

## Voorwoord

Dit rapport is tot stand gekomen in het kader van het vak “Bachelor of Science”-eindwerk (CT3000). Gedurende de ruim zes weken die hiervoor beschikbaar gesteld zijn, is een onderzoeksproject van begin tot eind doorlopen. Voorafgegaan door een startnotitie en een conceptrapport is dit het eindrapport waar naartoe gewerkt is. Bij deze zou ik de heren Hoogenboom en Peperkamp willen bedanken voor de informatie en adviezen die zij mij verstrekt hebben.

Spijkenisse, 12 oktober 2003

Anne van de Graaf

## Samenvatting

De meeste vloeren in de bouwpraktijk zijn rechthoekig van vorm. De doorbuiging van en de momenten in deze vloeren kunnen worden afgelezen uit tabellen. Er komen echter ook andere vloervormen voor, zoals driehoekige vloerdelen, waarvoor – in tegenstelling tot de rechthoekige vormen – geen formules bestaan voor de doorbuiging en de momenten.

Het doel van dit rapport is om voor deze driehoekige vloerdelen benaderingsformules voor de doorbuiging en de momenten op te stellen. De in dit rapport onderzochte vloervormen zijn beperkt tot de gelijkzijdige, de gelijkbenige en de rechthoekige driehoek. Bovendien is alleen gekeken naar een gelijkmatig verdeelde belasting die over het gehele vloeroppervlak werkzaam is. Tevens zijn alle onderzochte vloerplaten aan de randen scharnierend opgelegd.

Voor het afleiden van de benaderingsformules voor deze vloeren, zijn analytische berekeningen gemaakt op basis van het principe van minimum potentiële energie. Kortweg betekent dit dat een statisch belaste constructie die vervorming zal aannemen waarbij de totale potentiële energie minimaal is. Door het toepassen van deze theorie kunnen relatief eenvoudige formules gevonden worden.

Vervolgens zijn deze formules numeriek gecontroleerd, waaruit echter bleek dat zij zeer grote afwijkingen gaven (in de orde van 40 % en hoger). Daarop zijn de coëfficiënten die in de formules voorkomen, aangepast aan numerieke resultaten. Vervolgens zijn de formules opnieuw gecontroleerd en daaruit bleek dat zij na correctie wel voldoende nauwkeurige resultaten geven.

De conclusie is dat de vorm van de benaderingsformules voor elke onderzochte vloervorm voor de doorbuiging en de momenten qua opbouw hetzelfde is; slechts de coëfficiënten in deze formules verschillen van elkaar. Deze coëfficiënten zijn per driehoeksvorm – en voor de gelijkbenige en de rechthoekige driehoek voor verschillende lengteverhoudingen van de zijden – in tabellen verzameld. De formules voor de gelijkzijdige driehoek zijn tot op ongeveer 1,5 % nauwkeurig bevonden, terwijl de formules voor de gelijkbenige driehoek tot op ongeveer 2,5 % nauwkeurig zijn.

Bovendien zijn de formules nauwelijks gevoelig gebleken voor veranderingen in de grootte van de belasting of de betonkwaliteit. Echter, als de plaatdikte erg groot gekozen wordt ten opzichte van de lengteafmetingen, dan zijn de formules niet meer voldoende betrouwbaar. Dat wil zeggen dat de resultaten meer dan 5 % kunnen afwijken van numerieke resultaten.

Tenslotte geven de formules voor een plaat met een extreme vorm – bijvoorbeeld een zeer kleine hoogte ten opzichte van de breedte – minder betrouwbare resultaten.

## Inhoudsopgave

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Voorwoord                                                                                  | ii  |
| SAMENVATTING                                                                               | iii |
| 1. INLEIDING                                                                               | 1   |
| 2. ACHTERGRONDTHEORIE EN TE VOLGEN AANPAK                                                  | 3   |
| 2.1 Het principe van minimum potentiële energie                                            | 3   |
| 2.2 Aanpak voor het opstellen van de benaderingsformules                                   | 4   |
| 3. EEN PLAAT IN DE VORM VAN EEN GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK                                     | 6   |
| 3.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules                                    | 6   |
| 3.2 Numerieke berekening van de plaat                                                      | 9   |
| 3.3 De exacte oplossing voor de plaat                                                      | 12  |
| 3.4 Vergelijking van de numerieke oplossing met de exacte oplossing                        | 13  |
| 3.5 Het corrigeren van de benaderingsformules                                              | 16  |
| 4. EEN PLAAT IN DE VORM VAN EEN GELIJKBENIGE DRIEHOEK                                      | 20  |
| 4.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules                                    | 20  |
| 4.2 Het corrigeren van de benaderingsformules                                              | 23  |
| 5. EEN PLAAT IN DE VORM VAN EEN RECHTHOEKIGE DRIEHOEK                                      | 25  |
| 5.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules                                    | 25  |
| 5.2 Het corrigeren van de benaderingsformules                                              | 27  |
| 6. CONCLUSIES                                                                              | 29  |
| 7. AANBEVELINGEN                                                                           | 31  |
| 8. ZELFEVALUATIE                                                                           | 32  |
| 8.1 Besprekingsverslagen                                                                   | 32  |
| 8.2 Ervaringen met het eindwerk                                                            | 33  |
| LITERATUURLIJST                                                                            | 34  |
| BIJLAGE A TABEL MET BENADERINGSFORMULES VOOR RECHTHOEKIGE PLATEN                           | 35  |
| BIJLAGE B STAPPENPLAN TER BEPALING VAN DE BENADERINGSFORMULES                              | 36  |
| BIJLAGE C HET INVOEREN VAN EEN PLAAT IN DE VORM VAN EEN GELIJKZIJDIGE<br>DRIEHOEK IN MAPLE | 37  |
| BIJLAGE D HET INVOEREN VAN EEN PLAAT IN ESA PRIMA WIN                                      | 40  |
| BIJLAGE E CALIBRATIE- EN VERIFICATIE-TABELLEN VOOR DE GELIJKBENIGE DRIEHOEK                | 42  |
| BIJLAGE F CALIBRATIE- EN VERIFICATIE-TABELLEN VOOR DE RECHTHOEKIGE DRIEHOEK                | 50  |
| BIJLAGE G TABEL MET BENADERINGSFORMULES VOOR DRIEHOEKIGE PLATEN                            | 59  |
| SYMBOLENLIJST                                                                              | 60  |

---

## Inleiding

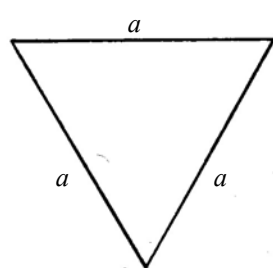
De meeste vloeren in de bouwpraktijk zijn rechthoekig van vorm. De doorbuiging van en de momenten in deze vloeren kunnen worden afgelezen uit tabellen. Echter, ook bijzondere vloervormen komen voor zoals gedeeltelijk ronde vormen en die met scheve openingen. Hiervoor zijn vaak driehoekige passtukken nodig. Voor deze driehoekige vloerdelen bestaan echter geen formules voor de doorbuiging en de momenten.

Het doel van dit rapport is het afleiden van benaderingsformules voor de doorbuiging van en de momenten in verschillende driehoekige vloervormen. Hierbij wordt er gestreefd naar een tabelvorm zoals die ook al bestaat voor rechthoekige vloeren, zie bijlage A.

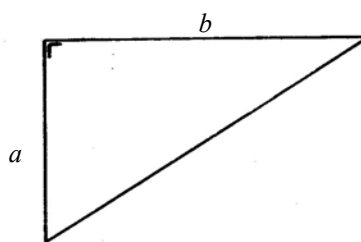
Daarnaast wordt bekeken hoe nauwkeurig de uitkomsten van de benaderingsformules zijn in vergelijking met resultaten die gebaseerd zijn op de Eindige Elementen Methode (EEM), onder welke restricties de formules toepasbaar zijn en of de formules verbeterd kunnen worden met de resultaten van een EEM-programma.

Daar dit probleem zeer uitgebreid is, dient het onderzoeksgebied beperkt te worden. Dit wordt bereikt door beperkingen op te leggen aan de vorm van de driehoeken, het type belasting en de soorten en het type oplegging. In onderstaande opsomming staan de uitgangspunten.

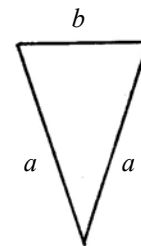
- Er wordt slechts een beperkte geometrie onderzocht (gelijkzijdige, rechthoekige en gelijkbenige driehoeken) (zie figuur 1.1).



*Gelijkzijdige driehoek*



*Rechthoekige driehoek*



*Gelijkbenige driehoek*

**Figuur 1.1** Mogelijke plaatvormen

- Er wordt alleen een gelijkmatig verdeelde oppervlaktebelasting, die over de gehele vloerplaat heerst, onderzocht.
- Er zal alleen een langs de randen aangebrachte scharnierende ondersteuning onderzocht worden.
- De formules dienen eenvoudig van vorm te zijn, zodat ze gemakkelijk te gebruiken zijn.

De opbouw van dit rapport is als volgt. In hoofdstuk 2 wordt – als achtergrondtheorie – het principe van minimum potentiële energie uitgelegd en wordt er aangegeven hoe deze theorie gebruikt wordt bij het afleiden van de benaderingsformules.

In het derde hoofdstuk wordt een vloer in de vorm van een gelijkzijdige driehoek uitgewerkt. Dit houdt in dat de benaderingsformules voor deze vorm analytisch opgesteld worden en daarna numeriek gecontroleerd worden, waarna de coëfficiënten in de formules aangepast worden aan de numerieke resultaten. Dit hoofdstuk is erg uitgebreid en geeft stap voor stap aan hoe de eerder behandelde theorie gebruikt kan worden om tot de gevraagde formules te komen. In de hoofdstukken 4 en 5 wordt iets soortgelijks gedaan, maar dan voor een vloerplaat in de vorm van een gelijkbenige respectievelijk rechthoekige driehoek. Deze hoofdstukken zijn beknopter en alleen de grootste stappen en belangrijkste resultaten staan vermeld.

Hoofdstuk 6 omvat de conclusies die uit de resultaten van de voorgaande hoofdstukken getrokken kunnen worden. Hoofdstuk 7 geeft een aantal aanbevelingen die wellicht voor nader onderzoek in aanmerking komen.

In hoofdstuk 8 staat een zelfevaluatie met daarin een tweetal besprekingsverslagen en de mening en ervaringen van de student over dit eindwerk.

Tenslotte wordt nog opgemerkt dat in dit rapport de benamingen vloer en plaat door elkaar gebruikt worden, terwijl daarmee hetzelfde bedoeld wordt.

---

## Achtergrondtheorie en te volgen aanpak

In dit hoofdstuk wordt de theorie die nodig is voor het afleiden van de benaderingsformules behandeld. Deze staat beschreven in paragraaf in 2.1.  
In paragraaf 2.2 wordt aangegeven hoe deze theorie gebruikt wordt bij het opstellen van de benaderingsformules.

### 2.1 Het principe van minimum potentiële energie

Voor het kunnen toepassen van de onderstaande theorie moet aan twee voorwaarden worden voldaan, namelijk:

- het materiaal dient zuiver elastisch te zijn;
- de belasting dient conservatief te zijn; dat wil zeggen dat ‘de arbeid verricht door deze belasting onafhankelijk is van de gevolgde weg en alleen bepaald wordt door het begin- en eindpunt van de belasting’ (definitie overgenomen uit [1]).

Deze voorwaarden sluiten energiedissipatie uit.

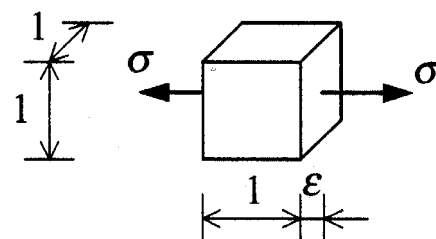
Het principe van minimum potentiële energie luidt als volgt: *een statisch belaste constructie zal die vervorming aannemen waarbij de totale potentiële energie minimaal is.*

De totale potentiële energie ( $E_{pot}$ ) bestaat uit twee bijdragen: de vormveranderingenergie ( $E_s$ ) en de energie van plaats ( $E_p$ ). De vormveranderingenergie is potentiële energie die zich ophoopt in het materiaal en als volgt bepaald kan worden. Beschouw een klein volume-elementje met afmetingen 1, waarop een spanning  $\sigma$  werkt. Deze spanning neemt geleidelijk toe (tot  $\sigma$ ) en heeft tot gevolg dat de lengte 1 geleidelijk toeneemt met  $\epsilon$ , zie figuur 2.1.

De arbeid die verricht wordt door deze belasting, oftewel de vormveranderingenergie per volume-eenheid, is gelijk aan:

$$E'_s = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon \text{ met } \sigma = \sigma(\epsilon)$$

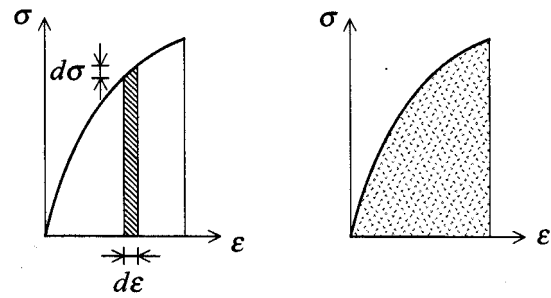
Dit komt overeen met het grijs gearceerde gebied in figuur 2.2.



**Figuur 2.1** Spanningen op en vervorming van een kubusje (figuur overgenomen uit [2])

Zoals uit deze figuur blijkt is het niet noodzakelijk dat het materiaal zich lineair-elastisch gedraagt. De totale vormveranderingenergie opgeslagen in een lichaam ( $E_s$ ) kan gevonden door de vormveranderingenergie per volume-eenheid te sommeren over het totale volume van het lichaam:

$$E_s = \iiint_V E'_s dV$$



**Figuur 2.2** Spanning-rekdiagrammen van een elastisch materiaal (figuur overgenomen uit [2])

De energie van plaats ( $E_p$ ) is een gevolg van de verplaatsingen van de belasting door de vervorming van het lichaam:

$$E_p = -qu$$

waarbij  $q$  een gelijkmatig verdeelde oppervlaktebelasting voorstelt en  $u$  de verplaatsing die de belasting ondergaat.

Bij een beweging in de richting van de belasting neemt de energie van plaats af. Dit verklaart het minteken in de uitdrukking. Door sommatie over de oppervlakte van de constructie wordt de totale hoeveelheid energie van plaats gevonden:

$$E_p = -\iint_S qu dS$$

De totale hoeveelheid potentiële energie ( $E_{pot}$ ) bestaat uit de som van de twee zojuist genoemde bijdragen:

$$E_{pot} = E_s + E_p = \iiint_V E'_s dV - \iint_S qu dS$$

Als energiedissipatie buiten beschouwing gelaten wordt, dan geldt de wet van behoud van energie. Dat betekent dat de som van de kinetische energie en de potentiële energie constant dient te zijn. In formulevorm:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \text{constant}$$

Hierbij is aangenomen dat het materiaalgedrag elastisch is. Wanneer nu wel energie wordt gedissipeerd zal dat ten koste gaan van de bijdrage van kinetische energie. Dit kan doorgaan totdat de constructie niet meer beweegt en derhalve in statisch evenwicht is. Het blijkt dat evenwicht optreedt bij die vorm waarbij de kinetische energie maximaal was voordat de beweging uitdempte. Als voorbeeld kan een slinger beschouwd worden. De snelheid en kinetische energie van een bewegende slinger zijn maximaal op het moment dat de slinger door de (verticale) evenwichtsstand gaat. In statisch evenwicht zal de slinger ook in deze verticale evenwichtsstand hangen. In dit rapport wordt echter aangenomen dat er geen energie wordt gedissipeerd. Door behoud van energie zal de potentiële energie minimaal zijn als de kinetische energie maximaal is. De evenwichtsvorm is derhalve die vorm waarbij de potentiële energie minimaal is.

## 2.2 Aanpak voor het opstellen van de benaderingsformules

Het in de vorige paragraaf beschreven principe van minimum potentiële energie is zeer geschikt voor het vinden van benaderingsformules voor de doorbuiging van en de momenten in (driehoekige) platen.

De werkwijze is als volgt: kies een functie waarvan verwacht wordt dat deze de doorbuiging van de plaat goed zal beschrijven. Deze doorbuigingsfunctie moet voldoen aan de kinematische randvoorwaarden, dat wil zeggen dat deze functie moet voldoen aan opgelegde verplaatsingen en rotaties in de opleggingen. De functie hoeft echter niet te voldoen aan de dynamische randvoorwaarden, dat wil zeggen dat de functie niet zodanig gekozen hoeft te worden dat de dwarskracht op een rand gelijk is aan de opgelegde dwarskracht of dat het moment in de rand gelijk is aan het opgelegde moment.<sup>1</sup> In de functie zijn één of meerdere parameters aanwezig, die nader bepaald dienen te worden.

Na het formuleren van de doorbuigingsfunctie wordt de vergelijking voor de potentiële energie van de vervormde constructie opgesteld. De potentiële energie kan een functie zijn van materiaalconstanten, afmetingen, doorbuiging en dergelijke. Volgens het bovenstaande principe moet de potentiële energie minimaal zijn met betrekking tot deze parameters die de vervorming beschrijven. Het minimum wordt dáár gevonden waar de helling van de potentiële energie gelijk aan nul is, wat inhoudt dat alle eerste partiële afgeleiden van de potentiële energie naar eerder genoemde parameters gelijk aan nul moeten zijn. Dit resulteert in een stelsel vergelijkingen waaruit de gezochte parameters berekend kunnen worden. Dan is de doorbuiging bekend en kunnen ook de momenten berekend worden.

In bijlage B is bovenstaande aanpak uitgewerkt in een stappenplan waarin bovendien de benodigde wiskundige formules vermeld staan. Dit alles zal geheel analytisch uitgewerkt worden, waarbij veel gebruik gemaakt wordt van het programma Maple [3]. Tenslotte is het van groot belang dat de gevonden resultaten geverifieerd worden. Hiertoe wordt de plaat numeriek doorgerekend met het EEM-programma ESA Prima Win [4]. Tevens wordt er, waar mogelijk, gebruik gemaakt van eerder gevonden resultaten.

---

<sup>1</sup> Een voorbeeld hiervan is dat bij een belasting door een randmoment, de kromming aan de rand niet zodanig hoeft te zijn dat het bijbehorende inwendige moment overeenkomt met het opgelegde randmoment. Door het principe van minimum potentiële energie zal de oplossing vanzelf de juiste inwendige momenten geven of deze zo goed mogelijk benaderen.

## Een plaat in de vorm van een gelijkzijdige driehoek

In dit hoofdstuk wordt de scharnierend ondersteunde plaat in de vorm van een gelijkzijdige driehoek onderzocht. Dit houdt in dat de plaat op de randen is opgelegd en dat daar een vrije rotatie mogelijk is.

Paragraaf 3.1 behandelt het analytisch opstellen van de benaderingsformules voor de doorbuiging van en de momenten in deze plaat door toepassing van het principe van minimum potentiële energie. Daarbij zal het stappenplan voor de berekening van de doorbuigingen en momenten, zoals dat beschreven staat in bijlage B, gevolgd worden. In paragraaf 3.2 wordt de betreffende plaat numeriek doorgerekend.

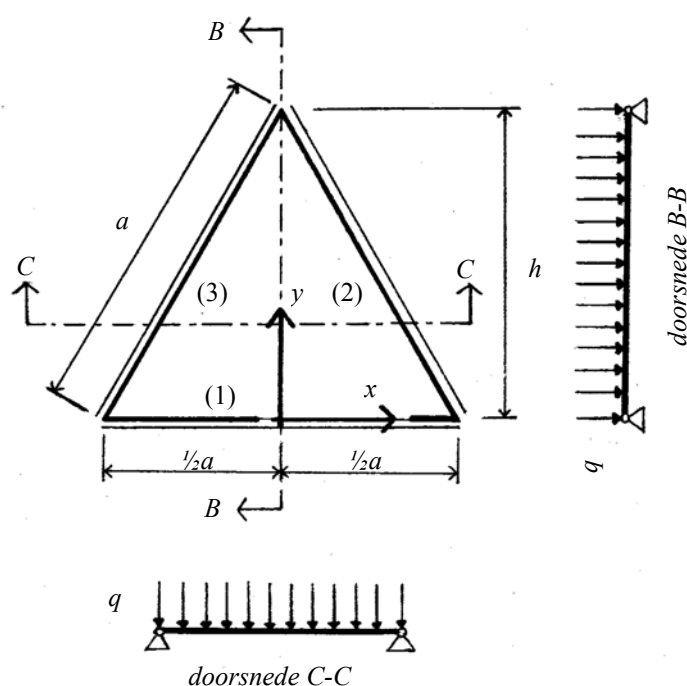
Daar er voor dit geval ook een exacte oplossing bestaat zal deze in paragraaf 3.3 behandeld en doorgerekend worden.

In paragraaf 3.4 worden de resultaten van de numerieke oplossing en de exacte oplossing naast elkaar gezet en met elkaar vergeleken. Zo kan gecontroleerd worden of de plaat op de juiste manier in ESA Prima Win is ingevoerd.

Tenslotte worden in paragraaf 3.5 de benaderingsformules aangepast aan de numerieke uitkomsten en wordt er bekeken hoe nauwkeurig deze formules zijn.

### 3.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules

De onderzochte plaat is gelijkzijdig van vorm met zijden  $a$  en wordt aan de randen scharnierend ondersteund, zie figuur 3.1.



hoogte van de driehoek:

$$h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$$

$x$ -coördinaat van rand (2) als functie van  $y$ :

$$x = -a \cdot \frac{(h - y)}{2h}$$

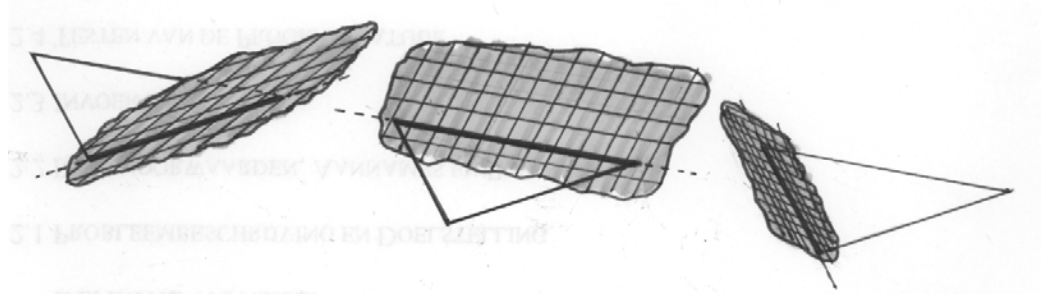
$x$ -coördinaat van rand (3) als functie van  $y$ :

$$x = a \cdot \frac{(h - y)}{2h}$$

**Figuur 3.1** De aan de randen scharnierend opgelegde plaat in de vorm van een gelijkzijdige driehoek en belast met een gelijkmatig verdeelde belasting

**(1) Schat een functie voor de doorbuiging  $w$**

Dit wordt als volgt gedaan: neem een rand en definieer een recht vlak door deze rand. Dit vlak stelt de vloerplaat voor die onder de gegeven belasting roteert om de rand als de andere twee randen er niet zouden, zie figuur 3.2.



**Figuur 3.2** Door elke rand kan een recht vlak gedefinieerd worden

De hoogte van een punt op dit vlak ten opzichte van de rand geeft de doorbuiging aan, die hier dus lineair verondersteld is. Zo ontstaan er een aantal isolijnen die de zakking van de plaat geven en evenwijdig liggen aan de betreffende rand. Stel dat de functie  $g_i$  de waarde van de doorbuiging geeft als van functie van  $x$  en  $y$ . Dan moet deze functiewaarde dus gelijk aan nul zijn voor een coördinaat die op de rand ligt, de plaat is daar immers ondersteund. Vervolgens wordt deze functie gedeeld door een bekende lengte, zoals de hoogte of een zijde van de driehoek, om de betreffende functie dimensieloos te maken.

Hetzelfde kan gedaan worden voor de andere twee randen. Elk van deze functies geeft dus de waarde nul als de coördinaten van de betreffende rand ingevuld worden, wat correspondeert met het feit dat de randen van de plaat niet doorbuigen. Indien het product van deze drie (continue) functies berekend wordt, dan zou deze nieuwe (eveneens continue) functie de waarde nul moeten aannemen als een willekeurige randcoördinaat ingevuld wordt, ongeacht op welke rand die coördinaat ligt.

Hiermee is de vorm van de doorbuigingsfunctie gedefinieerd. Om de doorbuiging op de juiste schaal te krijgen, wordt er nog een (dimensiedragende) amplitude  $A$  aan toegevoegd. Hieronder is het bovenstaande voor de randen (1), (2) en (3) uitgewerkt.

Rand (1) gaat door  $(x, y) = (-\frac{1}{2}a, 0)$  en  $(x, y) = (\frac{1}{2}a, 0)$  en buigt niet door. Immers, de plaat is aan de randen opgelegd. De rand volgt een rechte lijn en is derhalve van de vorm:

$$g_1 = c_1 x + y + c_2$$

waarbij  $g_1$  de doorbuiging voorstelt,  $x$  en  $y$  de coördinaten van een punt op deze rand en  $c_1$  en  $c_2$  nader te bepalen coëfficiënten.

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$c_1 \cdot -\frac{1}{2}a + 0 + c_2 = -\frac{1}{2}c_1 a + c_2 = 0$$

$$c_1 \cdot \frac{1}{2}a + 0 + c_2 = \frac{1}{2}c_1 a + c_2 = 0$$

Het van elkaar aftrekken van deze vergelijkingen geeft:

$$-c_1 a = 0 \text{ met } a \neq 0 \text{ wordt } c_1 = 0 \text{ en daaruit volgt dan dat } c_2 = 0.$$

Dit leidt tot  $g_1 = y$ . Deze functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen

door de hoogte  $h$ . Hierdoor wordt een nieuwe functie  $f_1$  gedefinieerd:  $f_1 = \frac{y}{h}$ .

Op gelijke wijze kan een tweede functie  $g_2$  samengesteld worden. Deze lijn (die samenvalt met rand (2)) gaat door de volgende punten:  $(x, y) = (\frac{1}{2}a, 0)$  en  $(x, y) = (0, h)$ . Ook deze functie heeft een waarde nul in deze punten, de plaat buigt hier immers niet door, en is ook lineair van vorm:

$$g_2 = x + c_3 y + c_4$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$\frac{1}{2}a + c_3 \cdot 0 + c_4 = \frac{1}{2}a + c_4 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}a$$

$$0 + c_3 \cdot h + c_4 = c_3 h - \frac{1}{2}a = 0 \rightarrow c_3 = \frac{1}{2} \frac{a}{h}$$

Dit leidt tot  $g_2 = x + \frac{1}{2} \frac{a}{h} \cdot y - \frac{1}{2}a$ . De functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen door  $a$ . Na vermenigvuldiging met  $-2$  ontstaat de volgende functie:

$$f_2 = 1 - 2 \frac{x}{a} - \frac{y}{h}.$$

Tenslotte wordt voor de derde en tevens laatste rand (rand (3)) een lijn bepaald waarvan de functiewaarde, de doorbuiging van die rand, gelijk aan nul is. Deze lijn gaat door de punten  $(x, y) = (-\frac{1}{2}a, 0)$  en  $(x, y) = (0, h)$  en wordt genoteerd als:

$$g_3 = x + c_5 y + c_6$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$-\frac{1}{2}a + c_5 \cdot 0 + c_6 = -\frac{1}{2}a + c_6 = 0 \rightarrow c_6 = \frac{1}{2}a$$

$$0 + c_5 \cdot h + c_6 = c_5 h + \frac{1}{2}a = 0 \rightarrow c_5 = -\frac{1}{2} \frac{a}{h}$$

Dit leidt tot  $g_3 = x - \frac{1}{2} \frac{a}{h} \cdot y + \frac{1}{2}a$ . De functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen door  $a$ . Na te hebben vermenigvuldigd met  $2$  ontstaat de volgende functie:

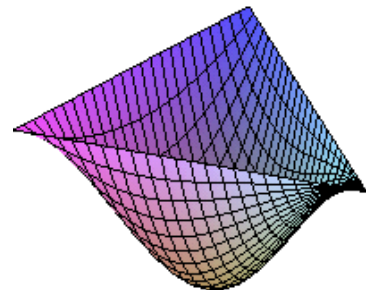
$$f_3 = 1 + 2 \frac{x}{a} - \frac{y}{h}.$$

Nu zijn de functies  $f_1$ ,  $f_2$  en  $f_3$  bekend. De doorbuigingsfunctie ziet er nu als volgt uit:

$$w(x, y) = A \cdot \frac{y}{h} \cdot (1 - 2 \frac{x}{a} - \frac{y}{h}) \cdot (1 + 2 \frac{x}{a} - \frac{y}{h})$$

**(2) Maak een 3D-plot van deze functie met behulp van Maple**

Het maken van een 3D-plot geeft snel inzicht of de zojuist geschatte functie een goede benadering geeft<sup>2</sup>. Hoewel in figuur 3.3 de doorbuigingen erg overdreven zijn, is wel duidelijk zichtbaar dat de randen niet zakken en dat er ter plekke van de randen hoekverdraaiingen plaatsvinden, wat overeenstemt met de kinematische randvoorwaarden.



**Figuur 3.3** De doorbuiging van de onderzochte plaat onder een gelijkmatige belasting

<sup>2</sup> In Maple is de positieve  $z$ -as omhoog gericht. Als de doorbuigingsfunctie  $w$  ingevoerd zou worden zoals onder **(1)** vermeld staat dan is de vervorming van de plaat niet helemaal goed te zien. Door het invoeren van de functie  $-w$  wordt de doorbuiging wel goed zichtbaar, zoals te zien is in figuur 3.2.

**(3) Bepaal  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\rho_{xy}$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$** 

De formules voor deze grootheden zijn te vinden in bijlage B en zijn geprogrammeerd in Maple, zie bijlage C. Omdat de berekende uitdrukkingen nogal omvangrijk zijn worden deze hier niet weergegeven.

**(4) Bereken de vormveranderingenergie  $E_s$** 

Ook deze formule is te vinden in bijlage B en is geprogrammeerd in Maple, zie bijlage C. Dit levert het volgende resultaat:

$$E_s = \frac{32}{9} \frac{DA^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

**(5) Bereken de energie van plaats  $E_p$** 

Evenals de eerder berekende grootheden is ook deze formule te vinden in bijlage B. Berekening met Maple levert het volgende resultaat:

$$E_p = -\frac{1}{60} qAa^2 \sqrt{3}$$

**(6) Bepaal de totale potentiële energie  $E_{pot}$** 

Dit is de som van de resultaten uit stap (4) en stap (5). Dit levert het volgende resultaat:

$$E_{pot} = -\frac{1}{180} \frac{A\sqrt{3}(-640DA + 3qa^4)}{a^2}$$

**(7) Bepaal de amplitude  $A$  van de doorbuigingsfunctie**

Maak daarbij gebruik van het principe van minimum potentiële energie:  $\frac{dE_{pot}}{dA} = 0$ .

$$\text{Dit geeft: } A = \frac{3}{1280} \frac{qa^4}{D}$$

**(8) Vereenvoudig de uitdrukkingen voor  $w$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$** 

Vul de zojuist gevonden waarde voor  $A$  in in de uitdrukkingen van deze variabelen. Dit geeft:

$$w(x, y) = \frac{1}{5760} \frac{qay\sqrt{3}(3a - 6x - 2y\sqrt{3})(3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{D}$$

$$m_{xx}(x, y) = \frac{1}{80} qa(y\sqrt{3} + va - vy\sqrt{3})$$

$$m_{yy}(x, y) = \frac{1}{80} qa(a - y\sqrt{3} + vy\sqrt{3})$$

$$m_{xy}(x, y) = -\frac{1}{80} (-1 + v) qa\sqrt{3}x$$

## 3.2 Numerieke berekening van de plaat

In deze paragraaf zullen de numerieke resultaten van de plaat die in de vorige paragraaf aan bod is gekomen, gegeven worden. In tabel 3.1 staan de gekozen parameterwaarden vermeld<sup>3</sup>. Om de absolute waarden van de resultaten niet al te klein te laten uitkomen, is een relatief grote belasting gekozen. Dit maakt het vergelijken eenvoudiger en de relatieve fout kleiner. Hoe de onderzochte plaat in dit programma ingevoerd is, staat beschreven in bijlage D.

<sup>3</sup> In ESA Prima Win hoeft alleen de materiaalsoort en -kwaliteit opgegeven te worden. De waarden voor de elasticiteitsmodulus en de dwarscontractiecoëfficiënt worden vervolgens automatisch gegenereerd.

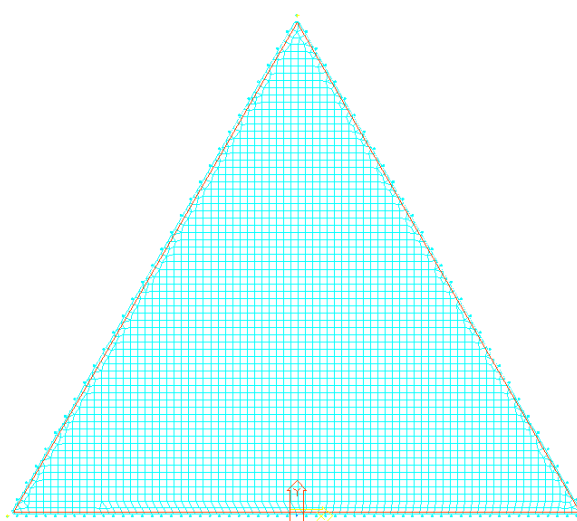
|                                                    |                      |
|----------------------------------------------------|----------------------|
| <b>materiaal</b>                                   | beton                |
| <b>betonkwaliteit</b>                              | B35                  |
| <b>elasticiteitsmodulus <math>E</math></b>         | 31.000 MPa           |
| <b>dwarscontractiecoëfficiënt <math>\nu</math></b> | 0,2                  |
| <b>belasting <math>q</math></b>                    | 10 kN/m <sup>2</sup> |
| <b>plaatdikte<sup>4</sup> <math>t</math></b>       | 50 mm                |
| <b>zijde <math>a</math></b>                        | 8,0 m                |

**Tabel 3.1** Ingevoerde parameterwaarden gebruikt bij de berekening met ESA Prima Win

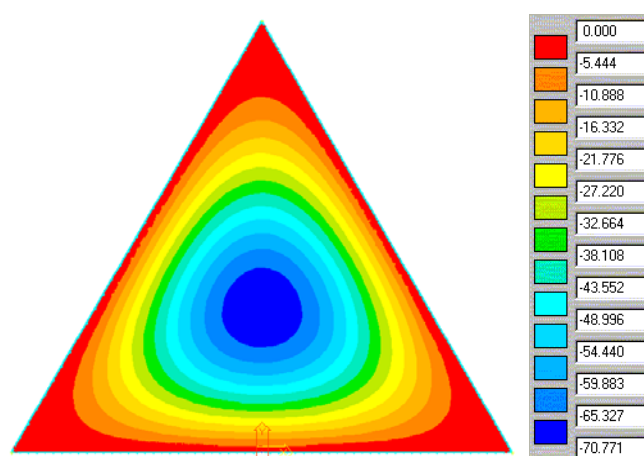
ESA Prima Win is een op de Eindige Elementen Methode (EEM) gebaseerde methode en verdeelt een plaat in kleine elementen en rekt die vervolgens stap voor stap door. Bij de berekeningen in deze paragraaf hebben de elementen een gemiddelde afmeting van 0,1 m. In figuur 3.4 staat een voorbeeld van een in ESA Prima Win gegenereerd net ('mesh').

Na het invoeren van de materiaaleigenschappen, de geometrie, de ondersteuning en de belasting kan de plaat doorgerekend worden. Hieronder worden de resultaten grafisch weergegeven in de vorm van isolijnenfiguren.

Ten eerste wordt de doorbuiging van de plaat onder de gegeven belasting bekeken, zie figuur 3.5. Uit deze figuur is af te lezen dat de grootste doorbuiging zich in het zwaartepunt van de plaat bevindt en 70,771 mm bedraagt.



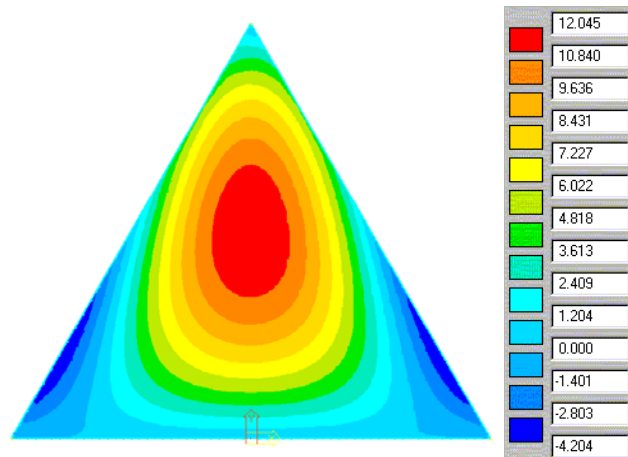
**Figuur 3.4** Een plaat in de vorm van een gelijkzijdige driehoek met een gegenereerd net, waarvan de elementen een gemiddelde afmeting van 0,1 m hebben



**Figuur 3.5** De doorbuiging van de plaat (in mm) onder een gelijkmatig verdeelde belasting gegenereerd met ESA Prima Win

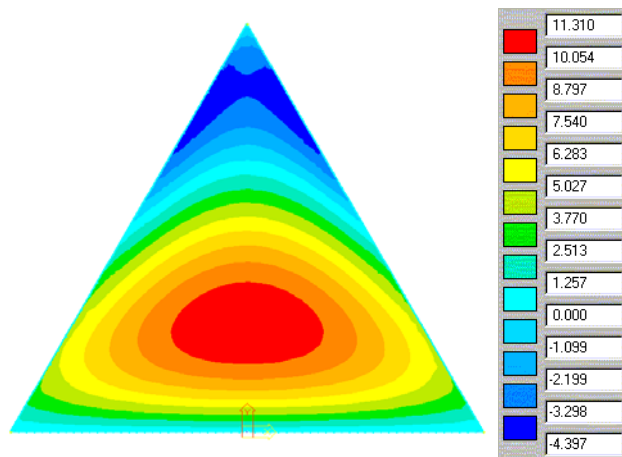
<sup>4</sup> ESA Prima Win maakt gebruik van de theorie van Mindlin, die gebaseerd is op dikke platen en houdt rekening met afschuifvervorming. Om afschuiving niet te sterk te laten doorwerken in de doorbuiging is gekozen voor een (heel) dunne plaat. De benaderingsformule houdt immers ook geen rekening met afschuifvervorming.

Vervolgens worden de buigende momenten in  $x$ -richting ( $m_{xx}$ ) bekeken, zie figuur 3.6. Uit de legenda kan afgelezen worden dat het maximale moment 12,045 kNm/m bedraagt en dat deze ongeveer op de halve hoogte van de driehoek optreedt.



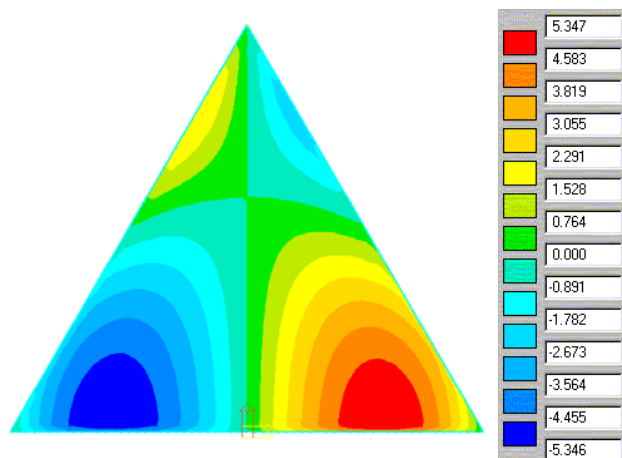
**Figuur 3.6** De buigende momenten  $m_{xx}$  in de plaat (in kNm/m) onder een gelijkmatig verdeelde belasting gegenereerd met ESA Prima Win

Ook voor de momenten in  $y$ -richting ( $m_{yy}$ ) kan een isolijnenfiguur getekend worden, zie figuur 3.7. Hieruit blijkt dat het maximale moment 11,310 kNm/m bedraagt en zich iets onder het zwaartepunt van de plaat bevindt.



**Figuur 3.7** De buigende momenten  $m_{yy}$  in de plaat (in kNm/m) onder een gelijkmatig verdeelde belasting gegenereerd met ESA Prima Win

Tenslotte is het verloop van de wringende momenten in de plaat uitgezet in een isolijnenfiguur, zie figuur 3.8. Hieruit kan worden afgelezen dat het maximale wringende moment 5,347 kNm/m is en zich nabij de onderste rand voordoet.



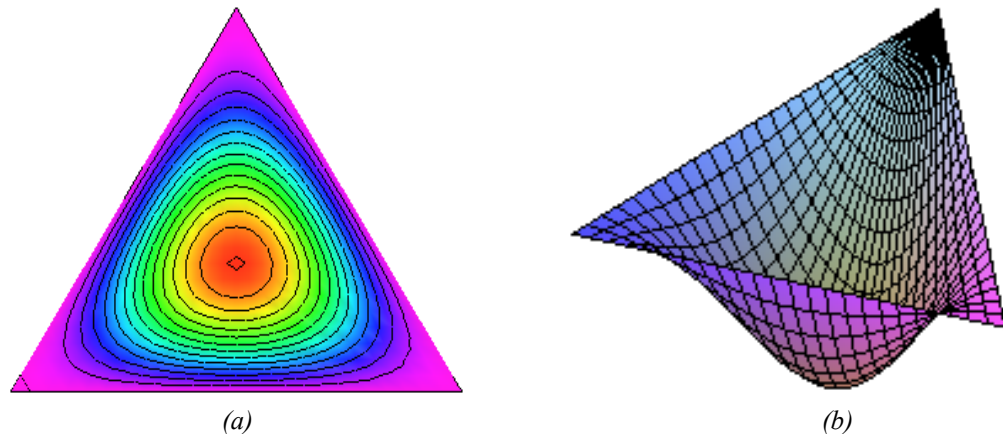
**Figuur 3.8** De wringende momenten  $m_{xy}$  in de plaat (in kNm/m) onder een gelijkmatig verdeelde belasting gegenereerd met ESA Prima Win

### 3.3 De exacte oplossing voor de plaat

Voor dit bijzondere geval bestaat een exacte analytische formule, dit in tegenstelling tot de platen die verderop behandeld worden. De exacte oplossing voor de doorbuiging kan in de literatuur gevonden worden (zie [5]) en luidt als volgt:

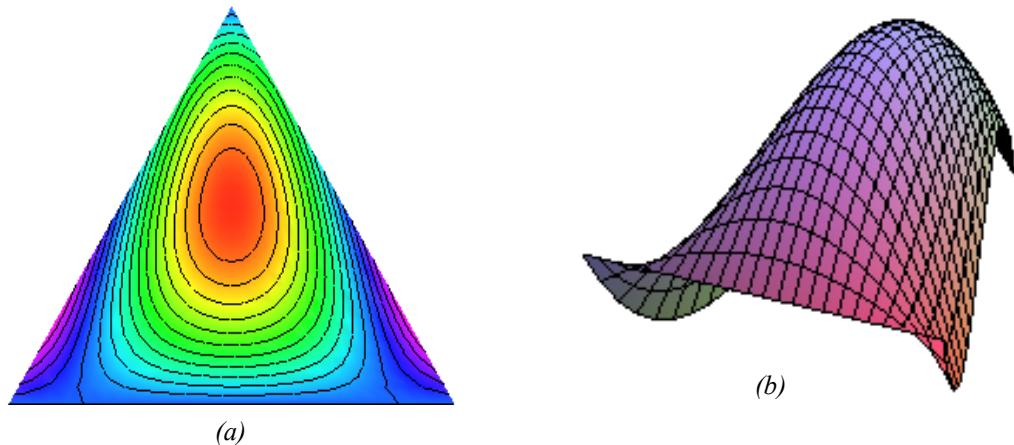
$$w(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{96} \frac{q}{aD} (y^3 - y^2 a \sqrt{3} + \frac{3}{4} y a^2 - 3x^2 y) (\frac{1}{4} a^2 - y^2 + \frac{1}{3} y \sqrt{3} a - x^2)$$

Deze uitdrukking kan in Maple zowel als een isolijnenfiguur als als een driedimensionale figuur getekend worden, zie figuur 3.9. Als deze isolijnenfiguur vergeleken wordt met die in figuur 3.5, dan kan geconcludeerd worden dat het verloop van de isolijnen nagenoeg gelijk is.



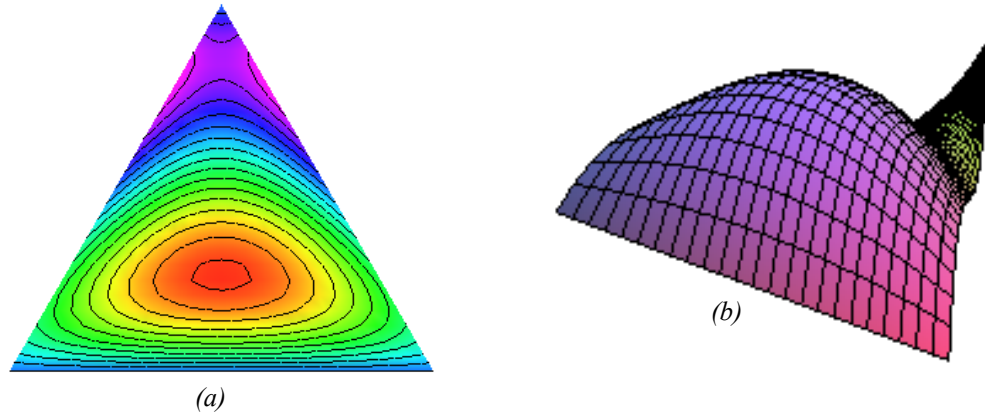
**Figuur 3.9** De doorbuiging van de plaat onder een gelijkmatig verdeelde belasting volgens de exacte formulering, gegenereerd met Maple, in een isolijnenfiguur (a) en een ruimtelijke weergave (b)

Hetzelfde kan gedaan worden voor de buigende momenten in  $x$ -richting ( $m_{xx}$ ), zie figuur 3.10. Deze figuur kan vergeleken worden met figuur 3.6 en ook hier blijkt dat de isolijnen eenzelfde verloop vertonen.



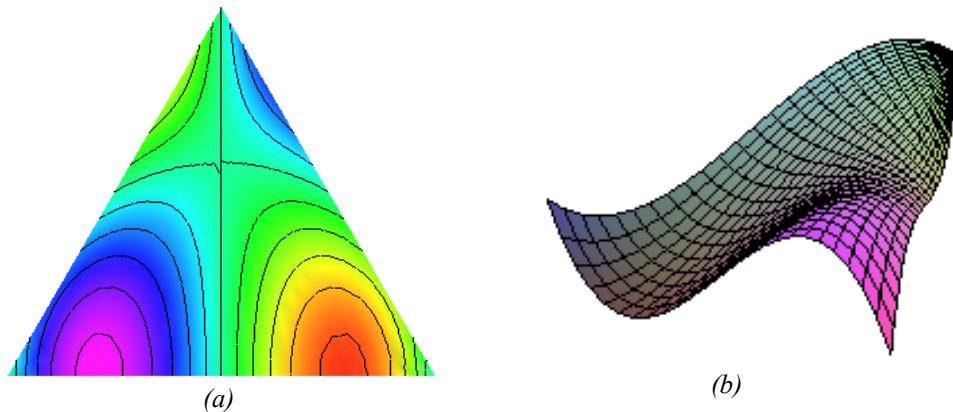
**Figuur 3.10** De momenten  $m_{xx}$  in de plaat onder een gelijkmatig verdeelde belasting volgens de exacte formulering, gegenereerd met Maple, in een isolijnenfiguur (a) en een ruimtelijke weergave (b)

Ook voor de buigende momenten in  $y$ -richting ( $m_{yy}$ ) kunnen een isolijnenfiguur en een ruimtelijke figuur getekend worden, zie figuur 3.11. De resultaten van ESA Prima Win komen, wat betreft deze buigende momenten (zie figuur 3.7), overeen met die in figuur 3.11.



**Figuur 3.11** De momenten  $m_{yy}$  in de plaat onder een gelijkmatig verdeelde belasting volgens de exacte formulering, gegenereerd met Maple, in een isolijnenfiguur (a) en een ruimtelijke weergave (b)

En tenslotte nog dergelijke figuren voor het verloop van de wringende momenten in de plaat, zie figuur 3.12. En ook hier stemmen de resultaten overeen met wat al eerder gevonden werd met ESA Prima Win (zie figuur 3.8).



**Figuur 3.12** De momenten  $m_{xy}$  in de plaat onder een gelijkmatig verdeelde belasting volgens de exacte formulering, gegenereerd met Maple, in een isolijnenfiguur (a) en een ruimtelijke weergave (b)

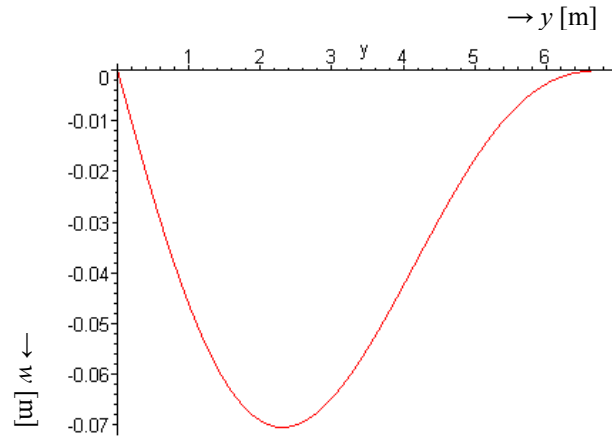
### 3.4 Vergelijking van de numerieke oplossing met de exacte oplossing

In de vorige paragraaf is aangetoond dat de resultaten van de exacte oplossing, wat de isolijnenfiguren betreft, overeenstemt met de resultaten die gegenereerd zijn met ESA Prima Win. In deze paragraaf worden de numerieke resultaten van de exacte oplossing en van het computerprogramma met elkaar vergeleken. Hierbij wordt voornamelijk gekeken naar de grootte en ligging van de extreme waarden van de doorbuiging en de momenten.

Uit de isolijnenfiguren voor de doorbuiging is reeds gebleken dat de maximale doorbuiging op de loodlijn van rand (1) optreedt. Dus de  $x$ -coördinaat van het punt waar de doorbuiging maximaal is is gelijk aan nul. Door een snede langs de  $y$ -as te

maken, kan een duidelijk beeld gevormd worden over het verloop van de doorbuiging langs deze as, zie figuur 3.13.

Omdat het functievoorschrift van de doorbuigingsfunctie langs deze as bekend is, kan ook de ligging van de maximale doorbuiging berekend worden. Immers, in dit punt moet de afgeleide van deze functie naar de positie gelijk aan nul zijn:



**Figuur 3.13** Het verloop van de doorbuiging van de plaat (in m) langs de y-as berekend met de exacte oplossing

$$w'(0, y) = -\frac{1}{4608} \frac{\sqrt{3}q(240y^4 - 256y^3\sqrt{3}a + 216y^2a^2 - 9a^4)}{aD} = 0$$

Het oplossen van deze vergelijking levert:

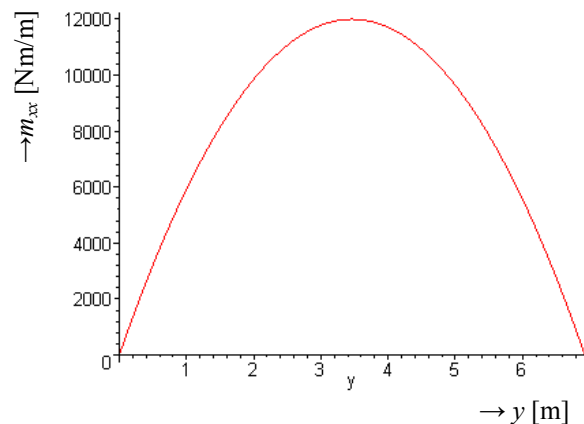
$$y_{top\_1} = \frac{1}{6}\sqrt{3}a = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a\right) = \frac{1}{3}h$$

wat ook conform de verwachtingen is, namelijk in het zwaartepunt van de plaat. De grootte van de doorbuiging in dit punt kan nu ook berekend worden, als de parameters

uit tabel 3.1. ingevuld worden:  $w_{\max} = \frac{1}{1728} \frac{qa^4}{D} = 70,469 \text{ mm}$

Op dezelfde manier kan gekeken worden naar de momenten  $m_{xx}$ .

Uit de isolijnenfiguren in de paragrafen 3.2 en 3.3 is gebleken dat het maximum ongeveer op halve hoogte en in het midden van de plaat bereikt wordt. In figuur 3.14 is het verloop van  $m_{xx}$  langs de y-as geplot.



**Figuur 3.14** Het verloop van  $m_{xx}$  (in Nm/m) langs de y-as berekend met de exacte oplossing

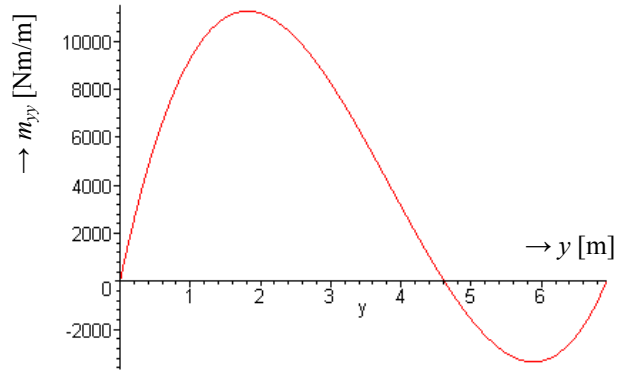
De positie van de top kan berekend worden door de afgeleide van  $m_{xx}$  naar  $y$  gelijk aan nul te stellen:

$$m'_{xx}(0, y) = \frac{1}{96} \frac{\sqrt{3}q(3a^2 - 12y^2 + 9va^2 + 60vy^2 - 32vy\sqrt{3}a)}{a} = 0$$

Het oplossen van deze vergelijking (met  $v = 0,2$ ) geeft:  $y_{top\_2} = \frac{1}{2}h$  wat ook uit figuur 3.13 afgelezen kan worden. Na het invullen van de parameters uit tabel 3.1 wordt voor het maximale buigende moment  $m_{xx}$  gevonden:  $m_{xx;\max} = 12,000 \text{ kNm/m}$ .

Ook  $m_{yy}$  neemt het maximale moment aan op de loodlijn van rand (1). In figuur 3.15 is het verloop van  $m_{yy}$  langs de  $y$ -as geplot.

Uit de figuur blijkt dat er zelfs twee extreme waarden bereikt worden, namelijk een maximum en een minimum. Verder blijkt dat het maximum absoluut gezien de grootste waarde heeft en daarom maatgevend is. De positie van dit maximum kan ook weer bepaald worden door de afgeleide van de functie  $m_{yy}$  gelijk aan nul te stellen:



**Figuur 3.15** Het verloop van  $m_{yy}$  (in Nm/m) langs de  $y$ -as berekend met de exacte oplossing

$$m_{yy}'(0, y) = \frac{1}{96} \frac{\sqrt{3}q(9a^2 + 60y^2 - 32y\sqrt{3}a + 3va^2 - 12vy^2)}{a} = 0$$

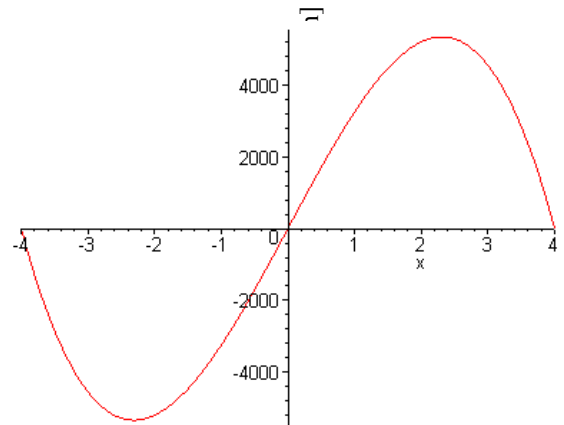
Het oplossen van deze vergelijking (met  $v = 0,2$ ) geeft:

$y_{top\_3} = -\frac{1}{9}(-5 + \sqrt{7})h \approx 0,262h$ . Het maximale moment bedraagt dan (met gebruik van de waarden uit tabel 3.1) 11,267 kNm/m.

Bij de wringende momenten is het minder goed te zien waar het maximum optreedt. Daarom wordt gebruik gemaakt van de gradiëntvector. Immers, de (partiële) afgeleiden van het wringend moment naar zowel de  $x$ -richting als naar  $y$ -richting moeten gelijk aan nul zijn:

$$\nabla m_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{32} \frac{(-1+v)\sqrt{3}q(-a^2 + 12x^2 + 4y^2)}{a} \\ \frac{1}{4} \frac{(-1+v)\sqrt{3}qxy}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De oplossing van dit stelsel (met  $v = 0,2$ ) geeft de volgende twee punten:  $(x, y) = (-\frac{1}{6}\sqrt{3}a, 0)$  en  $(x, y) = (\frac{1}{6}\sqrt{3}a, 0)$ . Blijkbaar bevinden de grootste wringende momenten zich langs rand (1). Om die gedachte te bevestigen is het verloop van de wringende momenten langs deze rand, die samenvalt met de  $x$ -as, getekend (zie figuur 3.16). Uit deze figuur blijkt dat de extreme momenten even groot, maar tegengesteld van teken zijn.



**Figuur 3.16** Het verloop van  $m_{xy}$  (in Nm/m) langs de  $x$ -as berekend met de exacte oplossing

De grootte van het maximale wringende moment  $m_{xy}$  kan berekend worden door de zojuist gevonden coördinaten in te vullen. Dit geeft een wringend moment van 5,333 kNm/m.

In tabel 3.2 zijn de relatieve ligging en de grootte van de maxima voor de doorbuiging en de momenten berekend met ESA Prima Win en met de exacte oplossing verwerkt. De relatieve ligging is berekend in het assenstelsel zoals dat getekend is in figuur 3.1. Het relatieve verschil is berekend als het verschil tussen het resultaat van ESA Prima Win en dat van de exacte oplossing ten opzichte van de laatstgenoemde. In formule:

$$\text{relatief verschil} = \frac{\text{resultaat}_{\text{ESA}} - \text{resultaat}_{\text{exact}}}{\text{resultaat}_{\text{exact}}} \cdot 100\%$$

|                  | relatieve ligging     |                                     | resultaten<br>ESA Prima Win | resultaten<br>exacte oplossing | relatief verschil<br>[%] |
|------------------|-----------------------|-------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------|
|                  | $x/a$                 | $y/h$                               |                             |                                |                          |
| $w$ [mm]         | 0                     | $\frac{1}{3}$                       | <b>70,771</b>               | <b>70,469</b>                  | 0,429                    |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 0                     | $\frac{1}{2}$                       | <b>12,045</b>               | <b>12,000</b>                  | 0,375                    |
| $m_{yy}$ [kNm/m] | 0                     | $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{7}$ | <b>11,310</b>               | <b>11,267</b>                  | 0,382                    |
| $m_{xy}$ [kNm/m] | $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ | 0                                   | <b>5,347</b>                | <b>5,333</b>                   | 0,263                    |

**Tabel 3.2** De relatieve ligging en de grootte van de maximale doorbuiging en momenten berekend met ESA Prima Win en met de exacte oplossing

Het (geringe) verschil in doorbuiging zou verklaard kunnen worden door het feit dat ESA Prima Win de berekeningen maakt op basis van de theorie van Mindlin, waarbij afschuifvervorming ook in beschouwing genomen wordt. De verschillen in de momenten kunnen een gevolg zijn van de (eindige) afmetingen van de elementen waarvan de numerieke methode gebruik maakt.

### 3.5 Het corrigeren van de benaderingsformules

In deze paragraaf wordt aangetoond dat de benaderingsformules met de huidige coëfficiënten te grote afwijkingen geven ten opzichte van de numerieke resultaten. Daarna wordt uitgelegd hoe de coëfficiënten verbeterd kunnen worden, waarna de waarden van deze nieuwe coëfficiënten bepaald worden.

In tabel 3.3 staan de maximale doorbuiging en momenten vermeld, berekend met de benaderingsformules uit paragraaf 3.1.

|                     | relatieve ligging     |                                     | benaderingsformule                                       | resultaten<br>formule | relatief verschil met<br>ESA Prima Win [%] |
|---------------------|-----------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------|
|                     | $x/a$                 | $y/h$                               |                                                          |                       |                                            |
| $w$ [mm]            | 0                     | $\frac{1}{3}$                       | $\frac{1}{2880} \frac{qa^4}{D}$                          | <b>42,281</b>         | 40,257                                     |
| $m_{xx}$<br>[kNm/m] | 0                     | $\frac{1}{2}$                       | $\frac{1}{320} qa^2 (3 + \nu)$                           | <b>6,400</b>          | 46,866                                     |
| $m_{yy}$<br>[kNm/m] | 0                     | $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{7}$ | $\frac{1}{480} qa^2 (1 + \sqrt{7} + 5\nu - \nu\sqrt{7})$ | <b>5,489</b>          | 51,468                                     |
| $m_{xy}$<br>[kNm/m] | $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ | 0                                   | $\frac{1}{160} qa^2 (1 - \nu)$                           | <b>3,200</b>          | 40,153                                     |

**Tabel 3.3** De relatieve ligging en de grootte van de maximale doorbuiging en momenten berekend met de benaderingsformules

Uit deze tabel blijkt dat de resultaten van de benaderingsformules een afwijking van 40 à 50 procent geven ten opzichte van de resultaten van ESA Prima Win. Deze resultaten zijn natuurlijk onacceptabel zullen gecorrigeerd moeten worden.

Om deze afwijking te reduceren worden de coëfficiënten in deze formules aangepast aan de numerieke resultaten. Bij de formules voor de momenten worden ook de termen tussen haakjes in deze coëfficiënt verwerkt, waarbij voor  $\nu$  de waarde 0,2 aangehouden wordt<sup>5</sup>.

De berekening van de coëfficiënten zal gebaseerd worden op een vloerplaat met realistische afmetingen en stijfheid. Om de nauwkeurigheid van de formules vast te stellen, zullen deze getoetst worden aan een tiental andere platen, waarbij steeds één variabele tegelijk veranderd wordt. Zo kan de gevoeligheid van de benaderingsformules voor een verandering in een bepaalde variabele onderzocht worden.

De benaderingsformules uit tabel 3.3 kunnen als volgt herschreven worden:

$$w = k_1 \cdot \frac{qa^4}{D}$$

$$m_{xx} = k_2 \cdot qa^2$$

$$m_{yy} = k_3 \cdot qa^2$$

$$m_{xy} = k_4 \cdot qa^2$$

waarin  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  de aangepaste coëfficiënten voorstellen.

Voor de calibratie van de formules is een vloerplaat met de volgende parameters gebruikt, zie tabel 3.4.

|                                                    |                      |
|----------------------------------------------------|----------------------|
| <b>materiaal</b>                                   | beton                |
| <b>betonkwaliteit</b>                              | B45                  |
| <b>elasticiteitsmodulus <math>E</math></b>         | 33.500 MPa           |
| <b>dwarscontractiecoëfficiënt <math>\nu</math></b> | 0,2                  |
| <b>belasting <math>q</math></b>                    | 10 kN/m <sup>2</sup> |
| <b>plaatdikte <math>t</math></b>                   | 200 mm               |
| <b>zijde <math>a</math></b>                        | 8,0 m                |

**Tabel 3.4** Ingevoerde parameterwaarden gebruikt bij de calibratie van de benaderingsformules

Met deze gegevens kunnen de termen  $\frac{qa^4}{D}$  en  $qa^2$  berekend worden:

$$\frac{qa^4}{D} = 1761 \text{ mm en } qa^2 = 640 \text{ kNm/m.}$$

<sup>5</sup> Dit is ook de waarde die in ESA Prima Win aangehouden wordt, ongeacht de betonkwaliteit.

Door nu de resultaten van ESA Prima Win gelijk te stellen aan de resultaten van de benaderingsformules kunnen de onbekende coëfficiënten  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  berekend worden, dus:

$$w_{benadering} = k_1 \cdot \frac{qa^4}{D} = w_{ESA} = 1,047 \text{ mm}$$

$$m_{xx;benadering} = k_2 \cdot qa^2 = m_{xx;ESA} = 12,198 \text{ kNm/m}$$

$$m_{yy;benadering} = k_3 \cdot qa^2 = m_{yy;ESA} = 11,460 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xy;benadering} = k_4 \cdot qa^2 = m_{xy;ESA} = 5,384 \text{ kNm/m}$$

Hieruit kan berekend worden dat  $k_1 = 0,595 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_2 = 19,1 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_3 = 17,9 \cdot 10^{-3}$  en  $k_4 = 8,41 \cdot 10^{-3}$ .

De benaderingsformules zien er nu als volgt uit:

$$w = 0,000595 \cdot \frac{qa^4}{D}$$

$$m_{xx} = 0,0191 \cdot qa^2$$

$$m_{yy} = 0,0179 \cdot qa^2$$

$$m_{xy} = 0,00841 \cdot qa^2$$

Om de nauwkeurigheid van de formules vast te stellen, worden deze getoetst aan een tiental andere platen, waarbij steeds één variabele tegelijk veranderd wordt. Zo kan de gevoeligheid van de benaderingsformules voor een verandering in een bepaalde variabele onderzocht worden. In tabel 3.5 (op de volgende pagina) staat per toetsing aangegeven welke parameters gebruikt zijn. De veranderde variabele is vet gedrukt. Vervolgens is aangegeven hoe groot de benaderingen zijn en de resultaten van ESA Prima Win en het relatieve verschil.

Uit deze tabel kan geconcludeerd worden dat de benaderingsformules niet meer afwijken dan ongeveer 2 %, mits de verhouding van de dikte tot de lengte-afmetingen niet te groot wordt. In dat geval speelt afschuifvervorming een grotere rol en zijn de afwijkingen groter. De gecorrigeerde coëfficiënten zijn dus goed bruikbaar en zijn verwerkt in tabel G.1 van bijlage G.

|                             |                            |                             |                       |                               |                             |                   |                       |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------|-----------------------|
| <b><math>q = 8,0</math></b> | <b><math>a = 8</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b><math>= ,2</math></b>    |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,838                      | 0,838                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 9,165                       | 9,168             | -0,03 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 9,779                      | 9,759                       | 0,20 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,306                       | 4,307             | -0,02 %               |
| <b><math>q = 12</math></b>  | <b><math>a = 8</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 1,257                      | 1,257                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 13,747                      | 13,752            | -0,04 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 14,669                     | 14,638                      | 0,21 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 6,459                       | 6,461             | -0,03 %               |
| <b><math>q = 10</math></b>  | <b><math>a = 6</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,331                      | 0,335                       | -1,19 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,444                       | 6,480             | -0,56 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 6,876                      | 6,904                       | 0,41 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,028                       | 3,024             | 0,13 %                |
| <b><math>q = 10</math></b>  | <b><math>a = 10</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 2,558                      | 2,540                       | 0,71 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 17,900                      | 17,839            | 0,34 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 19,100                     | 18,993                      | 0,56 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 8,410                       | 8,424             | -0,17 %               |
| <b><math>q = 10</math></b>  | <b><math>a = 4</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,065                      | 0,068                       | -4,41 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 2,864                       | 2,916             | -1,78 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 3,056                      | 3,103                       | -1,51 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,346                       | 1,337             | 0,67 %                |
| <b><math>q = 10</math></b>  |                            | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b><math>v = 0,2</math></b> |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,004                      | 0,005                       | -20,00 %              | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 0,716                       | 0,755             | -5,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 0,764                      | 0,804                       | -4,98 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,336                       | 0,323             | 4,02 %                |
| <b><math>q = 10</math></b>  |                            | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 2,483                      | 2,461                       | 0,89 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 11,456                      | 11,410            | 0,40 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 12,224                     | 12,146                      | 0,64 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,382                       | 5,386             | -0,07 %               |
| <b><math>q = 10</math></b>  |                            | <b><math>t = 250</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b><math>v = 0,2</math></b> |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,536                      | 0,541                       | -0,92 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 11,456                      | 11,510            | -0,47 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 12,224                     | 12,251                      | -0,22 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,382                       | 5,386             | -0,07 %               |
| <b><math>q = 10</math></b>  | <b><math>a = 8</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 1,231                      | 1,231                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 11,456                      | 11,460            | -0,03 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 12,224                     | 12,198                      | 0,21 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,382                       | 5,384             | -0,04 %               |
| <b><math>q = 10</math></b>  | <b><math>a = 8</math></b>  | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> | <b>0,2</b>                  |                   |                       |
|                             | benade-<br>ring:           | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring:            | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                    | 0,912                      | 0,911                       | 0,11 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 11,456                      | 11,460            | -0,03 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]            | 12,224                     | 12,198                      | 0,21 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,382                       | 5,384             | -0,04 %               |

Tabel 3.5 Toetsing van de benaderingsformules voor de plaat in de vorm van een gelijkzijdige driehoek

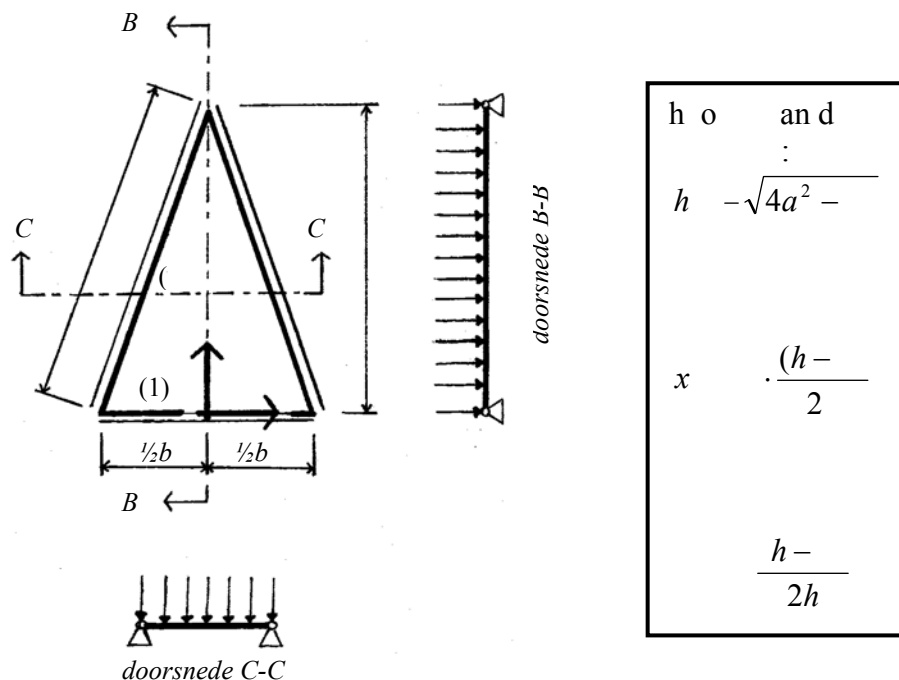
## Een plaat in de vorm van een gelijkbenige driehoek

In dit hoofdstuk komt de vloerplaat in de vorm van een gelijkbenige driehoek aan bod. De aanpak is hetzelfde als in hoofdstuk 3, maar dan minder uitgebreid. Bovendien bestaat er voor deze plaatvorm, in tegenstelling tot de gelijkzijdige driehoek, geen exacte oplossing.

In paragraaf 4.1 worden de benaderingsformules analytisch opgesteld. Vervolgens worden deze in paragraaf 4.2 verbeterd met behulp van numerieke resultaten en wordt de nauwkeurigheid van de formules vastgesteld.

### 4.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules

Voor het schatten van de doorbuigingsfunctie van deze plaatvorm wordt dezelfde werkwijze gevolgd als in het vorige hoofdstuk. In figuur 4.1 wordt deze plaat weer-  
gegeven.



**Figuur 4.1** De aan de randen scharnierend opgelegde plaat in de vorm van een gelijkbenige driehoek en belast met een gelijkmatig verdeelde belasting

(1) *Schat een functie voor de doorbuiging  $w$*

Rand (1) gaat door  $(x, y) = (-\frac{1}{2}b, 0)$  en  $(x, y) = (\frac{1}{2}b, 0)$  en buigt niet door. Immers, de plaat is aan de randen opgelegd. De isolijn door deze rand heeft de vorm:

$$g_1 = c_1 x + y + c_2$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$c_1 \cdot -\frac{1}{2}b + 0 + c_2 = -\frac{1}{2}c_1 b + c_2 = 0$$

$$c_1 \cdot \frac{1}{2}b + 0 + c_2 = \frac{1}{2}c_1 b + c_2 = 0$$

Het van elkaar aftrekken van deze vergelijkingen geeft:

$$-c_1 b = 0 \text{ met } b \neq 0 \text{ wordt } c_1 = 0 \text{ en daaruit volgt dan dat } c_2 = 0.$$

Dit leidt tot  $g_1 = y$ . Deze functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen

door  $h$ . Hierdoor wordt een nieuwe functie  $f_1$  gedefinieerd:  $f_1 = \frac{y}{h}$ .

De tweede rand gaat door de volgende punten:  $(x, y) = (\frac{1}{2}b, 0)$  en  $(x, y) = (0, h)$ . Ook deze functie, die de doorbuiging van de rand geeft, heeft een waarde nul langs deze rand.

$$g_2 = x + c_3 y + c_4$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$\frac{1}{2}b + c_3 \cdot 0 + c_4 = \frac{1}{2}b + c_4 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}b$$

$$0 + c_3 \cdot h + c_4 = c_3 h - \frac{1}{2}b = 0 \rightarrow c_3 = \frac{1}{2} \frac{b}{h}$$

Dit leidt tot  $g_2 = x + \frac{1}{2} \frac{b}{h} \cdot y - \frac{1}{2}b$ . De functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen door  $b$ . Na vermenigvuldigen met -2 ontstaat de volgende functie:

$$f_2 = 1 - 2 \frac{x}{b} - \frac{y}{h}.$$

De laatste rand (rand (3)) gaat door de volgende punten:  $(x, y) = (-\frac{1}{2}b, 0)$  en  $(x, y) = (0, h)$ . Ook voor deze rand kan een functie geformuleerd worden die de doorbuiging geeft:

$$g_3 = x + c_5 y + c_6$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$-\frac{1}{2}b + c_5 \cdot 0 + c_6 = -\frac{1}{2}b + c_6 = 0 \rightarrow c_6 = \frac{1}{2}b$$

$$0 + c_5 \cdot h + c_6 = c_5 h + \frac{1}{2}b = 0 \rightarrow c_5 = -\frac{1}{2} \frac{b}{h}$$

Dit leidt tot  $g_3 = x - \frac{1}{2} \frac{b}{h} \cdot y + \frac{1}{2}b$ . De functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen door  $b$ . Na met 2 vermenigvuldigd te hebben, ontstaat de volgende functie:

$$f_3 = 1 + 2 \frac{x}{b} - \frac{y}{h}.$$

De doorbuigingsfunctie  $w$  kan nu geschreven worden als:

$$w(x, y) = A \cdot f_1 f_2 f_3 = A \cdot \frac{y}{h} \cdot (1 - 2 \frac{x}{b} - \frac{y}{h}) \cdot (1 + 2 \frac{x}{b} - \frac{y}{h})$$

(2) Maak een 3D-plot van deze functie met behulp van Maple  
Zie figuur 4.2. Voor het kunnen tekenen van deze  
figuur zijn de volgende parameterwaarden aange-  
houden:  $a = 6$ ,  $b = 3$  en  $A = 9$ .

De resultaten van de volgende stappen worden  
hieronder samengevat:

(3) Bepaal  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\rho_{xy}$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$   
Omdat de berekende uitdrukkingen nogal  
omvangrijk zijn worden deze hier niet  
weergegeven.

(4) Bereken de vormveranderingenergie  $E_s$

$$E_s = \frac{32}{3} \frac{(2a^4 + b^4)DA^2}{b^3(4a^2 - b^2)^{3/2}}$$

(5) Bereken de energie van plaats  $E_p$

$$E_p = -\frac{1}{60} qA\sqrt{4a^2 - b^2}b$$

(6) Bepaal de totale potentiële energie  $E_{pot}$

$$E_{pot} = -\frac{1}{60} \frac{A(-1280DAa^4 - 640DAb^4 + 16qb^4a^4 - 8qb^6a^2 + qb^8)}{b^3(4a^2 - b^2)^{3/2}}$$

(7) Bepaal de amplitude  $A$  van de doorbuigingsfunctie

$$A = \frac{1}{1280} \frac{qb^4(16a^4 - 8a^2b^2 + b^4)}{D(2a^4 + b^4)}$$

(8) Vereenvoudig de uitdrukkingen voor  $w$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$

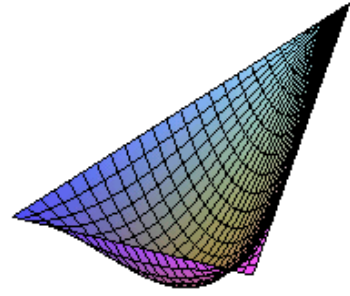
$$w(x, y) = \frac{1}{640} \frac{(b\sqrt{4a^2 - b^2} + 2x\sqrt{4a^2 - b^2} - 2yb)(b\sqrt{4a^2 - b^2} - 2x\sqrt{4a^2 - b^2} - 2yb)y\sqrt{4a^2 - b^2}b^2q}{(2a^4 + b^4)D}$$

$$m_{xx}(x, y) = \frac{1}{80} \frac{(4ya^2 - yb^2 + vb^2\sqrt{4a^2 - b^2} - 3vb^2y)\sqrt{4a^2 - b^2}b^2q}{2a^4 + b^4}$$

$$m_{yy}(x, y) = \frac{1}{80} \frac{(b^2\sqrt{4a^2 - b^2} - 3yb^2 + 4vya^2 - vb^2y)\sqrt{4a^2 - b^2}b^2q}{2a^4 + b^4}$$

$$m_{xy}(x, y) = -\frac{1}{80} \frac{(4a^2 - b^2)^{3/2}xb^2q(-1 + v)}{2a^4 + b^4}$$

Deze resultaten kunnen analytisch vrij eenvoudig gecontroleerd worden: als voor  $b$  dezelfde waarde als voor  $a$  ingevuld wordt dan zou dit moeten leiden tot dezelfde (ongecorrigeerde) resultaten die in het vorige hoofdstuk gevonden zijn. Immers, de gelijkbenige driehoek neemt dan een bijzondere vorm aan, namelijk die van de gelijkzijdige driehoek.



**Figuur 4.2** De vervorming van de onderzochte plaat onder een gelijkmatige belasting

Indien in Maple als extra vergelijking  $b = a$  ingevoerd wordt, dan worden voor de doorbuiging en de momenten de volgende formules gevonden:

$$\begin{aligned} w(0, \tfrac{1}{3}h) &= \frac{1}{2880} \frac{qa^4}{D} \\ m_{xx}(0, \tfrac{1}{2}h) &= \frac{1}{320} qa^2(3 + \nu) \\ m_{yy}(0, (\tfrac{5}{9} - \tfrac{1}{9}\sqrt{7})h) &= \frac{1}{480} qa^2(1 + \sqrt{7} + 5\nu - \nu\sqrt{7}) \\ m_{xy}(\tfrac{1}{6}\sqrt{3}h, 0) &= \frac{1}{160} qa^2(1 - \nu) \end{aligned}$$

Hierbij is de positie van deze maxima overgenomen uit het derde hoofdstuk. Zoals te zien is stemmen bovenstaande formules volledig overeen met de benaderingsformule uit hoofdstuk 3 (zie tabel 3.3).

## 4.2 Het corrigeren van de benaderingsformules

Om de formules uit paragraaf 4.1 verder te vereenvoudigen, wordt gesteld dat  $a$  een veelvoud is van  $b$ . Noteer dit als  $a = c_1 \cdot b$ , waarin  $c_1$  een zekere constante voorstelt. Als dit gesubstitueerd wordt in de uitdrukkingen van paragraaf 4.1 dan ontstaan de volgende formules:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{1}{640} \frac{c_2(-b\sqrt{b^2c_2} - 2x\sqrt{b^2c_2} + 2yb)(-b\sqrt{b^2c_2} + 2x\sqrt{b^2c_2} + 2yb)yq}{\sqrt{b^2c_2}(2c_1^4 + 1)D} \\ m_{xx}(x, y) &= \frac{1}{80} \frac{(4yc_1^2 - y + \nu\sqrt{b^2c_2} - 3\nu y)c_2b^2q}{\sqrt{b^2c_2}(2c_1^4 + 1)} \\ m_{yy}(x, y) &= \frac{1}{80} \frac{(4\nu yc_1^2 - \nu y + \sqrt{b^2c_2} - 3y)c_2b^2q}{\sqrt{b^2c_2}(2c_1^4 + 1)} \\ m_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{80} \frac{c_2\sqrt{b^2c_2}xq(-1 + \nu)}{2c_1^4 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{met } c_2 = 4c_1^2 - 1$$

In tegenstelling tot de gelijkzijdige driehoek heeft de gelijkbenige driehoek geen exacte oplossing. Om de ligging van de maxima te bepalen kan dus niet de methode uit paragraaf 3.4 gehanteerd worden. Immers, die methode maakt gebruik van de afgeleiden van de exacte oplossing.

Om de grootte van een maximum te bepalen is het echter niet noodzakelijk om de precieze ligging van dit maximum te kennen. Dit wordt hieronder aangetoond.

Stel dat het maximum wordt aangenomen in het punt  $P$  met coördinaten  $(x_P, y_P)$ .

Deze coördinaten kunnen geschreven worden als een veelvoud van  $b$ , dus  $x_P = c_3 \cdot b$  en  $y_P = c_4 \cdot b$  waarin  $c_3$  en  $c_4$  bepaalde constanten zijn.

De bovenstaande uitdrukkingen kunnen dan worden herschreven tot:

$$w_{\max} = \frac{1}{640} \frac{c_2(-\sqrt{b^2 c_2} - 2c_3\sqrt{b^2 c_2} + 2c_4 b)(-\sqrt{b^2 c_2} + 2c_3\sqrt{b^2 c_2} + 2c_4 b)c_4(4c_1^2 - 1)qb^3}{\sqrt{b^2 c_2}(2c_1^4 + 1)D}$$

$$m_{xx;\max} = \frac{1}{80} \frac{(4c_4 b c_1^2 - c_4 b + v\sqrt{b^2 c_2} - 3vc_4 b)c_2 b^2 q}{\sqrt{b^2 c_2}(2c_1^4 + 1)}$$

$$m_{yy;\max} = \frac{1}{80} \frac{(4vc_4 b c_1^2 - vc_4 b + \sqrt{b^2 c_2} - 3c_4 b)c_2 b^2 q}{\sqrt{b^2 c_2}(2c_1^4 + 1)}$$

$$m_{xy;\max} = -\frac{1}{80} \frac{c_2 \sqrt{b^2 c_2} c_3 b q (-1 + v)}{2c_1^4 + 1}$$

Als nu per formule alle constanten worden samengenomen tot één nieuwe constante dan ontstaan de volgende functies:

$$w_{\max} = k_1 \cdot \frac{qb^4}{D}$$

$$m_{xx;\max} = k_2 \cdot qb^2$$

$$m_{yy;\max} = k_3 \cdot qb^2$$

$$m_{xy;\max} = k_4 \cdot qb^2$$

waarin  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  de nieuwe coëfficiënten voorstellen. Hieruit blijkt dat de vorm van de benaderingsformules voor de maximumwaarden identiek is aan die voor de gelijkzijdige driehoek (zie paragraaf 3.5).

De nieuwe coëfficiënten worden – op dezelfde manier als in het vorige hoofdstuk – gec calibreerd en vervolgens geverifieerd.

De platen zijn voor verschillende  $a/b$ -verhoudingen berekend, te weten:  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$ , 1,  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{7}{5}$ ,  $\frac{8}{5}$ ,  $\frac{9}{5}$  en 2. De calibratiegegevens en de controletabellen staan vermeld in bijlage E.

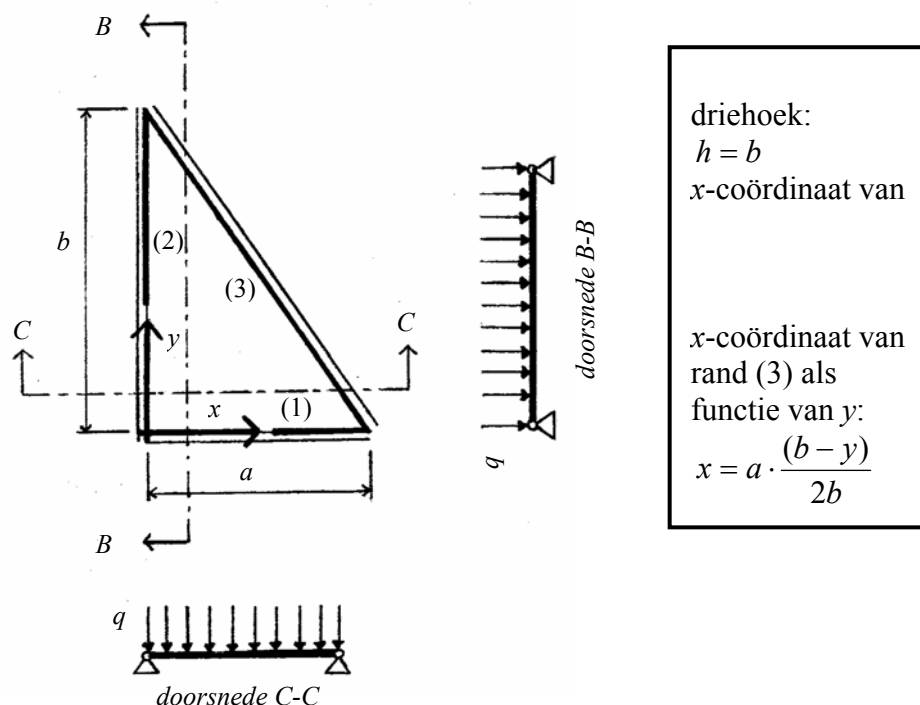
De benaderingsformules met de bijbehorende coëfficiënten staan in tabel G.2 in bijlage G.

## Een plaat in de vorm van een rechthoekige driehoek

In dit hoofdstuk komt de laatste vorm aan bod: de rechthoekige driehoek. De aanpak is hetzelfde als in hoofdstuk 4. Ook voor deze plaatvorm bestaat geen exacte oplossing. In paragraaf 5.1 worden de benaderingsformules analytisch opgesteld. Vervolgens worden deze in paragraaf 5.2 verbeterd met behulp van numerieke resultaten en wordt de nauwkeurigheid van de formules vastgesteld.

### 5.1 Het analytisch opstellen van de benaderingsformules

Voor het schatten van de doorbuigingsfunctie van deze plaatvorm wordt dezelfde werkwijze gevolgd als in voorgaande twee hoofdstukken. In figuur 5.1 wordt de plaat weer-gegeven.



**Figuur 5.1** De aan de randen scharnierend opgelegde plaat in de vorm van een rechthoekige driehoek en belast met een gelijkmatig verdeelde belasting

**(1) Schat een functie voor de doorbuiging  $w$** 

De isolijn die door rand (1) gaat, gaat door de punten  $(x, y) = (0, 0)$  en  $(x, y) = (a, 0)$  en heeft daar de waarde nul, wat overeenkomt met geen doorbuiging. Immers, de plaat is aan de randen opgelegd. De functie is van de vorm:

$$g_1 = c_1 x + y + c_2$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$c_1 \cdot 0 + 0 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$c_1 \cdot a + 0 + c_2 = c_1 a = 0 \rightarrow c_1 = 0, \text{ want } a \neq 0$$

Dit leidt tot  $g_1 = y$ . Deze functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen

door  $b$ . Hierdoor wordt een nieuwe functie  $f_1$  gedefinieerd:  $f_1 = \frac{y}{b}$ .

De tweede rand gaat door  $(x, y) = (0, 0)$  en  $(x, y) = (0, b)$  en buigt ook langs deze rand niet door. De isolijn is een lineaire functie:

$$g_2 = x + c_3 y + c_4$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$0 + c_3 \cdot 0 + c_4 = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$0 + c_3 \cdot b + c_4 = c_3 b = 0 \rightarrow c_3 = 0, \text{ want } b \neq 0$$

Dit leidt tot  $g_2 = x$ . Deze functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen

door  $a$ . Hierdoor wordt een nieuwe functie  $f_2$  gedefinieerd:  $f_2 = \frac{x}{a}$ .

De laatste rand (rand (3)) gaat door de volgende punten:  $(x, y) = (a, 0)$  en  $(x, y) = (0, b)$ . Ook deze isolijn heeft een waarde nul in deze punten en ziet er als volgt uit:

$$g_3 = x + c_5 y + c_6$$

Invullen van de twee bovenstaande coördinaten levert de volgende vergelijkingen:

$$a + c_5 \cdot 0 + c_6 = a + c_6 = 0 \rightarrow c_6 = -a$$

$$0 + c_5 \cdot b + c_6 = c_5 b - a = 0 \rightarrow c_5 = \frac{a}{b}$$

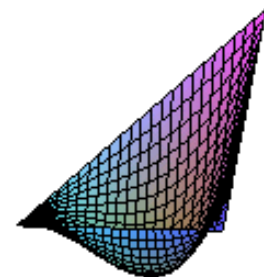
Dit leidt tot  $g_3 = x + \frac{a}{b} \cdot y - a$ . De functie kan dimensieloos gemaakt worden door te delen door  $a$ . Na vermenigvuldiging met -1 ontstaat de volgende functie:

$$f_3 = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

De doorbuigingsfunctie  $w$  kan nu geschreven worden als:

$$w(x, y) = A \cdot f_1 f_2 f_3 = A \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{x}{a} \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

**(2) Maak een 3D-plot van deze functie met behulp van Maple**  
Zie figuur 5.2.



**Figuur 5.2** De vervorming van de onderzochte plaat onder een gelijkmatige belasting

De resultaten van de volgende stappen worden hieronder samengevat.

(3) Bepaal  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\rho_{xy}$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$

Omdat de berekende uitdrukkingen nogal omvangrijk zijn worden deze hier niet weergegeven.

(4) Bereken de vormveranderingenergie  $E_s$

$$E_s = \frac{1}{6} \frac{DA^2(a^4 + b^2a^2 + b^4)}{a^3b^3}$$

(5) Bereken de energie van plaats  $E_p$

$$E_p = -\frac{1}{120} qAab$$

(6) Bepaal de totale potentiële energie  $E_{pot}$

$$E_{pot} = \frac{1}{120} \frac{A(20DAa^4 + 20DAb^2a^2 + 20DAb^4 - qa^4b^4)}{b^3a^3}$$

(7) Bepaal de amplitude  $A$  van de doorbuigingsfunctie

$$A = \frac{1}{40} \frac{qa^4b^4}{D(a^4 + b^2a^2 + b^4)}$$

(8) Vereenvoudig de uitdrukkingen voor  $w$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$

$$w(x, y) = -\frac{1}{40} \frac{qa^2b^2yx(-ab + xb + ya)}{D(a^4 + b^2a^2 + b^4)}$$

$$m_{xx}(x, y) = \frac{1}{20} \frac{b^2a^2q(by + vax)}{a^4 + b^2a^2 + b^4}$$

$$m_{yy}(x, y) = \frac{1}{20} \frac{b^2a^2q(ax + vby)}{a^4 + b^2a^2 + b^4}$$

$$m_{xy}(x, y) = -\frac{1}{40} \frac{(-1 + v)b^2a^2q(-ab + 2xb + 2ya)}{a^4 + b^2a^2 + b^4}$$

## 5.2 Het corrigeren van de benaderingsformules

Om de formules uit paragraaf 5.1 verder te vereenvoudigen, wordt gesteld dat  $a$  een veelvoud is van  $b$ . Noteer dit als  $a = c_1 \cdot b$ , waarin  $c_1$  een zekere constante voorstelt. Als dit gesubstitueerd wordt in de uitdrukkingen van paragraaf 5.1 dan ontstaan de volgende formules:

$$w(x, y) = -\frac{1}{40} \frac{qc_1^2byx(-c_1b + x + c_1y)}{D(c_1^4 + c_1^2 + 1)}$$

$$m_{xx}(x, y) = \frac{1}{20} \frac{bc_1^2q(y + vc_1x)}{c_1^4 + c_1^2 + 1}$$

$$m_{yy}(x, y) = \frac{1}{20} \frac{bc_1^2q(vy + c_1x)}{c_1^4 + c_1^2 + 1}$$

$$m_{xy}(x, y) = -\frac{1}{40} \frac{(-1 + v)bc_1^2 q(-c_1 b + 2x + 2yc_1)}{c_1^4 + c_1^2 + 1}$$

Ook de rechthoekige driehoek bezit geen exacte oplossing. Om de ligging van de maxima te bepalen kan dus wederom de methode uit paragraaf 3.4 niet gehanteerd worden. Immers, die methode maakt gebruik van de afgeleiden van de exacte oplossing.

Om de grootte van een maximum te bepalen is het echter niet noodzakelijk om de precieze ligging van dit maximum te kennen. Dit wordt hieronder aangetoond.

Stel dat het maximum wordt aangenomen in het punt  $P$  met coördinaten  $(x_P, y_P)$ .

Deze coördinaten kunnen geschreven worden als een veelvoud van  $b$ , dus  $x_P = c_2 \cdot b$  en  $y_P = c_3 \cdot b$  waarin  $c_2$  en  $c_3$  bepaalde constanten zijn.

De bovenstaande uitdrukkingen kunnen dan worden herschreven tot:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= -\frac{1}{40} \frac{qc_1^2 b^4 c_3 c_2 (-c_1 + c_2 + c_3 c_1)}{D(c_1^4 + c_1^2 + 1)} \\ m_{xx;\max} &= \frac{1}{20} \frac{b^2 c_1^2 q(c_3 + vc_1 c_2)}{c_1^4 + c_1^2 + 1} \\ m_{yy;\max} &= \frac{1}{20} \frac{b^2 c_1^2 q(vc_3 + c_1 c_2)}{c_1^4 + c_1^2 + 1} \\ m_{xy;\max} &= -\frac{1}{40} \frac{(-1 + v)b^2 c_1^2 q(-c_1 + 2c_2 + 2c_3 c_1)}{c_1^4 + c_1^2 + 1} \end{aligned}$$

Als nu per formule alle constanten worden samengenomen tot één nieuwe constante dan ontstaan de volgende functies:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= k_1 \cdot \frac{qb^4}{D} \\ m_{xx;\max} &= k_2 \cdot qb^2 \\ m_{yy;\max} &= k_3 \cdot qb^2 \\ m_{xy;\max} &= k_4 \cdot qb^2 \end{aligned}$$

waarin  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  de nieuwe coëfficiënten voorstellen. Hieruit blijkt dat de vorm van de benaderingsformules voor de maximumwaarden identiek is aan die voor de gelijkzijdige driehoek (zie paragraaf 3.5).

De nieuwe coëfficiënten worden – op dezelfde manier als in het vorige hoofdstuk – gecalibreerd en vervolgens geverifieerd.

De platen zijn voor verschillende  $a/b$ -verhoudingen berekend, te weten:  $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2, \frac{5}{2}, 3$ . De calibratiegegevens en de controletabellen staan vermeld in bijlage F.

De benaderingsformules met de bijbehorende coëfficiënten staan in tabel G.3 in bijlage G.

## Conclusies

Zoals in de inleiding reeds beschreven is, is het doel van dit rapport om benaderingsformules af te leiden voor de doorbuiging van en de momenten in verschillende driehoekige vloervormen belast door een gelijkmatige belasting.

Uit de voorgaande hoofdstukken is gebleken dat voor elke onderzochte driehoekige vorm – te weten de gelijkzijdige, de gelijkbenige en de rechthoekige driehoek – de vorm van de formules hetzelfde is, namelijk:

- de maximale doorbuiging  $w_{\max} = k_1 \cdot \frac{qb^4}{D}$
- het maximale buigende moment in de  $x$ -richting  $m_{xx;\max} = k_2 \cdot qb^2$
- het maximale buigende moment in de  $y$ -richting  $m_{yy;\max} = k_3 \cdot qb^2$
- het maximale wringende moment  $m_{xy;\max} = k_4 \cdot qb^2$

met belasting  $q$ , basis van de driehoek  $b$ , plaatstijfheid  $D$  en  $k_1$  tot en met  $k_4$  experimenteel vastgestelde coëfficiënten. Deze coëfficiënten kunnen per driehoeksvorm – en voor de gelijkbenige en de rechthoekige driehoek voor verschillende lengteverhoudingen van de zijden van de driehoek – worden opgezocht in de tabellen in bijlage G. Voor de gelijkzijdige driehoek is tevens de ligging van deze maximumwaarden onderzocht. Het is gebleken dat alleen de doorbuiging zijn maximum in het zwaartepunt van de plaat heeft. De buigende momenten in  $x$ - en  $y$ -richting hebben hun maximum liggen op de halve hoogte respectievelijk op ongeveer een kwart van de hoogte. De wringende momenten hebben maximumwaarden aan de rand van de plaat, namelijk bij de basis van de driehoek.

De benaderingsformules voor de gelijkzijdige driehoek zijn tot op ongeveer 1,5 % nauwkeurig. Die voor de gelijkbenige en rechthoekige driehoek tot op ongeveer 2,5 %. Verder is gebleken dat de benaderingsformules gevoelig zijn voor de plaatdikte-lengteverhouding. Indien de plaatdikte erg groot gekozen wordt ten opzichte van de lengte-afmetingen dan zijn de benaderingsformules niet meer voldoende betrouwbaar. Hiermee wordt bedoeld dat de resultaten meer dan 5 % kunnen afwijken van numerieke berekeningen. De coëfficiënten zijn gecalibreerd op een plaatdikte die in de orde van 3 % van de hoogte van de driehoek ligt.

Bovendien geven de formules voor een plaat met een extreme vorm – bijvoorbeeld een zeer kleine hoogte ten opzichte van de breedte – minder betrouwbare resultaten.

De formules zijn niet gevoelig gebleken voor variaties in de betonkwaliteit – en dus de elasticiteitsmodulus – en/of de grootte van de belasting.

De invloed van het aantal significante cijfers van de experimenteel vastgestelde coëfficiënten is ook meegenomen. In de tabellen zoals die al bestaan voor rechthoekige platen, worden de coëfficiënten in twee cijfers significant opgegeven. In eerste instantie is deze significantie overgenomen, maar achteraf is gebleken dat het toevoegen van een derde cijfer significant over het algemeen aanmerkelijk betere resultaten geeft. Verder wordt hierover nog opgemerkt dat ESA Prima Win alle resultaten op drie decimalen nauwkeurig geeft. Dit heeft echter wel invloed op de relatieve nauwkeurigheid van de resultaten. Zo bestaat er tussen 0,004 mm en 0,005 mm en tussen 4,371 mm en 4,372 mm in beide gevallen slechts een absoluut verschil van 0,001 mm terwijl het relatieve verschil bij de eerste 20 % bedraagt en bij de tweede slechts 0,023 %.

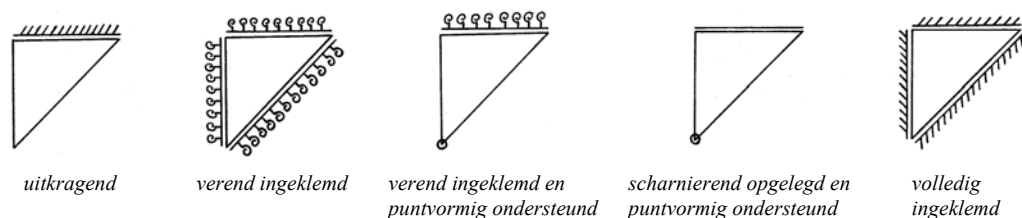
Tenslotte wordt nog opgemerkt dat de maximumwaarden voor de buigende en de wringende momenten volgens berekeningen met het EEM-programma ESA Prima Win gedeeltelijk beïnvloed worden door de plaatdikte. Deze afhankelijkheid is echter niet terug te vinden in de benaderingsformules. Er wordt echter benadrukt dat deze invloed niet erg groot is (minder dan 1%).

---

## Aanbevelingen

Als er gekeken wordt naar de conclusies en de tabel met benaderingsformules dan zijn er nog een aantal aspecten die wellicht in aanmerking komen voor nader onderzoek.

Zo is de tabel met benaderingsformules nog niet volledig. Er zou gedacht kunnen worden aan andere plaatvormen (bijvoorbeeld die met stompe hoeken), andere vormen van belasting, zoals puntlasten en andere wijzen van opleggen, zoals inklemmingen, puntvormige ondersteuning of verende inklemmingen. In figuur 7.1 zijn een aantal interessante configuraties getekend.



**Figuur 7.1** Interessante vloerconfiguraties die wellicht voor nader onderzoek in aanmerking komen

Bovendien is in de tabellen voor rechthoekige platen (zie bijlage A) aangegeven waar de momentennulpunten zich bevinden. Dit is in dit rapport buiten beschouwing gebleven, maar misschien wel interessant voor de praktijk.

Verder is het de moeite waard om de wapeningsmomenten  $m_{xx} + |m_{xy}|$  en  $m_{yy} + |m_{xy}|$  nader te onderzoeken. Daarbij kan gekeken worden naar de grootte van deze momenten, maar ook hoe de wapening neergelegd dient te worden. Hierbij is de richting van de wapeningsstaven ook van belang.

Daarnaast dient ook het krachten spel in de hoeken van de driehoekige plaat nader bestudeerd te worden, daar er – net als bij rechthoekige platen – er mogelijk sprake kan zijn van het ‘opwippen’ van de punten en hoe dit het beste gewapend kan worden.

Tenslotte zouden de benaderingsformules, zoals die in dit rapport afgeleid zijn, misschien verbeterd kunnen worden door meer termen mee te nemen in de uitdrukking voor de doorbuiging. Daarnaast zou de nauwkeurigheid van de coëfficiënten verder verbeterd kunnen worden door het gebruik van een computerprogramma dat wel rekening houdt met het aantal significante cijfers en niet het aantal decimalen. Of dit echter een meerwaarde biedt voor de praktijk blijft echter de vraag.

## Zelfevaluatie

Dit laatste hoofdstuk heeft inhoudelijk weinig te maken met het onderwerp van het rapport, maar is voor de volledigheid toegevoegd. In paragraaf 8.1 staan de besprekingsverslagen van de startnotitie en van het conceptrapport. In paragraaf 8.2 licht de student zijn ervaringen met dit project toe.

### 8.1 Besprekingsverslagen

#### **BESPREKINGSVERSLAG STARTNOTITIE** (woensdag 10 september, 9:00)

Geen opmerkingen.

#### **BESPREKINGSVERSLAG CONCEPTRAPPORT** (dinsdag 30 september, 10:30)

De inleiding is in het conceptrapport een samenstel van de belangrijkste punten uit de startnotitie en komt daardoor nog wat rommelig over. Het verzoek dit beter te verwoorden. Zelf suggereer ik om de opbouw van het rapport aan de inleiding toe te voegen.

Hoofdstuk 2 bevat nog enkele taalfouten. Inhoudelijk is dit hoofdstuk in orde.

In hoofdstuk 3 moet de eerste stap uit het ontwikkelingsproces (het opstellen van de formule voor de doorbuiging) nader toegelicht worden. Ik stel voor om een afbeelding te tekenen die deze stap verder moet verduidelijken. Verder geef ik aan dat in paragraaf 3.5 duidelijk aangegeven moet worden dat de plotjes gemaakt zijn op basis van de exacte oplossing. Bij deze plotjes ook vermelden moet dan ook een duidelijk bijschrift en de eenheden moeten vermeld worden. Verder moeten de nieuwe coëfficiënten nog berekend worden met een realistische waarde voor de dikte. Dhr. Peperkamp stelt voor om, als daar althans voldoende tijd voor is, ook te kijken naar de krachten in de hoekpunten, vooral vanwege de wapening aldaar.

De hoofdstukken 4 en 5 moeten nog numeriek worden uitgewerkt met ESA Prima Win en de benaderingsformules moeten nog gecorrigeerd worden. Dit gaat waarschijnlijk veel tijd kosten, want dit moet dan voor alle beschouwde verhoudingen gebeuren.

Bijlage 4 moet qua leesbaarheid nog worden verbeterd. Goede alinea-indeling ontbreekt nog, maar dit is een gevolg van het direct overtypen van mijn eigen aantekeningen.

In de laatste tweeënhalve week zal voornamelijk worden geschonken aan het calibreren en het verifiëren van de benaderingsformules voor de gelijkbenige en de rechthoekige driehoek en de afronding van het rapport. Dit betekent dat het rapport opgemaakt en nagelezen moet worden. Er moet dan ook gekeken worden of het rapport volledig is en of er geen tegenstrijdigheden in vermeld staan.

## 8.2 Ervaringen met het eindwerk

Om te beginnen ben ik erg blij dat ik dit onderwerp gekozen heb. Ik heb dit onderwerp gekozen, omdat het me een uitdaging leek toen ik de beschrijving las. Jezelf een nieuw stuk theorie eigen maken en dat dan vervolgens toepassen op een probleem waarvan de oplossing (nog) niet bekend is.

Het is leuk om achteraf te zien hoe je gedachten over dit eindwerk gedurende die zes weken kunnen veranderen. In eerste instantie was ik van plan om veel soorten platen slechts oppervlakkig uit te werken, maar ik eindig met slechts enkele platen die ik grondig doorgewerkt heb.

Omdat het onderwerp me erg aansprak had ik er niet veel moeite mee om regelmatig aan dit eindwerk te werken. Daar komt nog eens bij dat naarmate je verder komt, je nieuwe dingen ontdekt, daardoor nieuwsgierig wordt en je verder wilt gaan met onderzoeken.

Ook met de begeleiders kon ik goed opschieten. Ik ben geregeld bij dhr. Hoogenboom langsgegaan en ik had ook per email contact met hem om de laatste stand van zaken te bespreken en te overleggen over wat ik het beste kon gaan doen. Als ik vragen had of zocht naar bepaalde informatie, dan kon ik bijna altijd bij hem terecht. Voor de meer specifieke vragen over beton heb ik dhr. Peperkamp vaker geraadpleegd. Bij deze wil ik hen nogmaals bedanken voor de goede begeleiding.

Maar ik heb ook nog een minpuntje: in dit blok (het eerste blok) was slechts een krappe zeven weken gepland om het eindwerk te kunnen doen. Dit is wel wat aan de korte kant voor een vak van zes studiepunten. Daar komt nog bij dat als je het eindwerk een beetje serieus neemt, je toch wel over die studiebelasting heen gaat. Ik weet niet of dat meegenomen wordt, maar ik vind wel dat er bij de beoordeling rekening mee gehouden mag worden, dat het blok zo kort was. In negen weken kun je tenslotte veel meer doen dan in zeven.

## Literatuurlijst

1. Christiaen, H., “Analytische mechanica, De energiewetten”, Online (15 september 2003) <http://www.kc.kuleuven.ac.be/kc/energie.rtf>, Leuven, België
2. Blaauwendraad, J., “Theory of Elasticity, Energy Principles and Variational Methods”, collegedictaat, CT5141, Technische Universiteit Delft, oktober 2002
3. Maple (Software), *Waterloo Maple Inc.*, Versie 6.01, Online (15 september 2003) <http://www.maplesoft.com/>
4. ESA Prima Win (Software), *SCIA International*, Versie 3.50.00, Online (15 september 2003) <http://www.scia-online.com/Nederlands/esawin/>
5. Timoshenko, S.P., en S. Woinowsky – Krieger, “Theory of Plates and Shells”, second edition, McCraw – Hill, New York, 1959
6. Walraven, J.C., “College co3050, Gewapend beton”, collegedictaat, CTco3050, Technische Universiteit Delft, oktober 2000



## Tabel met benaderingsformules voor rechthoekige platen

| $l_y / l_x$ |  | 1,0                                | 1,2  | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  | 2,5  | 3,0  |      |
|-------------|--|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| I           |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 41   | 54   | 67   | 79   | 87   | 97   | 110  | 117  |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 41   | 35   | 31   | 28   | 26   | 25   | 24   | 23   |
| II          |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 18   | 26   | 32   | 36   | 39   | 41   | 42   | 43   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 18   | 16   | 12   | 10   | 10   | 10   | 10   | 10   |
| III         |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 25   | 36   | 45   | 53   | 58   | 62   | 67   | 69   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 25   | 23   | 20   | 19   | 18   | 17   | 17   | 17   |
| IV A        |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 16   | 28   | 42   | 56   | 69   | 80   | 100  | 112  |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 29   | 32   | 32   | 30   | 27   | 24   | 20   | 18   |
| IV B        |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 29   | 34   | 38   | 40   | 42   | 42   | 42   | 42   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 16   | 14   | 13   | 13   | 13   | 13   | 13   | 13   |
| V A         |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 27   | 41   | 54   | 67   | 78   | 89   | 105  | 115  |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 38   | 37   | 34   | 30   | 27   | 25   | 24   | 23   |
| V B         |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 27   | 21   | 19   | 18   | 17   | 17   | 17   | 17   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 91   | 102  | 108  | 111  | 113  | 114  | 114  | 114  |
| VI A        |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 18   | 29   | 39   | 47   | 54   | 59   | 66   | 69   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 23   | 23   | 20   | 17   | 15   | 14   | 13   | 13   |
| VI B        |  | $m_{yx} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 23   | 30   | 35   | 38   | 40   | 41   | 42   | 43   |
|             |  | $m_{xy} = 0,001 p_d l_x^2 \times$  | 18   | 15   | 14   | 13   | 13   | 13   | 13   | 13   |
|             |  | $m_{yx} = -0,001 p_d l_x^2 \times$ | 60   | 70   | 76   | 80   | 82   | 83   | 83   | 83   |
|             |  | $m_{xy} = -0,001 p_d l_x^2 \times$ | 54   | 55   | 55   | 54   | 53   | 53   | 51   | 49   |
|             |  | $a_x / l_x =$                      | 0,18 | 0,19 | 0,19 | 0,19 | 0,20 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
|             |  | $a_y / l_y =$                      | 0,19 | 0,18 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,10 | 0,08 | 0,07 |

Tabel A.1 Benaderingsformules voor de momenten in rechthoekige platen zoals opgenomen in de NEN 6720 (tabel overgenomen uit [6])

## Stappenplan ter bepaling van de benaderingsformules

In deze bijlage wordt het stappenplan, dat gebruikt zal worden voor de bepaling van de benaderingsformules, beknopt uiteengezet.

**(1) Schat een functie voor de doorbuiging  $w$**

De doorbuigingsfunctie is van de vorm  $w = A \cdot f_1 f_2 f_3$  waarbij  $f_1$ ,  $f_2$  en  $f_3$  functies zijn van  $x$  en  $y$  en  $A$  een nader te bepalen parameter. Deze stap is de moeilijkste stap in het ontwikkelingsproces.

**(2) Maak een 3D-plot van deze functie met behulp van Maple**

Het maken van een 3D-plot geeft snel inzicht of de geschatte functie een goede benadering geeft. Hierbij zal speciaal gelet worden op de zakkingen en rotaties aan de randen van de plaat.

**(3) Bepaal  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\rho_{xy}$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$**

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de volgende formules:

$$\begin{aligned}\kappa_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & m_{xx} &= D(\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy}) & D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \\ \kappa_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & m_{yy} &= D(\kappa_{yy} + \nu \kappa_{xx}) \\ \rho_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & m_{xy} &= \frac{1}{2} D(1-\nu) \rho_{xy}\end{aligned}$$

**(4) Bereken de vormveranderingenergie  $E_s$**

$$E_s = \iint_S \frac{1}{2} (m_{xx} \kappa_{xx} + m_{yy} \kappa_{yy} + m_{xy} \rho_{xy}) dS$$

**(5) Bereken de energie van plaats  $E_p$**

$$E_p = -\iint_S q w dS$$

**(6) Bepaal de totale potentiële energie  $E_{pot}$**

$$E_{pot} = E_s + E_p$$

**(7) Bepaal amplitude  $A$  van de doorbuigingsfunctie**

Maak daarbij gebruik van het principe van minimum potentiële energie:  $\frac{dE_{pot}}{dA} = 0$ .

**(8) Vereenvoudig de uitdrukkingen voor  $w$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  en  $m_{xy}$**

Vul de zojuist gevonden waarde voor  $A$  in in de uitdrukkingen van deze variabelen.

## Het invoeren van een plaat in de vorm van een gelijk- zijdige driehoek in Maple

Daar de variabele  $D$  reeds in Maple gedeclareerd is, wordt de plaatstijfheid  $D$  hier vervangen door het symbool  $P$ .

```
> restart;
```

```
> h:=sqrt(3)/2*a;
```

$$h := \frac{1}{2} \sqrt{3} a$$

```
> f1:=y/h; f2:=(1-2*x/a-y/h); f3:=(1+2*x/a-y/h);
```

$$f1 := \frac{2}{3} \frac{y \sqrt{3}}{a}$$

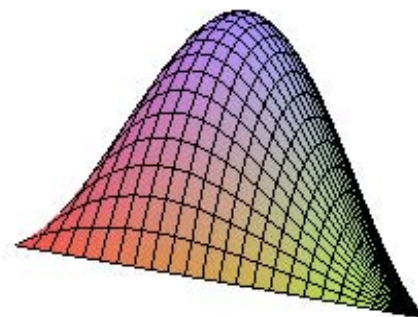
$$f2 := 1 - \frac{2x}{a} - \frac{2}{3} \frac{y \sqrt{3}}{a}$$

$$f3 := 1 + \frac{2x}{a} - \frac{2}{3} \frac{y \sqrt{3}}{a}$$

```
> w:=simplify(A*f1*f2*f3);
```

$$w := \frac{2}{27} \frac{A y \sqrt{3} (3a - 6x - 2y \sqrt{3})(3a + 6x - 2y \sqrt{3})}{a^3}$$

```
> a:=1: A:=1: plot3d(w,x=-a*(h-y)/(2*h)..a*(h-y)/(2*h),y=0..h);  
a:='a': A:='A':
```



> **kxx:=-diff(diff(w,x),x);**

$$k_{xx} := \frac{16}{3} \frac{A y \sqrt{3}}{a^3}$$

> **kyy:=-diff(diff(w,y),y);**

$$k_{yy} := \frac{8}{9} \frac{A (3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} + \frac{\frac{8}{9} A (3a - 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} - \frac{16}{9} \frac{A y \sqrt{3}}{a^3}$$

> **rxxy:=-2\*diff(diff(w,y),x);**

$$r_{xy} := \frac{8}{9} \frac{A \sqrt{3} (3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} - \frac{8}{9} \frac{A \sqrt{3} (3a - 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3}$$

> **mxx:=P\*(kxx+v\*kyy);**

**mxx:=P**

$$\left( \frac{16}{3} \frac{A y \sqrt{3}}{a^3} + v \left( \frac{8}{9} \frac{A (3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} + \frac{\frac{8}{9} A (3a - 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} - \frac{16}{9} \frac{A y \sqrt{3}}{a^3} \right) \right)$$

> **myy:=P\*(kyy+v\*kxx);**

**myy:=**

$$P \left( \frac{8}{9} \frac{A (3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} + \frac{\frac{8}{9} A (3a - 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} - \frac{16}{9} \frac{A y \sqrt{3}}{a^3} + \frac{\frac{16}{3} v A y \sqrt{3}}{a^3} \right)$$

> **mxy:=1/2\*P\*(1-v)\*rxxy;**

$$m_{xy} := \frac{1}{2} P (1-v) \left( \frac{8}{9} \frac{A \sqrt{3} (3a + 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} - \frac{8}{9} \frac{A \sqrt{3} (3a - 6x - 2y\sqrt{3})}{a^3} \right)$$

> **Es:=simplify(1/2\*int(int(mxx\*kxx+myy\*kyy+mxy\*rxxy,x=-a\*(h-y)/(2\*h)..a\*(h-y)/(2\*h)),y=0..h));**

$$E_s := \frac{32}{9} \frac{P A^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

> **Ep:=simplify(-int(int(q\*w,x=-a\*(h-y)/(2\*h)..a\*(h-y)/(2\*h)),y=0..h));**

$$E_p := -\frac{1}{60} q A a^2 \sqrt{3}$$

> **Epot:=simplify(Es+Ep);**

$$E_{pot} := -\frac{1}{180} \frac{A \sqrt{3} (-640 P A + 3 q a^4)}{a^2}$$

> **A:=solve(diff(Epot,A)=0,A);**

$$A := \frac{3}{1280} \frac{q a^4}{P}$$

> **w:=simplify(w);**

$$w := \frac{1}{5760} \frac{q a y \sqrt{3} (-3a + 6x + 2y\sqrt{3}) (-3a - 6x + 2y\sqrt{3})}{P}$$

> **mx:=simplify(mx);**

$$mx := -\frac{1}{80} q a (-y \sqrt{3} - v a + v y \sqrt{3})$$

> **my:=simplify(my);**

$$my := \frac{1}{80} q a (a - y \sqrt{3} + v y \sqrt{3})$$

> **mxy:=simplify(mxy);**

$$mxy := -\frac{1}{80} (-1 + v) q a \sqrt{3} x$$



## Het invoeren van een plaat in ESA Prima Win

In deze bijlage wordt bij wijze van demonstratie uitgelegd hoe een gelijkzijdige plaat met zijden van 8 m ingevoerd wordt. De invoer vindt in een globaal als volgt plaats. Er wordt begonnen met de invoer van de projectgegevens en de geometrie, gevolgd door de invoer van de opleggingen. Daarna kan de belasting opgegeven worden om vervolgens te eindigen met de daadwerkelijke berekening. Hieronder wordt de invoer stapje voor stapje behandeld.

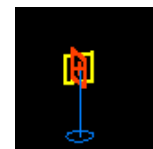
Na het starten van het programma dient er een nieuw bestand aangemaakt te worden. Klik daarvoor op **Bestand** -> **Nieuw** of op .

In het venster dat verschijnt kunnen de projectgegevens ingevoerd worden. In het gedeelte “Gegevens” kunnen de naam en de omschrijving van het project ingevoerd worden, alsmede de eigen naam en de datum waarop de berekening uitgevoerd is. Onder het kopje “Structuurtype” dient ‘Plaat XY’ gekozen te worden. Door te klikken op het vakje achter “Nationale norm” kan een norm geselecteerd worden. In dit voorbeeld wordt gekozen voor de ‘NEN’. Bevestig de keuze met **OK**. Door te klikken op **Materiaal**, kan het materiaal waaruit de plaat bestaat, gekozen worden. In het dan verschijnende venster kan bij “Type” het soort materiaal aangegeven worden, in dit voorbeeld ‘beton’. Linksonder kan dan ook de kwaliteit van het beton opgegeven worden, hier wordt ‘B35’ gekozen. Bevestig de keuzes door op **OK** te klikken en sluit het venster “Projectgegevens” door nogmaals op **OK** te klikken.

Nu dient de geometrie opgegeven te worden. Dubbelklik daartoe op **Geometrie** () . Er verschijnt een nieuw venster (“Geometrie”) en klik in het veld “Blok” op **2D macro**. Het venster “Nieuw blok van platen” opent zich. Klik op de knop **2D raster**. Links verschijnt nu het venster “2D raster”. Pas de dikte aan naar 0.05 m. Let op: druk vervolgens NIET op <enter> en klik ook nog niet op **OK**, maar klik onder het kopje “Rand” op **Toev.**. De plaat kan met de muis getekend worden, maar kan ook gedefinieerd worden door het opgeven van de coördinaten van de hoekpunten. In dit voorbeeld wordt gekozen voor de laatste mogelijkheid. Geef de volgende coördinaten op: (0,0), (4,0), (0,6.928203)\*, (-4,0) en (0,0). Sluit de selectie af door op de rechtermuisknop te drukken en sluit het venster “2D Raster” door te klikken op **OK**. Het venster “Geometrie” verschijnt weer. In het vak “Blok” klikt u op **1 Toev.** en vervolgens op **Wis** (ook in vak “Blok” en dus NIET in vak “Geometrie”). De plaat is nu vormgegeven. Sluit het dialoogvenster door te klikken op **Sluiten** en bevestig de boodschap met betrekking tot “Controle en correctie van de geometrie” door op **OK** te klikken.

\* De hoogte van de gelijkzijdige driehoek bedraagt  $\frac{1}{2} a\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \approx 6,928203$  m

Nu de geometrie ingevoerd is, dienen ook de opleggingen ingevoerd te worden. Klik op het plusje voor **Invoer** (  ) en dan op het plusje voor **Model** (  ). Vervolgens dubbelklikt u op **Steunpunten, Bedding** (  ). In het venster dat dan verschijnt (“Steunpunten\_Beddingen”) dient u te klikken op de zwarte knop met daarop het symbooltje voor de oplegging, zie figuur D.1. In dit voorbeeld wordt een scharnierende ondersteuning langs de randen aangebracht, dus alleen “Z” aanvinken en “Rx” en “Ry” afvinken. Klik daarna op **Invoer** en selecteer alle randen. Bij de selectie van een rand verandert deze van kleur. (De betreffende rand wordt rood.) Als alle randen geselecteerd zijn op de rechtermuisknop drukken om de selectie te beëindigen. Het venster “Steunpunten\_Beddingen” kan gesloten worden door op **OK** te klikken. De opleggingen zijn nu ook ingevoerd.



**Figuur D.1** Het symbool voor het type oplegging

De volgende stap is de lastendefinitie. Klik op het plusje voor **Lasten** (  ) en dan op **Verdeelde 2D last**. In het dan verschijnende venster kunnen de gegevens van de last vastgelegd worden. Geef de last een naam, bijvoorbeeld ‘test’, selecteer onder “Type” ‘Permanent’ en sluit het venster door te klikken op **OK**. Vink vervolgens de opties “Globale last” en “temp. variabel” af en klik op het zwarte vakje met de tekst “Hier klikken!”. In het venster “Globale kracht belasting” wordt onder het kopje “Impuls” bij qz –10 ingevoerd. (Negatief, want de belasting dient omlaag gericht te zijn.) Het “Type” blijft ‘Kracht’ en “Systeem” blijft ‘Globaal’. Klik daarna op **Invoer** en sluit dan het venster “Verdeelde lasten 2D” door op **OK** te klikken. De belasting is nu ook ingevoerd.

Voordat de berekening gestart kan worden, dient er nog een net gegenereerd te worden. Dubbelklik daartoe op **Netverfijning** (  ). Het dialoogvenster verandert naar “Netverfijning”. Geef bij “Elementen” een gemiddelde afmeting van 0.1 m op en klik in het vakje daaronder op **2Dmacro**. Bevestig door te klikken op **OK**.

Klik vervolgens op het plusje voor **Berekening en netgeneratie** (  ) en dubbelklik daarna op **Net genereren** (  ). Er verschijnt dan een bericht met de melding dat het net gegenereerd is, dat het aantal knopen (in dit voorbeeld) 3119 is en dat het aantal 2D elementen 3063 is. Klik op **OK** en dubbelklik dan op **Berekenen** (  ). Het venster “Berekeningsopties” opent zich dan, maar er hoeft hier niets aangepast te worden dus klik op **OK**.

Er verschijnt dan een boodschap waarin staat dat de maximale verplaatsing –70,771 mm bedraagt (in knoop 1357) en dat de maximale rotatie –51,820 mrad bedraagt (in knoop 1). Bevestig deze resultaten door te klikken op **OK**.

Om de resultaten te bekijken klikt u op het plusje voor **Resultaten**. Bij de resultaten kunnen isolijnenfiguren worden geplote van de doorbuiging (dit staat onder **2D vervormingen**) en de momenten (dit staat onder **2D krachten**). Bij deze laatste dient in het venster “BG / Combi” de optie “in zwaartepunten” te worden veranderd in “in knopen” om zo een vloeiend isolijnenfiguur te verkrijgen. Om een plotje weer te geven klikt u op **Herteken**. Het net kan naar wens in- of uitgeschakeld worden.

## Calibratie- en verificatie- tabellen voor de gelijkbenige driehoek

Op de volgende pagina's zijn de calibratie- en verificatietabellen voor de vloerplaat in de vorm van een gelijkbenige driehoek weergegeven. Linksboven is aangegeven om welke verhouding van  $a$  staat tot  $b$  het gaat.

Bij de calibratie is een realistische plaat aangenomen, waarmee de waarden van  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  bepaald zijn.

Vervolgens zijn de zo verkregen benaderingsformules systematisch geverifieerd. Daarbij zijn alle parameterwaarden uit de calibratietabel constant gehouden, op één na.

Vervolgens is die veranderde parameter één keer naar boven bijgesteld en één keer naar beneden bijgesteld. Zo kan de invloed van die parameter op de nauwkeurigheid van de formule onderzocht worden. De veranderde parameter is vet gedrukt.

$a/b = 0,6$

| CALIBRATIE |                |               |     |             |                |             |  |
|------------|----------------|---------------|-----|-------------|----------------|-------------|--|
| $q = 10$   | $b = 8$        | $t = 150$     | B45 | $E = 33500$ | $\nu = 0,2$    |             |  |
| $k_1$      | $0,001 \times$ | <b>0,0551</b> |     | $k_3$       | $0,001 \times$ | <b>6,59</b> |  |
| $k_2$      | $0,001 \times$ | <b>6,89</b>   |     | $k_4$       | $0,001 \times$ | <b>1,76</b> |  |

| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| <b><math>q = 8</math></b>  | $b = 8$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,184                     | 0,184                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 3,374            | 3,373             | 0,03 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,528                     | 3,527                       | 0,03 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,901            | 0,903             | -0,22 %               |
| <b><math>q = 12</math></b> |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu = 0,2$      |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,276                     | 0,276                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,061            | 5,059             | 0,04 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 5,292                     | 5,290                       | 0,04 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,352            | 1,354             | -0,15 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,073                     | 0,074                       | -1,35 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 2,372            | 2,389             | -0,71 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 2,480                     | 2,199                       | -12,78 %              | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,634            | 0,631             | 0,48 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu = 0,2$      |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,561                     | 0,554                       | 1,26 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,590            | 6,555             | 0,53 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,890                     | 7,360                       | -6,39 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,760            | 1,765             | -0,28 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,014                     | 0,015                       | -6,67 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 1,054            | 1,076             | -2,04 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 1,102                     | 0,832                       | 32,45 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,282            | 0,276             | 2,17 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | $b = 8$                   | <b><math>t = 100</math></b> | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,776                     | 0,761                       | 1,97 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,218            | 4,186             | 0,76 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,410                     | 5,143                       | -14,25 %              | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,126            | 1,130             | -0,35 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | $b = 8$                   | <b><math>t = 200</math></b> | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,097                     | 0,099                       | -2,02 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,218            | 4,246             | -0,66 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,410                     | 3,682                       | 19,77 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,126            | 1,123             | 0,27 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | $b = 8$                   | $t = 150$                   | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,270                     | 0,270                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,218            | 4,216             | 0,05 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,410                     | 4,408                       | 0,05 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,126            | 1,128             | -0,18 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | $b = 8$                   | $t = 150$                   | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,200                     | 0,200                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,218            | 4,216             | 0,05 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,410                     | 4,408                       | 0,05 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,126            | 1,128             | -0,18 %               |

$$a/b = 0,8$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 8$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $v =$            |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>0,291</b>      |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>13,5</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>12,3</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>5,31</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 8$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,972            | 0,973             | -0,10 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,912            | 6,910             | 0,03 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,298            | 6,292             | 0,10 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,719            | 2,720             | -0,04 %               |
| $q = 12$         | $b = 8$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,457            | 1,459             | -0,14 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 10,368           | 10,365            | 0,03 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,446            | 9,439             | 0,07 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,078            | 4,080             | -0,05 %               |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,384            | 0,389             | -1,29 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 4,860            | 4,884             | -0,49 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,428            | 4,453             | 0,56 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,912            | 1,910             | 0,10 %                |
| $q = 10$         | $b = 10$         | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,965            | 2,950             | 0,51 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 13,500           | 13,457            | 0,32 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 12,300           | 12,244            | 0,46 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,310            | 5,316             | -0,11 %               |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,076            | 0,079             | -3,80 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 2,160            | 2,192             | -1,46 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 1,968            | 2,004             | -1,80 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 0,850            | 0,845             | 0,59 %                |
| $q = 10$         | $b = 8$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 4,099            | 4,063             | 0,89 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,640            | 8,596             | 0,51 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,872            | 7,818             | 0,69 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,398            | 3,400             | -0,06 %               |
| $q = 10$         | $b = 8$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,512            | 0,519             | -1,35 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,640            | 8,680             | -0,46 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,872            | 7,914             | -0,53 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,398            | 3,403             | -0,15 %               |
| $q = 10$         | $b = 8$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,428            | 1,429             | -0,07 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,640            | 8,637             | 0,03 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,872            | 7,866             | 0,08 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,398            | 3,400             | -0,06 %               |
| $q = 10$         | $b = 8$          | $t = 150$         | B65                   | $E = 38500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,057            | 1,058             | -0,09 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,640            | 8,637             | 0,03 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,872            | 7,889             | 0,08 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,398            | 3,400             | -0,06 %               |

$$a/b = 1,2$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 7$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>0,911</b>                |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>20,9</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>24,8</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>11,1</b>       |                       |
| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> | <b>0,2</b>       |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,783                     | 1,783                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,193            | 8,201             | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 9,722                     | 9,741                       | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,351            | 4,366             | -0,34 %               |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 2,674                     | 2,674                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 12,289           | 12,301            | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 14,582                    | 14,611                      | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 6,527            | 6,549             | -0,34 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,580                     | 0,586                       | -1,02 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,225            | 5,261             | -0,68 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,200                     | 6,239                       | 0,63 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,775            | 2,784             | -0,32 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 9</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 6,090                     | 6,060                       | 0,50 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 16,929           | 16,895            | 0,20 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 20,088                    | 20,071                      | 0,08 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 8,991            | 9,024             | -0,37 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,238                     | 0,243                       | -2,06 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 3,344            | 3,385             | -1,21 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,968                     | 4,013                       | -1,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,776            | 1,782             | -0,34 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 7,522                     | 7,461                       | 0,82 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,241           | 10,203            | 0,37 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,152                    | 12,127                      | 0,21 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,439            | 5,451             | -0,22 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,940                     | 0,949                       | -0,95 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,241           | 10,299            | -0,56 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,152                    | 12,226                      | -0,61 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,439            | 5,457             | -0,33 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 2,620                     | 2,619                       | 0,04 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,241           | 10,251            | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,152                    | 12,176                      | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,439            | 5,458             | -0,35 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,939                     | 1,939                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,241           | 10,251            | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,152                    | 12,176                      | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,439            | 5,458             | -0,35 %               |

$$a/b = 1,4$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 6$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $v =$            |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>1,24</b>                 |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>23,3</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>30,0</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>13,6</b>       |                       |
|                            |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,310                     | 1,308                       | 0,15 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,710            | 6,704             | 0,09 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,640                     | 8,650                       | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,917            | 3,907             | 0,26 %                |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,965                     | 1,962                       | 0,15 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,066           | 10,056            | 0,10 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,960                    | 12,975                      | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,875            | 5,861             | 0,24 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,790                     | 0,793                       | -0,38 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,825            | 5,838             | -0,22 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,500                     | 7,527                       | 0,36 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,400            | 3,389             | 0,32 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 7</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 3,034                     | 3,016                       | 0,60 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 11,417           | 11,380            | 0,33 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 14,700                    | 14,689                      | 0,07 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 6,664            | 6,644             | 0,30 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,323                     | 0,328                       | -1,52 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 3,728            | 3,753             | -0,67 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,800                     | 4,836                       | -0,74 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,176            | 2,168             | 0,37 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 5,526                     | 5,469                       | 1,04 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,388            | 8,335             | 0,64 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,800                    | 10,767                      | 0,31 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,896            | 4,874             | 0,45 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,691                     | 0,697                       | -0,86 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,388            | 8,426             | -0,45 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,800                    | 10,859                      | -0,54 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,896            | 4,889             | 0,14 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,925                     | 1,922                       | 0,16 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,388            | 8,380             | 0,10 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,800                    | 10,813                      | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,896            | 4,884             | 0,25 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,425                     | 1,423                       | 0,14 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,388            | 8,380             | 0,10 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,800                    | 10,813                      | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,896            | 4,884             | 0,25 %                |

$$a/b = 1,6$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 5$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $v =$            |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>1,56</b>                 |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>25,1</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>34,7</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>15,7</b>       |                       |
| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,795                     | 0,796                       | -0,13 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,020            | 5,029             | -0,18 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,940                     | 6,937                       | 0,04 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,140            | 3,142             | -0,06 %               |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,192                     | 1,194                       | -0,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,530            | 7,543             | -0,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,410                    | 10,405                      | 0,05 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,710            | 4,713             | -0,06 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,407                     | 0,411                       | -0,97 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,016            | 4,041             | -0,62 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 5,552                     | 5,568                       | 0,29 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,512            | 2,512             | 0,00 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 2,060                     | 2,052                       | 0,39 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 9,036            | 9,022             | 0,16 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,492                    | 12,459                      | 0,26 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,652            | 5,654             | -0,04 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 3</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,129                     | 0,132                       | -2,27 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 2,259            | 2,293             | -1,48 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,123                     | 3,152                       | -0,92 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,413            | 1,413             | 0,00 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 3,353                     | 3,324                       | 0,87 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,275            | 6,246             | 0,46 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,675                     | 8,630                       | 0,52 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,925            | 3,921             | 0,10 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,419                     | 0,425                       | -1,41 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,275            | 6,327             | -0,82 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,675                     | 8,712                       | -0,42 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,925            | 3,934             | -0,23 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,168                     | 1,170                       | -0,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,275            | 6,286             | -0,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,675                     | 8,671                       | 0,05 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,925            | 3,927             | -0,05 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,864                     | 0,866                       | -0,23 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,275            | 6,286             | -0,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,675                     | 8,671                       | 0,05 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,925            | 3,927             | -0,05 %               |

$$a/b = 1,8$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $v =$            |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>1,87</b>       |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>26,6</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>38,8</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>17,6</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,953            | 0,953             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 5,320            | 5,314             | 0,11 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,760            | 7,755             | 0,06 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,520            | 3,529             | -0,26 %               |
| $q = 12$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,429            | 1,429             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 7,980            | 7,971             | 0,11 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 11,640           | 11,632            | 0,07 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,280            | 5,293             | -0,25 %               |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,488            | 0,491             | -0,61 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 4,256            | 4,271             | -0,35 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,208            | 6,224             | 0,26 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,816            | 2,823             | -0,25 %               |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,469            | 2,457             | 0,49 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 9,576            | 9,536             | 0,42 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 13,968           | 13,929            | 0,28 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,336            | 6,351             | -0,24 %               |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,154            | 0,158             | -2,53 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 2,394            | 2,422             | -1,16 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 3,492            | 3,521             | -0,82 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,584            | 1,589             | -0,31 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 4,019            | 3,980             | 0,98 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,650            | 6,601             | 0,74 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,700            | 9,651             | 0,51 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,400            | 4,402             | -0,05 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,502            | 0,508             | -1,18 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,650            | 6,685             | -0,52 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,700            | 9,737             | -0,38 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,400            | 4,418             | -0,41 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,400            | 1,400             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,650            | 6,643             | 0,11 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,700            | 9,694             | 0,06 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,400            | 4,414             | -0,32 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B65                   | $E = 38500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,036            | 1,036             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,650            | 6,643             | 0,11 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,700            | 9,694             | 0,06 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,400            | 4,414             | -0,32 %               |

$$a/b = 2,0$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 4$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>2,18</b>                 |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>27,9</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>42,6</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>19,4</b>       |                       |
| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,455                     | 0,455                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 3,571            | 3,565             | 0,17 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 5,453                     | 5,452                       | 0,02 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,483            | 2,480             | 0,12 %                |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,682                     | 0,682                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,357            | 5,347             | 0,18 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,179                     | 8,178                       | 0,01 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,725            | 3,720             | 0,13 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 3</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,180                     | 0,183                       | -1,64 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 2,511            | 2,527             | -0,63 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,834                     | 3,855                       | 0,54 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,746            | 1,748             | -0,11 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,388                     | 1,378                       | 0,73 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,975            | 6,932             | 0,62 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,650                    | 10,620                      | 0,28 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,850            | 4,845             | 0,10 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 2</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,036                     | 0,037                       | -2,70 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 1,116            | 1,141             | -2,19 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 1,704                     | 1,732                       | -1,62 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,776            | 0,771             | 0,65 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,919                     | 1,895                       | 1,27 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,464            | 4,422             | 0,95 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,816                     | 6,779                       | 0,55 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,104            | 3,094             | 0,32 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,240                     | 0,243                       | -1,23 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,464            | 4,491             | -0,60 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,816                     | 6,850                       | -0,50 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,104            | 3,107             | -0,10 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,668                     | 0,668                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,464            | 4,456             | 0,18 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,816                     | 6,815                       | 0,01 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,104            | 3,100             | 0,13 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,495                     | 0,495                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,464            | 4,456             | -0,60 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,816                     | 6,815                       | 0,01 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,104            | 3,100             | 0,13 %                |

## Calibratie- en verificatie- tabellen voor de rechthoekige driehoek

Op de volgende pagina's zijn de calibratie- en verificatietabellen voor de vloerplaat in de vorm van een rechthoekige driehoek weergegeven. Linksboven is aangegeven om welke verhouding van  $a$  staat tot  $b$  het gaat.

Bij de calibratie is een realistische plaat aangenomen, waarmee de waarden van  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  en  $k_4$  bepaald zijn.

Vervolgens zijn de zo verkregen benaderingsformules systematisch geverifieerd. Daarbij zijn alle parameterwaarden uit de calibratietabel constant gehouden, op één na.

Vervolgens is die veranderde parameter één keer naar boven bijgesteld en één keer naar beneden bijgesteld. Zo kan de invloed van die parameter op de nauwkeurigheid van de formule onderzocht worden. De veranderde parameter is vet gedrukt.

$$a/b = 1,0$$

| CALIBRATIE |                |              |     |             |                |             |  |
|------------|----------------|--------------|-----|-------------|----------------|-------------|--|
| $q = 8,0$  | $b = 6$        | $t = 150$    | B45 | $E = 33500$ | $\nu = 0,2$    |             |  |
| $k_1$      | $0,001 \times$ | <b>0,676</b> |     | $k_3$       | $0,001 \times$ | <b>19,7</b> |  |
| $k_2$      | $0,001 \times$ | <b>19,7</b>  |     | $k_4$       | $0,001 \times$ | <b>14,5</b> |  |

| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| <b><math>q = 8</math></b>  |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,714                     | 0,714                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 5,674            | 5,684             | -0,18 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 5,674                     | 5,684                       | -0,18 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,176            | 4,172             | 0,10 %                |
| <b><math>q = 12</math></b> |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu = 0,2$      |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,071                     | 1,071                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,510            | 8,525             | -0,18 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,510                     | 8,525                       | -0,18 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 6,264            | 6,257             | 0,11 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,176                     | 0,180                       | -2,22 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 3,152            | 3,185             | -1,04 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,152                     | 3,185                       | -1,04 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,320            | 2,223             | 4,36 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> |                           | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu = 0,2$      |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 2,821                     | 2,797                       | 0,86 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 12,608           | 12,576            | 0,25 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 12,608                    | 12,576                      | 0,25 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 9,280            | 9,320             | -0,43 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 2</math></b> | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,011                     | 0,012                       | -8,33 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 0,788            | 0,817             | -3,55 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 0,788                     | 0,817                       | -3,55 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 0,580            | 0,492             | 17,89 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 3,013                     | 2,979                       | 1,14 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,092            | 7,064             | 0,40 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,092                     | 7,064                       | 0,40 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,220            | 5,302             | -1,55 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | B45                   | $E = 33500$                   | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,377                     | 0,381                       | -1,05 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,092            | 7,146             | -0,76 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,092                     | 7,146                       | -0,76 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,220            | 5,074             | %                     |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | $t = 150$                   | B25                   | <b><math>E = 28500</math></b> | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,049                     | 1,049                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,092            | 7,104             | -0,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,092                     | 7,104                       | -0,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,220            | 5,214             | 0,12 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | $t = 150$                   | B65                   | <b><math>E = 38500</math></b> | $0,2$            |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,777                     | 0,777                       | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,092            | 7,104             | -0,17 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,092                     | 7,104                       | -0,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,220            | 5,214             | 0,12 %                |

$$a/b = 1,2$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>0,953</b>      |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>24,6</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>22,2</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>17,1</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,007            | 1,007             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 7,085            | 7,091             | -0,08 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,394            | 6,406             | -0,19 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,925            | 4,933             | -0,16 %               |
| $q = 12$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,510            | 1,511             | -0,07 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 10,627           | 10,636            | -0,08 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,590            | 9,609             | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 7,387            | 7,400             | -0,17 %               |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,249            | 0,253             | -1,58 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 3,936            | 3,969             | -0,83 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 3,552            | 3,590             | 1,06 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,736            | 2,678             | 2,17 %                |
| $q = 10$         | $b = 8$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 3,977            | 3,953             | 0,61 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 15,744           | 15,698            | 0,29 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 14,208           | 14,180            | 0,20 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 10,944           | 11,170            | -2,02 %               |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,079            | 0,082             | -3,66 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 2,214            | 2,249             | -1,56 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 1,998            | 2,035             | -1,82 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,539            | 1,444             | 6,58 %                |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 4,247            | 4,208             | 0,93 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,856            | 8,819             | 0,42 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,992            | 7,964             | 0,35 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,156            | 6,309             | -2,43 %               |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,531            | 0,537             | -1,12 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,856            | 8,908             | -0,58 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,992            | 8,052             | -0,75 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,156            | 6,047             | 1,80 %                |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,479            | 1,480             | -0,07 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,856            | 8,864             | -0,09 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,992            | 8,008             | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,156            | 6,167             | -0,18 %               |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B65                   | $E = 38500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,095            | 1,096             | -0,09 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,856            | 8,864             | -0,09 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,992            | 8,008             | -0,20 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,156            | 6,167             | -0,18 %               |

$$a/b = 1,4$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 6$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>1,24</b>                 |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>29,2</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>24,2</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>19,6</b>       |                       |
| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,310                     | 1,314                       | -0,30 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 8,410            | 8,410             | 0,00 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 6,970                     | 6,982                       | -0,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,645            | 5,648             | -0,05 %               |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,965                     | 1,971                       | -0,30 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 12,614           | 12,616            | -0,02 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 10,454                    | 10,473                      | -0,18 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 8,467            | 8,472             | -0,06 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,323                     | 0,330                       | -2,12 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,672            | 4,706             | -0,72 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,872                     | 3,911                       | 1,00 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,136            | 3,038             | 3,23 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 8</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 5,175                     | 5,159                       | 0,31 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 18,688           | 18,621            | 0,36 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 15,488                    | 15,454                      | 0,22 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 12,544           | 12,808            | -2,06 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 3</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,102                     | 0,106                       | -3,77 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 2,628            | 2,664             | -1,35 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 2,178                     | 2,217                       | -1,76 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,764            | 1,660             | 6,27 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 5,526                     | 5,493                       | 0,60 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,512           | 10,466            | 0,44 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,712                     | 8,681                       | 0,36 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 7,056            | 7,227             | -2,37 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | <b>B45</b>            | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,691                     | 0,700                       | -1,29 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,512           | 10,561            | -0,46 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,712                     | 8,774                       | -0,71 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 7,056            | 6,959             | 1,39 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B25</b>            | <b><math>E = 28500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,925                     | 1,931                       | -0,31 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,512           | 10,513            | -0,01 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,712                     | 8,727                       | -0,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 7,056            | 7,060             | -0,06 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 6</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | <b>B65</b>            | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,425                     | 1,429                       | -0,28 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 10,512           | 10,513            | -0,01 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 8,712                     | 8,727                       | -0,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 7,056            | 7,060             | -0,06 %               |

$$a/b = 1,6$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $v =$            |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>1,54</b>       |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>33,5</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>25,9</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>21,6</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,785            | 0,786             | -0,13 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,700            | 6,708             | -0,12 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,180            | 5,186             | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,320            | 4,312             | 0,19 %                |
| $q = 12$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,177            | 1,179             | -0,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 10,050           | 10,062            | -0,12 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,770            | 7,779             | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,480            | 6,468             | 0,19 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,402            | 0,406             | -0,99 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 5,360            | 5,387             | -0,50 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,144            | 4,169             | 0,60 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,456            | 3,395             | 1,80 %                |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,034            | 2,028             | 0,30 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 12,060           | 12,045            | 0,12 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,324            | 9,308             | 0,17 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 7,776            | 7,848             | -0,92 %               |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,127            | 0,131             | -3,05 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 3,015            | 3,049             | -1,12 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 2,331            | 2,364             | -1,40 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,944            | 1,851             | 5,02 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 3,310            | 3,281             | 0,88 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,375            | 8,343             | 0,38 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,475            | 6,442             | 0,51 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,400            | 5,512             | -2,03 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,414            | 0,419             | -1,19 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,375            | 8,427             | -0,62 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,475            | 6,523             | -0,74 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,400            | 5,255             | 2,76 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,153            | 1,155             | -0,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,375            | 8,385             | -0,12 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,475            | 6,483             | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,400            | 5,390             | 0,19 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          |                   | B65                   | $E = 38500$      | $v =$            |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,853            | 0,855             | -0,23 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,375            | 8,385             | -0,12 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,475            | 6,483             | -0,12 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,400            | 5,390             | 0,19 %                |

$$a/b = 1,8$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>1,83</b>       |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>37,5</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>27,3</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>23,5</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 5$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,932            | 0,934             | -0,21 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 7,500            | 7,491             | 0,12 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,460            | 5,452             | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,700            | 4,700             | 0,00 %                |
| $q = 12$         | $b = 5$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,398            | 1,402             | -0,29 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 11,250           | 11,236            | 0,12 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 8,190            | 8,178             | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 7,050            | 7,049             | 0,01 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,477            | 0,482             | -1,04 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,000            | 6,012             | -0,20 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,368            | 4,381             | 0,30 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,760            | 3,712             | 1,29 %                |
| $q = 10$         | $b = 6$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,417            | 2,409             | 0,33 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 13,500           | 13,454            | 0,34 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 9,828            | 9,781             | 0,48 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 8,460            | 8,544             | -0,98 %               |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,151            | 0,155             | -2,58 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 3,375            | 3,402             | -0,79 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 2,457            | 2,484             | -1,09 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,115            | 2,026             | 4,39 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 3,933            | 3,903             | 0,77 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 9,375            | 9,320             | 0,59 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,825            | 6,772             | 0,78 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,875            | 6,009             | -2,23 %               |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 200$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,492            | 0,498             | -1,20 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 9,375            | 9,407             | -0,34 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,825            | 6,858             | -0,48 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,875            | 5,749             | 2,19 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,370            | 1,373             | -0,22 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 9,375            | 9,363             | 0,13 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,825            | 6,815             | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,875            | 5,874             | 0,02 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         |                       | $E = 38500$      | 0,2              |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,014            | 1,016             | -0,20 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 9,375            | 9,363             | 0,13 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,825            | 6,815             | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,875            | 5,874             | 0,02 %                |

$$a/b = 2,0$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>2,13</b>       |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>41,2</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>28,5</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>25,0</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 4$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,444            | 0,445             | -0,22 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 5,274            | 5,275             | -0,02 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 3,648            | 3,643             | 0,14 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,200            | 3,195             | 0,16 %                |
| $q = 12$         | $b = 4$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,667            | 0,667             | 0,00 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 7,910            | 7,912             | -0,03 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,472            | 5,465             | 0,13 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,800            | 4,792             | 0,17 %                |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,176            | 0,179             | -1,68 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 3,708            | 3,727             | -0,51 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 2,565            | 2,582             | 0,66 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,250            | 2,183             | 3,07 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,356            | 1,347             | 0,67 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 10,300           | 10,269            | 0,30 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,125            | 7,084             | 0,58 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 6,250            | 6,305             | -0,87 %               |
| $q = 10$         | $b = 2$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,035            | 0,036             | -2,78 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 1,648            | 1,676             | -1,67 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 1,140            | 1,165             | -2,15 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,000            | 0,910             | 9,89 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 100$         |                       | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,875            | 1,853             | 1,19 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,592            | 6,558             | 0,52 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,560            | 4,519             | 0,91 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,000            | 4,097             | -2,37 %               |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,234            | 0,238             | -1,68 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,592            | 6,629             | -0,56 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,560            | 4,589             | -0,63 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,000            | 3,892             | 2,77 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      | $\nu =$          |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,653            | 0,654             | -0,15 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,592            | 6,593             | -0,02 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,560            | 4,554             | 0,13 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,000            | 3,993             | 0,18 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B65                   | $E = 38500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,483            | 0,484             | -0,21 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 6,592            | 6,593             | -0,02 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,560            | 4,554             | 0,13 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,000            | 3,993             | 0,18 %                |

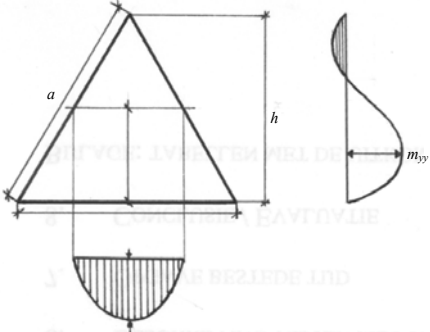
$$a/b = 2,5$$

| CALIBRATIE                 |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$                  | $b = 4$                   | $t = 150$                   | B45                   | $E = 33500$                   | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$                      | $0,001 \times$            | <b>2,79</b>                 |                       | $k_3$                         | $0,001 \times$   | <b>49,0</b>       |                       |
| $k_2$                      | $0,001 \times$            | <b>30,5</b>                 |                       | $k_4$                         | $0,001 \times$   | <b>28,3</b>       |                       |
| VERIFICATIES               |                           |                             |                       |                               |                  |                   |                       |
| <b><math>q = 8</math></b>  | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,582                     | 0,583                       | -0,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 6,272            | 6,278             | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 3,904                     | 3,898                       | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 3,622            | 3,625             | -0,08 %               |
| <b><math>q = 12</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,873                     | 0,875                       | -0,23 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 9,408            | 9,417             | -0,10 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 5,856                     | 5,847                       | 0,15 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 5,434            | 5,438             | -0,08 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 3</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,230                     | 0,234                       | -1,71 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 4,410            | 4,435             | -0,56 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 2,745                     | 2,762                       | 0,62 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 2,547            | 2,464             | 3,37 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 5</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 1,777                     | 1,770                       | 0,40 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 12,250           | 12,220            | 0,25 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 7,625                     | 7,581                       | 0,58 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 7,075            | 7,191             | -1,61 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 2</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,045                     | 0,048                       | -6,25 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 1,960            | 1,990             | -1,51 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 1,220                     | 1,247                       | -2,17 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 1,132            | 1,047             | 8,12 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 100</math></b> |                       | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 2,456                     | 2,434                       | 0,90 %                | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,840            | 7,810             | 0,38 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,880                     | 4,835                       | 0,93 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,528            | 4,631             | -2,22 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 200</math></b> | B45                   | <b><math>E = 33500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,307                     | 0,312                       | -1,60 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,840            | 7,885             | -0,57 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,880                     | 4,911                       | -0,63 %               | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,528            | 4,380             | 3,38 %                |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | B25                   | <b><math>E = 28500</math></b> | 0,2              |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,855                     | 0,857                       | -0,23 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,840            | 7,847             | -0,09 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,880                     | 4,873                       | 0,14 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,528            | 4,531             | -0,07 %               |
| <b><math>q = 10</math></b> | <b><math>b = 4</math></b> | <b><math>t = 150</math></b> | B65                   | <b><math>E = 38500</math></b> |                  |                   |                       |
|                            | benade-<br>ring:          | ESA Prima<br>Win:           | relatief<br>verschil: |                               | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]                   | 0,633                     | 0,635                       | -0,31 %               | $m_{yy}$ [kNm/m]              | 7,840            | 7,847             | -0,09 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m]           | 4,880                     | 4,873                       | 0,14 %                | $m_{xy}$ [kNm/m]              | 4,528            | 4,531             | -0,07 %               |

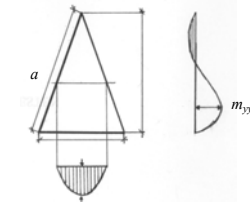
$$a/b = 3,0$$

| CALIBRATIE       |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $q = 8,0$        | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      | $\nu =$          |                   |                       |
| $k_1$            | $0,001 \times$   | <b>3,39</b>       |                       | $k_3$            | $0,001 \times$   | <b>55,4</b>       |                       |
| $k_2$            | $0,001 \times$   | <b>31,8</b>       |                       | $k_4$            | $0,001 \times$   | <b>31,1</b>       |                       |
| VERIFICATIES     |                  |                   |                       |                  |                  |                   |                       |
| $q = 8$          | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,707            | 0,708             | -0,14 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 7,091            | 7,096             | -0,07 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 4,070            | 4,070             | 0,00 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 3,981            | 3,975             | 0,15 %                |
| $q = 12$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,061            | 1,062             | -0,09 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 10,637           | 10,645            | -0,08 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 6,106            | 6,106             | 0,00 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 5,971            | 5,963             | 0,14 %                |
| $q = 10$         | $b = 3$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,280            | 0,283             | -1,06 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 4,986            | 5,011             | -0,50 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 2,862            | 2,884             | 0,76 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 2,799            | 2,715             | 3,09 %                |
| $q = 10$         | $b = 5$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,159            | 2,149             | 0,47 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 13,850           | 13,829            | 0,15 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 7,950            | 7,913             | 0,47 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 7,775            | 7,874             | -1,26 %               |
| $q = 10$         | $b = 2$          | $t = 150$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,055            | 0,058             | -5,17 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 2,216            | 2,246             | -1,34 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 1,272            | 1,301             | -2,23 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 1,244            | 1,153             | 7,89 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 100$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 2,984            | 2,958             | 0,88 %                | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,864            | 8,833             | 0,35 %                |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,088            | 5,049             | 0,77 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,976            | 5,080             | -2,05 %               |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 200$         | B45                   | $E = 33500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,373            | 0,378             | -1,32 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,864            | 8,908             | -0,49 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,088            | 5,127             | -0,76 %               | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,976            | 4,826             | 3,11 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B25                   | $E = 28500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 1,039            | 1,041             | -0,19 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,864            | 8,871             | -0,08 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,088            | 5,088             | 0,00 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,976            | 4,969             | 0,14 %                |
| $q = 10$         | $b = 4$          | $t = 150$         | B65                   | $E = 38500$      |                  |                   |                       |
|                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |                  | benade-<br>ring: | ESA Prima<br>Win: | relatief<br>verschil: |
| $w$ [mm]         | 0,769            | 0,770             | -0,13 %               | $m_{yy}$ [kNm/m] | 8,864            | 8,871             | -0,08 %               |
| $m_{xx}$ [kNm/m] | 5,088            | 5,088             | 0,00 %                | $m_{xy}$ [kNm/m] | 4,976            | 4,969             | 0,14 %                |

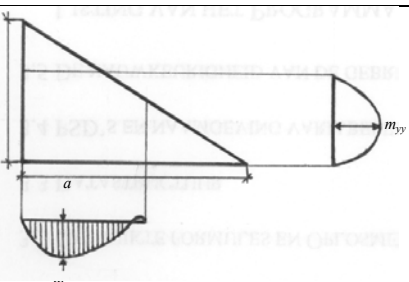
## Tabel met benaderingsformules voor driehoekige platen

|  | relatieve ligging     |                                     | benaderings-<br>formule             |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|                                                                                   | $x/a$                 | $y/h$                               |                                     |
| $w$ [mm]                                                                          | 0                     | $\frac{1}{3}$                       | $w = 0,000595 \cdot \frac{qa^4}{D}$ |
| $m_{xx}$ [kNm/m]                                                                  | 0                     | $\frac{1}{2}$                       | $m_{xx} = 0,0191 \cdot qa^2$        |
| $m_{yy}$ [kNm/m]                                                                  | 0                     | $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{7}$ | $m_{yy} = 0,0179 \cdot qa^2$        |
| $m_{xy}$ [kNm/m]                                                                  | $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ | 0                                   | $m_{xy} = 0,00841 \cdot qa^2$       |

Tabel G.1 Benaderingsformules voor de gelijkzijdige driehoek

| $a/b$                                                                                                                                                                                                                                         | 0,6    | 0,8   | 1,0    | 1,2   | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------|--------|-------|------|------|------|------|
|  $w = 0,001 \cdot \frac{qb^4}{D} \times$<br>$m_{xx} = 0,001 \cdot qb^2 \times$<br>$m_{yy} = 0,001 \cdot qb^2 \times$<br>$m_{xy} = 0,001 \cdot qb^2 \times$ | 0,0551 | 0,291 | 0,595* | 0,911 | 1,24 | 1,56 | 1,87 | 2,18 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 6,89** | 12,3  | 19,1*  | 24,8  | 30,0 | 34,7 | 38,8 | 42,6 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 6,59   | 13,5  | 17,9*  | 20,9  | 23,3 | 25,1 | 26,6 | 27,9 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 1,76   | 5,31  | 8,41*  | 11,1  | 13,6 | 15,7 | 17,6 | 19,4 |

Tabel G.2 Benaderingsformules voor de gelijkbenige driehoek

| $a/b$                                                                                                                                                                                                                                         | 1,0   | 1,2   | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  | 2,5  | 3,0  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|  $w = 0,001 \cdot \frac{qb^4}{D} \times$<br>$m_{xx} = 0,001 \cdot qb^2 \times$<br>$m_{yy} = 0,001 \cdot qb^2 \times$<br>$m_{xy} = 0,001 \cdot qb^2 \times$ | 0,676 | 0,953 | 1,24 | 1,54 | 1,83 | 2,13 | 2,79 | 3,39 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 19,7  | 22,2  | 24,2 | 25,9 | 27,3 | 28,5 | 30,5 | 31,8 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 19,7  | 24,6  | 29,2 | 33,5 | 37,5 | 41,2 | 49,0 | 55,4 |
|                                                                                                                                                                                                                                               | 14,5  | 17,1  | 19,6 | 21,6 | 23,5 | 25,0 | 28,3 | 31,1 |

Tabel G.3 Benaderingsformules voor de rechthoekige driehoek

\* Bij deze  $a/b$ -verhouding is er sprake van een gelijkzijdige driehoek. Zie ook tabel G.1.

\*\* Deze coëfficiënt geeft onbetrouwbare uitkomsten (afwijking meer dan 10 %)

## Symbolenlijst

### Latijnse letters

|           |                                                                 |
|-----------|-----------------------------------------------------------------|
| $a$       | lengte van een zijde van een driehoek [m]                       |
| $A$       | amplitude van de doorbuigingsfunctie [m]                        |
| $b$       | lengte van een zijde van een driehoek [m]                       |
| $D$       | plaatstijfheid [kNm]                                            |
| $E$       | elasticiteitsmodulus [kN/m <sup>2</sup> ]                       |
| $E_{kin}$ | kinetische energie [J]                                          |
| $E_p$     | energie van plaats [J]                                          |
| $E_{pot}$ | totale potentiële energie [J]                                   |
| $E_s$     | vormveranderingsenergie [J]                                     |
| $h$       | hoogte van een driehoek [m]                                     |
| $m_{xx}$  | buigend moment in de $x$ -richting [kNm/m]                      |
| $m_{xy}$  | wringend moment [kNm/m]                                         |
| $m_{yy}$  | buigend moment in de $y$ -richting [kNm/m]                      |
| $q$       | gelijkmatig verdeelde oppervlaktebelasting [kN/m <sup>2</sup> ] |
| $S$       | oppervlakte van een plaat [m <sup>2</sup> ]                     |
| $t$       | plaatdikte [mm]                                                 |
| $u$       | verplaatsing van de belasting [m]                               |
| $w$       | doorbuiging [mm]                                                |

### Griekse letters

|               |                                                 |
|---------------|-------------------------------------------------|
| $\varepsilon$ | rek [-]                                         |
| $\kappa_{xx}$ | kromming in de $x$ -richting [m <sup>-1</sup> ] |
| $\kappa_{yy}$ | kromming in de $y$ -richting [m <sup>-1</sup> ] |
| $\nu$         | dwarscontractiecoëfficiënt [-]                  |
| $\rho_{xy}$   | wringing [m <sup>-1</sup> ]                     |
| $\sigma$      | normaalspanning [N/mm <sup>2</sup> ]            |