/EY
  dEZ = az/EZ

  *DO,j,1,nz                      ! Put boundary conditions
    D,(j+(ny-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
    D,j+(ny-1)*nz+(nx-1)*ny*nz,,0,,,,,UY,,,,
  *ENDDO

  *DO,k,1,nz,2
    *DO,l,1,ny,2                  ! Put forces
      F,(l-1)*nz+k,FX,F/((EZ+1)*(EY+1))
      F,(nx-1)*ny*nz+(l-1)*nz+k,FX,-F/((EZ+1)*(EY+1))
    *ENDDO
  *ENDDO
  FINISH

  /SOLU                           ! Perform analysis
  SOLVE
  FINISH!

  *DIM,NStress,,EY+1,EZ+1         ! Stresses (numerical)
  *DO,j,1,nz,2
    *DO,i,1,ny,2
      *GET,NSTR,NODE,((nx-1)/2)*ny*nz+(i-1)*nz+j,S,x
      NStress((i+1)/2,(j+1)/2)=NSTR
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DIM,AStress,,EY+1,EZ+1         ! stresses (analytic)
  *DO,j,1,EZ+1
    *DO,i,1,EY+1
      ASTR=-F/(az*ay)
      AStress(i,j)=ASTR
```

```
  *ENDDO
 *ENDDO

*DIM,Difference,,EY+1,EZ+1     ! error
 *DO,j,1,EZ+1
  *DO,i,1,EY+1
    Diff=AStress(i,j)-NStress(i,j)
    Difference(i,j)=Diff
  *ENDDO
 *ENDDO

 *VWRITE,
 Gegevens.......................................................
 *VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
 (A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
 *VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
 (A9'  ',E10.3,A8)
 *VWRITE,'v',nu,'     (-)'
 (A9,F8.1,A8),
 *VWRITE,'Kracht',F,' N'
 (A9'  ',E10.3,A8)

 *VWRITE,
 Aantal elementen...............................................
 *VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
 (A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
 *VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
 (A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

 *VWRITE,
 Numeriek bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).......
 *VWRITE,NStress(1,1),NStress(1,EZ/2+1),NStress(1,EZ+1)
 (F8.4,F8.4,F8.4)

 *VWRITE,
 Analytisch bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).....
 *VWRITE,AStress(1,1),AStress(1,EZ/2+1),AStress(1,EZ+1)
 (F8.4,F8.4,F8.4)

 *VWRITE,
 Verschil (analytisch-numeriek).................................
 *VWRITE,Difference(1,1),Difference(1,EZ/2+1),Difference(1,EZ+1)
 (F8.4,F8.4,F8.4)

 *VWRITE,
 Verschil (x=L/2, y=0, z=0)...................................
 *VWRITE,100*(Difference((ny+1)/2,(nz+1)/2)/AStress((ny+1)/2,(nz+1)/2)),' %'
 (F10.3,A)

 FINISH

 *CFCLOS

 *UILIST,Results.txt
```

A.2 Vrij opgelegde ligger, belast op buiging

A.2.1 8-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! Free supported beam with bending moment (8 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid08bending.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    8-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 3000                     ! Lenght                        mm
  ay = 300                      ! Height                        mm
  az = 200                      ! Width                         mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 4                        ! Number of elements in width
  EY = 6                        ! Number of elements in height
  dEX = 50                      ! Lenght of elements            mm
  M  = 20e6                     ! Bending moment                Nmm^2
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID185                 ! Element type: 8 node

  nz=EZ+1                       ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+2
  *ENDDO

  nodenr=1
  *DO,i,0,(nx-1)                ! Put nodes
    x=i*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,(nx-1)                ! Put elements
    *DO,j,1,(ny-1)
      *DO,k,1,(nz-1)

E,(i-1)*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*
ny*nz+(j-1)*nz+k,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+
k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
```

```
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

EX  = nx-1
dEX = ax/EX
dEY = ay/EY
dEZ = az/EZ

*DO,j,1,nz                    ! Put boundary conditions
  D,(j+(ny-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
  D,j+(ny-1)*nz+(nx-1)*ny*nz,,0,,,,,UY,,,,
*ENDDO

*DO,k,1,nz                    ! Put forces
  F,k,FX,M/(ay*nz)
  F,k+(ny-1)*nz,FX,-M/(ay*nz)
  F,k+(nx-1)*ny*nz,FX,-M/(ay*nz)
  F,k+(nx-1)*ny*nz+(ny-1)*(nz),FX,M/(ay*nz)
*ENDDO
FINISH

/SOLU                         ! Perform analysis
SOLVE
FINISH!

*DIM,NStress,,ny,nz           ! stresses (numerical)
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    *GET,NSTR,NODE,(i-1)*nz+j+((nx+1)/2-1)*ny*nz,S,x
    NStress(i,j)=NSTR
  *ENDDO
*ENDDO

*DIM,AStress,,ny,nz           ! stresses (analytic)
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    ASTR=(M*(i-(ny+1)/2)*(ay/EY))/Iz
    AStress(i,j)=ASTR
  *ENDDO
*ENDDO

*DIM,Difference,,ny,nz        ! error
*DO,j,1,nz
  *DO,i,1,ny
    Diff=AStress(i,j)-NStress(i,j)
    Difference(i,j)=Diff
  *ENDDO
*ENDDO

*VWRITE,
Gegevens.....................................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Moment',M,' Nmm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen...............................................
*VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
```

```
*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).......
*VWRITE,NStress(1,1),NStress(1,(nz+1)/2),NStress(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).....
*VWRITE,AStress(1,1),AStress(1,(nz+1)/2),AStress(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (analytisch-numeriek).................................
*VWRITE,Difference(1,1),Difference(1,(nz+1)/2),Difference(1,nz)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=h/2, z=0)...................................
*VWRITE,100*(Difference(1,(nz+1)/2)/AStress(1,(nz+1)/2)),' %'
(F10.3,A)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=h/2, z=b/2).................................
*VWRITE,100*(Difference(1,1)/AStress(1,1)),' %'
(F10.3,A)

FINISH

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.2.2 20-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! Free supported beam with bending moment (20 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid20bending.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    20-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 3000                     ! Lenght                        mm
  ay = 300                      ! Height                        mm
  az = 200                      ! Width                         mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 4                        ! Number of elements in width
  EY = 6                        ! Number of elements in height
  dEX = 50                      ! Lenght of elements            mm
  M  = 20e6                     ! Bending moment                Nmm^2
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID186                 ! Element type: 20 node

  nz=2*EZ+1                     ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=2*EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+4
  *ENDDO
  EX=(nx-1)/2

  nodenr=1
  *DO,i,1,nx                    ! Put nodes
    x=(i-1)*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,1,nx
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,1,ny,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
```

```
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,1,nz,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,EX                       ! Put elements
    *DO,j,1,EY
      *DO,k,1,EZ

E,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i
*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*
2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(
i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+
k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2
*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  dEX = ax/EX
  dEY = ay/EY
  dEZ = az/EZ

  *DO,j,1,nz                       ! Put boundary conditions
    D,(j+(ny-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
    D,j+(ny-1)*nz+(nx-1)*ny*nz,,0,,,,,UY,,,,
  *ENDDO

  *DO,k,1,nz                       ! Put forces
    F,k,FX,M/(ay*nz)
    F,k+(ny-1)*nz,FX,-M/(ay*nz)
    F,k+(nx-1)*ny*nz,FX,-M/(ay*nz)
    F,k+(nx-1)*ny*nz+(ny-1)*(nz),FX,M/(ay*nz)
  *ENDDO
  FINISH

  /SOLU                            ! Perform analysis
  SOLVE
  FINISH!

  *DIM,NStress,,EY+1,EZ+1          ! Stresses (numerical)
  *DO,j,1,nz,2
    *DO,i,1,ny,2
      *GET,NSTR,NODE,((nx-1)/2)*ny*nz+(i-1)*nz+j,S,x
      NStress((i+1)/2,(j+1)/2)=NSTR
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DIM,AStress,,EY+1,EZ+1          ! stresses (analytic)
  *DO,j,1,EZ+1
    *DO,i,1,EY+1
      ASTR=M*((i-1-EY/2)*(ay/EY))/Iz
      AStress(i,j)=ASTR
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DIM,Difference,,EY+1,EZ+1       ! error
  *DO,j,1,EZ+1
```

```
  *DO,i,1,EY+1
    Diff=AStress(i,j)-NStress(i,j)
    Difference(i,j)=Diff
  *ENDDO
*ENDDO

*VWRITE,
Gegevens..............................................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Moment',M,' Nmm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen..............................................
*VWRITE,'X',EX,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).......
*VWRITE,NStress(1,1),NStress(1,EZ/2+1),NStress(1,EZ+1)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).....
*VWRITE,AStress(1,1),AStress(1,EZ/2+1),AStress(1,EZ+1)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (analytisch-numeriek).................................
*VWRITE,Difference(1,1),Difference(1,EZ/2+1),Difference(1,EZ+1)
(F8.4,F8.4,F8.4)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=h/2, z=0)...................................
*VWRITE,100*(Difference(1,(nz+1)/2)/AStress(1,(nz+1)/2)),' %'
(F10.3,A)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=h/2, z=b/2).................................
*VWRITE,100*(Difference(1,1)/AStress(1,1)),' %'
(F10.3,A)

FINISH

/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.3 Eenzijdig ingeklemde ligger, belast op dwarskracht

A.3.1 8-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! One side clamped beam with shearforce (8 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid08shear.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Eenzijdig ingeklemde ligger, belast op dwarskracht
  *VWRITE
    8-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 3000                     ! Lenght                        mm
  ay = 300                      ! Height                        mm
  az = 100                      ! Width                         mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 4                        ! Number of elements in width
  EY = 4                        ! Number of elements in height
  dEX = 10                      ! Lenght of elements            mm
  F  = 80e3                     ! Force                         N
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID185                 ! Element type: 8 node
  SHPP,OFF,,

  nz=EZ+1                       ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+2
  *ENDDO

  nodenr=1
  *DO,i,0,(nx-1)                ! Put nodes
    x=i*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,(nx-1)                ! Put elements
    *DO,j,1,(ny-1)
      *DO,k,1,(nz-1)

E,(i-1)*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*
ny*nz+(j-1)*nz+k,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+
k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
```

```
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

EX  = nx-1
dEX = ax/EX
dEY = ay/EY
dEZ = az/EZ

*DO,j,1,nz*ny                 ! Put boundary conditions
  D,j,,0,,,,UX,UY,UZ,,,
*ENDDO

*DO,k,1,nz*ny                 ! Put forces
  F,k+(nx-1)*ny*nz,FY,-F/(nz*ny)
*ENDDO
FINISH

/SOLU                         ! Perform analysis
SOLVE
FINISH!

*GET,NStr1,NODE,((nx+1)/2-1)*ny*nz+((ny+1)/2-1)*nz+1,S,xy

*VWRITE,
Gegevens..............................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Kracht',F,' N'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen..........................................
*VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning in kritieke doorsnede (x=L/2).......
*VWRITE,NStr1
(F8.4)

FINISH

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.3.2 20-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! One side clamped beam with shearforce (8 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid20shear.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Eenzijdig ingeklemde ligger, belast op dwarskracht
  *VWRITE
    20-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ref=-4.094                    ! Reference                    N/mm^2
  ax = 3000                     ! Lenght                       mm
  ay = 300                      ! Height                       mm
  az = 100                      ! Width                        mm
  E  = 210e3                    ! Young's modulus              N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio              -
  EZ = 2                        ! Number of elements in width
  EY = 6                        ! Number of elements in height
  dEX = 10                      ! Lenght of elements           mm
  F  = 80e3                     ! Force                        N
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia            mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID186                 ! Element type: 8 node
  SHPP,OFF,,

  nz=2*EZ+1                     ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=2*EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+4
  *ENDDO
  EX=(nx-1)/2

  nodenr=1
  *DO,i,1,nx                    ! Put nodes
    x=(i-1)*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,1,nx
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,1,ny,2
```

```
    *DO,k,2,nz-1,2
      NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
    *ENDDO
  *ENDDO
*ENDDO
*DO,i,2,nx-1,2
  *DO,j,2,ny-1,2
    *DO,k,1,nz,2
      NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
    *ENDDO
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,EX                    ! Put elements
  *DO,j,1,EY
    *DO,k,1,EZ

E,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i
*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*
2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(
i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+
k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2
*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1
    *ENDDO
  *ENDDO
*ENDDO

/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

dEX = ax/EX
dEY = ay/EY
dEZ = az/EZ

*DO,j,1,nz,2                  ! Put boundary conditions
  *DO,i,1,ny,2
    D,(j+(i-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,k,1,nz,2                  ! Put forces
  *DO,l,1,ny,2
    F,(k+(l-1)*nz)+(nx-1)*ny*nz,FY,-F/((EZ+1)*(EY+1))
  *ENDDO
*ENDDO
FINISH

/SOLU                         ! Perform analysis
SOLVE
FINISH!

*GET,NStr1,NODE,((nx+1)/2-1)*ny*nz+((ny+1)/2-1)*nz+1,S,xy

*VWRITE,
Gegevens.....................................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Kracht',F,' N'
```

```
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen...........................................
*VWRITE,'X',EX,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',ax/EX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
Maximale spanning in kritieke doorsnede
*VWRITE,NStr1
(F14.4)

*VWRITE,
Relatieve fout
*VWRITE,100*((ref-NStr1)/ref)
(F10.3)

FINISH

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.4 Eenzijdig ingeklemde ligger, belast op wringing

A.4.1 8-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! One side clamped beam with torsion (8 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid08torsion.mac

 *CFOPEN,Results,txt,           ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    8-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 2000                     ! Lenght                        mm
  ay = 200                      ! Height                        mm
  az = 200                      ! Width                         mm
  factor1 = 0.210
  factor2 = 0.210
  E  = 210e5                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 20                       ! Number of elements in width
  EY = 20                       ! Number of elements in height
  dEX = 50
  M  = 20e6                     ! Force                         Nmm
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID185                 ! Element type: 8 node

  nz=EZ+1                       ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+2
  *ENDDO

  nodenr=1
  *DO,i,0,(nx-1)                ! Put nodes
    x=i*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,(nx-1)                ! Put elements
    *DO,j,1,(ny-1)
      *DO,k,1,(nz-1)

E,(i-1)*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k+1,i*ny*nz+j*nz+k,(i-1)*
ny*nz+(j-1)*nz+k,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+k+1,i*ny*nz+(j-1)*nz+
k
      *ENDDO
    *ENDDO
```

```
*ENDDO

/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
EPLOT

EX  = nx-1
dEX = ax/EX
dEY = ay/EY
dEZ = az/EZ

*DO,j,1,nz*ny                 ! Put boundary conditions
  D,j,,0,,,,UX,UY,UZ,,,
*ENDDO

*DO,k,1,nz                    ! Put forces
  F,k+(nx-1)*ny*nz,FZ,-M/(ay*nz)
  F,k+(nx-1)*ny*nz+(ny-1)*nz,FZ,M/(ay*nz)
*ENDDO
FINISH

/SOLU                         ! Perform analysis
SOLVE
FINISH!

*GET,NStr1,NODE,((nx+1)/2-1)*ny*nz+((ny+1)/2-1)*nz+1,S,xy
*GET,NStr2,NODE,((nx+1)/2-1)*ny*nz+(ny-1)*nz+((nz+1)/2),S,xz

AStr1 = M/(factor1*az*az*ay)
AStr2 = M/(factor2*az*az*ay)

*VWRITE,
Gegevens.....................................................
*VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
*VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
(A9'  ',E10.3,A8)
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Moment',M,' Nmm'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen.............................................
*VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning (x=L/2, y=0, z=b/2).....
*VWRITE,NStr1,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)
*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning (x=L/2, y=b/2, z=0).....
*VWRITE,NStr2,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)

*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning (x=L/2, y=0, z=b/2).....
*VWRITE,AStr1,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)
*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning (x=L/2, y=b/2, z=0).....
*VWRITE,AStr2,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)
```

```
  *VWRITE,
  Verschil (x=L/2, y=0, z=b/2)...................................
  *VWRITE,100*((AStr1-NStr1)/(Astr1)),' %'
  (F10.3,A)
  *VWRITE,
  Verschil (x=L/2, y=b/2, z=0)...................................
  *VWRITE,100*((AStr2-NStr2)/(Astr2)),' %'
  (F10.3,A)

  FINISH

  *CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

A.4.2 20-knoops elementen

```
! ANSYS macro
! W. Steenstra, 5-2012
! One side clamped beam with torsion (20 nodes per element)
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl/solid20torsion.mac

  *CFOPEN,Results,txt,          ! Open results.txt

  *VWRITE
  Wouter Steenstra, Bachelor eindwerk Civiele Techniek (CT3000), mei 2012, TU
Delft
  *VWRITE
    Vrij opgelegde ligger, belast op buigend moment
  *VWRITE
    20-knoops elementen

  *CFOPEN,Results,txt,,append

  ax = 4000                     ! Lenght                        mm
  ay = 400                      ! Height                        mm
  az = 200                      ! Width                         mm
  factor1 = 0.249
  factor2 = 0.314
  E  = 210e3                    ! Young's modulus               N/mm^2
  nu = 0.3                      ! Poisson's ratio               -
  EZ = 10                       ! Number of elements in width
  EY = 10                       ! Number of elements in height
  dEX = 10
  M  = 20e6                     ! Force                         Nmm
  Iz = (1/12)*az*ay*ay*ay       ! Moment of inertia             mm^4

  /PREP7
  MPTEMP,,,,,,,,                ! Material: isotropic
  MPTEMP,1,0
  MPDATA,EX,1,,E
  MPDATA,PRXY,1,,nu
  ET,1,SOLID186                 ! Element type: 8 node

  nz=2*EZ+1                     ! Number of nodes in x, y and z direction
  ny=2*EY+1
  s=ax
  nx=1
  *DOWHILE,s
    s=s-2*dEX
    nx=nx+4
  *ENDDO
  EX=(nx-1)/2

  nodenr=1
  *DO,i,1,nx                    ! Put nodes
    x=(i-1)*(ax/(nx-1))
    *DO,j,1,ny
      y=(ny-j)*(ay/(ny-1))-ay/2
      *DO,k,1,nz
        z=(nz-k)*(az/(nz-1))-az/2
        N,nodenr,x,y,z,,,
        nodenr=nodenr+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,1,nx
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,1,ny,2
```

```
      *DO,k,2,nz-1,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO
  *DO,i,2,nx-1,2
    *DO,j,2,ny-1,2
      *DO,k,1,nz,2
        NDELE,(i-1)*ny*nz+(j-1)*nz+k
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,i,1,EX                      ! Put elements
    *DO,j,1,EY
      *DO,k,1,EZ

E,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i
*2*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*
2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+j*2*nz+k*2,(
i*2-1)*ny*nz+j*2*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+
k*2-1,i*2*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2,(i*2-1)*ny*nz+(j-1)*2*nz+k*2+1

EMORE,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1,(i-1)*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2
*j-1)*nz+k*2-1,i*2*ny*nz+(2*j-1)*nz+k*2+1
      *ENDDO
    *ENDDO
  *ENDDO

  /VIEW,1,1,1,1
  /ANG,1
  /REP,FAST
  EPLOT

  dEX = ax/EX
  dEY = ay/EY
  dEZ = az/EZ

  *DO,j,1,nz,2                    ! Put boundary conditions
    *DO,i,1,ny,2
      D,(j+(i-1)*nz),,0,,,,UX,UY,UZ,,,
    *ENDDO
  *ENDDO

  *DO,k,1,nz,2                    ! Put forces
    F,k+(nx-1)*ny*nz,FZ,-M/(ay*(EZ+1))
    F,k+(nx-1)*ny*nz+(ny-1)*nz,FZ,M/(ay*(EZ+1))
  *ENDDO
  FINISH

  /SOLU                           ! Perform analysis
  SOLVE
  FINISH!

  *GET,NStr1,NODE,((nx-1)/2)*ny*nz+((ny-1)/2)*nz+1,S,xy
  *GET,NStr2,NODE,((nx-1)/2)*ny*nz+(ny-1)*nz+((nz-1)/2+1),S,xz

  AStr1 = M/(factor1*az*az*ay)
  AStr2 = M/(factor2*az*az*ay)

  *VWRITE,
  Gegevens...................................................
  *VWRITE,'Lengte',ax,'     mm','Hoogte',ay,'     mm','Breedte',az,'     mm'
  (A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)
  *VWRITE,'E',E,' N/mm^2'
  (A9'  ',E10.3,A8)
```

```
*VWRITE,'v',nu,'     (-)'
(A9,F8.1,A8),
*VWRITE,'Moment',M,' Nmm'
(A9'  ',E10.3,A8)

*VWRITE,
Aantal elementen..........................................
*VWRITE,'X',nx-1,'Y',EY,'Z',EZ
(A9,F8.1),(A9,F8.1),(A9,F8.1)
*VWRITE,NStr1
(F14.8)
*VWRITE,'dEX',dEX,'     mm','dEY',dEY,'     mm','dEZ',dEZ,'     mm'
(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8),(A9,F8.1,A8)

*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning (x=L/2, y=0, z=b/2).....
*VWRITE,NStr1,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)
*VWRITE,
Numeriek bepaalde spanning (x=L/2, y=b/2, z=0).....
*VWRITE,NStr2,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)

*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning (x=L/2, y=0, z=b/2).....
*VWRITE,AStr1,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)
*VWRITE,
Analytisch bepaalde spanning (x=L/2, y=b/2, z=0).....
*VWRITE,AStr2,'  N/mm^2'
(F8.4,A7)

*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=0, z=b/2)..................................
*VWRITE,100*((AStr1-NStr1)/(Astr1)),' %'
(F10.3,A)
*VWRITE,
Verschil (x=L/2, y=b/2, z=0)..................................
*VWRITE,100*((AStr2-NStr2)/(Astr2)),' %'
(F10.3,A)

FINISH

*CFCLOS

*UILIST,Results.txt
```

Referenties

[1] Aantekeningen over wringing
P.C.J. Hoogenboom
(2008) TU Delft

[2] *ANSYS* Element reference
(2005) *ANSYS* Inc.

[3] *ANSYS* Parametetric Design Language Guide
(2009) *ANSYS* Inc.

[4] Design strategy structural concrete in 3D
Ane de Boer
(2010) TU Delft, proefschrift

[5] Elasticiteitstehorie Deel II
Prof. dr. ir. J. Blaauwendraad
(1988) TU Delft

[6] Numerical Methods in Scientific Computing
J. van Kan, A. Segal, F. Vermolen
(2005) Department of Applied Mathematics, Delft University of Technology

[7] Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications
(2009) *ANSYS* Inc.

[8] Toegepaste Mechanica Deel 2
Coenraad Hartsuijker
(2001) TU Delft

[9] Torsion in ZIP bridge system
Evert van Vliet
(2012) TU Delft, Master Thesis