

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

BACHELOR EINDWERK

De doorbuiging van een cilinder ten gevolge van een puntlast

M.J.P. Tol

Studentnummer: 5237424

Begeleiders:

Dr. P.C.J. Hoogenboom	TU Delft
Ir. S. Pasterkamp	TU Delft



Civiele Techniek en Geowetenschappen
Technische Universiteit Delft

20 januari, 2025

Voorwoord

Dit rapport is geschreven als afsluiting voor de bacheloropleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft.

Bij het maken van dit rapport heb ik leren omgaan met het programma SCIA Engineer, hoe je literatuuronderzoek moet verrichten, het verdiepen in een specifieke theorie, maar ook te werken met het softwaresysteem LaTeX, waarmee ik dit rapport heb geschreven. Deze vaardigheden zullen dan ook handig van pas komen later in mijn vervolgstudie of in mijn aanstaande werkveld. Dit rapport richt zich voornamelijk aan mede-bachelorstudenten die zich ietwat willen verdiepen in de theorie en modellering van cilinders belast door puntlasten.

Ik wil graag mijn begeleiders, Pierre Hoogenboom en Sander Pasterkamp bedanken voor hun waardevolle feedback, begeleiding en nuttige tips tijdens het proces van het opstellen van dit rapport. Dankzij hun ondersteuning is dit rapport geworden wat het nu is.

Marijn Tol
Delft, januari 2025

Samenvatting

In dit rapport is er onderzoek gedaan naar formules die de doorbuiging van een cilindrische schaal ten gevolge van een loodrechte puntlast beschrijven. Deze formules zijn in 1983 door C.R. Calladine afgeleid, maar bevatten nog coëfficiënten die niet nauwkeurig zijn bepaald. Het doel van dit bacheloreindwerk is om deze coëfficiënten in de formule te bepalen. De onderzoeksvraag die hier bij hoort is:

"Wat zijn de coëfficiënten in de formules voor doorbuiging van een open cilinder belast door een loodrechte puntlast?"

Om deze vraag te beantwoorden is eerst de literatuur onderzocht, waarbij de formules van Calladine voor doorbuiging van cilindrische schalen onder puntlasten zijn bestudeerd. Deze formules maken onderscheid tussen lange en korte cilinders en zijn gebaseerd op parameters zoals straal, dikte en de dwarscontractiecoëfficiënt.

Vervolgens is een schaalmodel ontwikkeld in SCIA Engineer om simulaties uit te voeren. De cilinder is hier als een 1/8 deel gemodelleerd, met een puntlast en aangepaste randvoorwaarden om nauwkeurige resultaten te verkrijgen. De ontwerpparameters, zoals lengte, dikte, straal en de dwarscontractiecoëfficiënt van de cilinder, zijn systematisch gevarieerd en er is gekeken wat de invloed van de parameters is.

De simulaties uit SCIA Engineer bevestigen dat de coëfficiënten sterk afhangen van de geometrische eigenschappen van de cilinder. Voor zowel lange cilinders als korte cilinders convergeren de coëfficiënten naar 0,90. Daarnaast is bevestigd dat voor de dwarscontractiecoëfficiënt de term $(1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}$ de beste nauwkeurigheid in de formule heeft.

Dus de formules voor de cilinder met open uiteinden worden dan voor:

$$\text{lange cilinder } l > \frac{a}{t}\sqrt{at} \quad u_z = 0.90 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

$$\text{korte cilinder } \sqrt{at} < l < \frac{a}{t}\sqrt{at} \quad u_z = 0.90 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^2 \left(\frac{a}{l} \right). \quad (2)$$

Verklaring van symbolen

a	Cilinderstraal
E	Elasticiteitsmodulus
l	Cilinderlengte
P	Puntlast loodrecht op de cilinder
t	Schaaldikte
u_z, δ	Doorbuiging van de cilinder in z-richting
x	x-coördinaat
y	y-coördinaat
z	z-coördinaat
ν	Dwarscontractiecoëfficiënt of Poisson's ratio
θ	Cilindercoördinaat t.o.v. de x-as
$\propto$	Evenredigheidsteken
$\S$	Paragraafteken (aanduiding voor de (sub-)paragrafen)

Inhoudsopgave

Voorwoord	ii
Samenvatting	iii
Verklaring van symbolen	iv
1 Inleiding	1
1.1 Probleemstelling	1
1.2 Doel	1
1.3 Aanpak	2
1.4 Opbouw	2
2 Literatuuronderzoek	3
2.1 Analytische formule	3
2.2 Toepassing puntlast op een cilinder	5
3 Modellerings	6
3.1 Dimensionering	6
3.1.1 Ontwerpparameters	6
3.1.2 Geometrie	6
3.1.3 Randvoorwaarden	7
3.1.4 Mesh	8
3.2 Validatie	8
3.3 Invoer	9
3.3.1 Lengte	9
3.3.2 Dikte	10
3.3.3 Straal	10
3.3.4 Elasticiteitsmodulus	11
3.3.5 Dwarscontractiecoëfficiënt	11
4 Resultaten	13
4.1 Lengte	13
4.2 Dikte	14
4.3 Straal	14
4.4 Dwarscontractiecoëfficiënt	15
5 Conclusie en aanbevelingen	17
5.1 Conclusie	17
5.1.1 Deelonderzoeksvragen	17
5.1.2 Hoofdonderzoeksvraag	18
5.2 Aanbevelingen	18
Literatuur	19

1 Inleiding

Schaalconstructies (in het engels "Shell Structures") zijn constructieve vormen waarbij de dikte heel klein is ten opzicht van de andere dimensies (zoals de straal en lengte). Er zijn in de civiele techniek, bouwkunde en de industrie een groot aantal verschillende toepassingen wat schaalconstructies betreft. Zo kan er bij cilindrische schalen gedacht worden aan tunnels en buisvormige constructies zoals pijpleidingsystemen (waterleidingen, riolering of gas-transportleidingen) of bijvoorbeeld aan graansilo's of waterreservoirs. Bij koepelschalen kan men denken aan sportstadions, kerken en observatoria. Bovendien heb je ook zadelschalen (ook wel hyperbolische paraboloiden genoemd) die een dubbele kromming hebben. Deze worden bijvoorbeeld bij daken van modernere gebouwen toegepast. In dit rapport zullen we ons richten op de eerste categorie, cilindrische schalen.

1.1 Probleemstelling

Er zijn bij het ontwerpen van schaalconstructies een aantal verschillende formules beschikbaar. Een vaak voorkomende situatie is de doorbuiging van een cilinder ten gevolge van een loodrechte puntlast. Professor Calladine heeft in 1977 vier formules afgeleid voor deze situatie [Calladine, 1977, pp. 515-30]. Het betreft formules voor lange cilinders, korte open cilinders, korte gesloten cilinders en korte ingeklemde cilinders. [Hoogenboom, 2024, p. 118] In werkelijkheid zijn deze formules nog onbruikbaar. Dit komt doordat ze coëfficiënten bevatten die niet heel nauwkeurig bepaald zijn. In dit rapport wordt er onderzoek gedaan naar lange en korte open cilinders.

1.2 Doel

Het doel van dit Bachelor Eindproject is om de volgende hoofdvraag te beantwoorden:

Wat zijn de coëfficiënten in de formules voor doorbuiging van een open cilinder belast door een loodrechte puntlast?

Deelonderzoeksvragen die hier bij aansluiten zijn:

1. Welke rol spelen de geometrische eigenschappen van de cilinder (lengte, schaaldikte, straal) in de berekening van de coëfficiënten?
2. Welke invloed heeft de dwarscontractiecoëfficiënt ν op de verplaatsing u_z ?
3. Zijn de afgeleide coëfficiënten onafhankelijk van de afmetingen van de cilinder?
4. Wat zijn de beperkingen van de huidige formules en hoe kan de nauwkeurigheid van de resultaten worden verbeterd?
5. Hoe sluit de schalentheorie aan bij de resultaten van de SCIA Engineer simulaties?

1.3 Aanpak

Om de loodrechte doorbuiging van een cilinder t.g.v. een loodrechte puntlast te bepalen is er gebruikt gemaakt van het programma SCIA Engineer. Dit is een programma dat gebruik maakt van de eindige-elementenmethode (ofwel e.e.m.) om een berekening te maken voor de doorbuiging. In de eerste fase van het project is er dus eerst geleerd om te gaan met dit programma. Tegelijkertijd is de schalentheorie bestudeerd om de theorie te begrijpen. Dit is gedaan met een literatuuronderzoek (in de TU Delft bibliotheek).

Vervolgens zijn er elementenmodellen van de verschillende typen cilinders in SCIA Engineer gemaakt en met deze resultaten zijn de ontbrekende coëfficiënten bepaald. Daarna zijn deze coëfficiënten gecontroleerd of ze onafhankelijk zijn van de lengte, schaaldikte en straal. Hierbij zijn ook grafieken geplot om een beter grafisch beeld te krijgen.

Uiteindelijk is er nagedacht over de resultaten en wordt er een conclusie getrokken.

1.4 Opbouw

De formules van Calladine waarbij de coëfficiënten bepaald worden en een bijhorende toepassing, worden in hoofdstuk 2 toegelicht. Vervolgens wordt er in hoofdstuk 3 gekeken naar de werking van SCIA engineer en de toepassing ervan. In hoofdstuk 4 zullen de resultaten opgesomd worden in tabellen en grafieken. En tot slot in hoofdstuk 5 wordt er een conclusie getrokken uit de verkregen resultaten en worden aanbevelingen gegeven voor verder onderzoek.

2 Literatuuronderzoek

In dit hoofdstuk wordt in §2.1 de formule van Christopher Calladine over de invloed van een loodrechte puntlast op cirkelvormige cilindrische schalen besproken. Het onderscheid tussen lange en korte cilinders leidt tot specifieke analytische formules voor de doorbuiging (in z-richting), gebaseerd op parameters zoals straal, dikte, en elasticiteitsmodulus. In §2.2 wordt er gekeken naar een toepassing die hoort bij de theorie van puntlasten op cilindrische schalen.

2.1 Analytische formule

In 1977 heeft Christopher Calladine cirkelvormige cilindrische schalen onder invloed van (loodrechte) puntlasten bestudeerd. Hij heeft verschillen gevonden tussen lange en korte cilinders. Bij de situatie van de lange cilinder zijn de uiteinden open. Bij de situatie met gesloten uiteinden wordt er bedoeld dat de cirkelvormige uiteinden niet kunnen verplaatsen, maar wel kunnen roteren. Later in 1983 heeft Calladine het boek "Theory of Shell Structures" geschreven waarbij hij de volgende verbanden heeft gevonden [Hoogenboom, 2024, p. 118]:

$$\text{lange cilinder } l > \frac{a}{t}\sqrt{at} \quad u_z = C_1 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.1)$$

$$\text{korte cilinder } \sqrt{at} < l < \frac{a}{t}\sqrt{at} \quad \text{met ingeklemde uiteinden} \quad u_z = C_2 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{l}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

$$\text{met gesloten uiteinden} \quad u_z = C_3 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{l}{a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$\text{met open uiteinden} \quad u_z = C_4 \frac{P}{Et} \left(\frac{a}{t} \sqrt{1 - \nu^2} \right)^2 \left(\frac{a}{l} \right). \quad (2.4)$$

Hierbij is:	l	[mm]	=	Lengte van de cilinder;
	t	[mm]	=	Schaaldikte;
	a	[mm]	=	Straal;
	E	[N/mm ²]	=	Elasticiteitsmodulus;
	ν	[-]	=	Dwarscontractiecoëfficiënt (Poisson's ratio);
	P	[N]	=	Puntlast loodrecht op de cilinder;
	u_z	[mm]	=	Doorbuiging van de cilinder in z-richting.

Hierbij horen ook de coëfficiënten, C_1 , C_2 , C_3 en C_4 , waarvan de coëfficiënten C_1 en C_4 in dit rapport bepaald zijn met behulp van het programma SCIA Engineer.

De puntlast die uitgeoefend wordt op de cilindrische schaal kan in dit geval ook gerepresenteerd worden door een Fourierreeks. Dit is te zien in Figuur 2.1(b). Merk ook op dat de puntlasten in Figuur 2.1(a) met W worden aangeduid in plaats van P (daarnaast is ook de richting van de krachtvector 180 graden gedraaid).

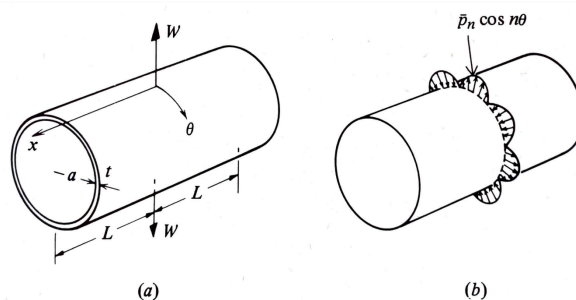


Fig. 2.1: (a) Een dunwandige cilindrische schaal die wordt onderworpen aan diametraal tegengestelde puntbelastingen die worden uitgeoefend op de centrale doorsnede. (b) Een typisch component van de Fourier-reeksweergave van de toegepaste belasting [Calladine, 1983, p. 301]

De puntlast wordt met een som van een serie radiale q-lasten in de doorsnede op $x = 0$ uitgeoefend, waarbij $\cos n\theta$ om de omtrek varieert:

$$\bar{p} = \frac{P}{\pi a} + \frac{2P}{\pi a} \sum_2^{\infty} \cos n\theta \quad (n = 2, 4, \dots). \quad (2.5)$$

$\bar{p}$ is in dit geval de intensiteit van de radiale q-lasten per eenheid van omtrek.

De som van alle termen van de Fourierreeks zal uiteindelijk een q-last opleveren van 0 (N/m), behalve op $\theta = 0$ en $\theta = \pi$. Er wordt hierbij verwacht dat de 'short-wave' en 'flat-plate' oplossingen spanningen geven die zichzelf effectief opheffen, behalve direct in de buurt van het punt waar de kracht zich bevindt [Calladine, 1983, pp. 302-303].

Berekeningen die Calladine heeft verricht om de verbanden te verkrijgen worden in dit rapport niet toegelicht, maar kunnen wel gevonden worden op pagina's 521 t/m 526 van zijn artikel in 1977. Hierin is ook een logaritmische plot van de doorbuigingscoëfficiënt (hierin is δ de doorbuiging onder de puntlast P) t.o.v. de lengtecoëfficiënt voor de cilindrische schaal te vinden:

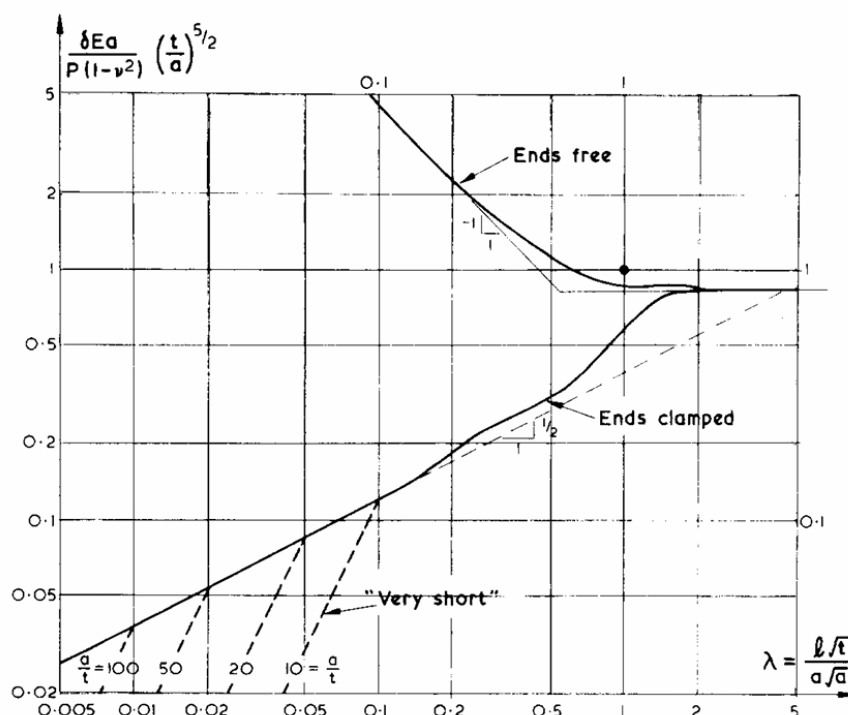


Fig. 2.2: Logaritmische plot van de doorbuigingscoëfficiënt tegen de lengtecoëfficiënt van de cilindrische schaal tussen de puntlasten. De gebroken lijnen komen overeen met de "flat plate" oplossingen [Calladine, 1977, p. 527]

2.2 Toepassing puntlast op een cilinder

De toepassing van gelokaliseerde belastingen (d.w.z. puntlasten) op cilindrische schalen vormt een probleem wat veel terugkomt in verschillende gebieden in de techniek.

Een cilinder zou bijvoorbeeld getest kunnen worden in een proefopstelling waarbij het in het midden tussen 2 staven is vastgezet. Dit is weergegeven in figuur 2.3. Zodoende wordt de cilinder gedrukt (of getrokken), waardoor de cilinder vervormt in het midden en er dus een doorbuiging u_z plaatsvindt.

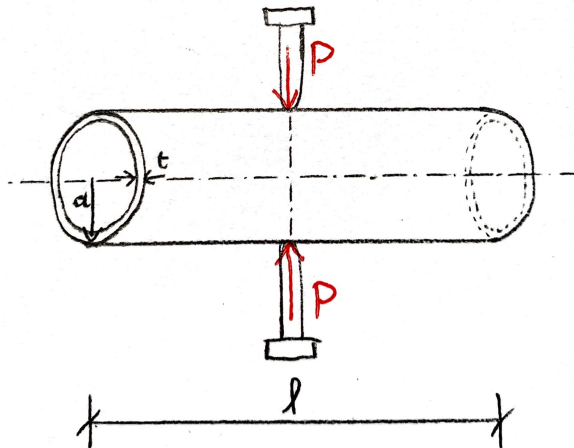


Fig. 2.3: Opstelling voor een doorbuigingsproef

3 Modelling

In dit hoofdstuk zal er uitgelegd worden hoe de cilinder gemodelleerd wordt in het programma SCIA Engineer. In §3.1 zal de algemene dimensionering van de cilinder worden uitgelegd met de bijhorende ontwerpparameters (geometrie, materiaaleigenschappen, belasting). Hierbij zullen ook de randvoorwaarden (open, gesloten, ingeklemd) en de mesh van het model worden uitgelegd. Vervolgens wordt in §3.2 gecontroleerd of het model werkt naar behoren. Als laatste wordt in §3.3 de invoer van het SCIA Engineer-model besproken.

3.1 Dimensionering

De cilindrische schaal is als een schaal-gedeelte gemodelleerd in SCIA Engineer. Dit is mogelijk, aangezien de cilinder symmetrisch is in alle assen. Wanneer de hele cilinder in SCIA gemaakt zou worden, dan zouden boven en onder in het midden van de lengte van de cilinder een puntlast P aangrijpen. In het geval van het schaal-gedeelte wordt er $\frac{1}{8}$ deel van de schaal gebruikt. Om deze reden werkt er dan ook een puntlast van $\frac{1}{4}P$ op het gedeelte. De ontwerpparameters, geometrie, randvoorwaarden en mesh zullen nu toegelicht worden.

3.1.1 Ontwerpparameters

De ontwerpparameters van de cilinder zijn de variabelen die tijdens het modelleren worden aangepast. De relevante ontwerpparameters, gecategoriseerd in geometrisch, materiaal en belasting, die bij de cilinder horen zijn in Tabel 3.1 weergegeven. In §3.3 zijn de invoerparameters te zien die gebruikt zijn in SCIA Engineer.

Categorie	Parameter	Eenheid	Betekenis
Geometrisch	l	mm	Lengte van de cilinder
	t	mm	Schaaldikte van de cilinder
	a	mm	Straal van de cilinder
Materiaal	E	N/mm ²	Elasticiteitsmodulus
	ν	-	Dwarscontractiecoëfficiënt of Poisson's ratio
Belasting	P	N	Puntlast

Tabel 3.1: Ontwerpparameters van de cilinder

We zullen in dit onderzoek ons richten op dunne (cilindrische) schalen. De voorwaarde voor een dunne schaal is als volgt [Hoogenboom, 2024, p.13]:

$$30 < \frac{a}{t} < 4000. \quad (3.1)$$

3.1.2 Geometrie

De volledige geometrie van de cilinder met het desbetreffende schaal-gedeelte die gemodelleerd wordt is te zien in Figuur 3.1. Hierbij zijn de positieve richting van de dimensies, de lengte, dikte, straal en de puntlast P weergegeven.

Om de geometrie van het schaal-gedeelte in SCIA Engineer in te voeren, wordt in het invoerpaneel een schaal geselecteerd. In Figuur 3.2 en Tabel 3.2 is te zien hoe de coördinaten van de punten van het schaal-gedeelte zijn gedefinieerd.

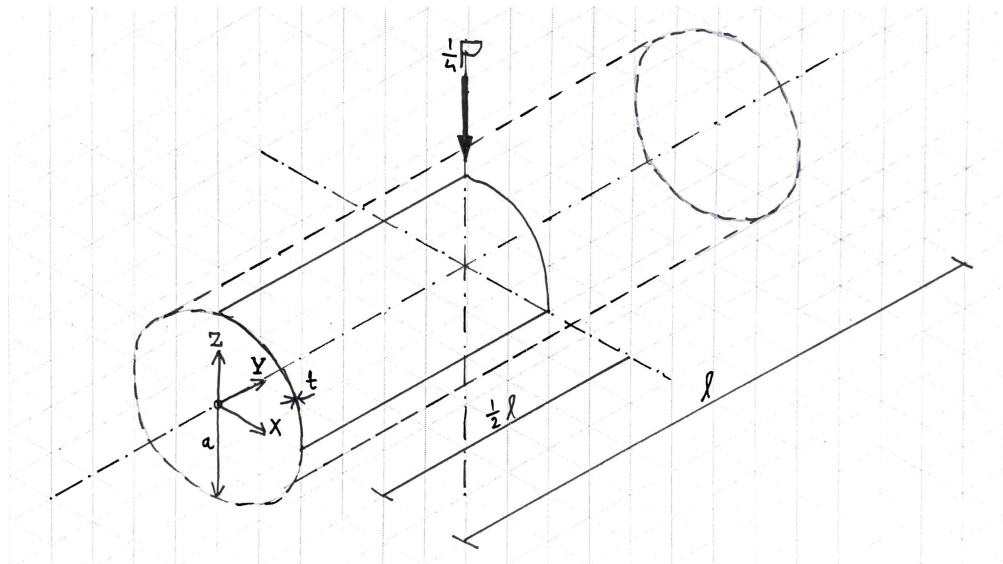


Fig. 3.1: Geometrie van de cirkelvormige cilindrische schaal met de dimensies en locatie van de puntlast P

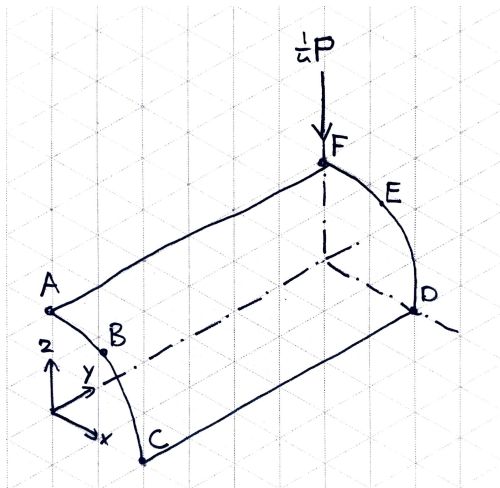


Fig. 3.2: Coördinaten van de punten van het schaal-gedeelte

Punt	x	y	z
A	0	0	a
B	$\frac{3}{5}a$	0	$\frac{4}{5}a$
C	a	0	0
D	a	$\frac{1}{2}l$	0
E	$\frac{3}{5}a$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{4}{5}a$
F	0	$\frac{1}{2}l$	a

Tabel 3.2: Waarden van de coördinaten van het schaal-gedeelte

3.1.3 Randvoorwaarden

De cilinderschaal is in dit geval gemodelleerd als 1/8e van het originele als schaal-gedeelte. Dit houdt in dat de randen van dit schaal-gedeelte moeten aansluiten met de rest van de fictieve schaal. Om dit te doen worden er in SCIA Engineer lijnopleggingen toegevoegd waarin randvoorwaarden opgelegd worden om de vrijheidsgraden in deze randen te definiëren. Er zijn in dit geval 4 randen te benoemen namelijk: AC , CD , DF en FA .

In de formules van Calladine (2.1), (2.2), (2.3) en (2.4) zijn voor de uiteinden van de cilinders 3 randvoorwaarden te benoemen. Deze zijn: open, gesloten en ingeklemd. Bij de situatie "open" kan de cilinder vrij bewegen en zullen geen dwarskrachten en momenten kunnen plaatsvinden. De situatie "gesloten" houdt in dat het om een schot gaat, waarbij het uiteinde wel als een cirkel blijft, kan roteren, maar niet kan verplaatsen en geen momenten kan opnemen. Als laatste is er nog de situatie "ingeklemd". Hierbij worden alle vrijheidsgraden beperkt. In het SCIA-model is rand AC in dit geval het uiteinde van het schaal-gedeelte.

De randvoorwaarden voor CD , DF en FA worden bepaald aan de hand van vormsveranderingsvoorwaarden (v.v.v.). In Figuur 3.3 is geschetst hoe deze randvoorwaarden werken voor het schaal-gedeelte.

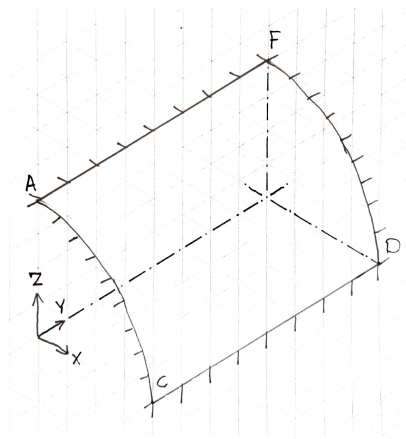


Fig. 3.3: Locatie van de lijnopleggingen van het schaal-gedeelte

Rand	x	y	z	R_x	R_y	R_z
AC	vrij					
CD	vrij	vrij	vast	vast	vast	vrij
DF	vrij	vast	vrij	vast	vrij	vast
FA	vast	vrij	vrij	vrij	vast	vast

Tabel 3.3: Randvoorwaarden van de lijnopleggingen

3.1.4 Mesh

Om in SCIA Engineer een eindige-elementenmodel te maken, wordt er gebruik gemaakt van een mesh. Dit is een discrete verdeling van het model in kleine elementen. Deze eindige elementen bouwen dus gezamenlijk het schaal-gedeelte op. Voordat er met de eindige-elementen methode een simulatie gemaakt wordt dient er een elementgrootte gekozen te worden. Wanneer de elementgrootte kleiner wordt zal ook de mesh-dichtheid hoger worden, wat betekent dat de resultaten nauwkeuriger zijn. De vuistregel die gehanteerd wordt bij dit rapport is:

$$\text{elementgrootte} = 2t$$

Wanneer er teveel elementen zijn en er geen werkgeheugen meer beschikbaar is, dan zal er uitgeweken worden naar een grotere elementgrootte, zodat het programma niet crasht.

3.2 Validatie

Nu de dimensionering van de schaal besproken is wordt er nu getest of het model voldoet aan de eisen. In figuur 3.4 hieronder is te zien hoe de invoer van een lange cilinder er uit ziet in het programma SCIA Engineer. De parameters die hier bij horen zijn te vinden in Tabel 3.4

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	10000 mm	10 mm	500 mm	50	210000 N/mm ²	0.3	100 kN

Tabel 3.4: Invoerparameters bij validatie-model

Merk op dat de lengte van dit schaal-gedeelte gelijk is aan 5000 mm en de kracht gelijk is aan 25 kN. Nu de schaal is ingevoerd kan er een simulatie gemaakt worden voor de doorbuiging. Voor de mesh zal dus een elementgrootte van $2*t$ gekozen worden ($=0,02$ m).

In figuur 3.5 is te zien hoe de vervorming voor de lange cilinder eruit ziet. In figuur 3.6 is de lokale vervorming bij de puntlast te zien. In Bijlage A is ook nog de invoer en de doorbuiging een korte cilinder en de doorbuiging van een heel lange cilinder weergegeven.

Naar de puntlast toe is te zien dat de vervorming steeds steiler naar beneden gaat en heel dicht bij de puntlast weer lokaal wat vlakker wordt. Echter, als je heel goed inzoomt zie je niet dat het elementje onder de puntlast horizontaal is wat je wel zou verwachten bij de randvoorwaarden.

Dit komt doordat een puntlast in een eindige-elementenmethode een oneindige spanning oplevert in het contactpunt van de puntlast. Omdat de eindige-elementenmethode discreet is, kan deze geen oneindige spanningen of vervormingen modelleren.

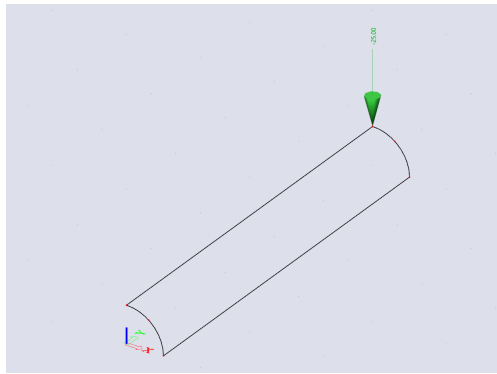


Fig. 3.4: Invoer van een lange cilinder in SCIA Engineer

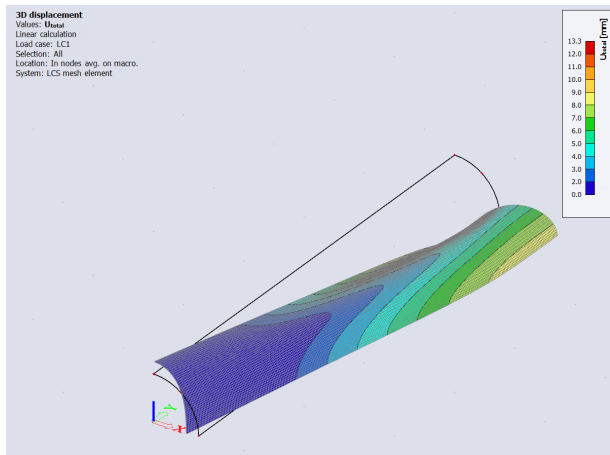


Fig. 3.5: Vervorming van een lange cilinder in SCIA Engineer

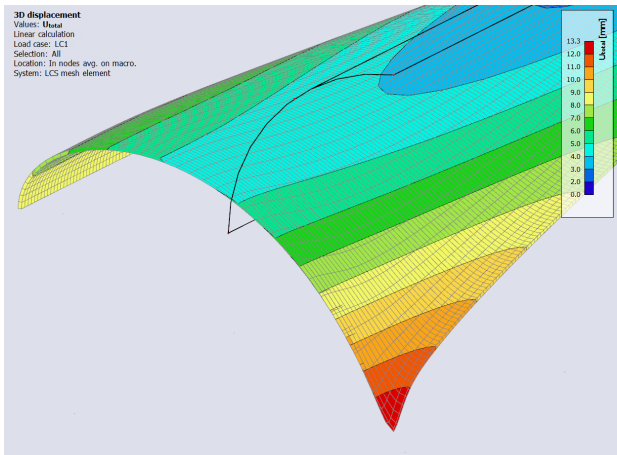


Fig. 3.6: Lokale vervorming van een lange cilinder in SCIA Engineer

3.3 Invoer

In deze paragraaf worden de verschillende parameters die invloed hebben op de doorbuiging van cilinders besproken. Achtereenvolgens worden de cilinderlengte, de schaaldikte, de straal, de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoëfficiënt behandeld. Voor elke parameter wordt beschreven hoe deze varieert en welke invloed dit heeft op de resultaten volgens de doorbuigingsformules en simulaties met SCIA Engineer.

3.3.1 Lengte

Korte cilinder

De invloed van een variërende lengte zal bij de toepassing van korte open cilinders relevant zijn. Dit komt omdat er een term $\frac{a}{l}$ in voor komt. Deze zal dus met de voorwaarde dat het een korte cilinder is ($\sqrt{at} < l < \frac{a}{t}\sqrt{at}$) gevarieerd worden.

De lengte van de cilinder zal worden gevarieerd vanaf 1 m tot een waarde van 100 m. De lengte zal per stap met een factor 2 of 2,5 opgevoerd worden tot het een waarde van 100 m bereikt. t en a worden zo gekozen zodat de lengte binnen de grenzen van $\sqrt{at} < l < \frac{a}{t}\sqrt{at}$ blijft. In Tabel 3.5 zijn de invoerparameters te zien bij de variërende lengtes. De variërende lengtes kunnen terug gevonden worden bij de resultaten. De elementgrootte van de mesh is voor de korte cilinders gelijk aan 0,2 m.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	1000 mm ... 100000 mm	100 mm	10000 mm	100	210000 N/mm ²	0.3	100 kN

Tabel 3.5: Invoerparameters bij variërende lengtes

Lange cilinder

Volgens de theorie zou de doorbuiging niet meer veranderen als de cilinderlengte steeds meer toeneemt. Voor waarden van $l > \frac{a}{t} \sqrt{at}$ zal dan ook getest worden welke doorbuiging SCIA Engineer genereert. Hierbij wordt l verder verhoogd met dezelfde mate als bij de korte cilinder. De kracht wordt echter wel met een factor 10 vergroot, omdat SCIA anders te insignificante waarden geeft. De invoerparameters voor de lange cilinder staan in Tabel 3.6 hieronder. Voor de grote cilinders is de elementgrootte voor $l = 100$ m, 200 m en 500 m gelijk aan 0,2 m. Voor $l = 1000$ m en 2000 m is het gelijk aan 0,4 m. En voor $l = 5000$ m is het gelijk aan 0,5 m. Dit komt omdat er anders te veel werkgeheugen wordt gebruikt voor de berekening.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	100000 mm ... $5 \cdot 10^6$ mm	100 mm	10000 mm	100	210000 N/mm ²	0.3	1000 kN

Tabel 3.6: Invoerparameters bij variërende lengtes

3.3.2 Dikte

Korte cilinder

De schaaldikte zal worden gevarieerd van 200 mm tot 6 mm. Hierbij zullen de andere parameters constant gehouden worden. In Tabel 3.7 zijn de waarden voor dit model weergegeven. Alle waarden van t , de bijhorende verhouding a/t en de elementgrootten van de mesh zijn te vinden in Tabel 3.8. Voor al deze parameters geldt dat de cilinder een korte cilinder is. De elementgrootte van de mesh is bij de dikte telkens anders, omdat de regel elementgrootte = $2t$ gehandhaafd wordt en de dikte wordt gevarieerd. Voor de dikte $t = 6$ mm is echter een elementgrootte gebruikt die te groot zou zijn volgens de voorgenoemde regel. Dit is gedaan, omdat er te weinig werkgeheugen beschikbaar was voor een elementgrootte van 0,012 m.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	10000 mm	200 mm, ... 6 mm	6000 mm	30, ... 1000	210000 N/mm ²	0.3	20 kN

Tabel 3.7: Invoerparameters bij variërende schaaldiktes

t [mm]	a/t [-]	mesh [m]	t [mm]	a/t [-]	mesh [m]
200	30	0,4	35	171,43	0,07
180	33,33	0,2	30	200	0,06
160	37,5	0,2	25	240	0,05
140	42,86	0,2	20	300	0,04
120	50	0,2	18	333,33	0,036
100	60	0,2	16	375	0,032
90	66,67	0,1	14	428,57	0,028
80	75	0,1	12	500	0,024
70	85,71	0,1	10	600	0,02
60	100	0,1	9	666,67	0,018
50	120	0,1	8	750	0,016
45	133,34	0,09	7	857,14	0,014
40	150	0,08	6	1000	0,014

Tabel 3.8: Waarden van t en a/t voor korte cilinder

3.3.3 Straal

Lange cilinder

Ook de cilinderstraal zal gevarieerd worden. Voor de lange cilinder worden de parameters in Tabel 3.9 gebruikt. Alle waarden van a met de bijhorende verhouding a/t zijn te vinden in Tabel 3.10. De elementgrootte voor de mesh is bij de lange cilinder gelijk aan 0,02 m.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	10000 mm	10 mm	300 mm, ... 1000 mm	30, ... 100	210000 N/mm ²	0.3	100 kN

Tabel 3.9: Invoerparameters bij variërende cilinderstralen

a [mm]	a/t [-]
300	30
400	40
500	50
600	60
700	70
800	80
900	90
1000	100

Tabel 3.10: Waarden van a en a/t voor lange cilinder

Korte cilinder

Voor de korte cilinder worden de parameters in Tabel 3.11 gebruikt met de waarden van a en verhouding a/t in Tabel 3.12. De elementgrootte voor de mesh is bij de korte cilinder gelijk aan 0,02 m.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	10000 mm	10 mm	1000 mm, ... 10000 mm	100, ... 1000	210000 N/mm ²	0.3	20 kN

Tabel 3.11: Invoerparameters bij variërende cilinderstralen

a [mm]	a/t [-]	a [mm]	a/t [-]
1000	100	4500	450
1500	150	5000	500
2000	200	6000	600
2500	250	7000	700
3000	300	8000	800
3500	350	9000	900
4000	400	10000	1000

Tabel 3.12: Waarden van a en a/t voor korte cilinder

3.3.4 Elasticiteitsmodulus

De elasticiteitsmodulus, ofwel de E-modulus van een materiaal is het getal dat de verhouding weergeeft tussen de grootte van de spanning, veroorzaakt door de externe belasting die op het materiaal werkt. Dit is dus een maat voor de stijfheid [Joostdevree, sd]. In de formule voor de doorbuiging van een cilinder heeft de elasticiteitsmodulus een omgekeerd evenredig verband met de doorbuiging:

$$u_z \propto \frac{1}{E}$$

Er zal verder geen onderzoek gedaan worden naar de rol van de elasticiteitsmodulus, omdat deze bekend genoeg is.

3.3.5 Dwarscontractiecoëfficiënt

De dwarscontractiecoëfficiënt, oftewel Poisson's ratio beschrijft hoe een materiaal reageert op trek- of drukbelasting. In de formules voor een lange open cilinder en een korte open cilinder zit een verschil in de invloed

van de dwarscontractiecoëfficiënt ν . Bij de formule voor een lange cilinder (2.1) wordt de term $\sqrt{1 - \nu^2}$ verheven tot de macht $\frac{3}{2}$, terwijl bij de formule voor een korte cilinder (2.4) de term $\sqrt{1 - \nu^2}$ wordt verheven tot de macht 2. Nu is het echter zo dat Calladine in zijn artikel in 1977 voor lange cilinders de term $\sqrt{1 - \nu^2}$ tot de macht 2 deed ($= (1 - \nu^2)$) en in zijn boek in 1983 is dit veranderd naar $(\sqrt{1 - \nu^2})^{\frac{3}{2}}$ ($= (1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}$).

Aangezien deze dwarscontractiecoëfficiënt een belangrijke rol speelt in de doorbuigingsformule, zal de invloed hiervan getest worden met behulp van SCIA Engineer. Hierbij wordt ν gevarieerd van 0 tot 0.5 met een stapgrootte van 0.1. Het resultaat van SCIA Engineer wordt dan vergeleken voor een functie met een term van $= (1 - \nu^2)$ in $f_1(\nu)$ en een term van $(1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}$ in $(f_2(\nu))$. In Tabel 3.13 zijn de invoerparameters te zien bij de variërende dwarscontractiecoëfficiënt. De elementgrootte van de mesh is gelijk aan 0,02 m.

Parameter	l	t	a	a/t	E	ν	P
Waarde	10000 mm	10 mm	1000 mm	100	210000 N/mm ²	0, ..., 0.5	100 kN

Tabel 3.13: Invoerparameters bij variërende dwarscontractiecoëfficiënten

4 Resultaten

In dit hoofdstuk zijn de resultaten met behulp van tabellen en grafieken weergegeven en toegelicht.

4.1 Lengte

De resultaten voor de doorbuiging voor variërende lengtes voor de korte en lange cilinder zijn respectievelijk in Tabel 3.5 en 3.6 te vinden. De bijhorende logaritmische plots zijn te zien in Figuur 4.1 en 4.2 op de volgende bladzijde. De relatieve fout hierbij is het verschil van de benadering van SCIA Engineer en de theoretische waarde gedeeld door de theoretische waarde. Het valt op dat er een grote positieve relatieve fout van 13,08% is bij $l = 10^5$ mm waarbij de lengte van de cilinder gelijk is aan de lengte die exact tussen een lange en korte cilinder valt. Dit is best logisch, omdat er geen formule is die tussen beide gevallen valt (bijvoorbeeld een soort aansluitingsformule). De grootste fout treedt op voor dezelfde lengte bij een lange cilinder van 19,02%.

l mm	u_z -formule mm	u_z -SCIA mm	Fout [%]
1000	433,33	424,4	-2,06
2000	216,67	203,8	-5,94
5000	86,67	79,7	-8,04
10000	43,33	39,5	-8,85
20000	21,67	19,9	-8,15
50000	8,67	8,5	-1,92
10^5	4,33	4,9	+13,08

Tabel 4.1: Resultaten voor variërende lengte bij korte cilinder

l mm	u_z -formule mm	u_z -SCIA mm	Fout [%]
10^5	41,34	49,2	+19,02
$2 \cdot 10^5$	41,34	37,9	-8,32
$5 \cdot 10^5$	41,34	35,8	-13,40
10^6	41,34	35,5	-13,40
$2 \cdot 10^6$	41,34	35,5	-14,12
$5 \cdot 10^6$	41,34	35,5	-14,12

Tabel 4.2: Resultaten voor variërende lengte bij lange cilinder

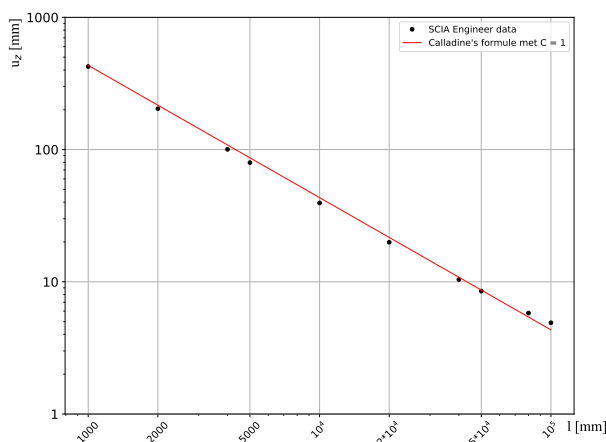


Fig. 4.1: Logaritmische plot van u_z tegenover l bij korte cilinder

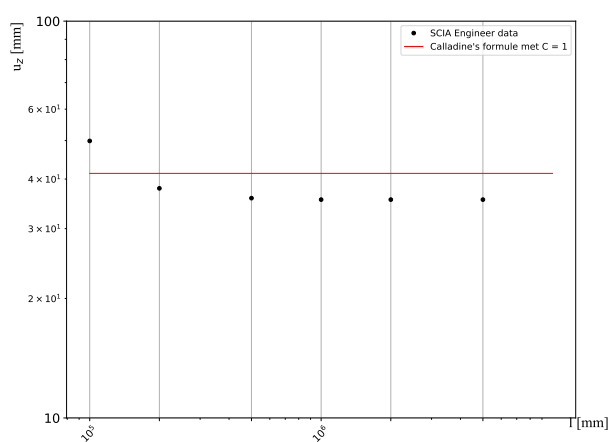


Fig. 4.2: Logaritmische plot van u_z tegenover l bij lange cilinder

4.2 Dikte

De resultaten voor de doorbuiging voor het variëren van de schaaldikte t voor een korte cilinder zijn in Tabel 4.3 weergegeven. Hierbij is ook een logaritmische plot gemaakt in Figuur 4.3. Bij deze resultaten is goed op te merken dat de verkregen data van SCIA Engineer parallel loopt met de rode lijn van de formule van Calladine (met een aangenomen C-coëfficiënt van 1). De ware C-coëfficiënt kan berekend worden door het resultaat van de SCIA Engineer-berekening te delen met de waarde van de formule van Calladine (waarbij C gelijk is aan 1). In de Tabel is op te merken wanneer de schaal steeds dunner wordt (en korter) dat de waarde van C_4 convergeert naar 0,898. De verbeterde functie met deze coëfficiënt is geplot met een blauwe gestreepte lijn.

t mm	a/t -	u_z -formule mm	u_z -SCIA mm	Fout %	C_4 -
200	30	0,23	0,2	-14,53	0,855
180	33,33	0,32	0,3	-6,54	0,935
160	37,50	0,46	0,4	-12,48	0,875
140	42,86	0,68	0,6	-12,05	0,879
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	666,67	2567,90	2309,6	-10,06	0,899
8	750	3656,25	3286,7	-10,11	0,899
7	857,14	5457,73	4903,4	-10,16	0,898
6	1000	8666,67	7781,8	-10,21	0,898

Tabel 4.3: Resultaten voor variërende t bij korte cilinder

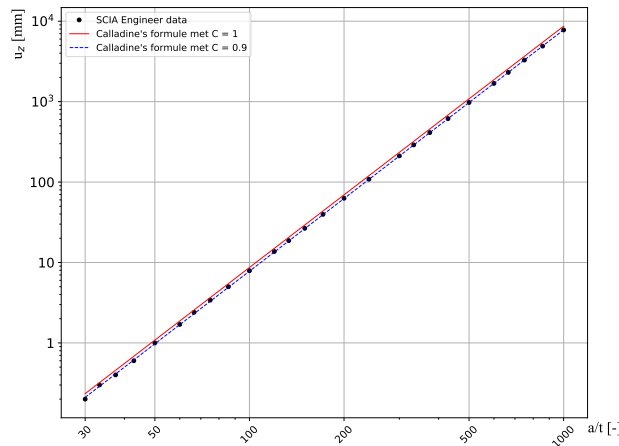


Fig. 4.3: Logaritmische plot van u_z tegenover a/t bij korte cilinder

4.3 Straal

De resultaten voor de doorbuiging voor variërende stralen voor de korte en lange cilinder zijn respectievelijk in Tabel 4.5 en 4.4 te vinden. De bijhorende logaritmische plots zijn te zien in Figuur 4.5 en 4.4.

Het valt op dat de relatieve fout tussen de benadering van SCIA Engineer en de formule van Calladine groot is richting de langere cilinders ($a=300$ mm, ..., 700 mm). Voor de waarde met een relatieve negatieve fout wordt er een gemiddelde genomen voor de coëfficiënt C_1 voor $a=300$ mm t/m $a=700$ mm. Dit geeft $C_1 = 0,90$. De verbeterde functie met deze coëfficiënt is geplot in Figuur 4.4 met een blauwe gestreepte lijn. Hierbij valt ook op te merken dat de punten van SCIA Engineer vanaf $a/t = 70$ steeds meer afwijken van de functie. Dit heeft te maken met dat de cilinder van lang naar kort gaat.

Als de cilinder weer in het korte regime komt is de relatieve fout aan het begin (bij $a/t = 100$) bijna 0. Echter, wanneer de straal en de straal/dikte verhouding meer toeneemt gaat deze relatieve fout weer naar een bepaalde waarde toe. In Tabel 4.5 is te zien dat de waarde van C_4 net als bij de resultaten van de variërende t

a mm	a/t -	u_z -formule mm	u_z -SCIA mm	Fout %	C_1 -
300	30	6,79	5,9	-13,14	0,869
400	40	10,46	9,2	-12,03	0,880
500	50	14,61	13,3	-9,00	0,910
600	60	19,21	17,6	-8,39	0,916
700	70	24,21	22,4	-7,48	0,925
800	80	29,58	29,3	-0,94	0,991
900	90	35,29	38,1	+7,95	1,079
1000	100	41,34	49,2	+19,02	1,190

Tabel 4.4: Resultaten voor variërende a bij lange cilinder

a mm	a/t -	u_z -formule mm	u_z -SCIA mm	Fout %	C_4 -
1000	100	8,67			
1500	150	29,25	29,10	-0,51	0,995
2000	200	69,33	65,50	-5,53	0,945
2500	250	135,42	125,30	-7,47	0,925
...	...	...	...	...	...
7000	700	2972,67	2672,10	-10,11	0,899
8000	800	4437,33	3986,40	-10,16	0,898
9000	900	6318,00	5674,00	-10,19	0,898
10000	1000	8666,67	7782,00	-10,21	0,898

Tabel 4.5: Resultaten voor variërende a bij korte cilinder

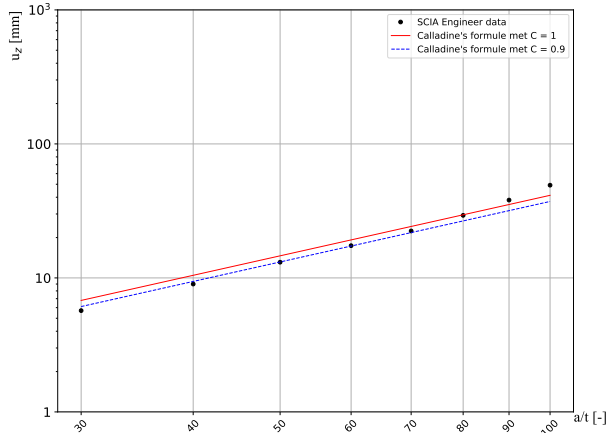


Fig. 4.4: Logaritmische plot van u_z tegenover a/t bij lange cilinder

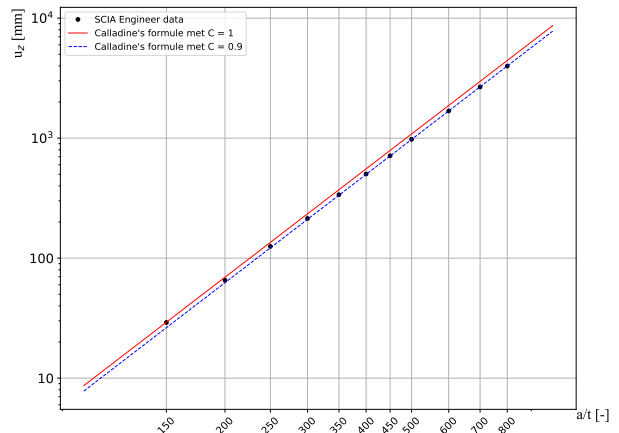


Fig. 4.5: Logaritmische plot van u_z tegenover a/t bij korte cilinder

naar een waarde van 0,898 convergeert. Dit geeft een bevestiging dat de coëfficiënt C_4 in formule 2.1 gelijk zou moeten zijn aan 0,90.

4.4 Dwarscontractiecoëfficiënt

De invloed van de term met de dwarscontractiecoëfficiënt is in Tabel 4.6 weergegeven.

ν -	u_z bij $f_1(\nu)$ mm	u_z bij $f_2(\nu)$ mm	u_z -SCIA mm	Fout bij $f_1(\nu)$ %	Fout bij $f_2(\nu)$ %
0	47,6	47,6	53,6	11,16	11,16
0,1	47,3	47,1	53,1	11,00	11,12
0,2	46,2	45,7	51,7	10,67	11,58
0,3	44,4	43,3	49,2	9,82	11,92
0,4	41,8	40,0	45,8	8,77	12,66
0,5	38,4	35,7	41,3	7,08	13,52

Tabel 4.6: Resultaten voor variërende ν bij lange cilinder

De waarden van $f_1(\nu)$ en $f_2(\nu)$ en de waarde van SCIA Engineer liggen nu nog ver van elkaar. Om dit te corrigeren wordt de doorbuiging van SCIA Engineer met $\nu = 0$ gedeeld door de doorbuiging van $f_1(\nu)$ en $f_2(\nu)$ met $\nu = 0$. In Tabel 4.7 zijn de nieuwe waarden weergegeven voor de doorbuiging ten gevolge van een variërende ν .

Het valt op dat voor $f_2(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}$ de laagste relatieve fouten optreden. Dit zal dan ook de juiste term moeten zijn voor de dwarscontractiecoëfficiënt ν . In Figuur 4.6 is nog een plot te zien die de verhoudingen laat zien van de verschillende termen voor ν .

ν -	u_z bij $f_1(\nu)$ mm	u_z bij $f_2(\nu)$ mm	u_z -SCIA mm	Fout bij $f_1(\nu)$ %	Fout bij $f_2(\nu)$ %
0	53,6	53,6	53,6	0,00	0,00
0,1	53,20	53,06	53,1	-0,18	0,07
0,2	51,98	51,46	51,7	-0,55	0,47
0,3	49,94	48,78	49,2	-1,50	0,86
0,4	47,03	45,02	45,8	-2,69	1,69
0,5	43,20	40,20	41,3	-4,59	2,66

Tabel 4.7: Resultaten voor variërende ν bij lange cilinder met correctie (verplaatsing van u_z -SCIA/ u_z - $f_{1,2}(\nu)$)

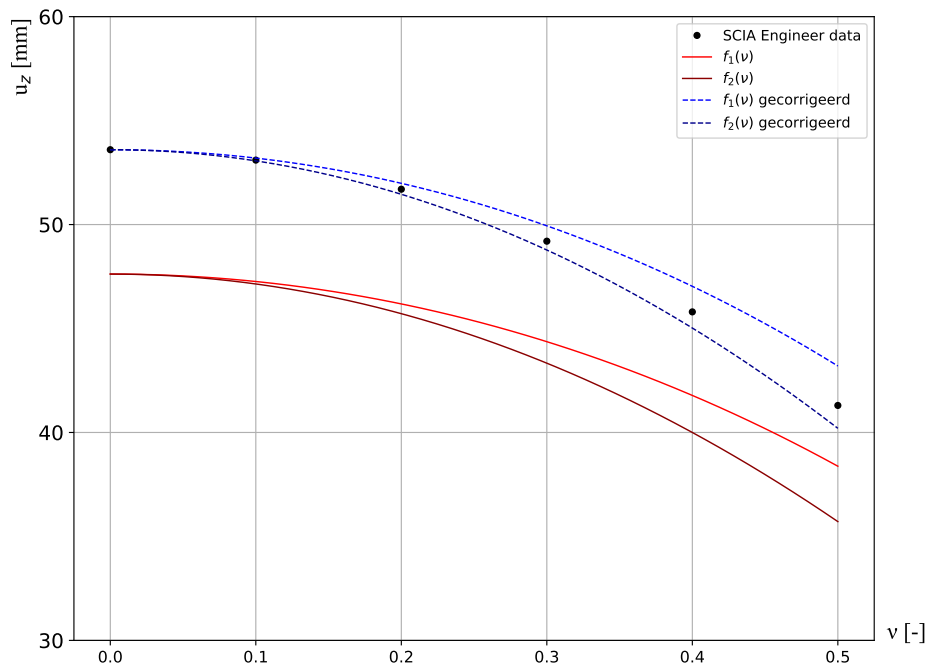


Fig. 4.6: Plot van u_z tegenover ν

5 Conclusie en aanbevelingen

5.1 Conclusie

Eerst volgt de beantwoording van de deelonderzoeksvragen. Vervolgens wordt er een antwoord gegeven op de hoofdonderzoeksvraag.

5.1.1 Deelonderzoeksvragen

1. Geometrie van de cilinder

De geometrie van de cilinder speelt de belangrijkste rol bij de berekening van de coëfficiënten:

Lengte

Voor korte cilinders zijn de fouten bij toenemende lengtes consistent, maar er ontstaat een significante fout van +13,08% bij lengtes die exact tussen de korte en lange cilinderregimes vallen. Dit wordt veroorzaakt door het ontbreken van een formule die beide regimes overbrugt. Voor lange cilinders blijft de fout binnen een redelijke marge, maar neemt af bij zeer lange cilinders.

Dikte

De relatieve fouten tussen de SCIA Engineer-resultaten en de theoretische waarden zijn klein en dalen bij toenemende schaaldikte. De coëfficiënt C_4 convergeert naar 0,898, wat bevestigt dat een verbeterde formule met $C_4 = 0,90$ betere resultaten oplevert.

Straal

Bij langere cilinders blijkt de coëfficiënt C_1 gemiddeld 0,90 te zijn in het lange cilinderregime. De formule wordt echter minder accuraat, aangezien de fout toeneemt voor toenemende straal-dikte-verhoudingen. Voor korte cilinder convergeert de C_4 coëfficiënt eveneens naar 0,90, net als bij de schaaldikte. Hierbij blijft de relatieve fout klein en consistent.

2. Dwarscontractiecoëfficiënt

Uit de resultaten blijkt dat de formule met $f_2(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}$ de laagste relatieve fouten oplevert, wat suggereert dat deze term de fysische invloed van ν beter weergeeft.

3. Afhankelijkheid van coëfficiënten van de cilinderafmetingen

De coëfficiënten zijn niet volledig onafhankelijk van de afmetingen, omdat ze afhankelijk zijn van verhoudingen zoals a/t en l/a . Deze verhoudingen zeggen of de schaal als kort of lang wordt gedefinieerd. Uit dit project blijkt dat de parameters a , l en t weinig invloed hebben op de coëfficiënten C_1 en C_4 , wat overeenkomt met Calladine's werk.

4. Beperkingen van de huidige formules en verbeteringen

Het valt op, wanneer de verhouding a/t naar een extreme waarde gaat, dat de waarde voor C_4 naar vaste

waarden convergeert, maar dit geldt niet voor het overgangsgebied van kort naar lang. De formules die er nu zijn hebben dus nog beperkingen, aangezien ze niet geschikt zijn voor de overgang van kort naar lang, wat kan leiden tot grote fouten. De nauwkeurigheid zou verbeterd kunnen worden door interpolatieformules te ontwikkelen voor het overgangsgebied.

5. Schalentheorie en SCIA Engineer-resultaten

De schalentheorie sluit grotendeels aan bij de resultaten van SCIA Engineer-simulaties, vooral voor korte cilinders en dunne schalen met hoge a/t verhoudingen. Voor lange cilinders en overgangsgebieden treden echter grote afwijkingen op. Dit zou te maken kunnen hebben met niet-lineaire effecten.

5.1.2 Hoofdonderzoeksvraag

De hoofdonderzoeksvraag die bij dit rapport centraal staat is:

"Wat zijn de coëfficiënten in de formules voor doorbuiging van een cilinder belast door een loodrechte puntlast?"

De coëfficiënten in de formules voor de doorbuiging van een cilinder onder een loodrechte puntlast worden grotendeels bepaald door de afmetingen l , t en a . De coëfficiënten C_1 en C_4 convergeren allebei naar een waarde van 0,90. Dit betekent dat de formules van Calladine hogere waarden geven dan in de realiteit het geval is.

5.2 Aanbevelingen

Voor verder onderzoek is het interessant om voor gesloten en korte ingeklemde cilinder ook nog onderzoek te doen.

Ook zou je fysieke schaalmodellen van de cilinderschalen kunnen maken om de validiteit van de theoretische modellen en de simulaties van SCIA Engineer te toetsen.

Bovendien kan er ook gekeken worden naar de overgangsgebieden van de cilinders van kort naar lang. De formules voor de doorbuiging die er nu zijn bevatten namelijk nog geen correctiefactoren voor deze overgang. Hierbij zou de nauwkeurigheid verbeterd kunnen worden door bijvoorbeeld interpolatieformules te ontwikkelen.

Literatuur

Calladine, C. R. (1977). Thin-walled elastic shells analysed by a rayleigh method. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 13, pages 515 – 530.

Calladine, C. R. (1983). *Theory of Shell Structures*. Cambridge University Press.

Hoogenboom, P. C. J. (2024). Notes on shell structures. https://phoogenboom.nl/b17_schedule.html. Technische Universiteit Delft.

Joostdevree (s.d.). Elasticiteitsmodulus. <https://www.joostdevree.nl/shtmls/elasticiteitsmodulus.shtml>.

A SCIA Engineer

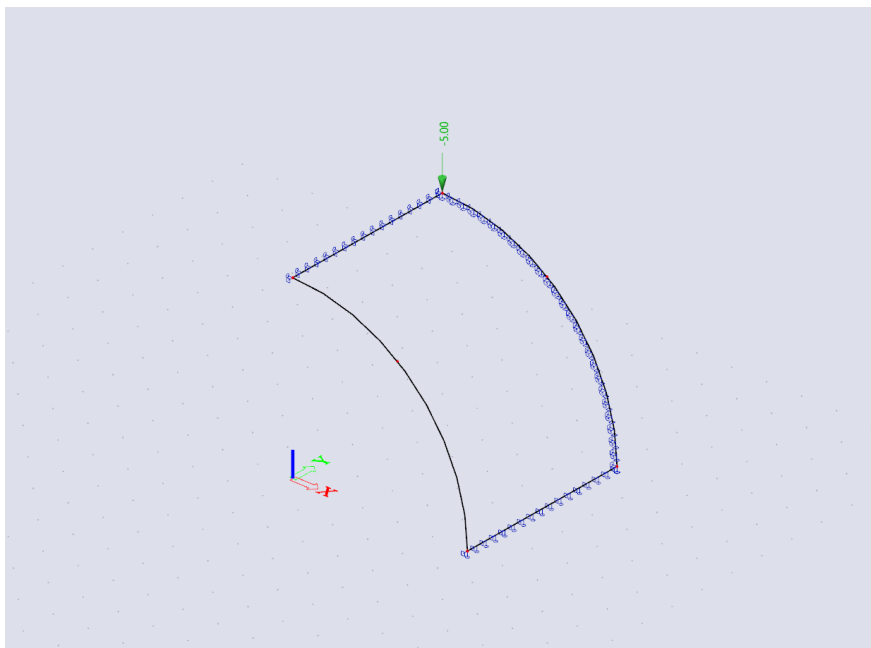


Fig. A.1: Invoer van een korte cilinder in SCIA Engineer

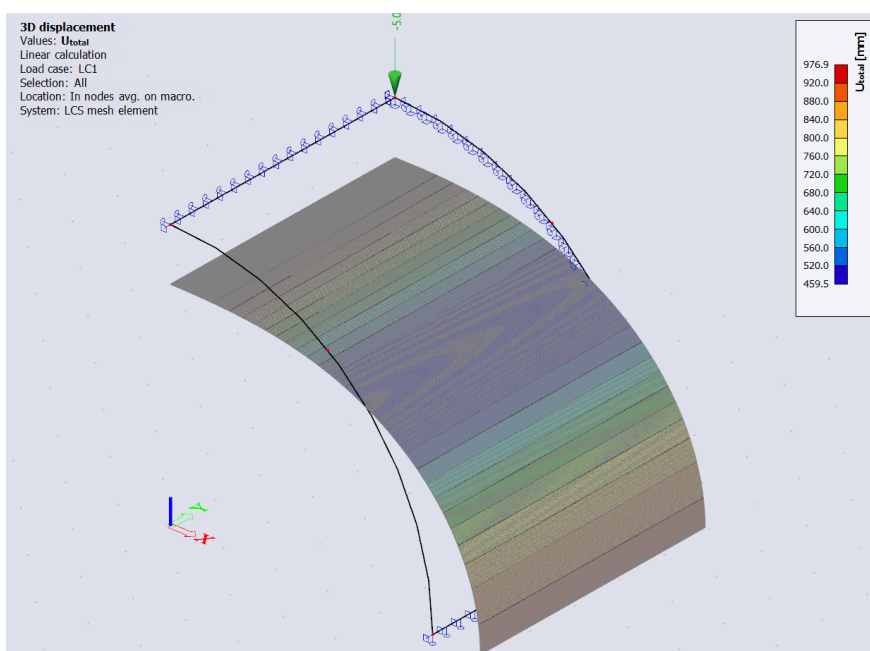


Fig. A.2: Vervorming van een korte cilinder in SCIA Engineer

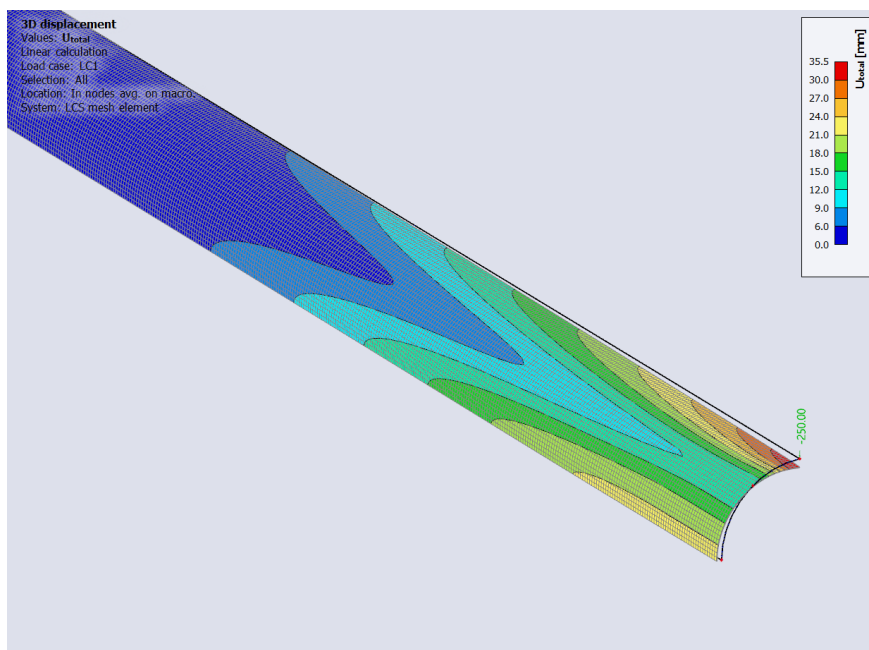


Fig. A.3: Vervorming van een (heel) lange cilinder in SCIA Engineer