

Bachelor Eindwerk

Doorbuiging van cilindrische schaalconstructies door puntlasten



Auteur:	G.S. van Bolderen
Studentnummer:	1545094
Datum:	28 juni 2012
Universiteit:	TU Delft
Faculteit:	Civiele Techniek en Geowetenschappen
Afdeling:	Structural Engineering
Eerste begeleider:	Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider:	ir. S. Pasterkamp

Voorwoord

In het kader van het bachelor eindwerk aan de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen aan de TU Delft is onderzoek gedaan naar doorbuiging van cilindrische schaalconstructies door puntlasten.

Hierbij wil ik mijn begeleiders dr.ir. Hoogenboom en ir. Pasterkamp bedanken voor hun ruimhartige begeleiding, adviezen en hulp bij het tot stand brengen van dit rapport.

Delft, juni 2012
Geoffrey van Bolderen

Inhoud

Samenvatting	v
Verklaring van symbolen	vi
1. Inleiding	1
1.1 Schaalconstructies	1
1.2 Probleemstelling	1
1.3 Onderzoeksvragen	2
2. Schaalconstructie en modellering	3
2.1 Eigenschappen schaalconstructies	3
2.2 Gaussiaanse kromming	3
2.3 Cilindermodel in ANSYS	4
2.4 Beperkingen en uitgangspunten van het cilindermodel	5
3. Invloed van parameters op verplaatsing	6
3.1 Keuze elementgrootte h	6
3.2 Invloed E en P	7
3.3 Invloed dwarscontractiecoëfficiënt ν	8
3.4 Invloed cilinderlengte g	8
3.5 Invloed schaaldikte t	10
3.6 Golven in cilinders	11
4. Lange rechte cilinder	16
4.1 Definitie lange rechte cilinder	16
4.2 Schaaldikte t	16
4.3 Cilinderstraal a_2	17
4.4 Dwarscontractie	18
4.5 Formule lange rechte cilinder	19
5. Korte rechte cilinder	21
5.1 Definitie korte rechte cilinder	21
5.2 Cilinderlengte g	21
5.3 Schaaldikte t	23
5.4 Cilinderstraal a_2	23
5.5 Dwarscontractie	25
5.6 Formule korte rechte cilinder	26
5.7 Referentie formule	27
6. Gekromde lange cilinder	28
6.1 Modelvorming	28
6.2 Invloed van kromming op doorbuiging	28
7. Gekromde korte cilinder	31
7.1 Modelvorming	31
7.2 Invloed van kromming op doorbuiging	31
8. Conclusie en aanbevelingen	34

Referenties en bronnen	35
Bijlage 1: ANSYS script	36
Bijlage 2: Nauwkeurigheid formule lange rechte cilinder	38
Bijlage 3: Data lengte-invloed op verplaatsing bij een korte cilinder	39
Bijlage 4: Nauwkeurigheid formule korte rechte cilinder	42
Bijlage 5: Verplaatsing - k_1 voor $tk_2 = 1/100, 1/60, 1/30, 1/10$ bij een lange kromme cilinder	44
Bijlage 6: Verplaatsing versus kromming van een korte cilinder voor $t = 1$	48

Samenvatting

De onderstaande formules geven een goede beschrijving van resultaten gegenereerd met het eindige elementenprogramma ANSYS. Op pagina 'vi' zijn de symbolen nader verklaart.

Lange cilinderschaal

Een lange cilinder is gedefinieerd als een cilinder waarbij de lengte g geen invloed heeft op de doorbuiging. De doorbuiging w door een puntlast P is:

$$w = 0.80 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0.75\nu^2) . \quad (4.7)$$

Onder voorwaarde dat $\frac{a_2}{t} > 10$ en $\frac{g}{a_2} \sqrt{\frac{t}{a_2}} > 4$ is de fout maximaal 2.5%. (hoofdstuk 4)

Korte cilinderschaal

Bij een korte rechte cilinder is de doorbuiging door een puntlast:

$$w = 0.30 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \sqrt{\frac{t}{a_2}} \sqrt{(1 - \nu^2)} . \quad (5.7)$$

Onder voorwaarde dat $\frac{a_2}{t} > 75$ en $0.07 < \frac{g}{a_2} \sqrt{\frac{t}{a_2}} < 2.3$ is de fout maximaal 10%. (hoofdstuk 5)

Lange cilinderschaal met enige Gaussiaanse kromming

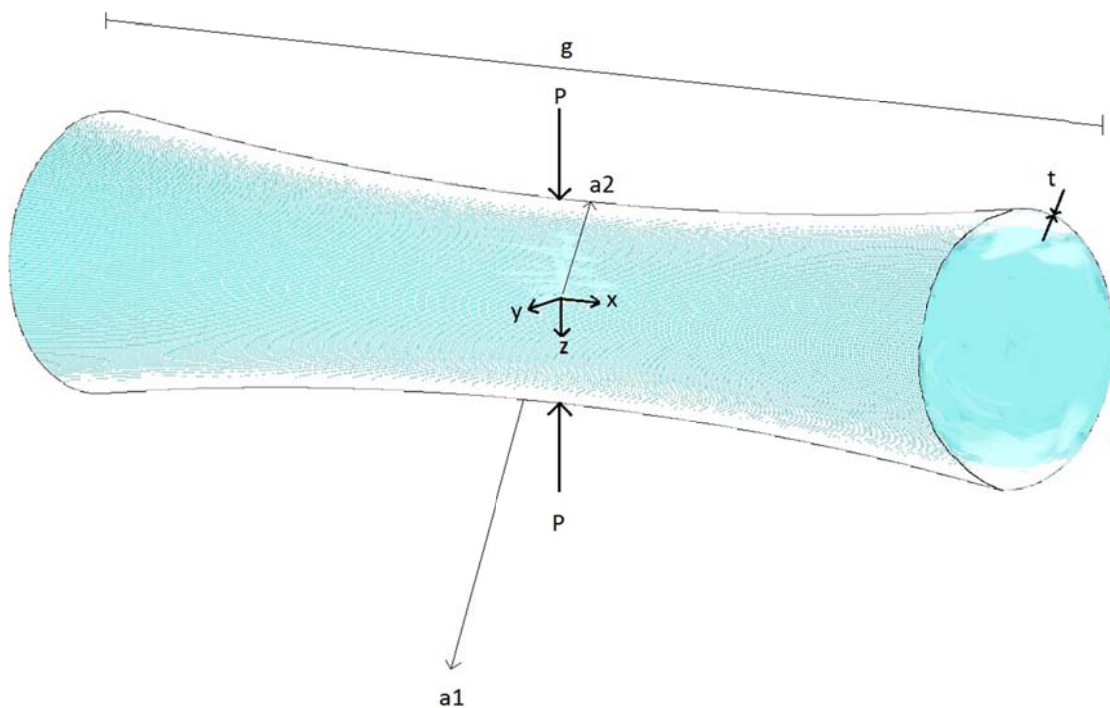
Een lange cilinder met enige positieve kromming is stijver dan een rechte cilinder met dezelfde afmetingen. Een lange cilinder met enige negatieve kromming is minder stijf dan een rechte cilinder met dezelfde afmetingen. Bij $a_2/t = 5000$ is de grootste afname 13% ten opzichte van een rechte cilinder (hoofdstuk 6).

Korte cilinderschaal met enige Gaussiaanse kromming

Een korte cilinder met een klein beetje positieve of negatieve kromming kan een factor 1.7 minder stijf zijn dan een rechte cilinder. Dit opvallende fenomeen is nog onverklaard (hoofdstuk 7).

Verklaring symbolen

P	Puntlast	[N]
t	Dikte cilinder	[mm]
g	Lengte cilinder	[mm]
a_1	straal in hoofdrichting 1	[mm]
a_2	straal midden van cilinder	[mm]
k_1	kromming in hoofdrichting 1	[1/mm]
k_2	kromming in hoofdrichting 2	[1/mm]
E	Elasticiteitsmodulus (Young's modulus)	[N/mm ²]
ν (ν)	Dwarscontractiecoëfficiënt (Poisson's ratio)	[-]
h	Elementgrootte	[mm]
w (u_z)	Zakking onder puntlast	[mm]



Figuur 1: Cilindermodel met assenstelsel en grootheden

1. Inleiding

1.1 Schaalconstructies

Schaalconstructies zijn lichtgewicht vlakconstructies bestaande uit schaalelementen. Deze elementen kunnen meerdere krommingen hebben en samen grote constructies vormen. Een voorbeeld van een schaalconstructie is een gridshell, die zijn sterkte ook ontleent aan zijn dubbele kromming, maar bestaat uit een grid of rooster.

Toepassing van schaalconstructies vindt regelmatig plaats in de bouw, vliegtuig- en auto-industrie. In de bouw voornamelijk bij dakconstructies, waar het dak van het British Museum in Londen een bekend voorbeeld is.



Figuur 2: Gridshell British Museum

1.2 Probleemstelling

Schaalconstructies worden meestal gemodelleerd in eindige-elementenprogramma's als ANSYS¹. Echter, met beperkte tijd en kennis is het op deze manier doorrekenen van de modellen voor een ingenieur niet handig. Een ingenieur wil graag een vlotte schatting kunnen maken met een simpele formule. Een dergelijke formule voor de verplaatsing bij belasting door een puntlast ontbreekt tot nu toe.

De doorbuiging van een schaal onder loodrechte belasting van een puntlast, hangt af van het product van de krommingen (Gaussiaanse kromming). Dit blijkt uit het bachelor-onderzoek van Amir Semiari². Cilinders vormen hierop een uitzondering, aangezien de stijfheid van het oppervlak afhangt van kromming in één richting. (De Gaussiaanse kromming is nul.) Het is onduidelijk hoe de doorbuiging

verandert bij de overgang van kromming in één richting naar kromming in twee richtingen (Gaussiaanse kromming ongelijk aan nul). Het begrijpen van deze overgang kan de sleutel zijn tot het begrijpen van krachtsafdracht, knikgedrag en trillingsgedrag van dunne schalen.

De reeds door Amir Semiari afgeleide formule voor de doorbuiging van een rechte cilinder³ is afgeleid uit elementenmodellen van enkel gekromde paraboloïden. Hierbij bleek het niet mogelijk om de invloed van de randen te elimineren. Zoals door hem aanbevolen zal in dit onderzoek worden gekeken naar elementenmodellen van cilinders.

1.3 Onderzoeksvragen

Hoofdvraag:

Wat is onder loodrechte belasting van een puntlast het verband tussen de doorbuiging en kromming van cirkelvormige cilinders en hoe wordt deze beïnvloed door de Gaussiaanse kromming

Deelvragen:

1. Wat is Gaussiaanse kromming, en waarom is dit van belang voor schaalconstructies?
2. Wat is het verband tussen verplaatsing w onder de puntlast P en de krommingen k_1 en k_2 bij een cilinder.
3. Welke invloed hebben schaaldikte t , cilinderlengte g , elasticiteitsmodulus E , en dwarscontractiecoëfficiënt ν op verplaatsing w ? Welke formule beschrijft dit verband?
4. Wat zijn de beperkingen van deze formule en hoe nauwkeurig is deze benadering in ANSYS?

2. Schaalconstructie en modellering

2.1 Eigenschappen schaalconstructies

Een dunne schaal is gedefinieerd als een schaal met een dikte die klein is ten opzichte van zijn andere dimensies: $t \leq \frac{\text{cilinderstraal} (a^2)}{500}$

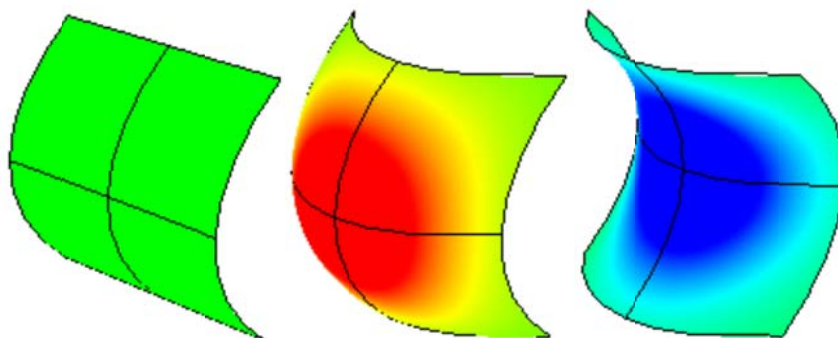
Vervormingen dienen niet groot te zijn vergeleken met de schaaldikte. Het grootste verschil tussen een plaatconstructie en een schaalconstructie, is dat een schaalconstructie in onbelaste toestand krommingen heeft, terwijl een plaat vlak is.

Membraanwerking in een schaal wordt voornamelijk veroorzaakt door inwendige krachten, echter bij vervormingen door buiging kunnen secundaire krachten ontstaan. Het gedrag van een plaat kan vergeleken worden met een ligger (zowel buig- schuifspanning). Zo kan analoog een schaal worden vergeleken met een kabel die krachten opneemt door trekspanningen. Desondanks zal een ideale schaal in staat moeten zijn zowel trek als drukspanning op te nemen.

2.2 Gaussiaanse kromming

Zoals reeds in de inleiding is aangehaald, is de verplaatsing van een schaalconstructie onder belasting van een puntlast afhankelijk van de Gauss-kromming. Hier volgt een korte toelichting op het begrip.

Gaussiaanse kromming van een oppervlak in een punt is het product van de (hoofd)krommingen in dat punt: $k_G = k_1 \cdot k_2 = k_x \cdot k_y - k_{xy}^2$. Platen, cilinders en pylonen hebben een Gauss-kromming gelijk aan nul. De Gaussische kromming is van belang voor de zakking van een schaal door een loodrechte puntbelasting. Een grote Gaussische kromming (absolute waarde) geeft een kleine zakking. De Gaussische kromming is ook van belang voor de membraanspanningen in een schaal. Dit treedt op als de Gaussische kromming verandert tijdens belasten.



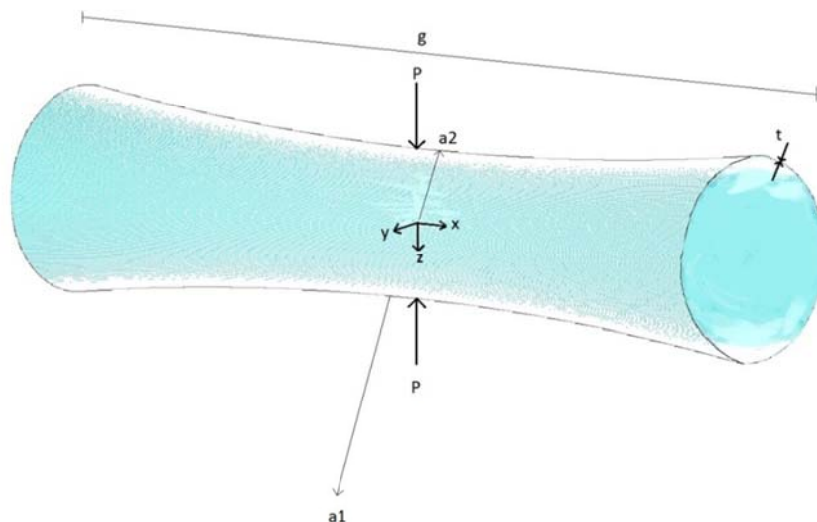
Figuur 3: Gaussiaanse kromming respectievelijk nul, positief en negatief

2.3 Cilindermodel in ANSYS

Omdat het overgangsgebied tussen positieve en negatieve en Gaussiaanse kromming wordt onderzocht, dient in het cilindermodel een kromming aangebracht te worden. Immers, een rechte cilinder heeft een Gaussiaanse kromming gelijk aan nul.

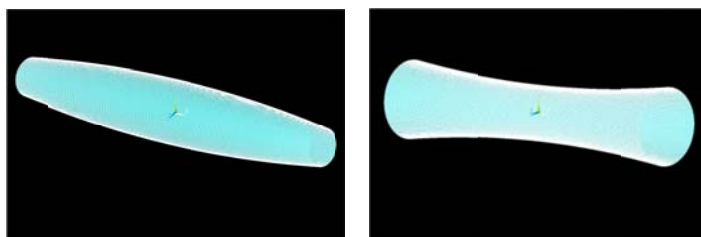
Voor de berekeningen aan het cilindermodel wordt gebruik gemaakt van het eindig-elementenprogramma ANSYS. Dit model wordt gegenereerd met een script (bijlage 1) in APDL-code, de programmeertaal van ANSYS.

Om een formule af te leiden voor de verplaatsing onder een puntlast, dient er een last aangebracht te worden. Een enkele last resulteert in globale dwarskrachten ongelijk aan nul. Dit is niet wenselijk aangezien alleen de lokale verplaatsing van de cilinder onder de puntlast (P) wordt onderzocht. Door twee tegengestelde krachten van gelijke grootte te plaatsen op dezelfde werklijn ontstaat krachteenwicht, waardoor de globale dwarskracht nul wordt. In het midden van de cilinder wordt een Carthesisch assenstelsel aangenomen met in onderstaande figuur aangegeven richtingen. Voor de beschrijving van de grootheden wordt verwezen naar 'verklaring van symbolen'.



Figuur 4: Cilinder met assenstelsel en grootheden

Door de stralen (a_1 en a_2) ofwel krommingen te variëren en de invloed van overige parameters te onderzoeken is het mogelijk om een formule voor de verplaatsing af te leiden. De cilinder kan zowel positief als negatief gekromd worden, zodat het verband tussen deze overgang onderzocht kan worden.



Figuur 5 en 6: Positief en negatief gekromde cilinder

2.4 Beperkingen en uitgangspunten van het cilindermodel

De resultaten van dit onderzoek worden gegenereerd door het eindige-elementenprogramma ANSYS. Of de uitkomsten voldoende nauwkeurig zijn hangt sterk af van de keuze voor de elementgrootte (h). Bij grote elementen zullen de uitkomsten te onnauwkeurig zijn, maar een te kleine elementgrootte kan zorgen voor een onacceptabel lange rekentijd. Hierin zal een balans gevonden moeten worden.

In dit model gaan we uit van isotroop materiaal. De fysische eigenschappen, ofwel in dit model de E-modulus en Poisson's ratio, zullen over de gehele cilinderlengte gelijk zijn. Anisotroop materiaal zou lokale verstoringen kunnen veroorzaken in het model, wat beantwoorden van de onderzoeksvraag onnodig bemoeilijkt.

In ANSYS is gebruik gemaakt van een lineair-elastische berekening. Dit betekent volgens de wet van Hooke ($\sigma = E * \epsilon$), dat een toename van de spanning leidt tot een evenredige toename van de rek (en dus verplaatsing). Als wordt gekeken naar bezwijkanalyse zal plastisch gedrag onvermijdelijk zijn. Hier kan het model geen rekening mee houden, aangezien het louter lineair-elastisch rekent.

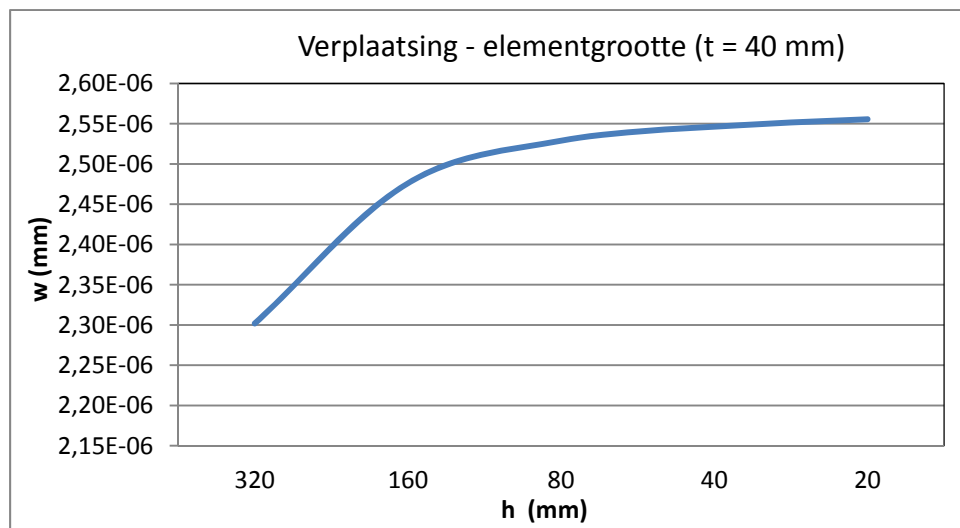
3. Invloed van parameters op doorbuiging

3.1 Keuze elementgrootte h

Aangezien in dit onderzoek wordt gewerkt met een elementenmodel, dient een keuze te worden gemaakt voor een elementgrootte. De voornaamste eis is dat deze waarde klein genoeg wordt gekozen zodat de oplossing voldoende nauwkeurig is. Een beperking hierbij vormt de rekentijd die flink oploopt bij kleinere elementen en grotere modellen.

Om dit te onderzoeken is gebruikt gemaakt van een convergentietest. Voor de gekozen parameters lijken de waarden van de verplaatsing (w) voldoende te convergeren bij elementgrootte $h = 40$ mm. Opvallend is de enorm toenemende rekenduur bij een kleinere elementgrootte, wat gezien de beperkte tijd voor het verloop van het onderzoek een factor van belang is. De rekentijd weergegeven in de tabel geldt voor de gekozen parameters, echter bij toenemende straal a_2 en toenemende lengte van de cilinder is de rekentijd nog langer. Na analyse blijkt dat een waarde van $h = 50$ mm een acceptabele rekentijd geeft voor het onderzoeksgebied. Dit betekent dat de 'puntlast wordt uitgesmeerd over een element van circa 50 mm^2 .

$a_1 = -1\text{e}6 \text{ mm}$ $a_2 = 1\text{e}3 \text{ mm}$ $t = 40 \text{ mm}$ $P = 1 \text{ N}$ $E = 1\text{e}6 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0$ $g = 25000 \text{ mm}$	$h \text{ (mm)}$	$w \text{ (mm)}$	$\text{delta } w$	calc.time (min)
	320	2,3018E-06		< 1
	160	2,4762E-06	7,58%	< 1
	80	2,5289E-06	2,13%	< 1
	40	2,5464E-06	0,69%	3
	20	2,5556E-06	0,36%	30

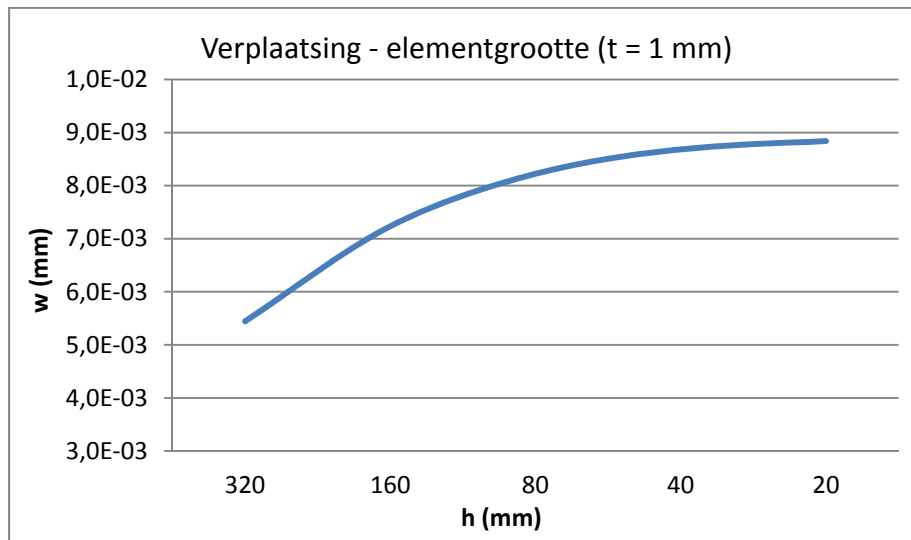


Figuur 7: Verplaatsing versus elementgrootte ($t = 40 \text{ mm}$)

Uit de analyse blijkt dat bij afnemende schaaldiktes (t) de verplaatsing toeneemt en de oplossing langzamer convergeert (zie figuur 8). Dit ligt in de lijn der verwachting, aangezien de elementgrootte (voor bijvoorbeeld $t = 1 \text{ mm}$) vele malen groter is dan de schaaldikte. In combinatie met de toenemende verplaatsing resulteert dit in een grotere 'fout' bij de gekozen elementgrootte. Echter, een perfecte puntlast bestaat in de praktijk niet. Een keuze voor $h = 50 \text{ mm}$ is om die reden acceptabel.

$a_1 = -1e6 \text{ mm}$
 $a_2 = 1e3 \text{ mm}$
 $t = 1 \text{ mm}$
 $P = 1 \text{ N}$
 $E = 1e6 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0$
 $g = 25000 \text{ mm}$

h (mm)	w (mm)	delta w
320	5,4449E-03	
160	7,2345E-03	32,87%
80	8,2236E-03	13,67%
40	8,6830E-03	5,59%
20	8,8390E-03	1,80%



Figuur 8: Verplaatsing versus elementgrootte (t = 1 mm)

3.2 Invloed E en P

De verplaatsing onder de puntlast bij een cilinder hangt af van de volgende variabelen: kracht (P), dikte van de schaal (t), lengte van de cilinder (g), Elasticiteitsmodulus (E), dwarscontractiecoëfficiënt (ν) en de stralen a_1 en a_2 . Aangezien hier een lineair elastisch model wordt gebruikt, is de verplaatsing onder de puntlast evenredig met de krachtgrootte. Evenzo is deze verplaatsing omgekeerd evenredig met de E-modulus.

$$w \approx \frac{P}{E} \quad (3.1)$$

Na controle blijkt dit voor het gebruikte cilindermodel inderdaad te kloppen. De overige afhankelijkheden dienen nog te worden vastgelegd, zodat de functie er als volgt uit ziet:

$$w \approx \frac{P}{E} * f(g, t, \nu, a_1, a_2) \quad (3.2)$$

3.3 Invloed dwarscontractiecoëfficiënt ν

De dwarscontractiecoëfficiënt, ofwel Poisson's ratio, is een materiaalconstante die beschrijft hoe materiaal reageert op trek of druk. Deze ratio geeft aan hoeveel rek er loodrecht op de trek of drukrichting ontstaat. De voor schaalconstructies relevante materialen hebben een Poisson's ratio tussen de 0 en 0,5. Uit het onderzoek van A. Semiari¹ blijkt dat deze afhankelijkheid voor koepels met een nauwkeurigheid van 1% gelijk was aan $1-0.5\nu^2$. In dit geval wordt de formule als volgt:

$$w \approx \frac{P}{E} * f(g, t, a_1, a_2) * (1 - 0.5\nu^2) \quad (3.3)$$

Of deze aanname ook voor gekromde cilinders correct is dient te worden onderzocht. Omdat de Poisson's ratio een kleine invloed heeft op de verplaatsing, wordt deze in den beginne op nul gesteld. Later zal deze invloed in de formule verdisconteerd worden.

$$w \approx \frac{P}{E} * f(g, t, a_1, a_2) \quad (3.4)$$

3.4 Invloed cilinderlengte g

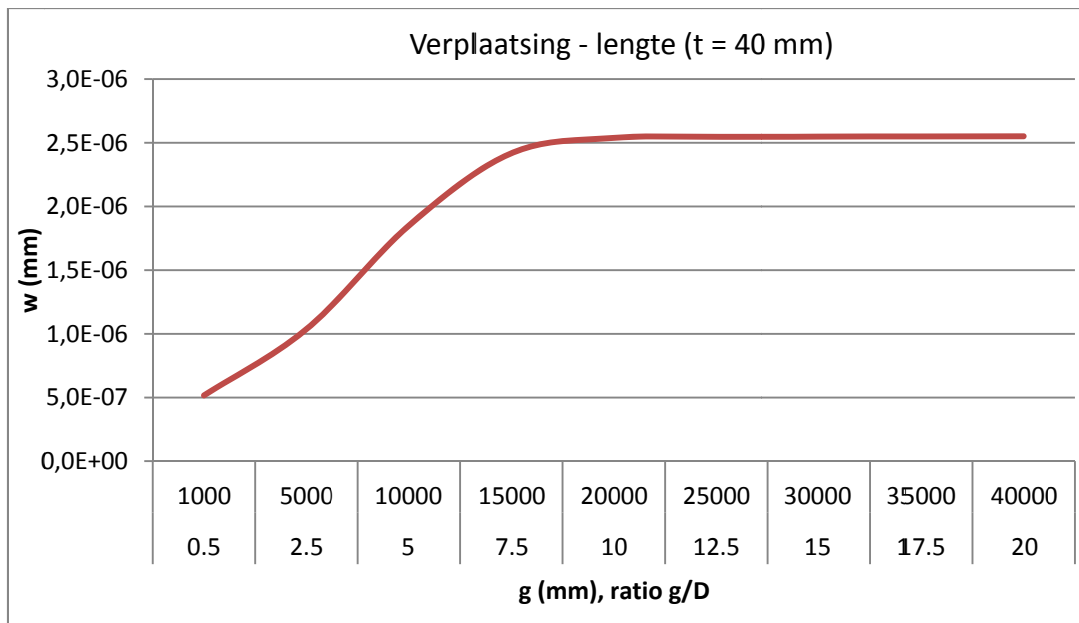
Eén van de conclusies uit het onderzoek van A. Semiari, is dat de lengte-invloed bij de verplaatsing onder de puntlast bij cilinders groot is en dat deze nader bepaald dient te worden.

Omdat het gewenst is deze lengte-invloed in eerste instantie uit te sluiten, dient te worden onderzocht voor welke lengte de verplaatsingen voldoende geconvergeerd zijn. Voor een cilinderdikte $t = 40\text{mm}$ en variërende cilinderlengtes vinden we de volgende relatie tot de zakking.

a₁ = -1e6 mm a₂ = 1e3 mm t = 40 mm P = 1 N E = 1e6 N/mm² ν = 0 h = 50 mm	ratio g/D	g (mm)	w (mm)	delta w
	0.5	1000	5,1603E-07	> 50%
	2.5	5000	1,0366E-06	> 50%
	5	10000	1,8497E-06	> 50%
	7.5	15000	2,4177E-06	30,70%
	10	20000	2,5379E-06	4,970%
	12.5	25000	2,5464E-06	0,335%
	15	30000	2,5477E-06	0,051%
	17.5	35000	2,5499E-06	0,086%
	20	40000	2,5511E-06	0,047%

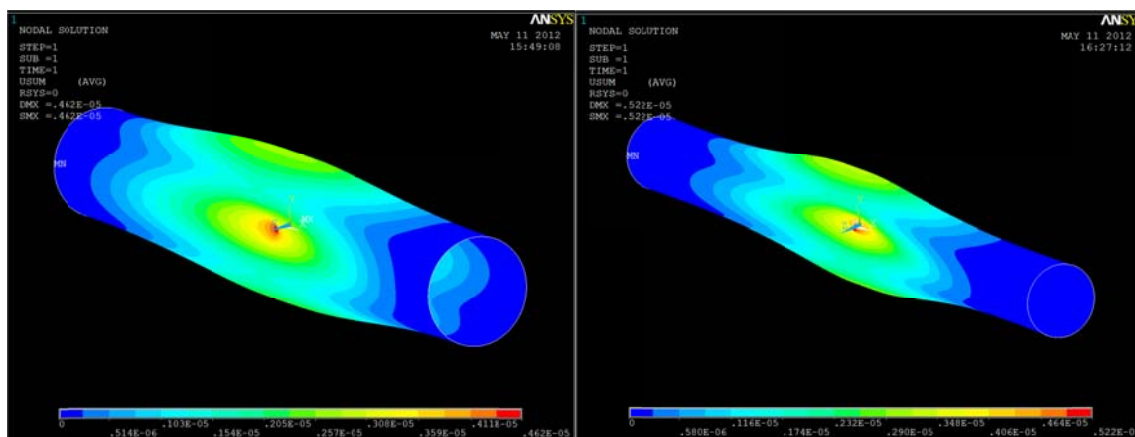
Zowel in figuur 9, als in de tabel, is te zien dat voor toenemende lengte de waarden voor de verplaatsing convergeren naar een constante waarde. Dit zou betekenen dat de lengte-invloed voor de gekozen parameters bij een lengte van 20 à 25 meter of langer te verwaarlozen is. In dat geval kunnen we de afhankelijkheid van de lengte uitsluiten in de formule.

$$w \approx \frac{P}{E} * f(t, a_1, a_2) \quad \text{voor } g > 20m \quad (3.5)$$



Figuur 9: Verplaatsing versus lengte (t = 40 mm)

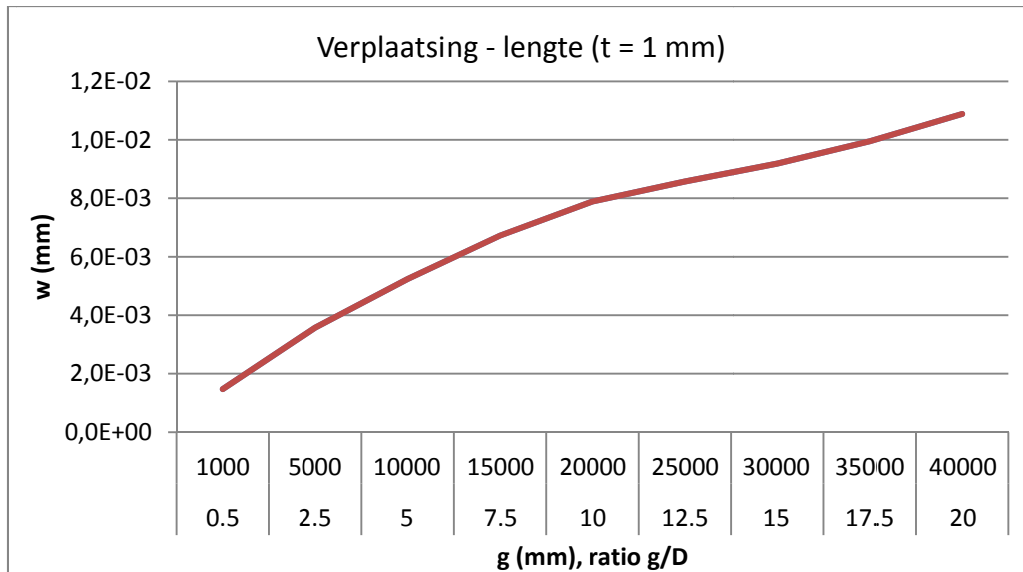
Ook grafisch is te zien dat bij een grotere lengte de invloed op de verplaatsing minimaal is.



Figuur 10: grafische weergave van verplaatsing voor g = 15 m en g = 25 m bij t = 40 mm

Na nadere analyse en variëren van parameters blijkt bovenstaande relatie afhankelijk te zijn van de dikte, waardoor de lengte-invloed niet uniform uit te sluiten is voor variërende parameters.

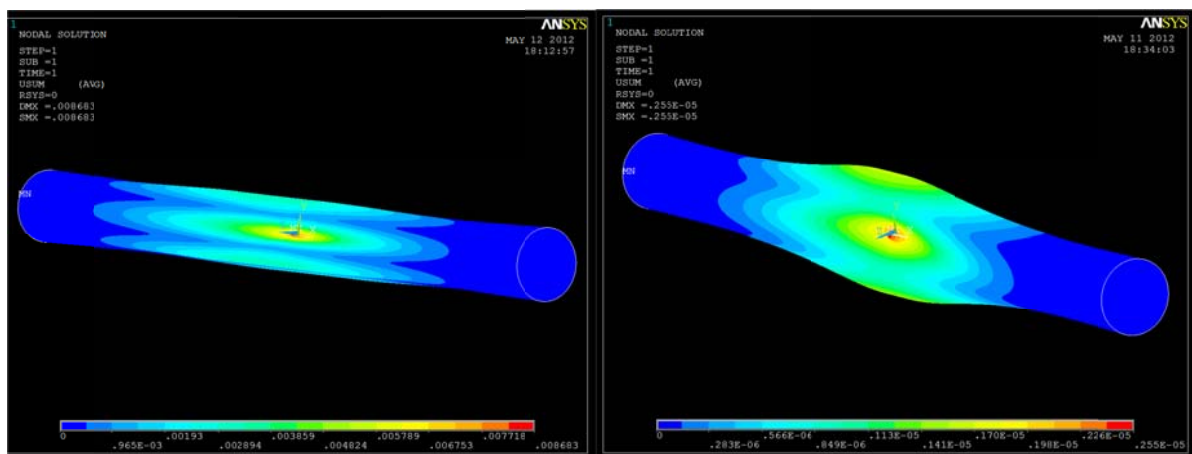
$a_1 = -1\text{e}6 \text{ mm}$ $a_2 = 1\text{e}3 \text{ mm}$ $t = 1 \text{ mm}$ $P = 1 \text{ N}$ $E = 1\text{e}6 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0$ $h = 50 \text{ mm}$	ratio g/D	g (mm)	w (mm)	delta w
	0.5	1000	1,4728E-03	> 50%
	2.5	5000	3,5739E-03	> 50%
	5	10000	5,2401E-03	46,62%
	7.5	15000	6,7237E-03	28,31%
	10	20000	7,8898E-03	17,34%
	12.5	25000	8,5763E-03	8,70%
	15	30000	9,1897E-03	7,15%
	17.5	35000	9,9493E-03	8,27%
	20	40000	1,0887E-02	9,42%



Figuur 11: Verplaatsing versus lengte (t = 1 mm)

In figuur 11 is te zien dat bij dezelfde parameters en enkel een kleinere t-waarde de verplaatsing nog niet convergeert voor lengtes tot 40 meter. De lengte-invloed is dus afhankelijk van t. Nu zijn er twee mogelijkheden. De lengte-invloed verwaarlozen bij bepaalde waarden van t, of de lengte g implementeren in de formule voor de verplaatsing.

Onderstaand grafisch de dikte-invloed op de verplaatsingen. Bij kleinere schaaldiktes lijken de verplaatsingen zich meer 'uit te smeren' over de lengte van de cilinder.



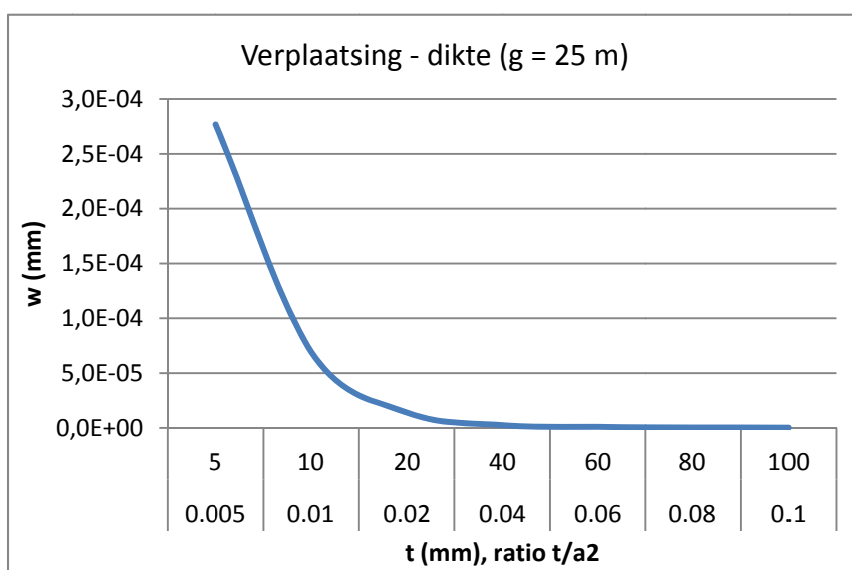
Figuur 12: grafische weergave verplaatsing bij respectievelijk t = 1 mm en t = 40 m voor g = 25 m

3.5 Invloed schaaldikte t

In bovenstaande analyse is gebleken dat zowel de lengte-invloed als de nauwkeurigheid van de oplossing bij bepaalde elementgrootten afhankelijk is van de schaaldikte t. Voor een constante straal en constante lengte (25 m) blijkt een volgend globaal verband tussen de dikte en de verplaatsing. De toenemende dikte zorgt voor een (bij benadering) kwadratisch afnemende verplaatsing w (figuur 13).

$a_1 = -1\text{e}6 \text{ mm}$
$a_2 = 1\text{e}3 \text{ mm}$
$g = 25000\text{mm}$
$P = 1 \text{ N}$
$E = 1\text{e}6 \text{ N/mm}^2$
$\nu = 0$
$h = 50 \text{ mm}$

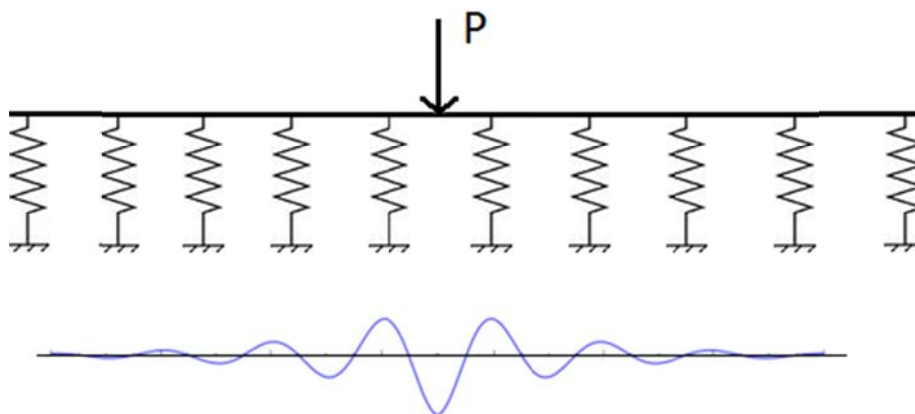
ratio t/a_2	$t \text{ (mm)}$	$w \text{ (mm)}$
0.0001	0.1	1,5292E+00
0.001	1	8,6830E-03
0.005	5	2,7686E-04
0.01	10	6,9452E-05
0.02	20	1,4200E-05
0.04	40	2,5464E-06
0.06	60	9,3107E-07
0.08	80	4,5878E-07
0.1	100	2,6628E-07
0.2	200	5,1511E-08
0.5	500	7,7048E-09



Figuur 13: Verplaatsing versus schaaldikte ($g = 25 \text{ m}$)

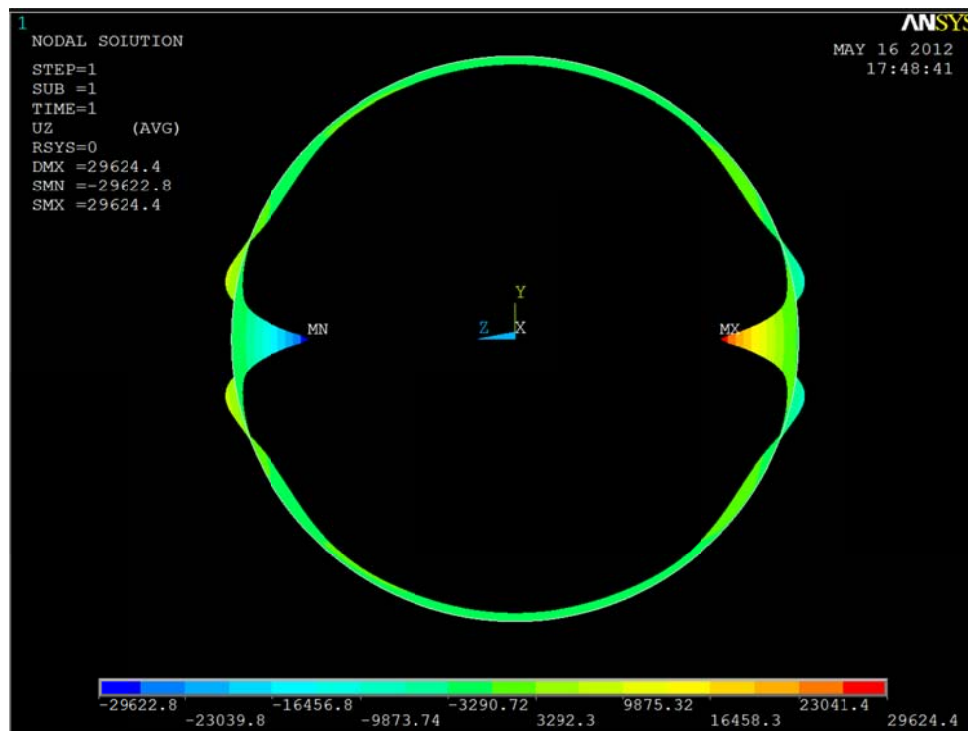
3.6 Golven in cilinders

Een andere invloed blijkt een rol te spelen bij de verplaatsing. Door belasting met een puntlast gaat de cilinder golfjes vertonen in laterale (en axiale) richting. Dit verschijnsel is te modelleren als een door veren opgelegde ligger, belast met een puntlast.



Figuur 14: Modellerings golfwerking cilinder en de doorbuiging

De golven zijn goed te zien bij een dwarsdoorsnede in het midden van de cilinder. Zowel links als rechts is de cilinder belast door een puntlast, waarna de golfwerking en demping te zien is ten gevolge van de cilinderstijfheid.



Figuur 15: golven in cilinderdoorsnede bij $t = 1$ mm, $a_1 = -5e5$ mm en $a_2 = 5e3$ mm

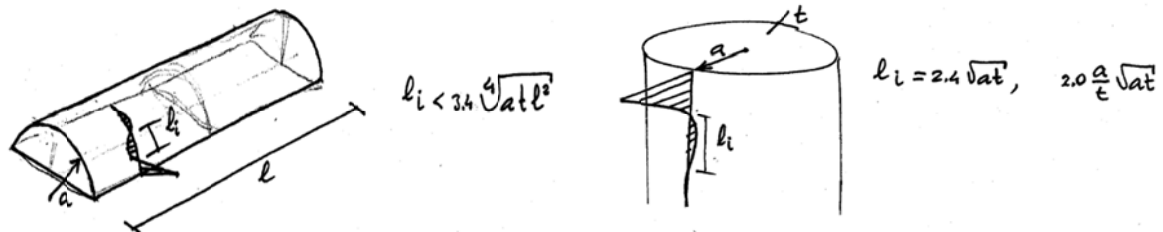
Deze golfwerking blijkt na grafisch onderzoek afhankelijk te zijn van de cilinderlengte, schaaldikte, en de cilinderstraal. Bij een grotere cilinderstraal hebben de golven door de grotere omtrek, langer om uit te dempen. Echter bij een kleinere cilinderstraal a_2 kunnen de golven ten gevolge van de ene puntlast met de golven ten gevolge van de andere puntlast interfereren. De verplaatsing onder de puntlast wordt zo beïnvloed. Om valse resultaten te voorkomen, dient dit fenomeen nader te worden verklaard.

Analytisch wordt het volgende verband gelegd tussen de cilinderafmetingen en de golflengte (figuur 16)⁴. Er kan onderscheid worden gemaakt tussen golven in axiale en in laterale richting van de cilinder. De invloedlengte l_i in de richting van de lengte-as is afhankelijk van de cilinderstraal en schaaldikte. Aan de hand van deze formule is te bepalen voor welke waarden van a_2 en t de axiale golfwerking, en daarmee de lengte-invloed uit te sluiten is. Dit scheelt een extra variabele in de formule. Reeds (par. 3.4) is een verband gevonden tussen de dikte en de lengte-invloed. Voor een dikte $t = 40$ mm convergeert de lengte-invloed op de zakking vanaf $g = 20$ meter, maar voor $t = 1$ mm nadert de zakking bij $g = 40$ meter nog niet naar een constante waarde. De maximale invloedlengte l_i is volgens onderstaande formule gelijk aan $\frac{2a_2}{t} \sqrt{a_2 t}$, wat voor de eerder gekozen waarde $a_2 = 1000$

mm en $t = 40$ mm respectievelijk $t = 1$ mm levert: $l_i = 10$ m en $l_i = 63,25$ m. Deze invloedlengte is de waarde van golfknoop tot golfknoop. Uit de modellen in ANSYS is te zien dat de golf na deze invloedlengte nog niet volledig is gedempt. De werkelijke invloed van de golf reikt dus nog verder dan de analytisch berekende waarden van de invloedlengte. Dit komt overeen met de conclusie uit paragraaf 3.4, dat bij $t = 40$ m de axiale golf volledig lijkt gedempt na ongeveer $g = 20$ meter en dat

voor $t = 1$ mm bij een cilinderlengte g tot 40 meter de verplaatsing nog niet nadert naar een constante waarde. Dit zou immers volgens de formule pas het geval moeten zijn na ruim 63 meter. De lengte-invloed valt voor deze schaaldikte dus niet uit te sluiten bij een aangenomen $g = 25$ m.

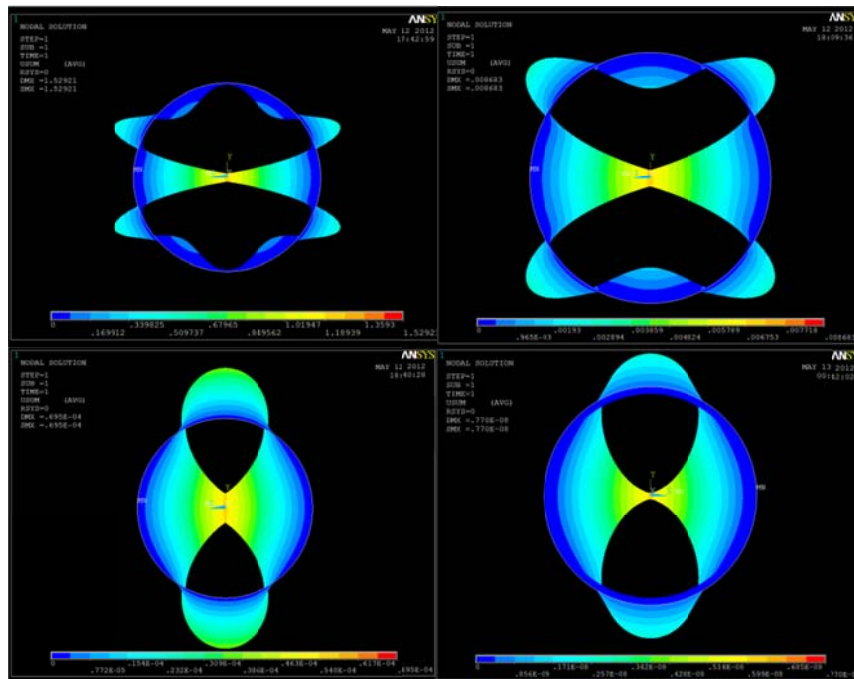
Onderstaande analytische formule laat zien dat voor een kleinere t -waarde, de invloedlengte afneemt. Dit is in strijd met hetgeen gevonden in paragraaf 3.4. De conclusie is dat de golfwerking in axiale richting van de cilinder niet maatgevend is voor de lengte-invloed op de zakking. Deze formules zijn afgeleid voor rechte cilinders. Wat de invloed van krommingen van de cilinder is op de invloedlengte van de golven is onbekend.



Figuur 16: Invloedlengten bij laterale (links) en axiale golven (rechts) in een (rechte) cilinder

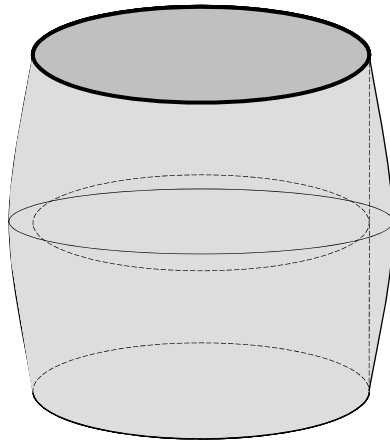
De golfwerking in laterale richting blijkt uit de formule ook sterk afhankelijk te zijn van de cilinderlengte. Aangezien in paragraaf 3.4 de lengte-invloed groot is gekozen (25 m), wordt de invloedslengte volgens deze formule erg groot. Dit zou betekenen dat voor nagenoeg elke waarde van t en a_2 de laterale golven elkaar beïnvloeden.

Dit blijkt ook uit grafisch onderzoek (figuur 17). Links- en rechtsonder zijn twee golven geconstateerd, bij kleinere schaaldiktes rechts en linksboven respectievelijk vier en zes. Een oneven aantal golven is niet mogelijk, omdat beide puntlasten altijd minstens één golf creëren.



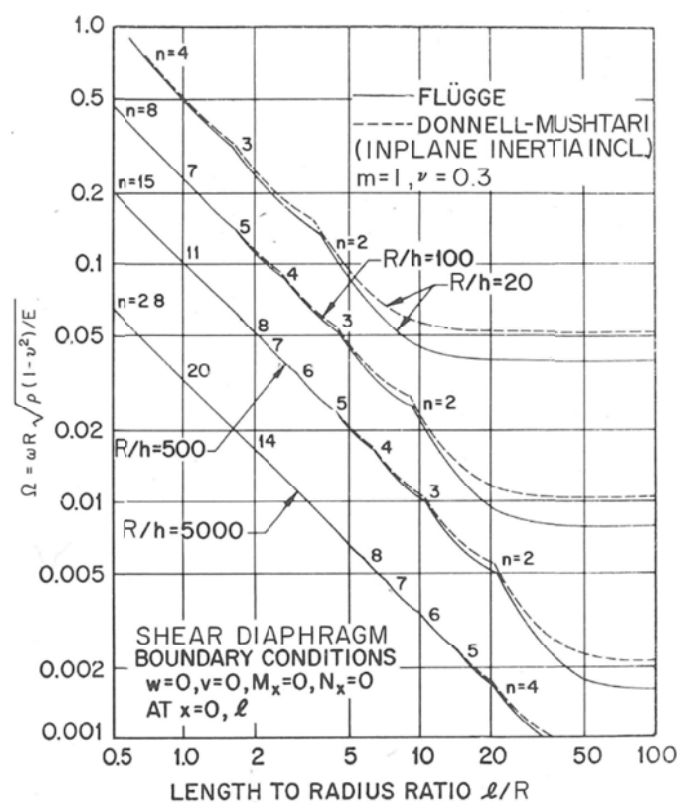
Figuur 17: Laterale golven voor respectievelijk $t = 0.1$, $t = 1$, $t = 10$, en $t = 500$ mm

Voor de gekozen parameters blijkt vooral de overgang van twee naar vier golven een rol te spelen bij de bepaling van verschillende relaties. Dit is te zien als een discontinuïteit (golf) in onder andere de grafiek waar de cilinderstraal is uitgezet tegen de verplaatsing. In de komende hoofdstukken zal dit verschijnsel terugkomen.



Figuur 18: aantal axiale golven $m = 0.5$ en laterale golven $n = 2$

Om rekening te kunnen houden met deze golven dient te worden bepaald hoe de overgang van twee naar vier golven in laterale richting afhangt van parameters a_2 , g en t . In liggers en platen komt een klein aantal golven overeen met een kleine eigenfrequentie. Bij schalen is dit echter niet altijd het geval. In figuur 19 is het verband tussen de cilindergeometrie en de (minimale) eigenfrequentie uitgezet. 'n' is het aantal golven langs de omtrek van de cilinder, 'l' de cilinderlengte en 'R' de cilinderstraal. Voor het aangenomen interval is alleen de sprong van $n = 2$ naar $n = 4$ van belang.



Figuur 19: Eigenfrequenties van (scharnierend opgelegde) cilinders versus lengte/straal ratio⁵

Het aantal golven in relatie tot de cilinderdimensies hangt af van de eigenfrequentie van de cilinder. Deze eigenfrequentie hangt af van de cilinderstijfheid (k) en trillende massa (m).

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.6)$$

De bepaling van eigenfrequenties van cilinders valt buiten de scope van dit onderzoek en zal daarom niet verder worden behandeld. Om bovenstaande redeneren zal de invloed van laterale golven in dit onderzoek niet verder worden uitgewerkt.

4. Lange rechte cilinder

4.1. Definitie lange rechte cilinder

In dit hoofdstuk zal een formule worden afgeleid voor de doorbuiging van een lange rechte cilinder. Het verband dat tot nu toe is gevonden bij verwaarlozing van dwarscontractie, met uitsluiting van de lengte-invloed luidt als volgt.

$$w \approx \frac{P}{E} * f(t, a_1, a_2) \quad \text{voor } g > 20m \quad (4.1)$$

Uit eerdere analyse (par. 3.4) is gebleken dat dit alleen geldig is voor grotere schaaldiktes (in ieder geval voor $t = 40 \text{ mm}$), maar niet voor een kleinere waarde zoals $t = 1 \text{ mm}$. Om deze reden is onderscheid gemaakt tussen een cilindergeometrie waar lengte-invloed uit te sluiten is (lange cilinder), en één waar deze invloed meegenomen wordt in de formule (korte cilinder, H5).

De gebruikte definitie voor een lange cilinder luidt als volgt: *een lange cilinder is een cilinder waar de cilinderlengte geen invloed heeft op de zakking onder belasting van een puntlast.*

Aangezien deze invloed afhankelijk is van schaaldikte t , dient een interval voor t gekozen te worden zodat bij een nader te bepalen lengte aan bovenstaande voorwaarde wordt voldaan. Omdat in dit onderzoek schaalconstructies worden beschouwd, is een eis voor dunwandigheid aangenomen:

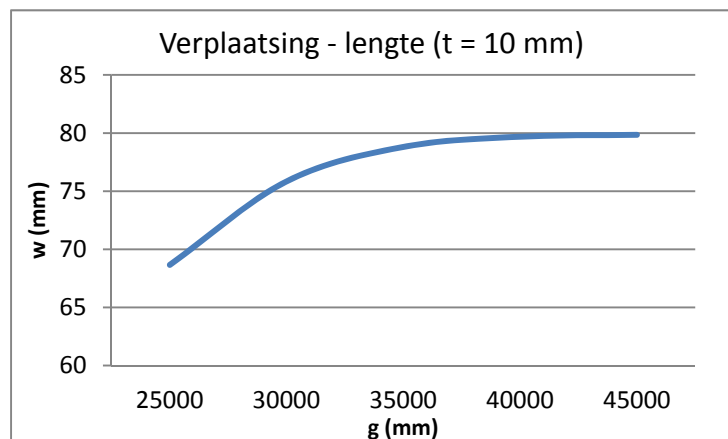
$$\frac{a_2}{t} \geq 30 \quad (4.2)$$

Om een extra variabele uit te sluiten zal allereerst worden gekeken naar de zakking bij een rechte cilinder, waarna in het vervolg van dit onderzoek een gekromde cilinder zal worden onderzocht. Straal a_1 wordt in dit geval 'oneindig' groot ($1e10$) gekozen. De kromming k_2 is dan bij benadering nul.

$$w \approx \frac{P}{E} * f(t, a_2) \quad (4.3)$$

Een andere beperkende eis betreft de golfwerking (par. 3.6). Uit figuur 20 blijkt dat voor $t = 10 \text{ mm}$ en $a_2 = 1000 \text{ mm}$ de lengte-invloed bij $g \geq 40 \text{ meter}$ verwaarloosbaar is.

$a_1 = 1e10 \text{ mm}$
$a_2 = 1e3 \text{ mm}$
$t = 10 \text{ mm}$
$P = 1 \text{ N}$
$E = 1 \text{ N/mm}^2$
$v = 0$
$h = 50 \text{ mm}$

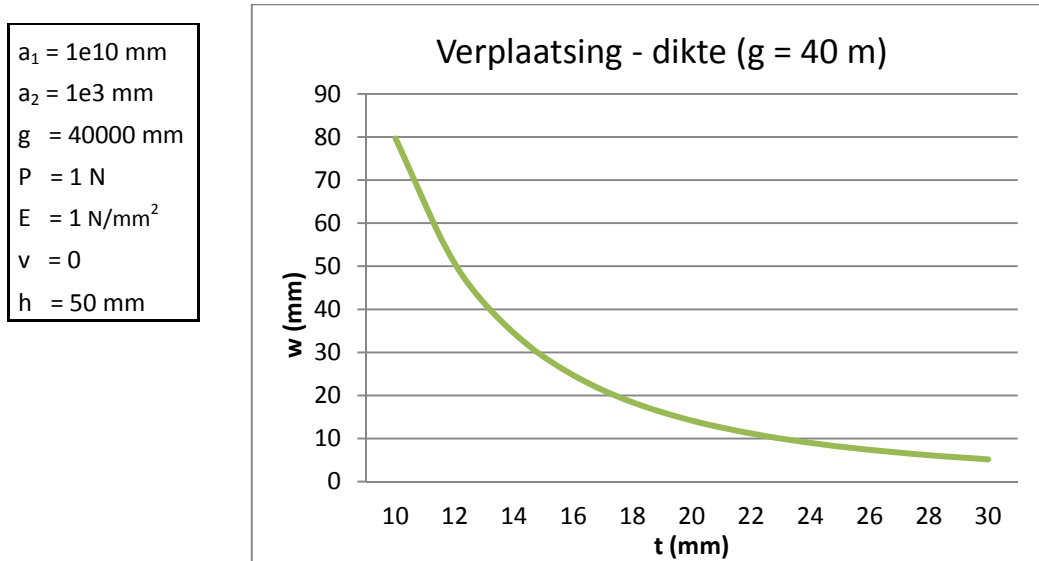


Figuur 20: Verplaatsing versus lengte ($t = 10 \text{ mm}$)

Al eerder is gebleken dat bij grotere t -waarden de verplaatsing sneller convergeert bij toenemende lengte. Hetzelfde geldt voor cilinderstralen $a_2 < 1000$ mm. Gekozen wordt om parameters te variëren op het interval $10 \leq t \leq 30$ mm en $300 \leq a_2 \leq 1000$ mm. Voor de cilinderlengte is de reeds genoemde $g = 40$ meter aangenomen.

4.2. Schaaldikte t

Variatie in schaaldikte t voor het in de vorige paragraaf genoemde interval levert de volgende grafiek op voor cilinderstraal $a_2 = 1000$ mm. Voor deze parameters is voldaan aan eis (4.2).



Figuur 21: Verplaatsing versus schaaldikte ($g = 40$ m)

Om dit verband wiskundig uit te drukken is gebruik gemaakt van het programma DataFit⁶. De relatie tussen w en t blijkt goed te benaderen door een machtsfunctie $w = C \cdot t^{-2.5}$, waarbij C een constante is die later bepaald dient te worden. De formule kan als volgt geschreven worden:

$$w \approx C \frac{P}{Et^2} \sqrt{\frac{1}{t}} * f(a_1) \quad (4.4)$$

Het blijkt dat bij variatie in t voor hetzelfde interval, bij een cilinderstraal van $a_2 = 300$ mm hetzelfde verband geldt. Dit is opvallend, aangezien voor deze cilinderstraal en schaaldiktes niet meer aan de eis voor dunwandigheid (4.2) wordt voldaan. Tot tenminste de dikwandige cilinder waarvoor geldt

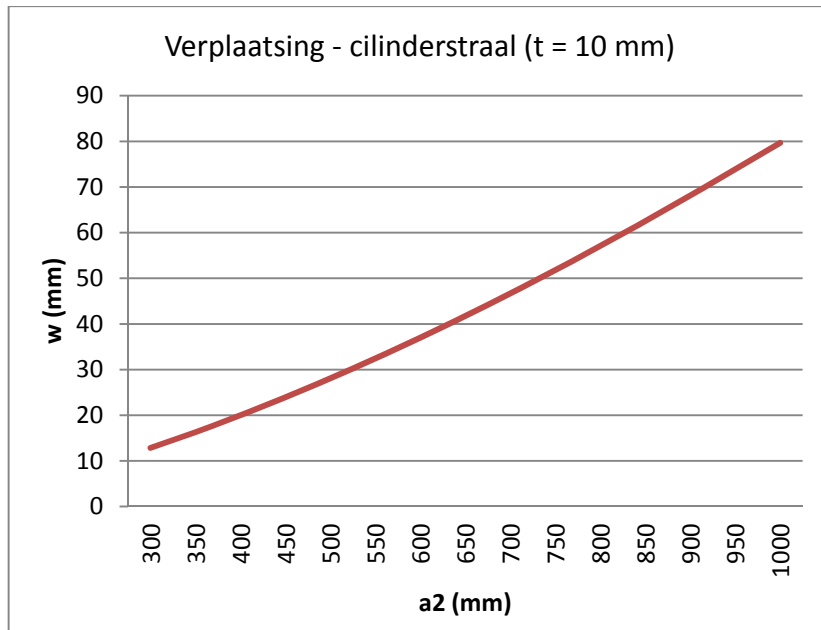
$$\frac{a_2}{t} \geq 10 \text{ lijkt er geen duidelijke afwijking in deze relatie te zijn.}$$

4.3. Cilinderstraal a_2

Om het verband tussen de verplaatsing en de cilinderstraal a_2 te vinden wordt gevarieerd voor het reeds genoemde interval $300 \leq a_2 \leq 1000$ mm.

In onderstaande figuur 22 is deze relatie te zien voor $t = 10$ mm. Uit nadere analyse blijkt dat voor overige waarden voor t binnen het in paragraaf 4.1 gekozen interval $10 \leq t \leq 30$ mm dezelfde relatie volgt.

$a_1 = 1e10 \text{ mm}$
 $t = 10 \text{ mm}$
 $g = 40000 \text{ mm}$
 $P = 1 \text{ N}$
 $E = 1 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0$
 $h = 50 \text{ mm}$



Figuur 22: Verplaatsing versus cilinderstraal (t = 10 mm)

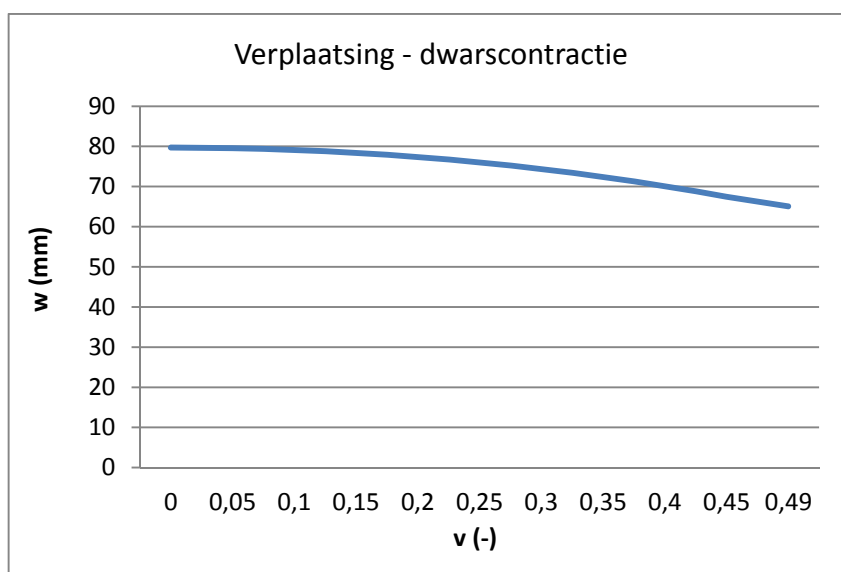
De relatie tussen w en a_2 blijkt goed te benaderen door een machtsfunctie $w = C \cdot a_2^{1.5}$, waarbij C een constante is die wederom later bepaald dient te worden.

$$w = C \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.5)$$

4.4. Dwarscontractie

De invloed van de dwarscontractie is tot op heden verwaarloosd ($\nu = 0$). Om deze invloed te verdisconteren wordt deze waarde gevarieerd tussen 0 en 0.49. Zoals verwacht neemt de verplaatsing licht af bij toenemende dwarscontractie.

$a_1 = 1e10 \text{ mm}$
 $a_2 = 1e3 \text{ mm}$
 $t = 10 \text{ mm}$
 $g = 40000 \text{ mm}$
 $P = 1 \text{ N}$
 $E = 1 \text{ N/mm}^2$
 $h = 50 \text{ mm}$



Figuur 23: Verplaatsing versus dwarscontractie

In paragraaf 3.3 is reeds genoemd dat uit het onderzoek van A. Semiari² blijkt dat deze invloed voor koepels met een nauwkeurigheid van 1% gelijk was aan een factor $1 - 0.5v^2$. Uit onderzoek blijkt dat dit voor een lange cilinder niet de meest nauwkeurige relatie is. Deze factor geeft bij toenemende waarden voor v , een lichte overschatting van de verplaatsing. Een meer nauwkeurige benadering blijkt een factor $1 - 0.75v^2$ te zijn.

$$w = C \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0.75v^2) \quad (4.6)$$

4.5. Formule lange rechte cilinder

Nu alle relaties zijn bepaald, dient constante C te worden bepaald. Voor onderstaande parameters en variatie in cilinderstraal en schaaldikte, is de waarde voor de verplaatsing bepaald met zowel de formule als in ANSYS. Door deze waarden te delen volgt de waarde van constante C. Een kanttekening dient te worden gemaakt voor de keuze van de waarde voor dwarscontractie. De meest gebruikte bouwmaterialen (staal, beton) hebben een dwarscontractie tussen de 0.2 en 0.3. Omdat de invloed van dwarscontractie, en dus op de bepaling van de constante relatief gering is, is hier een gemiddelde waarde $\nu = 0.25$ aangenomen.

$a_1 = 1e10 \text{ mm}$ $E = 1 \text{ N/mm}^2$ $h = 50 \text{ mm}$ $\nu = 0.25$ $P = 1 \text{ N}$ $g = 40000 \text{ mm}$	$a_2 \text{ (mm)} / t \text{ (mm)}$	w-formule (mm)	w-ANSYS (mm)	C
	500/10	33,698	26,784	0,794824619
	500/20	5,9570	4,7825	0,802836998
	500/30	2,1617	1,7555	0,812092335
	300/20	2,7686	2,2180	0,801126923
	1000/20	16,849	13,516	0,802184106

De gemiddelde waarde voor C is bij benadering 0.80. De uiteindelijke formule voor de verplaatsing bij belasting met een puntlast wordt dan gegeven door:

$$w = 0.80 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0.75v^2) \quad (4.7)$$

Eenhedenanalyse laat zien dat dit correct is:

$$[mm] = \frac{[N]}{\left[\frac{N}{mm^2} \right] [mm]} \left(\frac{[mm]}{[mm]} \right)^{\frac{3}{2}} [-] \quad (4.8)$$

De formule kan ook geschreven worden met behulp van krommingen aangezien $k_2 = \frac{1}{a_2}$

$$w = 0.80 \frac{P}{Et} \left(\frac{1}{tk_2} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0.75v^2) \quad (4.9)$$

Om de nauwkeurigheid van de gevonden formule te bepalen, is voor variaties van parameters de verplaatsing bepaald in ANSYS en met formule (4.7). Deze waarden met de bijbehorende afwijking zijn te vinden in bijlage 2. Voor de gekozen intervallen $10 \leq t \leq 30$ mm en $300 \leq a_2 \leq 1000$ mm blijkt de formule een maximale afwijking van 2,6% te hebben ten opzichte van de gevonden waarde in ANSYS. Dit is het geval als $t = 30$ mm en $a_2 = 300$ mm. Te concluderen is echter dat de gemiddelde fout significant kleiner is. De fout neemt sterk toe bij kleinere cilinderstralen a_2 . Hier neemt ook de fout in het model toe, aangezien bij een constante elementgrootte minder elementen in het model passen. Naar mate schaaldikte t toeneemt, neemt ook de fout in de formule iets toe. Dit is te verklaren met de doorwerking van de fout in de benaderde macht waarmee de verplaatsing van t afhankelijk is ($w = C \cdot t^{-2.5}$).

$$\text{Ofwel: } w = 0.80 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0.75\nu^2)$$

Onder voorwaarde dat:

$$\frac{a_2}{t} > 10 \text{ en } \frac{g}{a_2} \sqrt{\frac{t}{a_2}} > 4 \quad (4.10)$$

5. Korte rechte cilinder

5.1. Definitie korte rechte cilinder

De gebruikte definitie voor een korte cilinder luidt als volgt: *een korte cilinder is een cilinder waar de cilinderlengte van invloed is op de verplaatsing onder belasting van een puntlast. Ofwel, bij kleinere g-waarden dan gekozen in H4 voor de lange cilinder ($g < 40$ m).*

In hoofdstuk 3 is gebleken dat de mate van lengte-invloed op de verplaatsing afhankelijk is van de schaaldikte. Des te dunner de schaal, des te groter dient de cilinderlengte te zijn om de invloed op de verplaatsing uit te sluiten. Een eenduidige waarde voor de overgang van het lange naar het korte regime is dus niet mogelijk. Om dit nader te onderzoeken zal in het verloop van dit hoofdstuk de uitkomst van de formule voor de korte cilinder vergeleken worden met die van de lange cilinder.

De eis voor dunwandigheid is gelijk aan (4.2)

$$\frac{a_2}{t} \geq 30 \quad (5.1)$$

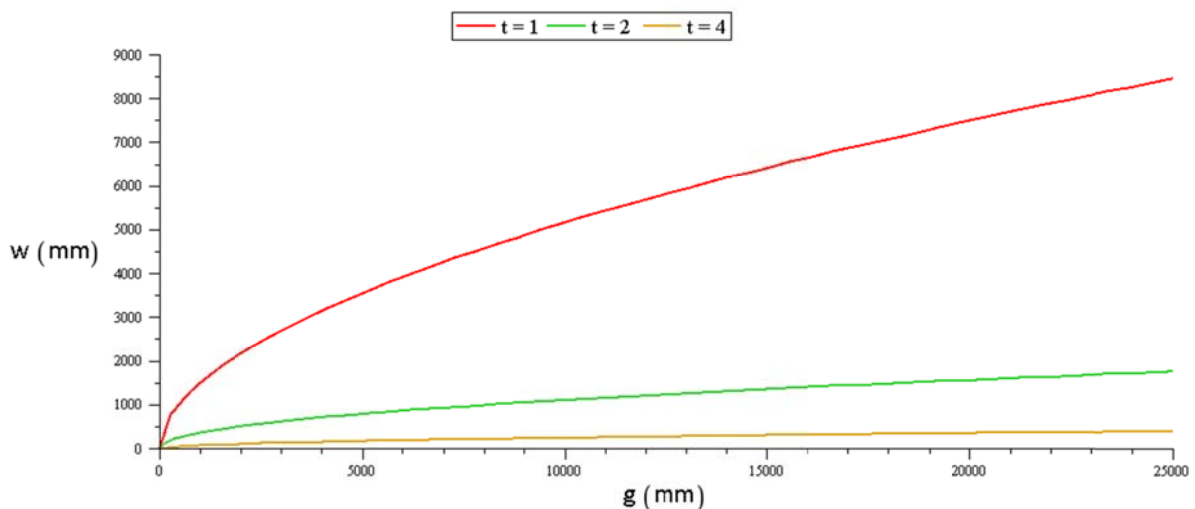
Schaaldikte t zal gevarieerd worden op interval $1 \leq t \leq 10$ mm zodat cilinderstraal $a_2 > 300$ mm.

Wederom zal allereerst een rechte cilinder worden onderzocht door a_1 'oneindig' ($1e10$) aan te nemen. De invloed van dwarscontractie zal evenzo in eerste instantie verwaarloosd worden ($\nu = 0$).

5.2. Cilinderlengte g

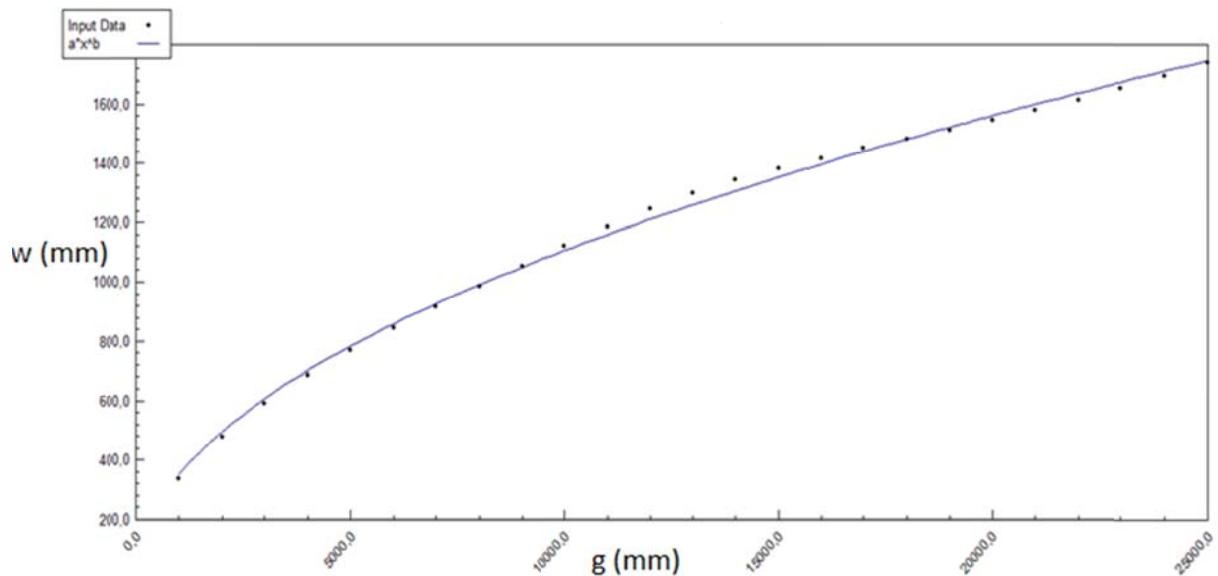
Omdat de cilinderlengte van invloed is op de verplaatsing, dient deze opgenomen te worden in de formule voor een korte cilinder. De relatie van de cilinderlengte met de verplaatsing is vastgesteld door deze te variëren voor verschillende schaaldikten t (bijlage 3). In figuur 24 is dit gedaan voor $t = 1$, $t = 2$ en $t = 4$ mm.

$$w \approx \frac{P}{E} * f(g, t, a_2) \quad (5.2)$$



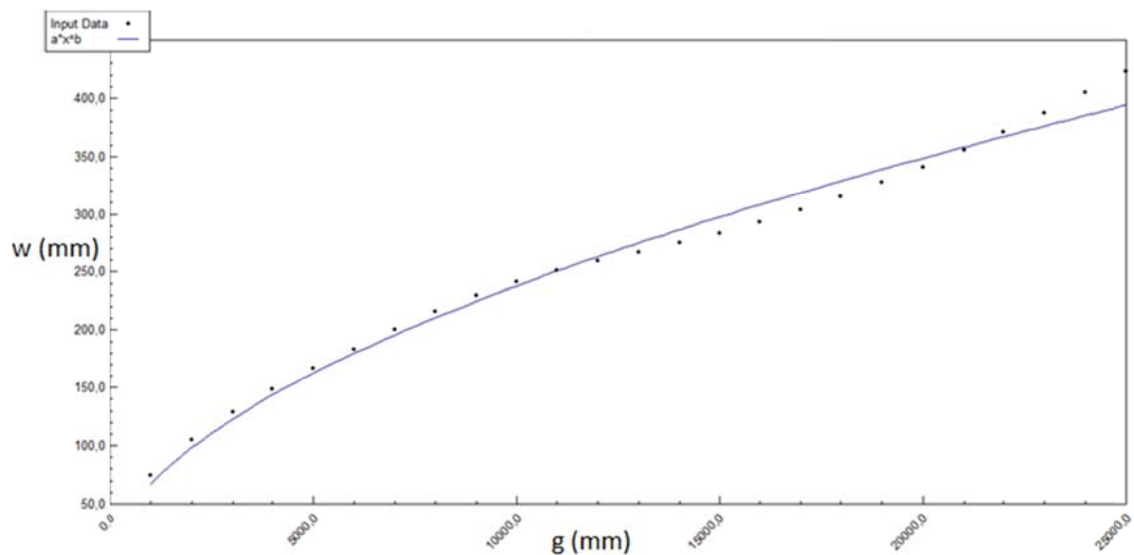
Figuur 24: verplaatsing (w) als functie van cilinderlengte (g) voor $t = 1, 2, 4$ mm en $a_2 = 1000$ mm

Onderstaande plot voor schaaldikte $t = 2$ mm laat de originele datapunten zien en de curve-fit benadering met een wortelfunctie $w = C \cdot g^{0.5}$, waarbij C een nader te bepalen constante is. Opvallend is de golf die te zien is in de data. Deze golf blijkt te verschuiven bij variatie in schaaldikte. Voor $t = 2$ mm lijkt deze wortelfunctie een goede fit tot een cilinderlengte van ruim 25 meter.



Figuur 25: verplaatsing (w) als functie van cilinderlengte (g) voor $t = 2$ mm en $a_2 = 1000$ mm

Echter, voor grotere waarden van t verschuift de golf en wijkt de wortelbenadering sneller af bij toenemende lengte. Dit is te zien in figuur 26, voor $t = 4$ mm. Vanaf een cilinderlengte van 22 meter gaat de wortelbenadering flink afwijken, waar dit bij $t = 2$ mm nog niet het geval is. De overgang van het korte naar het lange regime blijkt dus inderdaad afhankelijk te zijn van de schaaldikte.



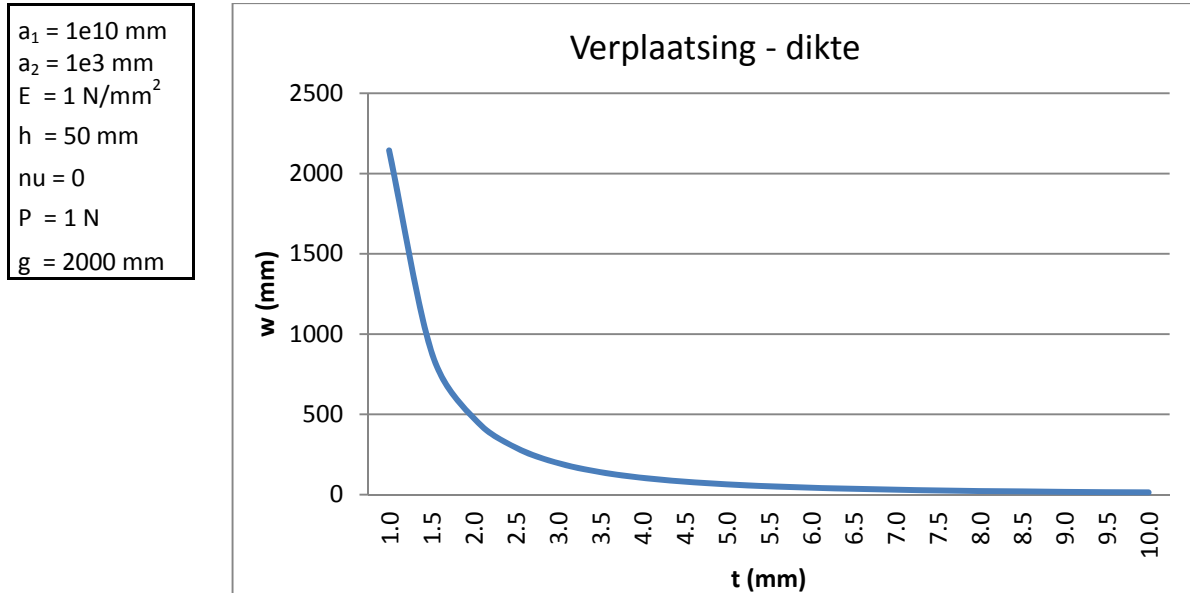
Figuur 26: verplaatsing (w) als functie van cilinderlengte (g) voor $t = 4$ mm en $a_2 = 1000$ mm

De formule wordt als volgt:

$$w \approx C \frac{P}{E} \sqrt{g} * f(t, a_2) \quad (5.3)$$

5.3. Schaaldikte t

Variatie in schaaldikte t voor het in paragraaf 5.1 genoemde interval $1 \leq t \leq 10$ mm levert de volgende grafiek op voor cilinderstraal $a_2 = 1000$ mm. Deze relatie is voor verschillende lengte-straal ratio's bepaald, waarvan $g/a_2 = 2$ in figuur 27 is weergegeven.



Figuur 27: verplaatsing (w) als functie van schaaldikte (t) voor $g/a_2 = 2$

Voor de ratio's op interval $2 \leq g/a_2 \leq 20$ volgt de relatie $w = C \cdot g^m$, waarbij C een constante en m een exponent is die varieert tussen de -2,14 en -2,22.

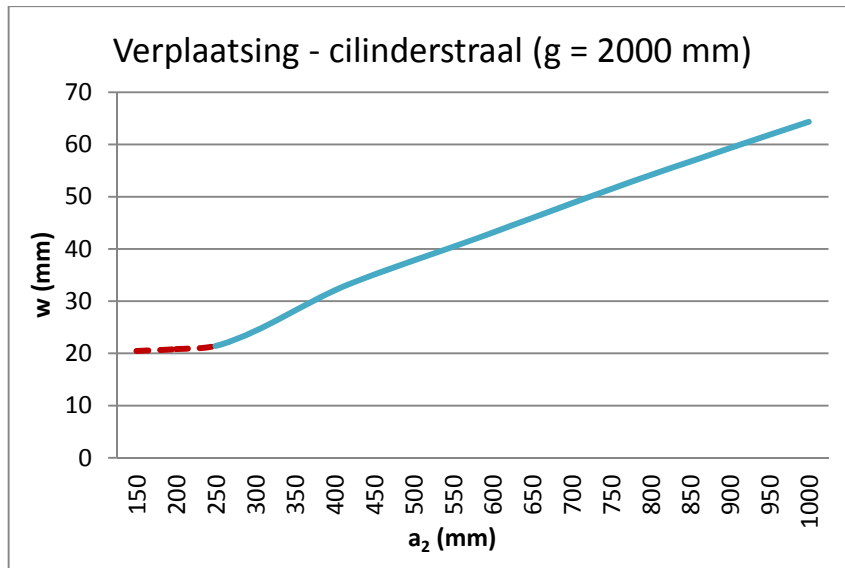
Aangezien de functie qua eenheden moet kloppen, is gekozen voor een benadering $w = C \cdot g^m$ met $m = -2,25$. Dit is alleen mogelijk als de verplaatsing met een vierdemachtswortel van de cilinderstraal afhangt. In de volgende paragraaf wordt dit onderzocht.

$$w \approx C \frac{P}{Et^2} \sqrt[4]{\frac{1}{t}} \sqrt{g} * f(a_2) \quad (5.4)$$

5.4. Cilinderstraal a_2

Om de relatie tussen de verplaatsing en de cilinderstraal voor een korte cilinder te bepalen, is gekozen voor een schaaldikte midden in het gekozen interval $1 \leq t \leq 10$ mm, $t = 5$ mm. Voor de cilinderlengte is 2000 mm aangenomen. In figuur 28 is te zien dat voor de gebruikte parameters bij $a_2 < 250$ mm een verkleining van de cilinderstraal nagenoeg geen invloed meer heeft op de verplaatsing. Hier dient rekening mee te worden gehouden in de vorm van een voorwaarde bij het opstellen van de formule.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1e10 \text{ mm} \\
 t &= 5 \text{ mm} \\
 g &= 2000 \text{ mm} \\
 P &= 1 \text{ N} \\
 E &= 1 \text{ N/mm}^2 \\
 \nu &= 0 \\
 h &= 50 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

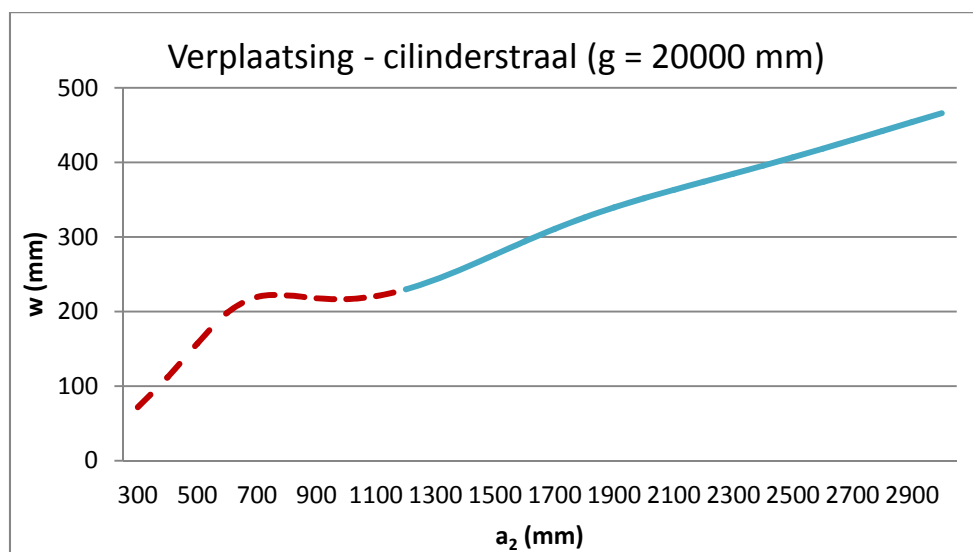


Figuur 28: verplaatsing (w) als functie van cilinderstraal (a_2) voor $g = 2000$ mm

Deze relatie binnen het gekozen interval (onder voorwaarde dat $a_2 \geq 250$ mm) wordt het beste benaderd door $w = C \cdot a_2^m$, met $m = 0.75$. Dit klopt met de veronderstelling vanuit de eenhedenanalyse dat er een vierdemachtswortel in de relatie moet zitten.

$$w = C \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \sqrt{\frac{t}{a_2}} \quad (5.5)$$

In figuur 29 is deze relatie weergegeven bij een cilinderlengte van $g = 20000$ mm. Opvallend is dat dezelfde relatie volgt als in figuur 28, echter pas bij een cilinderstraal $a_2 \geq 1200$ mm. Wederom is er een interval ($700 \leq a_2 \leq 1200$ mm) waarvoor een verandering van de cilinderstraal nagenoeg geen invloed heeft op de verplaatsing. Dit is te verklaren vanuit de golfwerking in laterale richting (par. 3.6). De verwachting is dat het aantal laterale golven op dit interval overgaat van twee naar vier. Bij de bepaling van de nauwkeurigheid van de afgeleide formule dient gekeken te worden voor welke waarden de fout binnen acceptabele grenzen blijft.

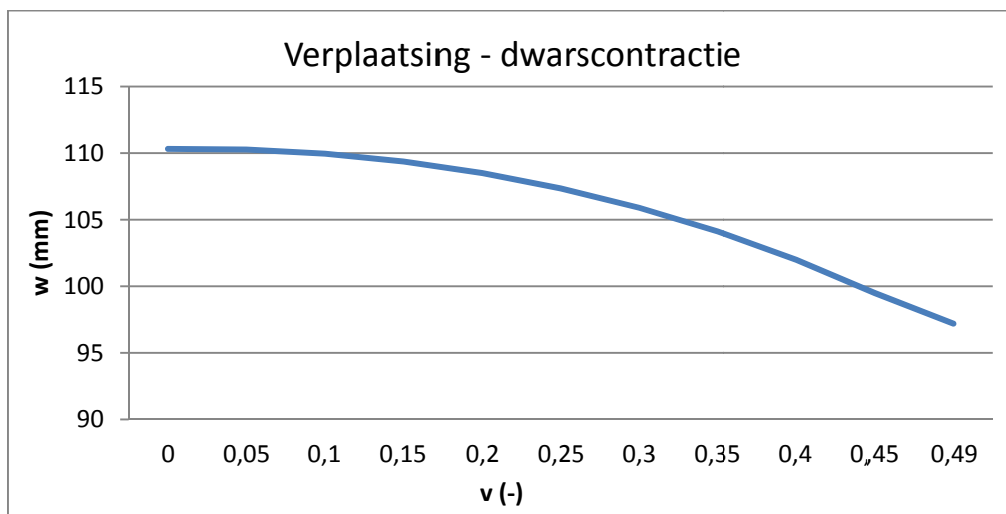


Figuur 29: verplaatsing (w) als functie van cilinderstraal (a_2) voor $g = 20000$ mm

5.5. Dwarscontractie

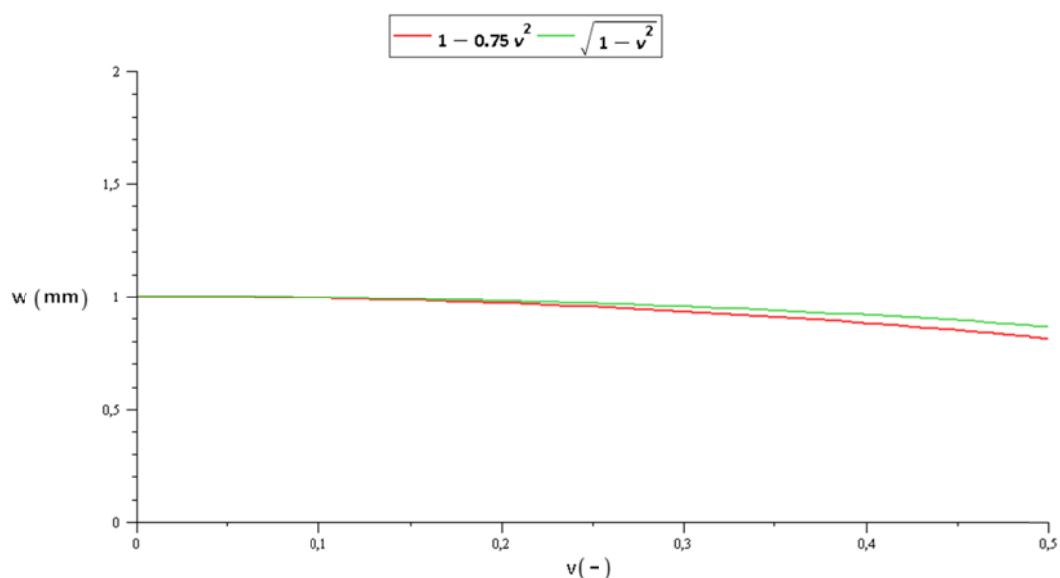
Tot op heden is de invloed van de dwarscontractie verwaarloosd. Bij een lange cilinder is deze invloed gelijk gebleken aan een factor $1 - 0.75v^2$. In figuur 30 is voor een lengte van $g = 10000$ mm en $t = 5$ mm de invloed van de dwarscontractie te zien op de verplaatsing. Deze invloed bij een korte cilinder blijkt beter te benaderen met een factor $\sqrt{1 - v^2}$. Dit komt overeen met de factor uit het onderzoek van A. Semiari².

$$w = C \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \sqrt{\frac{t}{a_2}} \sqrt{(1 - v^2)} \quad (5.6)$$



Figuur 30: verplaatsing (w) als functie van dwarscontractie (v) voor $g = 10000$ mm en $t = 5$ mm

De invloed van dwarscontractie op de verplaatsing blijkt bij de lange cilinder iets groter te zijn dan bij de korte (figuur 31).



Figuur 31: verschil invloedfactor dwarscontractie kort en lange cilinder.

5.6. Formule korte rechte cilinder

Op dezelfde wijze als bij de lange cilinder dient constante C te worden bepaald. Voor de dwarscontractie wordt wederom een gemiddelde waarde $\nu = 0.25$ aangenomen.

$a_1 = 1e10 \text{ mm}$ $E = 1 \text{ N/mm}^2$ $h = 50 \text{ mm}$ $\nu = 0.25$ $P = 1 \text{ N}$	$a_2/t/g \text{ (mm)}$ 1000/1/20000 3000/1/20000 1000/5/10000 2000/5/10000 500/10/2000 3000/10/2000	w-formule (mm) 24350 55506 460,58 774,60 25,747 98,706	w-ANSYS (mm) 7252,2 16346 139,6000 234,5900 8,1657 32,319	C 0,29783 0,29449 0,30310 0,30285 0,31715 0,32743
---	---	--	---	---

De gemiddelde waarde van C is bij benadering 0.30, waardoor de uiteindelijke formule voor verplaatsing onder puntlast bij een korte rechte cilinder als volgt is:

$$w = 0.30 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \sqrt{\frac{t}{a_2}} \sqrt{(1-\nu^2)} \quad (5.7)$$

Eenhedenanalyse laat zien dat dit correct is:

$$[mm] = \frac{[N]}{\left[\frac{N}{mm^2} \right] [mm]} \left(\frac{[mm]}{[mm]} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{[mm]}{[mm]}} \sqrt{\frac{[mm]}{[mm]}} \sqrt{[-]} \quad (5.8)$$

Uitgedrukt in krommingen:

$$w = 0.30 \frac{P}{Et^2} \sqrt[4]{\frac{1}{tk_2}} \sqrt{\frac{g(1-\nu^2)}{k_2}} \quad (5.9)$$

Voor de gekozen intervals $1000 \leq g \leq 40000 \text{ mm}$, $1 \leq t \leq 10 \text{ mm}$ en $300 \leq a_2 \leq 2500 \text{ mm}$ blijkt de formule voor sommige parameters tot wel 45% af te wijken (zie data in bijlage 4). Beperkende voorwaarden zijn gewenst zodat de nauwkeurigheid van de formule wordt vergroot. De grootste fouten worden waargenomen bij grotere cilinderlengtes en schaaldiktes. Reeds is vastgesteld dat de overgang tussen het korte en lange regime mede afhankelijk is van de cilinderlengte, -straal en schaaldikte. Dit verklaart dat de afgeleide oplossing voor de lange cilinder **(4.7)** bij $t > 5 \text{ mm}$ en $g > 30 \text{ m}$ nauwkeuriger is dan **(5.9)**. Bij $t > 10 \text{ mm}$ is dit al het geval voor $g > 25 \text{ m}$. Echter, bij $t = 1 \text{ mm}$ blijkt **(5.9)** wel nauwkeurig tot enkele procenten voor minstens $g = 40 \text{ m}$.

De overgang tussen het korte en lange regime is te bepalen door reeds afgeleide formules voor de korte en lange cilinder gelijk te stellen **(4.7) = (5.9)**.

$$0.80 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} (1-0.75\nu^2) = 0.30 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{g}{a_2}} \sqrt{\frac{t}{a_2}} \sqrt{(1-\nu^2)}$$

Bij verwaarlozen van dwarscontractie en aanname $P = E$ levert dit na vermenigvuldiging met t^2 :

$$0.80a_2\sqrt{\frac{a_2}{t}} = 0.30\sqrt[4]{\frac{g}{a_2}}\sqrt{\frac{t}{a_2}}$$

Hieruit volgt:

$$g \approx C * a_2 \sqrt{\frac{a_2}{t}} \text{ met } C \text{ een nader te bepalen constante.} \quad (5.10)$$

Na vergelijking van de nauwkeurigheid van zowel de korte en de lange cilinderformule blijkt de korte cilinderformule nauwkeurig tot 10% voor:

$$\frac{a_2}{t} > 75 \text{ en } 0.07 < \frac{g}{a_2} \sqrt{\frac{t}{a_2}} < 2.3 \quad (5.11)$$

5.7. Referentieformule

Reeds in 1957 is er een formule afgeleid⁷ voor de verplaatsing onder een puntlast van cilindrische schalen bij een vrije oplegging.

$$w = 6.5 \frac{P}{Et} \left(\frac{a_2}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{g}{a_2} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (5.12)$$

Onder voorwaarde dat: $1 < \frac{g}{a_2} < 18$ en $\frac{a_2}{t} > 10$

Deze formule is bij verwaarlozing van dwarscontractie, op de constante en de laatste term van het rechterlid na gelijk aan **(4.7)**. Volgens deze relatie neemt de verplaatsing af bij toenemende cilinderlengte. Dat is tegenstrijdig met de waarnemingen in dit onderzoek, waar de verplaatsing met de wortel van de lengte toeneemt. De afwijking van de laatste term (en de constante) is te verklaren door het verschil in opleggingen. De modellen zijn dus niet helemaal te vergelijken. Het is echter relevant te vermelden dat de rest van de formule exact gelijk is aan de in hoofdstuk 4 afgeleide formule voor de lange rechte cilinder.

6. Gekromde lange cilinder

6.1. Modelvorming

Tot nu toe is gekeken naar een rechte cilinder. In dit hoofdstuk zullen de eigenschappen van een lange gekromde cilinder onderzocht worden ($a_1 \neq \pm \infty$).

Omdat de cilinder zowel positief als negatief gekromd kan zijn, zijn de stralen van de kromming dat logischerwijs ook. Aangezien dit onderzoek erop gericht is de overgang tussen licht negatief, rechte en licht positief gekromde cilinders nader te bepalen, naderen de stralen in het onderzoeksgebied van een minimale positieve of negatieve waarde naar positief en negatief oneindig. Aan de onderzijde is de straalgrootte beperkt, omdat de kromming nooit groter kan zijn dan half de cilinderlengte. Ook grafisch is dit niet handig weer te geven. Het is dus wenselijk om de stralen om te schrijven naar krommingen $k_1 = \frac{1}{a_1}$ en $k_2 = \frac{1}{a_2}$.

Het verband tussen straalgrootte a_1 en a_2 in het cilindermodel is als volgt:

$$a_1 = \frac{a_2}{2} + \frac{g^2}{8a_2} \quad \text{met } |a_1| > \frac{g}{2} \quad (6.1)$$

Voor aangenomen $g = 40000$ mm geeft dit $|a_1| > 20000$ mm

De cilinderstraal a_2 zal worden gevarieerd met waarden 300, 600 en 1000 mm. Variatie van a_1 zal worden gedaan op het interval $[-3e5, -1e10]$ en $[3e5, 1e10]$. Omschrijven naar een interval voor krommingen geeft $[-3e-5, -1e-10]$ en $[1e-10, 3e-5]$.

De formule bij verwaarlozing van dwarscontractie wordt dan als volgt:

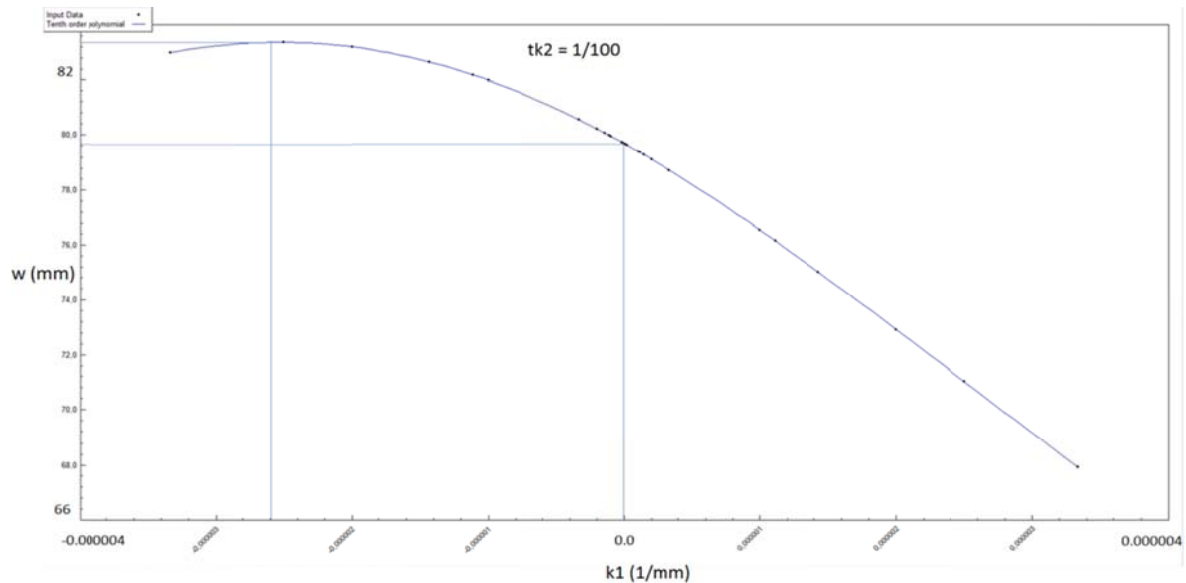
$$\frac{wE}{P} = f(t, k_1, k_2) \quad (6.2)$$

Aangenomen $E = P = 1$:

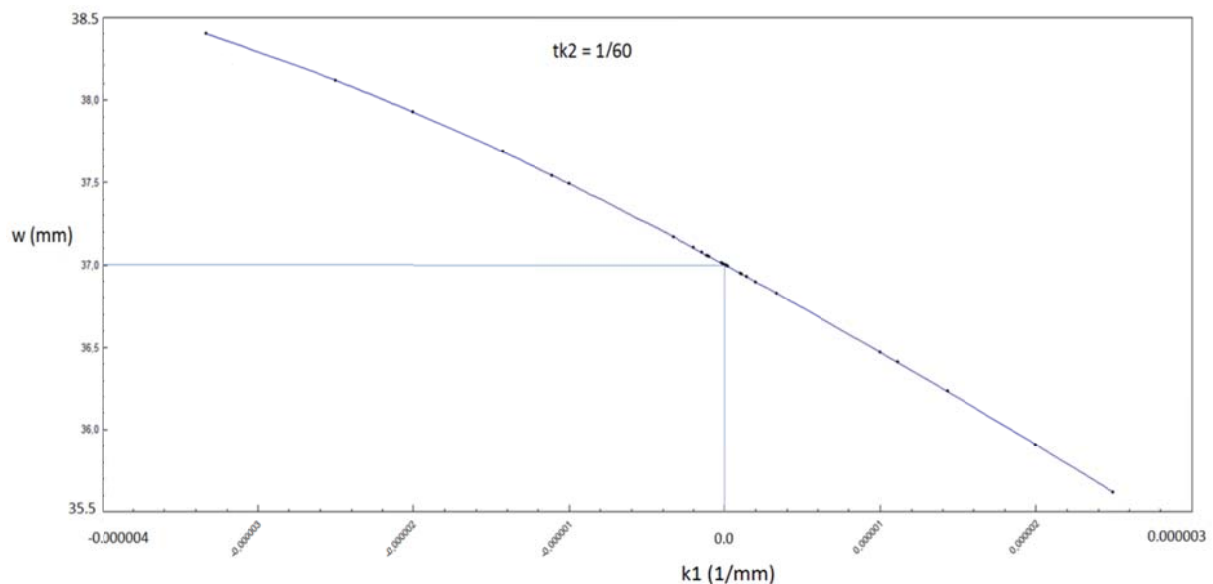
$$w = f(t, k_1, k_2) \quad (6.3)$$

6.2. Invloed van kromming op doorbuiging

Omdat drie variabelen overblijven is ervoor gekozen de verplaatsing uit te zetten tegen k_1 voor dimensieloze waarden van tk_2 , respectievelijk 1/10, 1/30, 1/60 en 1/100 (data zie bijlage 5). De relatie blijkt te benaderen met een parabool. In figuur 32 en 33 is te zien dat voor het gekozen interval de 'parabool' ten opzichte van $k_1 = 0$ naar links verschuift bij grotere waarden voor tk_2 . Voor $tk_2 = 1/100$ is de maximale zakking af te lezen. Bij een rechte cilinder is de verplaatsing gelijk aan 79.7 mm. De top van de parabool bevindt zich in het negatief gekromde gebied ($k_1 = -2.6 \cdot 10^{-6}$). De maximale verplaatsing is hier gelijk aan 83.4 mm. Dit is een toename van circa 4.5% (de stijfheid neemt dus af). Geconcludeerd kan worden dat de cilinder bij een lichte negatieve kromming minder stijf wordt, met een maximum van circa 4.5% boven de waarde van een rechte cilinder.



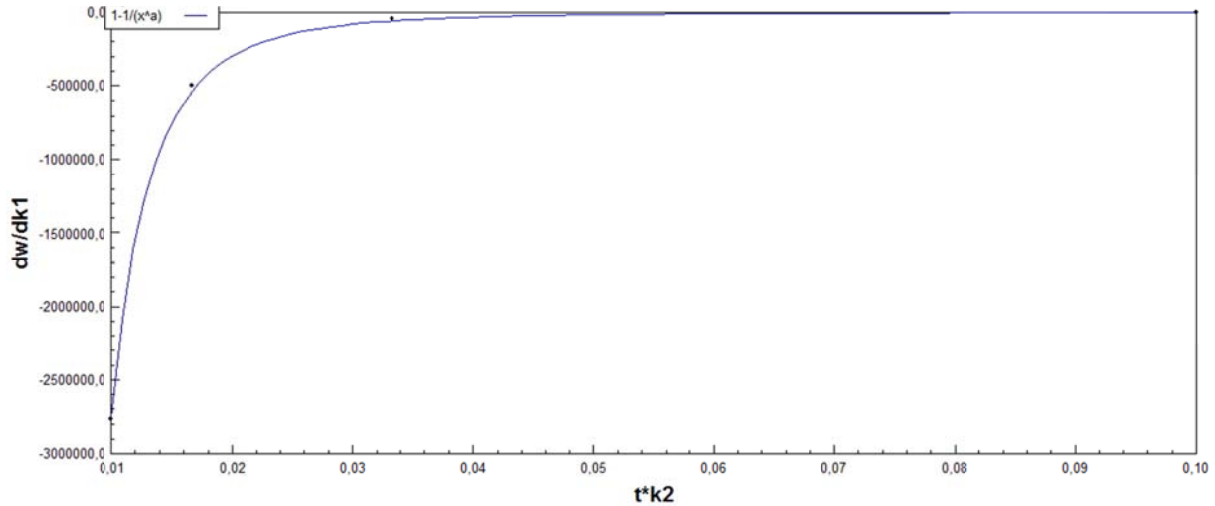
Figuur 32: verplaatsing versus kromming k_1 , voor $tk_2 = 1/100$



Figuur 33: verplaatsing versus kromming k_1 , voor $tk_2 = 1/60$

In figuur 33 voor $tk_2 = 1/60$ is de top van de parabool niet te zien. Omdat hier gerekend wordt met een lange cilinder, is het niet mogelijk de cilinder nog meer (negatief) te krommen (zie 6.1). De top kan alleen geschat worden. Door drie datapunten te gebruiken is een functievoorschrift voor een parabolöide op te stellen die het verband tussen de kromming en verplaatsing benadert. Hieruit volgt de top van de parabool met een maximale verplaatsing van 38,7 mm bij $k_1 = -5.8 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$. De top van de parabool (minimale stijfheid) is voor grotere waarden van tk_2 verschoven naar links. Ofwel, er is pas sprake van minimale stijfheid bij een grotere cilinderkromming. Ook hier lijkt de minimale stijfheid 4.5% af te wijken van de stijfheid bij een rechte cilinder.

Bij een positieve kromming wordt de cilinder stijver. De stijfheidstoename is te benaderen met een lineaire functie. Aangezien in hoofdstuk 4 reeds een formule voor een lange rechte cilinder is afgeleid, is het mogelijk om met de helling rond $k_1 = 0$ een factor te bepalen waarmee **(4.8)** afhangt van kromming. De verwachting is dat deze relatie onder andere afhangt van een product van krommingen $k_1 \cdot k_2$, ofwel Gaussiaanse kromming.



Figuur 34: dw/dk_1 bij $k_1 = 0$ versus tk_2

In figuur 34 is de helling van de raaklijn aan de zakking rond $k_1 = 0$, uitgezet tegen tk_2 . Hieruit volgt een derdemachtsfunctie. Wat de factor is waarmee **(4.8)** afhangt van de (Gaussiaanse) kromming dient in vervolgonderzoek nader te worden bepaald.

7. Gekromde korte cilinder

7.1. Modelvorming

In paragraaf 5.1 is reeds de definitie van een korte (rechte) cilinder vastgelegd. In dit hoofdstuk zullen de eigenschappen van een korte gekromde cilinder onderzocht worden.

Voor aangenomen $g = 25$ meter dient volgens **(6.1)** $|a_1| > 12500\text{mm}$

De cilinderstraal a_2 zal worden gevarieerd met waarden 500, 1000, 2000, 3000 en 5000 mm.

a_1 (mm) wordt gevarieerd op $[-1e5, -1e10]$ en $[1e5, 1e10]$. Omschrijven naar een interval voor krommingen levert evenals in hoofdstuk 6 $[-1e-5, -1e-10]$ en $[1e-10, 1e-5]$.

$$\frac{wE}{P} = f(t, k_1, k_2) \quad (7.1)$$

Omschrijven geeft na vermenigvuldiging van beide zijden met t :

$$\frac{wEt}{P} = f(t, k_1t, k_2t) \quad (7.2)$$

Eenhedenanalyse laat zien dat dit niet klopt, aangezien links $\frac{wEt}{P} [-]$ en rechts $f(t, k_1t, k_2t) [mm]$

De juiste formule wordt dan:

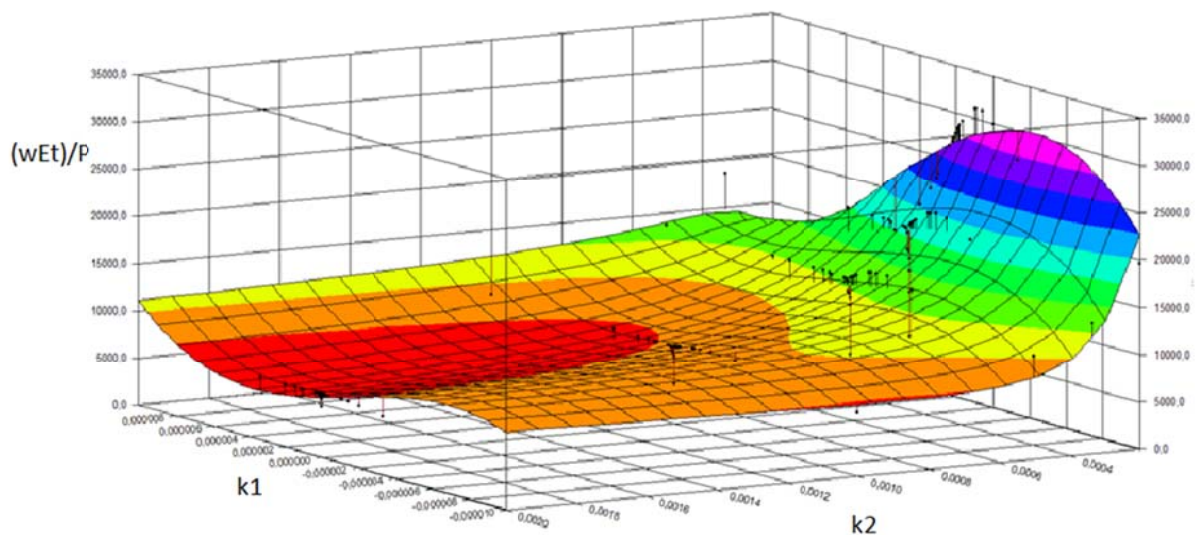
$$\frac{wEt}{P} = f(k_1t, k_2t) \quad (7.3)$$

Beide zijden van de vergelijking zijn nu dimensieloos, er resteren echter drie variabelen. Door $t = 1$ mm aan te nemen, nemen we de invloed van t niet mee in de formule. Voor het gemak worden ook de waarden voor E en P gelijk gekozen aan 1, zodat deze invloed wegvalt. De invloed van de dwarscontractie was reeds verwaarloosd door $\nu = 0$ te kiezen. Nu resteren twee variabelen:

$$w = f(k_1, k_2) \quad (7.4)$$

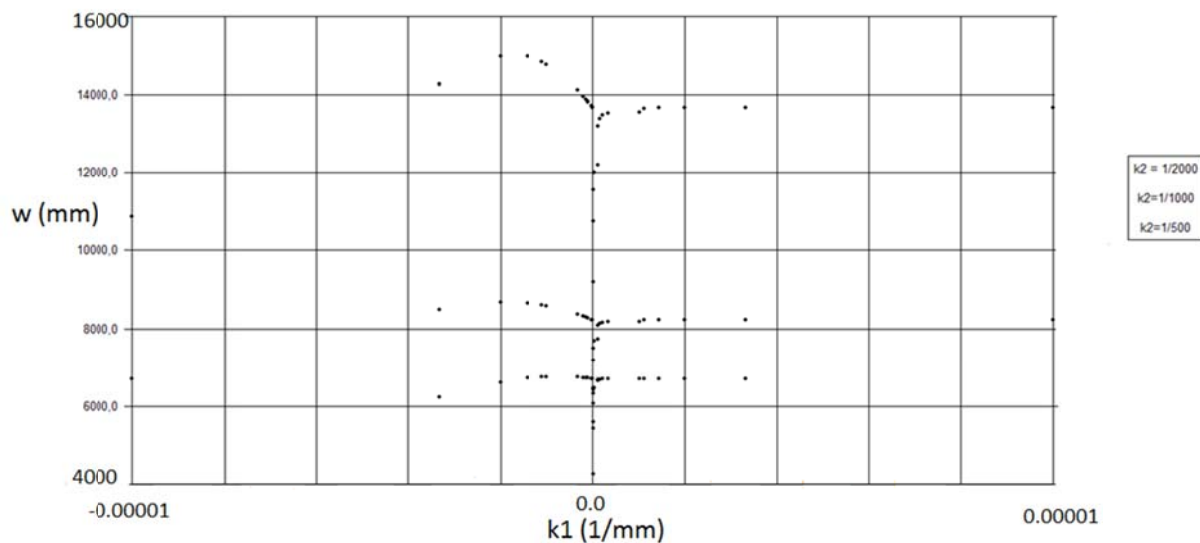
7.2. Invloed van kromming op doorbuiging

In ANSYS kunnen de twee waarden k_1 en k_2 gevarieerd worden binnen het genoemde interval. De hieruit volgende datapunten zijn opgenomen in bijlage 6. De door DataFit afgeleide 'fit' in de 3D-plot (figuur 35) is het resultaat. Opvallend is de variatie in datapunten rond $k_1 = 0$. In dit interpolatiegebied naderen de cilinderstralen naar oneindig.



Figuur 35: 3D-plot en benadering van verplaatsing versus k_1 en k_2

In figuur 36 zijn de datapunten gevisualiseerd voor $k_2 = 1/2000, 1/1000$ en $1/500 \text{ mm}^{-1}$. Hier is duidelijk een sprong te zien bij $k_1 = 0$. Oftewel: een korte cilinder die een klein beetje wordt vervormt naar negatieve of positieve kromming wordt maximaal tot bijna een factor 1.7 minder stijf. Dit opvallende fenomeen is nog onverklaard.

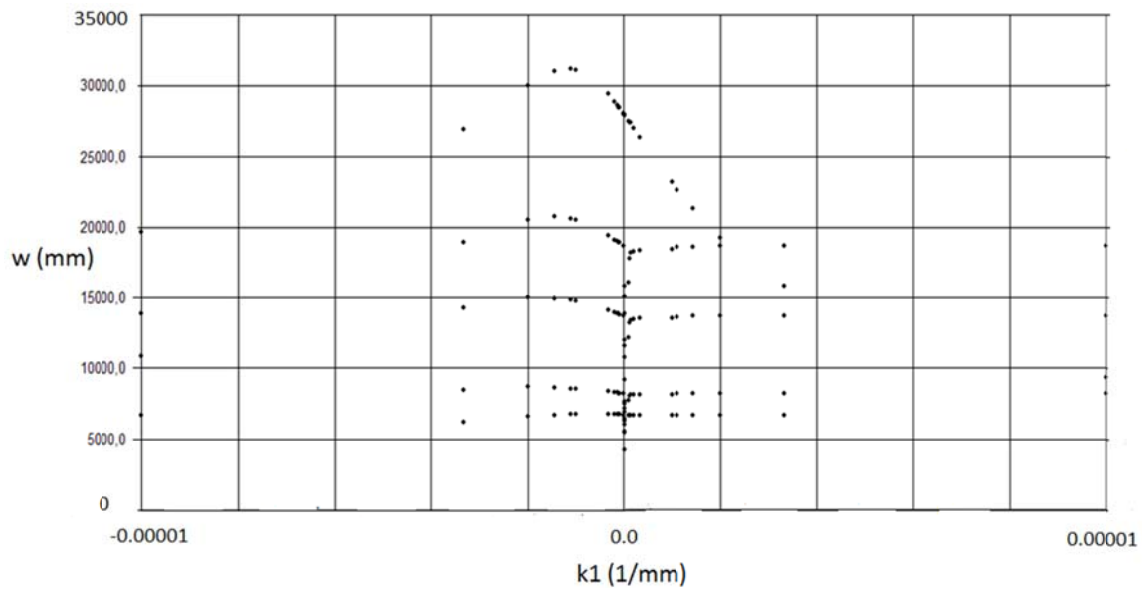


Figuur 36: Datapunten verplaatsing versus k_1 voor $k_2 = 1/2000, 1/1000$ en $1/500$.

Evenals bij lange cilinders neemt de stijfheid van korte cilinders bij negatieve kromming af, waarna bij verdere kromming de stijfheid weer licht toeneemt. Deze piek waar de stijfheid minimaal is, lijkt relatief toe te nemen naarmate de cilinderstraal groter wordt.

In figuur 37 zijn ook de datapunten voor $k_2 = 1/3000$ en $1/5000 \text{ mm}^{-1}$ opgenomen. Des te groter de cilinderstraal, des te groter de verplaatsing. Opvallend is de gewijzigde relatie bij $k_2 = 1/5000 \text{ mm}^{-1}$ (bovenste in figuur). Deze relatie komt overeen met die voor een lange gekromde cilinder.

Te concluderen is dat tussen cilinderstralen 3000 en 5000 mm voor $t = 1$ mm en $g = 25000$ mm een overgang plaatsvindt tussen het korte en lange regime. Hoe deze overgang afhangt van de genoemde variabelen bij gekromde cilinders blijft nog onverklaard. Het is niet uit te sluiten dat kromming van een cilinder de overgang van een kort naar regime verschuift.



Figuur 37: Datapunten verplaatsing versus k_1 voor (van boven naar beneden) $k_2 = 1/5000, 1/3000, 1/2000, 1/1000$ en $1/500 \text{ mm}^{-1}$

8. Conclusie en aanbevelingen

Voor een korte en lange rechte cilinder zijn formules afgeleid voor de doorbuiging van een cilindrische schaalconstructie belast met een puntlast (zie pagina v). Aan te bevelen is te onderzoeken of deze formules voor een ruimer interval van parameters geldig zijn.

Golfwerking in zowel axiale als laterale richting heeft invloed op de doorbuiging van een cilinder. De invloed van de overgang van twee naar vier laterale golven op de doorbuiging dient nader te worden onderzocht.

Een lange cilinder die wordt vervormt naar een negatieve kromming wordt slapper en naar een positieve kromming wordt deze stijver.

In het geval een korte cilinder een klein beetje wordt vervormt naar een positieve of negatieve kromming wordt deze tot een factor 1.7 minder stijf. Dit opvallende fenomeen is nog onverklaard.

De factor waarmee de formule van een rechte cilinder afhangt van de (Gaussiaanse) kromming dient in vervolgonderzoek te worden bepaald.

Aangezien weinig referentiemateriaal beschikbaar is om de uitkomsten te toetsen, is het aan te bevelen met proeven of andere modellen de uitkomsten te verifiëren.

Referenties en bronnen

1. ANSYS 14.0, ANSYS Inc
2. Semiari, A., BSc-thesis 'Doorbuiging van schalen onder puntlasten', 2012.

$$3. \text{ Afgeleide formule zakking cilinder}^2 \quad w = \frac{P}{E * t} * (0.422647 * \frac{\sqrt{\frac{g}{t}}}{(t * k)^{\frac{3}{4}}})$$

$$\text{Onder voorwaarde dat: } \frac{1}{2000} \leq t * k \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{2 * t * k(\text{kleinste})} \leq \frac{g}{t} \leq \frac{4}{t * k(\text{kleinste})}$$

4. Hoogenboom, P.C.J, MSc dictaat Shell Structures CIE4143, hand-out 7a, p.9.
5. A.W. Leissa, Vibration of Shells, NASA, Washington D.C. 1973
6. DataFit 9.0, Oakdale Engineering
7. Yuan S.W., L. Ting: On Radial Deflections of a Cylinder subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 24, no. 6, June 1957.

Overig:

- Elling, R. (2005). *Rapportagetechneek*. 3^e dr. Houten: Noordhoff Uitgevers
- Afbeelding voorpagina: Station Liège-Guillemins

Bijlagen

Bijlage 1: ANSYS script

```
! ANSYS macro
! Generate a cylinder, add point loads, compute deflection
! P.C.J. Hoogenboom 27 April 2012, changed G. van Bolderen ....
! C:\Program Files\ANSYS Inc\v130\ansys\apdl\shellpointload9.mac
```

```
!*CFOPEN,out,txt ! open file called out.txt
!*DO,t,1,10
a1 = 1e6           !radius in x direction (+of-)   mm
a2 = 1e3           ! radius in y direction  (+)     mm
t = 1             ! thickness                   mm
P = 1             ! point load                  N
g = 25000          ! length                     mm
E = 1e6           ! Young's modulus             N/mm2
nu = 0            ! Poisson's ratio              -
h = 50            ! mesh size                    mm
```

```
/PREP7
MPTEMP,,,,,,,,      ! material: isotropic
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
ET,1,SHELL181       ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,t,t,t,t,,      ! element thickness
```

```
s=g               ! number of nodes in x and y
nx=1
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  nx=nx+2
*ENDDO
s=2*3.1415*a2
ny=0
*DOWHILE,s
  s=s-2*h
  ny=ny+2
*ENDDO
```

```
*DO,i,1,nx         ! put nodes
  x=(i-(nx+1)/2)*g/(nx-1)
  *IF,a1,GT,0,THEN
    R=a2-a1+SQRT(a1*a1-x*x)
  *ELSE
    R=a2-a1-SQRT(a1*a1-x*x)
  *ENDIF
  *DO,j,1,ny
    y=R*SIN(2*3.1415*j/ny)
```

```

      z=R*COS(2*3.1415*j/ny)
      N,,X,Y,Z,,,
*ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,nx-1          ! put elements
*DO,j,1,ny-1
  E,(i-1)*ny+j,(i-1)*ny+j+1,i*ny+j+1,i*ny+j
*ENDDO
  E,i*ny,(i-1)*ny+1,i*ny+1,(i+1)*ny
*ENDDO

*DO,j,1,ny            ! put hinged edge
  D,j,,0,,,,UX,UY,UZ,,,
  D,(nx-1)*ny+j,,0,,,,UX,UY,UZ,,,
*ENDDO

F,(nx+1)*ny/2,FZ,-P    ! put forces
F,(nx*ny-1)/2,FZ,P
FINISH

/SOLU                  ! perform analysis
SOLVE
FINISH

/POST1
*GET,uz,NODE,(nx+1)*ny/2,u,z    ! get deflection
!*VWRITE,UZ
!(F13.5,F13.5,F13.5,F13.5,F13.5)
FINISH

!/CLEAR,NOSTART

!*CFCLOS ! close file out.txt
!*UILLIST,out.txt ! pop up out.txt

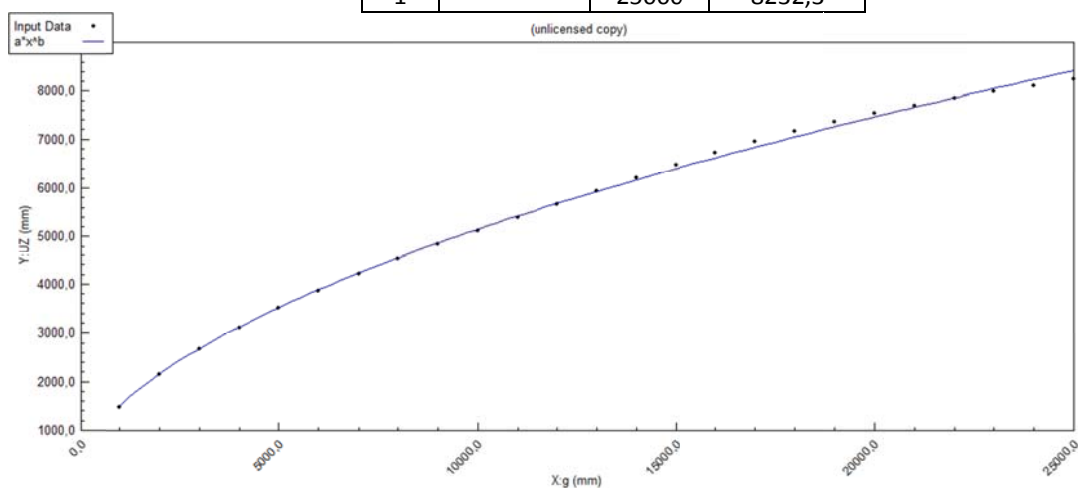
```

Bijlage 2: Nauwkeurigheid formule lange rechte cilinder ($g = 40000\text{mm}$)

a2 (mm)	t (mm)	nu (-)	w (ANSYS)	w (Formule)	Error (%)
300	10	0,25	12,277	12,529	2,0113337
400	10	0,25	19,089	19,290	1,0419907
500	10	0,25	26,784	26,958	0,6454485
600	10	0,25	35,298	35,438	0,3950562
700	10	0,25	44,538	44,657	0,2664756
800	10	0,25	54,423	54,560	0,2510997
900	10	0,25	64,959	65,103	0,221188
1000	10	0,25	76,010	76,250	0,3147541
300	15	0,25	4,5029	4,5467	0,963336
400	15	0,25	6,9743	7,0001	0,3685662
500	15	0,25	9,7675	9,7829	0,1574175
600	15	0,25	12,857	12,860	0,0233281
700	15	0,25	16,217	16,205	-0,074051
800	15	0,25	19,824	19,799	-0,126269
900	15	0,25	23,639	23,625	-0,059259
1000	15	0,25	27,678	27,670	-0,028912
300	20	0,25	2,2180	2,2115	-0,293918
400	20	0,25	3,4218	3,4100	-0,346041
500	20	0,25	4,7825	4,7656	-0,354625
600	20	0,25	6,2877	6,2646	-0,368739
700	20	0,25	7,9245	7,8943	-0,382555
800	20	0,25	9,6845	9,6449	-0,41058
900	20	0,25	11,5510	11,509	-0,364932
1000	20	0,25	13,5160	13,479	-0,274501
300	25	0,25	1,2848	1,2679	-1,332913
400	25	0,25	1,9738	1,9520	-1,116803
500	25	0,25	2,7528	2,7280	-0,909091
600	25	0,25	3,6144	3,5861	-0,789158
700	25	0,25	4,5514	4,5189	-0,719202
800	25	0,25	5,5591	5,5211	-0,688269
900	25	0,25	6,6299	6,5880	-0,636005
1000	25	0,25	7,7579	7,7160	-0,543027
300	30	0,25	0,8246	0,80375	-2,592846
400	30	0,25	1,2616	1,2374	-1,955714
500	30	0,25	1,7555	1,7294	-1,509194
600	30	0,25	2,3018	2,2733	-1,253684
700	30	0,25	2,8958	2,8647	-1,085629
800	30	0,25	3,5347	3,5000	-0,991429
900	30	0,25	4,2140	4,1764	-0,900297
1000	30	0,25	4,9309	4,8914	-0,80754
300	10	0,35	11,704	11,938	1,9601273
1000	10	0,35	72,388	72,650	0,3606332

Bijlage 3: Data lengte-invloed op verplaatsing bij een korte cilinder

t	ratio g/D	g (mm)	UZ (mm)
1		1000	1468,5
1	1	2000	2144,1
1		3000	2672,2
1	2	4000	3122,9
1		5000	3522,1
1	3	6000	3888,5
1		7000	4229,7
1	4	8000	4543,0
1		9000	4831,3
1	5	10000	5104,9
1		11000	5374,5
1	6	12000	5646,5
1		13000	5921,3
1	7	14000	6195,3
1		15000	6462,5
1	8	16000	6717
1		17000	6954,1
1	9	18000	7170,9
1		19000	7366,8
1	10	20000	7543,2
1		21000	7702,2
1	11	22000	7847,2
1		23000	7981,7
1	12	24000	8109
1		25000	8232,3

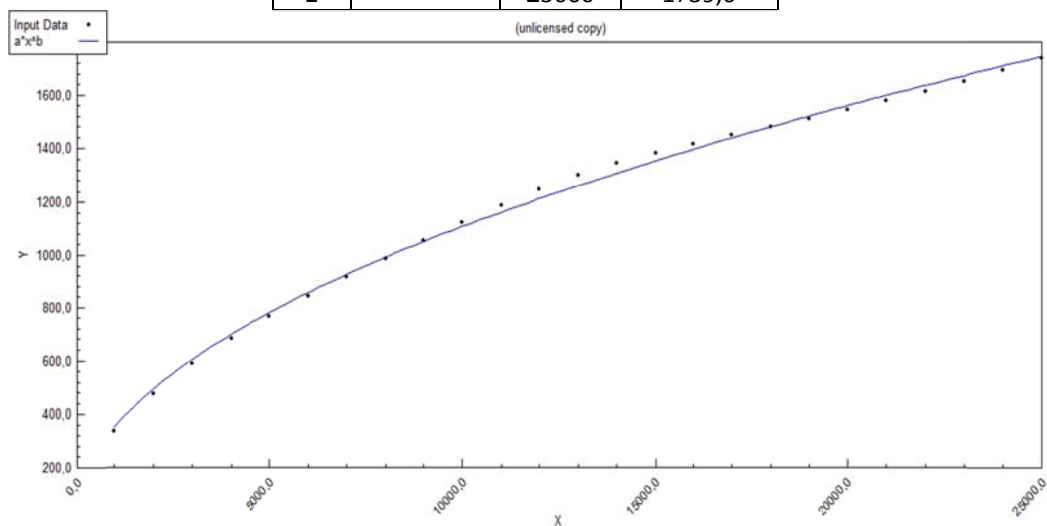


Regression Variable Results

$$Y = a \cdot x^b$$

Variable	Value	Standard Error
a	36,32	1,79
b	0,538	5,1

t	ratio g/D	g (mm)	UZ (mm)
2		1000	335,25
2	1	2000	477,82
2		3000	589,38
2	2	4000	684,72
2		5000	770,35
2	3	6000	846,44
2		7000	915,78
2	4	8000	983,40
2		9000	1051,8
2	5	10000	1120,0
2		11000	1185,3
2	6	12000	1245,1
2		13000	1297,9
2	7	14000	1343,6
2		15000	1383,3
2	8	16000	1418,3
2		17000	1450,6
2	9	18000	1481,5
2		19000	1512,5
2	10	20000	1544,5
2		21000	1578,2
2	11	22000	1614,4
2		23000	1653,2
2	12	24000	1694,9
2		25000	1739,6



Regression Variable Results

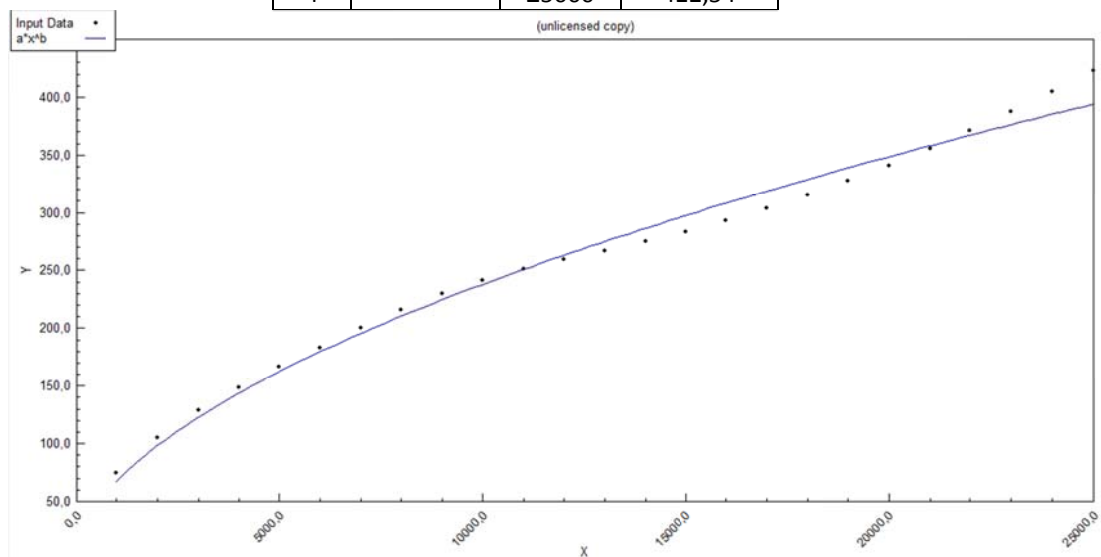
$$Y = ax^b$$

Variable	Value	Standard Error
----------	-------	----------------

a	11,34	0,727
---	-------	-------

b	0,497	6,64
---	-------	------

t	ratio g/D	g (mm)	UZ (mm)
4		1000	74,92
4	1	2000	104,99
4		3000	128,62
4	2	4000	148,74
4		5000	166,28
4	3	6000	183,28
4		7000	200,26
4	4	8000	216,20
4		9000	230,01
4	5	10000	241,42
4		11000	250,88
4	6	12000	259,15
4		13000	266,98
4	7	14000	274,99
4		15000	283,59
4	8	16000	293,03
4		17000	303,45
4	9	18000	314,93
4		19000	327,47
4	10	20000	341,06
4		21000	355,65
4	11	22000	371,18
4		23000	387,58
4	12	24000	404,73
4		25000	422,54



Regression Variable Results

$$Y = ax^b$$

Variable	Value	Standard Error
----------	-------	----------------

a	1,49	0,25
---	------	------

b	0,550	1,7
---	-------	-----

Bijlage 4: Nauwkeurigheid formule korte rechte cilinder

g (mm)	a ₂ (mm)	t (mm)	nu (-)	w (ANSYS)	w (Formule)	Error (%)
1000	1000	1	0,25	1439,2	1633,5	11,8947
2000	1000	1	0,25	2084,8	2310,0	9,748918
4000	1000	1	0,25	3022,0	3266,9	7,496403
6000	1000	1	0,25	3756,6	4001,1	6,11082
8000	1000	1	0,25	4383,1	4620,1	5,129759
10000	1000	1	0,25	4922,9	5165,4	4,694699
15000	1000	1	0,25	6233,9	6326,3	1,460569
20000	1000	1	0,25	7252,2	7305,0	0,722793
25000	1000	1	0,25	7905,2	8167,3	3,209139
30000	1000	1	0,25	8534,6	8946,8	4,607234
35000	1000	1	0,25	9331,2	9663,6	3,439712
40000	1000	1	0,25	10339	10330	-0,08712
1000	1000	5	0,25	45,374	43,694	-3,84492
2000	1000	5	0,25	62,758	61,793	-1,56167
4000	1000	5	0,25	87,952	87,389	-0,64425
6000	1000	5	0,25	109,00	107,030	-1,84061
8000	1000	5	0,25	127,22	123,59	-2,93713
10000	1000	5	0,25	139,60	138,1700	-1,03496
15000	1000	5	0,25	167,16	169,23	1,223187
20000	1000	5	0,25	210,44	195,41	-7,69152
25000	1000	5	0,25	266,76	218,47	-22,1037
30000	1000	5	0,25	323,99	239,32	-35,3794
35000	1000	5	0,25	370,20	258,50	-43,2108
40000	1000	5	0,25	400,68	276,35	-44,99
1000	1000	10	0,25	10,065	9,1856	-9,57368
2000	1000	10	0,25	13,761	12,990	-5,93533
4000	1000	10	0,25	19,250	18,371	-4,78472
6000	1000	10	0,25	23,552	22,500	-4,67556
8000	1000	10	0,25	26,318	25,9810	-1,2971
10000	1000	10	0,25	29,156	29,0470	-0,37525
15000	1000	10	0,25	40,203	35,5760	-13,006
20000	1000	10	0,25	54,530	41,0790	-32,7442
25000	1000	10	0,25	66,277	45,928	-44,3063
30000	1000	10	0,25	72,744	50,312	-44,5858
35000	1000	10	0,25	75,296	54,343	-38,5569
40000	1000	10	0,25	76,010	103,30	26,4182
2000	300	1	0,25	749,57	936,40	19,95194
2000	500	1	0,25	1162,4	1373,6000	15,37566
2000	700	1	0,25	1541,1	1767,9	12,82878
2000	900	1	0,25	1910,2	2134,54	10,50999
2000	1100	1	0,25	2262,7	2481,2	8,806223
20000	500	1	0,25	5107,8	4343,600	-17,5937

20000	750	1	0,25	5538,6	5887,320	5,923238
20000	1000	1	0,25	7252,2	7305,000	0,722793
20000	1250	1	0,25	8566,1	8635,800	0,807105
20000	1500	1	0,25	9676,6	9901,300	2,269399
20000	1750	1	0,25	10881	11115,000	2,105263
20000	2000	1	0,25	12054	12286,000	1,888328
20000	2250	1	0,25	13160	13420,000	1,937407
20000	2500	1	0,25	14241	14524,000	1,948499
2000	1000	1	0,15	2128,0	2358,8	9,784636
20000	1000	1	0,15	7442,1	7459,2	0,229247
2000	1000	1	0,35	2013,8	2234,9	9,89306
20000	1000	1	0,35	6958,1	7067,4	1,546538

Bijlage 5: Verplaatsing - k_1 voor $tk_2 = 1/100, 1/60, 1/30$ en $1/10$ bij een lange kromme cilinder

k_2 (1/mm)	t (mm)	a_1 (mm)	k_1 (1/mm)	w (mm)
0,001	10	-3,E+05	-3,333E-06	82,983
0,001	10	-4,E+05	-2,500E-06	83,358
0,001	10	-5,E+05	-2,000E-06	83,197
0,001	10	-7,E+05	-1,429E-06	82,649
0,001	10	-9,E+05	-1,111E-06	82,180
0,001	10	-1,E+06	-1,000E-06	81,988
0,001	10	-3,E+06	-3,333E-07	80,562
0,001	10	-5,E+06	-2,000E-07	80,224
0,001	10	-7,E+06	-1,429E-07	80,074
0,001	10	-9,E+06	-1,111E-07	79,990
0,001	10	-1,E+07	-1,000E-07	79,960
0,001	10	-5,E+07	-2,000E-08	79,742
0,001	10	-1,E+08	-1,000E-08	79,714
0,001	10	-5,E+08	-2,000E-09	79,692
0,001	10	-1,E+09	-1,000E-09	79,689
0,001	10	-1,E+10	-1,000E-10	79,687
0,001	10	1,E+10	1,000E-10	79,686
0,001	10	1,E+09	1,000E-09	79,684
0,001	10	5,E+08	2,000E-09	79,681
0,001	10	1,E+08	1,000E-08	79,659
0,001	10	5,E+07	2,000E-08	79,631
0,001	10	1,E+07	1,000E-07	79,405
0,001	10	9,E+06	1,111E-07	79,373
0,001	10	7,E+06	1,429E-07	79,282
0,001	10	5,E+06	2,000E-07	79,115
0,001	10	3,E+06	3,333E-07	78,716
0,001	10	1,E+06	1,000E-06	76,543
0,001	10	9,E+05	1,111E-06	76,157
0,001	10	7,E+05	1,429E-06	75,025
0,001	10	5,E+05	2,000E-06	72,913
0,001	10	4,E+05	2,500E-06	71,030
0,001	10	3,E+05	3,333E-06	67,911

k₂ (1/mm)	t (mm)	a₁ (mm)	k₁ (1/mm)	w (mm)
0,00166667	10	-3,E+05	-3,333E-06	38,400
0,00166667	10	-4,E+05	-2,500E-06	38,119
0,00166667	10	-5,E+05	-2,000E-06	37,926
0,00166667	10	-7,E+05	-1,429E-06	37,686
0,00166667	10	-9,E+05	-1,111E-06	37,543
0,00166667	10	-1,E+06	-1,000E-06	37,492
0,00166667	10	-3,E+06	-3,333E-07	37,170
0,00166667	10	-5,E+06	-2,000E-07	37,103
0,00166667	10	-7,E+06	-1,429E-07	37,074
0,00166667	10	-9,E+06	-1,111E-07	37,058
0,00166667	10	-1,E+07	-1,000E-07	37,052
0,00166667	10	-5,E+07	-2,000E-08	37,011
0,00166667	10	-1,E+08	-1,000E-08	37,006
0,00166667	10	-5,E+08	-2,000E-09	37,002
0,00166667	10	-1,E+09	-1,000E-09	37,002
0,00166667	10	-1,E+10	-1,000E-10	37,001
0,00166667	10	1,E+10	1,000E-10	37,001
0,00166667	10	1,E+09	1,000E-09	37,000
0,00166667	10	5,E+08	2,000E-09	37,000
0,00166667	10	1,E+08	1,000E-08	36,996
0,00166667	10	5,E+07	2,000E-08	36,991
0,00166667	10	1,E+07	1,000E-07	36,949
0,00166667	10	9,E+06	1,111E-07	36,944
0,00166667	10	7,E+06	1,429E-07	36,927
0,00166667	10	5,E+06	2,000E-07	36,897
0,00166667	10	3,E+06	3,333E-07	36,828
0,00166667	10	1,E+06	1,000E-06	36,469
0,00166667	10	9,E+05	1,111E-06	36,408
0,00166667	10	7,E+05	1,429E-06	36,232
0,00166667	10	5,E+05	2,000E-06	35,907
0,00166667	10	4,E+05	2,500E-06	35,617

k₂ (1/mm)	t (mm)	a₁ (mm)	k₁ (1/mm)	w (mm)
0,00333333	10	-3,E+05	-3,333E-06	12,987
0,00333333	10	-4,E+05	-2,500E-06	12,953
0,00333333	10	-5,E+05	-2,000E-06	12,932
0,00333333	10	-7,E+05	-1,429E-06	12,907
0,00333333	10	-9,E+05	-1,111E-06	12,894
0,00333333	10	-1,E+06	-1,000E-06	12,889
0,00333333	10	-3,E+06	-3,333E-07	12,860
0,00333333	10	-5,E+06	-2,000E-07	12,855
0,00333333	10	-7,E+06	-1,429E-07	12,852
0,00333333	10	-9,E+06	-1,111E-07	12,851
0,00333333	10	-1,E+07	-1,000E-07	12,850
0,00333333	10	-5,E+07	-2,000E-08	12,847
0,00333333	10	-1,E+08	-1,000E-08	12,846
0,00333333	10	-5,E+08	-2,000E-09	12,846
0,00333333	10	-1,E+09	-1,000E-09	12,846
0,00333333	10	-1,E+10	-1,000E-10	12,846
0,00333333	10	1,E+10	1,000E-10	12,846
0,00333333	10	1,E+09	1,000E-09	12,846
0,00333333	10	5,E+08	2,000E-09	12,846
0,00333333	10	1,E+08	1,000E-08	12,845
0,00333333	10	5,E+07	2,000E-08	12,845
0,00333333	10	1,E+07	1,000E-07	12,842
0,00333333	10	9,E+06	1,111E-07	12,841
0,00333333	10	7,E+06	1,429E-07	12,840
0,00333333	10	5,E+06	2,000E-07	12,837
0,00333333	10	3,E+06	3,333E-07	12,831
0,00333333	10	1,E+06	1,000E-06	12,802
0,00333333	10	9,E+05	1,111E-06	12,797

k₂ (1/mm)	t (mm)	a₁ (mm)	k₁ (1/mm)	w (mm)
0,003333	30	-3,E+05	-3,333E-06	0,85761
0,003333	30	-4,E+05	-2,500E-06	0,8569
0,003333	30	-5,E+05	-2,000E-06	0,85648
0,003333	30	-7,E+05	-1,429E-06	0,85599
0,003333	30	-9,E+05	-1,111E-06	0,85571
0,003333	30	-1,E+06	-1,000E-06	0,85562
0,003333	30	-3,E+06	-3,333E-07	0,85504
0,003333	30	-5,E+06	-2,000E-07	0,85493
0,003333	30	-7,E+06	-1,429E-07	0,85488
0,003333	30	-9,E+06	-1,111E-07	0,85485
0,003333	30	-1,E+07	-1,000E-07	0,85484
0,003333	30	-5,E+07	-2,000E-08	0,85477
0,003333	30	-1,E+08	-1,000E-08	0,85477
0,003333	30	-5,E+08	-2,000E-09	0,85476
0,003333	30	-1,E+09	-1,000E-09	0,85476
0,003333	30	-1,E+10	-1,000E-10	0,85476
0,003333	30	1,E+10	1,000E-10	0,85476
0,003333	30	1,E+09	1,000E-09	0,85476
0,003333	30	5,E+08	2,000E-09	0,85476
0,003333	30	1,E+08	1,000E-08	0,85475
0,003333	30	5,E+07	2,000E-08	0,85474
0,003333	30	1,E+07	1,000E-07	0,85467
0,003333	31	9,E+06	1,111E-07	0,85466
0,003333	32	7,E+06	1,429E-07	0,85463
0,003333	33	5,E+06	2,000E-07	0,85458
0,003333	34	3,E+06	3,333E-07	0,85447
0,003333	35	1,E+06	1,000E-06	0,85389
0,003333	36	9,E+05	1,111E-06	0,85379

Bijlage 6: Verplaatsing versus kromming van een korte cilinder voor $t = 1$

k2 (1/mm)	g (mm)	t (mm)	k1 (1/mm)	w (mm)
0,002	25000	1	-3,000E-05	6235,4
0,002	25000	1	-5,000E-05	6625,2
0,002	25000	1	-7,000E-05	6726,1
0,002	25000	1	-9,000E-05	6758,4
0,002	25000	1	-1,000E-06	6765,3
0,002	25000	1	-3,000E-06	6755,5
0,002	25000	1	-5,000E-06	6742,7
0,002	25000	1	-7,000E-06	6736,1
0,002	25000	1	-9,000E-06	6732,2
0,002	25000	1	-1,000E-07	6730,8
0,002	25000	1	-5,000E-07	6719,8
0,002	25000	1	-1,000E-08	6718,3
0,002	25000	1	-5,000E-08	6717,1
0,002	25000	1	-1,000E-09	6717
0,002	25000	1	-1,000E-10	6716,8
0,002	25000	1	1,000E-10	6716,8
0,002	25000	1	1,000E-09	6716,7
0,002	25000	1	5,000E-08	6716,5
0,002	25000	1	1,000E-08	6715,3
0,002	25000	1	5,000E-07	6713,8
0,002	25000	1	1,000E-07	6700,9
0,002	25000	1	9,000E-06	6699
0,002	25000	1	7,000E-06	6693,5
0,002	25000	1	5,000E-06	6683
0,002	25000	1	3,000E-06	6656,1
0,002	25000	1	1,000E-06	6473,1
0,002	25000	1	9,000E-05	6435,4
0,002	25000	1	7,000E-05	6318,1
0,002	25000	1	5,000E-05	6076,8
0,002	25000	1	3,000E-05	5430,1

k2 (1/mm)	g (mm)	t (mm)	k1 (1/mm)	w (mm)
0,001	25000	1	-1,000E-05	6701,8
0,001	25000	1	-3,000E-05	8502,7
0,001	25000	1	-5,000E-05	8689,4
0,001	25000	1	-7,000E-05	8654,9
0,001	25000	1	-9,000E-05	8601
0,001	25000	1	-1,000E-06	8576,3
0,001	25000	1	-3,000E-06	8369,2
0,001	25000	1	-5,000E-06	8316,8
0,001	25000	1	-7,000E-06	8293,3
0,001	25000	1	-9,000E-06	8280,1
0,001	25000	1	-1,000E-07	8275,4
0,001	25000	1	-5,000E-07	8241,1
0,001	25000	1	-1,000E-08	8236,7
0,001	25000	1	-5,000E-08	8233,2
0,001	25000	1	-1,000E-09	8232,8
0,001	25000	1	-1,000E-10	8232,4
0,001	25000	1	1,000E-10	8232,3
0,001	25000	1	1,000E-09	8231,9
0,001	25000	1	5,000E-08	8231,5
0,001	25000	1	1,000E-08	8228
0,001	25000	1	5,000E-07	8223,5
0,001	25000	1	1,000E-07	8187,7
0,001	25000	1	9,000E-06	8182,7
0,001	25000	1	7,000E-06	8168,2
0,001	25000	1	5,000E-06	8141,6
0,001	25000	1	3,000E-06	8078,1
0,001	25000	1	1,000E-06	7733,5
0,001	25000	1	9,000E-05	7673,1
0,001	25000	1	7,000E-05	7497,9
0,001	25000	1	5,000E-05	7180,1
0,001	25000	1	3,000E-05	6474,8
0,001	25000	1	1,000E-05	4253,4

k2 (1/mm)	g (mm)	t (mm)	k1 (1/mm)	w (mm)
0,0005	25000	1	-1,000E-05	10860
0,0005	25000	1	-3,000E-05	14256
0,0005	25000	1	-5,000E-05	14986
0,0005	25000	1	-7,000E-05	14969
0,0005	25000	1	-9,000E-05	14832
0,0005	25000	1	-1,000E-06	14761
0,0005	25000	1	-3,000E-06	14117
0,0005	25000	1	-5,000E-06	13950
0,0005	25000	1	-7,000E-06	13876
0,0005	25000	1	-9,000E-06	13834
0,0005	25000	1	-1,000E-07	13819
0,0005	25000	1	-5,000E-07	13710
0,0005	25000	1	-1,000E-08	13696
0,0005	25000	1	-5,000E-08	13685
0,0005	25000	1	-1,000E-09	13684
0,0005	25000	1	-1,000E-10	13682
0,0005	25000	1	1,000E-10	13682
0,0005	25000	1	1,000E-09	13681
0,0005	25000	1	5,000E-08	13680
0,0005	25000	1	1,000E-08	13668
0,0005	25000	1	5,000E-07	13655
0,0005	25000	1	1,000E-07	13542
0,0005	25000	1	9,000E-06	13526
0,0005	25000	1	7,000E-06	13480
0,0005	25000	1	5,000E-06	13398
0,0005	25000	1	3,000E-06	13201
0,0005	25000	1	1,000E-06	12188
0,0005	25000	1	9,000E-05	12019
0,0005	25000	1	7,000E-05	11548
0,0005	25000	1	5,000E-05	10749
0,0005	25000	1	3,000E-05	9201,1
0,0005	25000	1	1,000E-05	5583,3

k2 (1/mm)	g (mm)	t (mm)	k1 (1/mm)	w (mm)
0,000333	25000	1	-1,000E-05	13848
0,000333	25000	1	-3,000E-05	18911
0,000333	25000	1	-5,000E-05	20494
0,000333	25000	1	-7,000E-05	20690
0,000333	25000	1	-9,000E-05	20550
0,000333	25000	1	-1,000E-06	20455
0,000333	25000	1	-3,000E-06	19410
0,000333	25000	1	-5,000E-06	19122
0,000333	25000	1	-7,000E-06	18993
0,000333	25000	1	-9,000E-06	18920
0,000333	25000	1	-1,000E-07	18894
0,000333	25000	1	-5,000E-07	18705
0,000333	25000	1	-1,000E-08	18681
0,000333	25000	1	-5,000E-08	18661
0,000333	25000	1	-1,000E-09	18659
0,000333	25000	1	-1,000E-10	18657
0,000333	25000	1	1,000E-10	18656
0,000333	25000	1	1,000E-09	18654
0,000333	25000	1	5,000E-08	18652
0,000333	25000	1	1,000E-08	18632
0,000333	25000	1	5,000E-07	18608
0,000333	25000	1	1,000E-07	18412
0,000333	25000	1	9,000E-06	18385
0,000333	25000	1	7,000E-06	18306
0,000333	25000	1	5,000E-06	18162
0,000333	25000	1	3,000E-06	17823
0,000333	25000	1	1,000E-06	16113
0,000333	25000	1	9,000E-05	15838
0,000333	25000	1	7,000E-05	15081
0,000333	25000	1	5,000E-05	13848
0,000333	25000	1	3,000E-05	11612
0,000333	25000	1	1,000E-05	6919,1

k2 (1/mm)	g (mm)	t (mm)	k1 (1/mm)	w (mm)
0,0002	25000	1	-1,000E-05	19285
0,0002	25000	1	-3,000E-05	26515
0,0002	25000	1	-5,000E-05	29624
0,0002	25000	1	-7,000E-05	30619
0,0002	25000	1	-9,000E-05	30725
0,0002	25000	1	-1,000E-06	30656
0,0002	25000	1	-3,000E-06	29016
0,0002	25000	1	-5,000E-06	28475
0,0002	25000	1	-7,000E-06	28228
0,0002	25000	1	-9,000E-06	28087
0,0002	25000	1	-1,000E-07	28038
0,0002	25000	1	-5,000E-07	27672
0,0002	25000	1	-1,000E-08	27626
0,0002	25000	1	-5,000E-08	27589
0,0002	25000	1	-1,000E-09	27584
0,0002	25000	1	-1,000E-10	27580
0,0002	25000	1	1,000E-10	27579
0,0002	25000	1	1,000E-09	27575
0,0002	25000	1	5,000E-08	27570
0,0002	25000	1	1,000E-08	27532
0,0002	25000	1	5,000E-07	27486
0,0002	25000	1	1,000E-07	27105
0,0002	25000	1	9,000E-06	27051
0,0002	25000	1	7,000E-06	26898
0,0002	25000	1	5,000E-06	26619
0,0002	25000	1	3,000E-06	25961
0,0002	25000	1	1,000E-06	22758
0,0002	25000	1	9,000E-05	22265
0,0002	25000	1	7,000E-05	20945
0,0002	25000	1	5,000E-05	18900
0,0002	25000	1	3,000E-05	15487
0,0002	25000	1	1,000E-05	9089,7