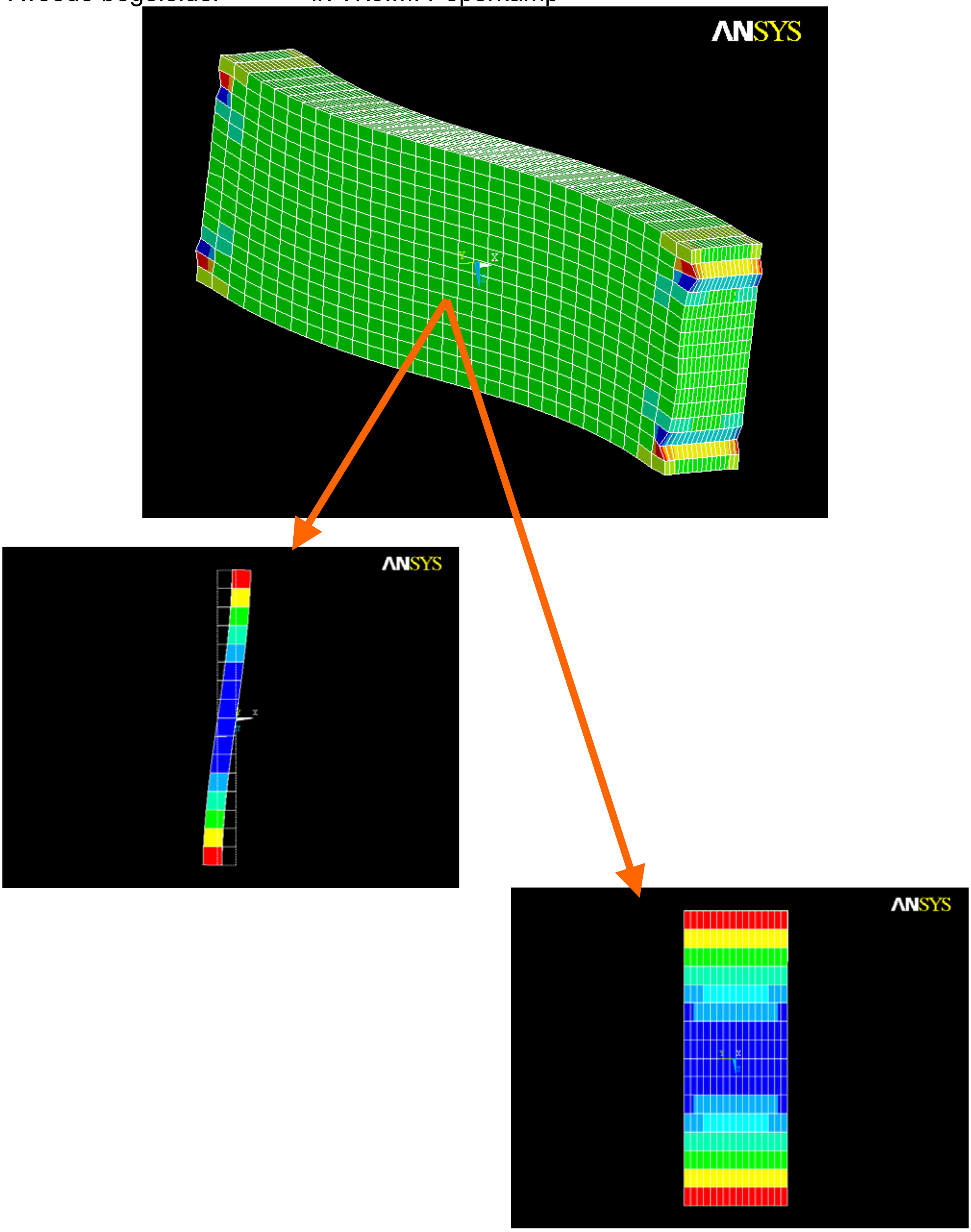
Eindrapport Bachelor-eindwerk

Juni 2003

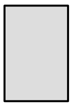
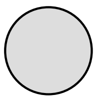
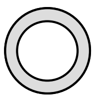
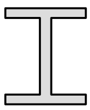
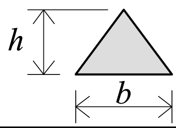
Student	J.M. van der Meer
Opdrachtnaam	Afschuifstijfheid van liggers en kolommen
Eerste begeleider	dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider	ir. W.J.M. Peperkamp



Inhoudsopgave

Inleiding

Afschuifvervorming van liggers en kolommen kan een aanzienlijke invloed hebben op de krachtsverdeling in een raamwerk en de vervorming van een raamwerk. Met name wanneer gedrongen elementen in een constructie voorkomen is dit het geval. Daarom kunnen veel raamwerkprogramma's afschuifvervorming in rekening brengen. De constructeur moet daarvoor de afschuifstijfheden van de elementen invoeren. Deze afschuifstijfheid kan worden berekend met benaderingsformules (Tabel 1). Het is vaak echter niet duidelijk hoe nauwkeurig deze benaderingsformules zijn en welke beperkingen bestaan in de toepassing.

Doorsnedevorm	Afschuifstijfheid (GA_s)	Grootste schuifspanning
	$\frac{5}{6}GA$	$\frac{3}{2}\frac{V}{A}$
	$\frac{32}{37}GA$	$\frac{4}{3}\frac{V}{A}$
	$\frac{1}{2}GA$	$2\frac{V}{A}$
	GA_{lijf}	$\frac{15}{14}\frac{V}{A_{\text{lijf}}}$
		$\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{b^2}{h^2}}\frac{V}{A}$

Tabel 1. Benaderingsformules voor verschillende liggerdoorsneden [1, 2] [1]

In dit project is met behulp van het eindige-elementenprogramma ANSYS een aantal rechthoekige prismatische liggerdelen doorgerekend. Hierbij is uitgegaan van lineair elastisch materiaalgedrag en een homogene doorsnede. Een toepassing hiervan is een voorgespannen betonnen ligger of een gewapend betonnen kolom waarvan de doorsnede ongescheurd blijft.

Van deze liggerdelen is vervolgens de afschuifstijfheid nauwkeurig berekend. Tevens is de grootste schuifspanning in de doorsnede bepaald. Deze resultaten zijn vergeleken met de uitkomsten van de benaderingsformules. Tenslotte zijn verbeteringen aan deze benaderingsformules voorgesteld.

---

[1] In de tabel is A het oppervlak van een doorsnede en V de dwarskracht. De glijdingsmodulus G wordt berekend met $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ waarin ν de dwarscontractiecoëfficiënt is.

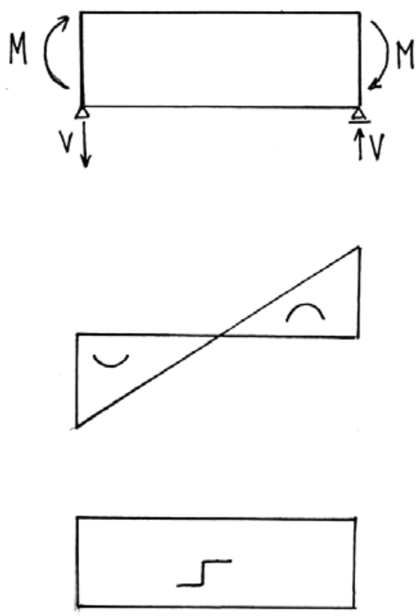
H1 Eerste modellering

1.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de eerste opzet beschreven die is gevolgd voor het oplossen van het probleem. Hiervoor is een model ontwikkeld waarmee gerekend kan worden in ANSYS. De theoretische beschrijving van dit model gebeurt in paragraaf 1.2. De daadwerkelijke invoer van het model in ANSYS is in paragraaf 1.3 te lezen. In die paragraaf wordt een keer uitvoerig het invoeren van een model in ANSYS worden doorgenomen. Verder wordt hier niet meer zo uitgebreid op ingegaan. De resultaten van de berekeningen met dit model staan in paragraaf 1.4. In deze paragraaf zullen de uitkomsten worden vergeleken met de vuistregels. Het blijkt dat het model van dit hoofdstuk niet voldoet. Daarom wordt in hoofdstuk 2 een verbeterd model gepresenteerd waarmee de gewenste berekeningen wel kunnen worden uitgevoerd.

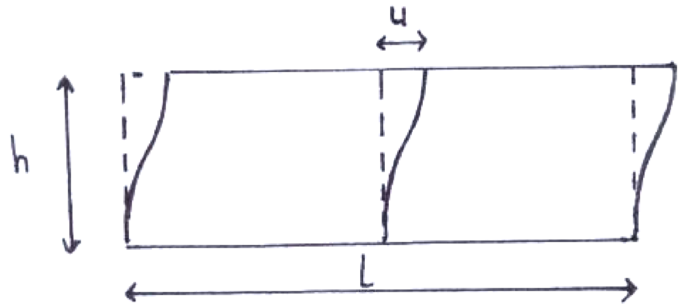
1.2 Theoretische opzet van eerste modellering

We beschouwen een liggerdeel met een rechthoekige doorsnede. Het materiaal van deze ligger is lineair-elastisch en homogeen over de doorsnede verdeeld. Voor het bepalen van de afschuifstijfheid wordt de ligger zodanig belast dat een constante dwarskracht optreedt (figuur 1). Hierdoor ontstaat een lineair verlopend buigend moment wat nul is in het midden van het liggerdeel. De afschuifvervorming wordt gemeten in het midden van de ligger waar geen buiging optreedt zodat dit de meting niet verstoort.



Figuur 1: Momentenlijn en dwarskrachtenlijn in het liggerdeel

Op beide kopvlakken wordt een moment aangebracht. De kopvlakken worden in verticale richting vast gezet zodat verticale reactiekrachten ontstaan ter grootte van de dwarskracht. De ligger wordt aan een aantal knopen vastgezet zodanig dat deze niet kan verplaatsen terwijl vervorming zo min mogelijk wordt gehinderd. De verwachte vervorming is getekend in figuur 2.



Figuur 2: Verwachte vorming van de ligger

De afschuifstijfheid kan uit de vervormingen van de ligger worden bepaald met

Afschuifhoek: $\gamma = \frac{u}{h}$

Afschuifstijfheid: $GA_{sh1} = \frac{V}{\gamma}$

Hierin is u het verschil van de verplaatsing van de bovenzijde van de middendoorsnede in de lengterichting en de verplaatsing van de onderzijde van de middendoorsnede in de lengterichting. h is de liggerhoogte en V is de dwarskracht. Vervolgens wordt deze afschuifstijfheid vergeleken met de vuistregel voor een rechthoekige doorsnede:

Afschuifstijfheid: $GA_{sh2} = \frac{5}{6} GA$ (met $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$)

Het verschil tussen de twee afschuifstijfheden wordt als volgt in procenten uitgedrukt:

$$\frac{GA_{sh1} - GA_{sh2}}{GA_{sh1}} * 100$$

1.3 Invoer van de eerste modellering

Met deze eerste modellering zijn vier liggers doorgerekend. Drie van deze liggers hebben dezelfde afmetingen (l=400, b=70, h=200) maar verschillen in de fijnheid van het elemententnet. De vierde ligger is veel langer, maar heeft wel dezelfde maten voor de doorsnede (l=4000, b=70, h=200).

De invoer en berekening gaan in ANSYS in drie stappen:
1. Preprocessing
2. Solution
3. Postprocessing

Voor de invoer van de eerste ligger in deze eerste modellering zullen deze drie stappen uitgebreid worden doorgelopen. Later zal dit minder uitgebreid gebeuren.

Ligger 1
1. Preprocessing

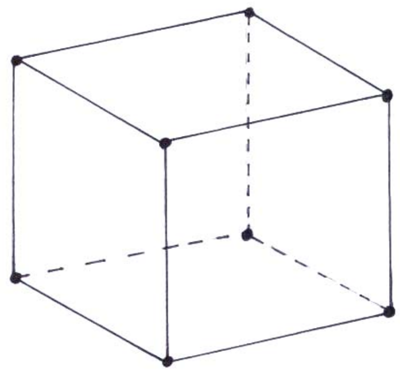
- Er wordt gekozen om een volume in te voeren met de *X*-as in de lengterichting, de *Z*-as in de richting van de hoogte en de *Y*-as in de richting van de breedte. De oorsprong van het assenstelsel wordt in het middelpunt van de ligger gekozen. Het volume heeft de volgende afmetingen:

  h = 200 mm
  b = 70 mm
  l = 400 mm

  De breedte en hoogte zijn arbitrair gekozen. Verwacht wordt dat de lengte voldoende groot is, zodat de spanningen in de middendoorsnede niet worden beïnvloed door de manier waarop de momenten op de kopvlakken worden aangebracht.
- Het materiaal van het gecreëerde volume wordt ingevoerd. Er wordt gekozen voor een isotroop en lineair-elastisch materiaal met de volgende eigenschappen:

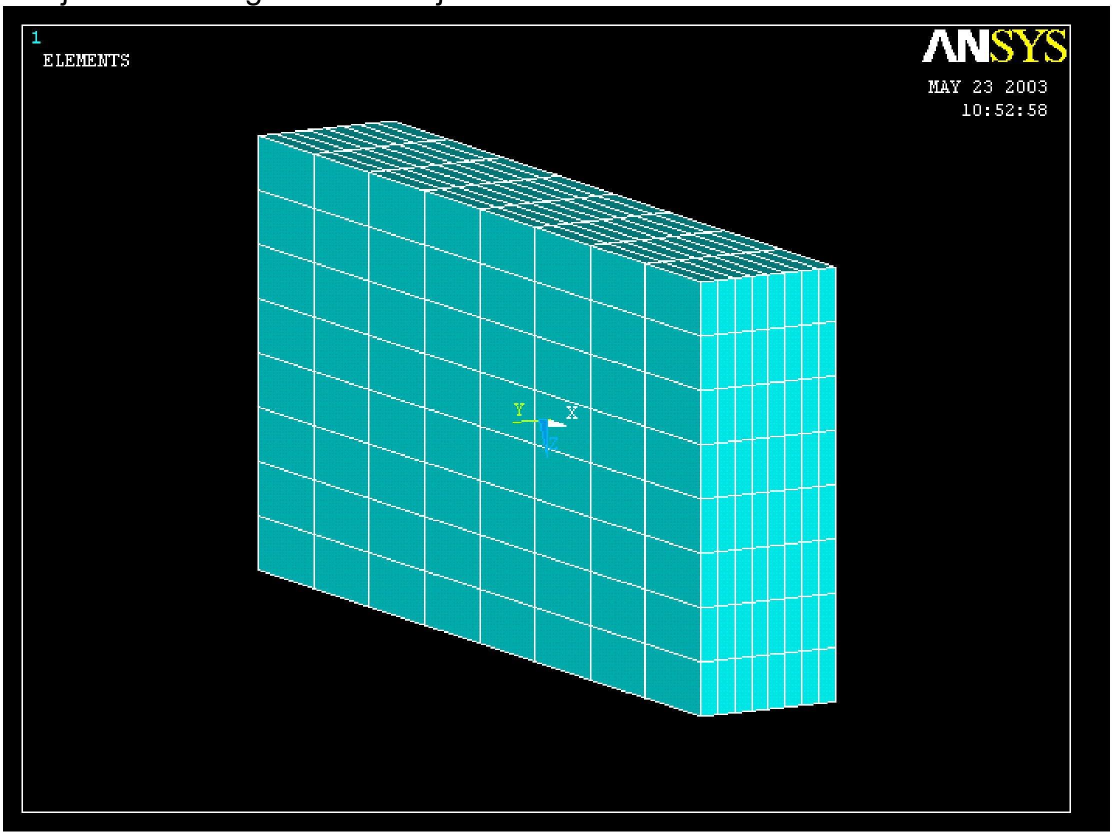
  $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2
  ν = 0.30

- In de volgende stap wordt een element geselecteerd waarmee het volume gevuld wordt in de volgende stap. Er wordt gekozen voor het element Solid45. Dit is een blokvormig element dat bestaat uit 8 knooppunten (figuur 3.).



Figuur 3: Geselecteerde element voor de berekeningen (solid45)

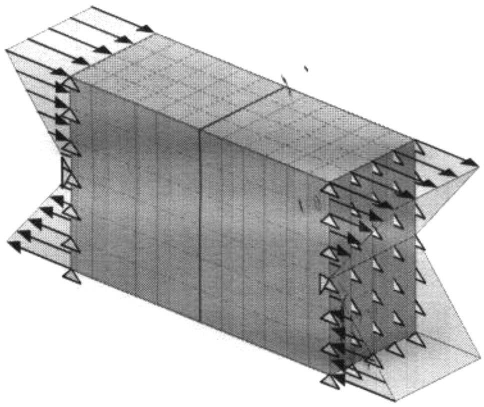
- Nu kan het volume worden gevuld met de in de vorige stap uitgekozen elementen. In principe geldt dat het opdelen in meer elementen een nauwkeuriger resultaat moet opleveren. Deze eerste keer wordt gekozen voor 8*8*8 elementen. Dat wil zeggen dat elke zijde van de ligger is verdeeld in 8 stukjes zoals in figuur 4 duidelijk is te zien.



Figuur 4: De verdeling van Ligger 1 in elementen zoals dat in ANSYS is gebeurd. Alle richtingen zijn in acht stukjes opgedeeld.

2. Solution

- De momenten worden aangebracht op de kopvlakken. Het eerste idee was om een spanning aan te brengen in de *X*-richting die lineair over het kopvlak zou verlopen (figuur 5 **).**

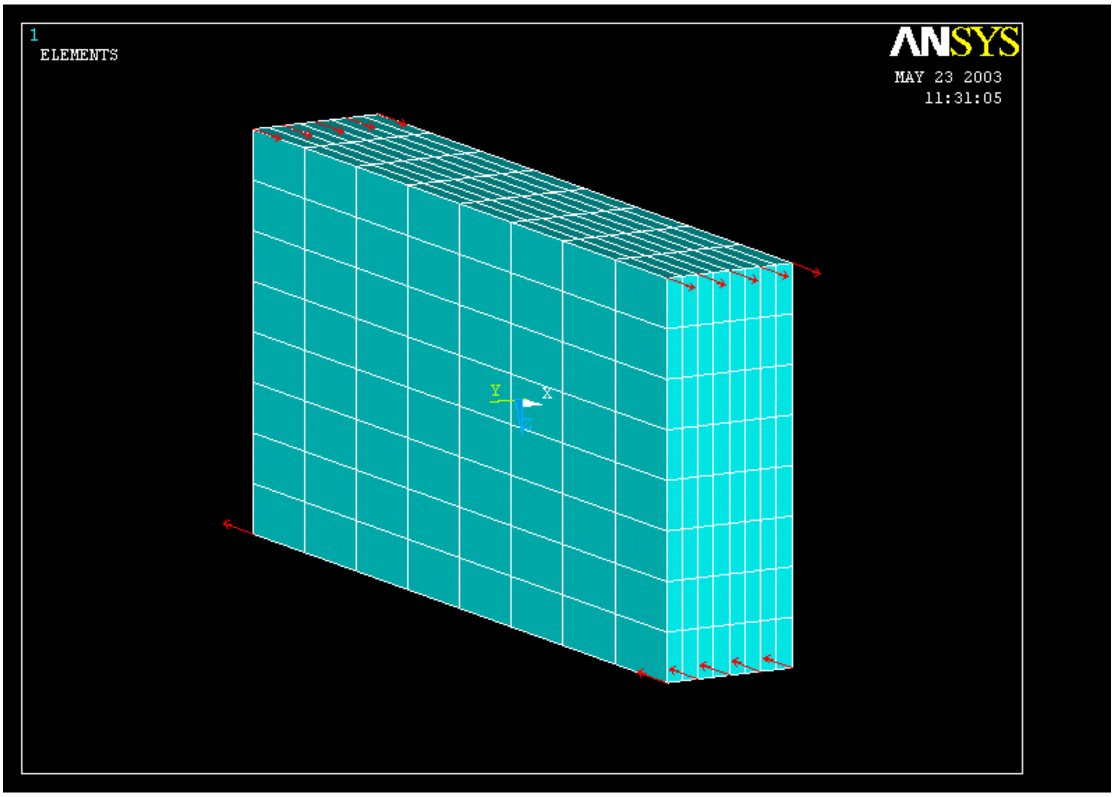


Figuur 5: Momenten op de kopvlakken aangebracht door een spanning in de *X*-richting lineair te laten verlopen.

Het invoeren van een lineair verlopende spanning op een vlak bleek echter nogal bewerkelijk te zijn in ANSYS. Daarom is besloten om op de bovenste knooppunten van de twee kopvlakken een paar puntlasten te zetten in de positieve richting met een totale waarde van 1000 N. Op de onderste knooppunten zijn een paar puntlasten in de negatieve richting gezet ook met een totale waarde van 1000 N (figuur 6**)**.

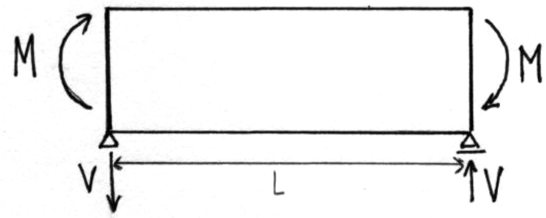
Het moment dat hierdoor op elk kopvlak ontstaat is:

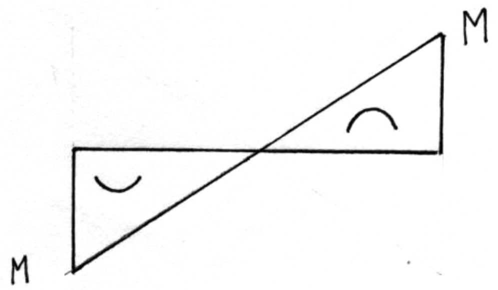
$M = 1000 {*} h = 2 {*} 10^5$ Nmm



Figuur 6: Krachten zoals die in ANSYS zijn aangebracht op de kopvlakken van Ligger1.

- De kopvlakken worden vastgelegd in de *Y*- en *Z*-richting zodat deze alleen nog maar in de *X*-richting kunnen verplaatsen. Aan de linkerkant van de ligger worden twee knooppunten aan de onderkant vastgelegd in drie richtingen. Om rotatie van de ligger te voorkomen worden aan de rechterkant twee knooppunten in de *Y*-richting vast gezet. Door de ligger zo te ondersteunen ontstaan er in de kopvlakken reactiekrachten in de *Z*-richting om de ligger in evenwicht te houden. De dwarskrachten die hierdoor ontstaan zijn:





V*l = 2M → $V = \frac{2M}{l} = \frac{4*10^5}{400} = 1000$N

- Nu de belasting en opleggingen zijn gedefinieerd wordt aan het programma de opdracht gegeven om het probleem op te lossen.

3. Postprocessing
   - De resultaten moeten eerst worden ingelezen.
   - Vervolgens kunnen de resultaten worden bekeken door deze te plotten of door lijsten met de resultaten van bijvoorbeeld alle knooppunten of alle elementen uit te draaien.

Ligger 2
De tweede ligger die in deze modellering is opgelost heeft dezelfde afmetingen als Ligger1:

h = 200 mm
b = 70 mm
l = 400 mm

Echter, deze ligger is opgedeeld in een groter aantal elementen, namelijk 16*16*16 elementen. In elke richting van de ligger is Ligger2 dus in twee keer zoveel elementen verdeeld als Ligger1. Op de kopvlakken zijn dezelfde krachten aangebracht als bij Ligger1:

$M = 2*10^5$ Nmm
V = 1000 N

Ligger 3
De derde ligger in deze modellering heeft weer dezelfde afmetingen als Ligger1 en Ligger2:

h = 200 mm
b = 70 mm
l = 400 mm

Deze ligger bestaat uit twee keer zoveel elementen als Ligger2, want de ligger is in de lengte opgedeeld in 32 elementen in plaats van 16. Het totale aantal elementen waaruit deze ligger is opgebouwd wordt dan 32*16*16. De krachten op de kopvlakken zijn wel weer hetzelfde als bij Ligger1 en Ligger2:

$M = 2*10^5$ Nmm
V = 1000 N

Ligger 4
De vierde ligger in deze modellering is tien keer zo lang gekozen als de vorige drie liggers, de afmetingen worden dan:

h = 200mm
b = 70mm
l = 4000mm

Deze ligger is veel langer dan de voorgaande liggers om te kijken of de krachten die op de kopvlakken zijn gezet tot ongewenste spanningen in de middendoorsnede leiden. De elementenverdeling van deze ligger is wat grover dan de vorige drie liggers omdat anders de ligger uit teveel elementen zou bestaan. In de lengterichting is de ligger verdeeld in 32 elementen en in de andere twee richtingen is de ligger in 8 elementen verdeeld, dus: 32*8*8.
Er wordt op de kopvlakken van deze ligger hetzelfde moment gezet als bij de vorige drie liggers maar omdat de ligger veel langer is word de dwarskracht kleiner:
$M = 2*10^5$ Nmm
V = 100 N

1.4 Resultaten van de eerste modellering

Voor alle vier liggers geldt dezelfde afschuifstijfheid, omdat alle vier liggers dezelfde doorsnede afmetingen hebben en van hetzelfde materiaal zijn gemaakt. Uit de vuistregel voor deze doorsnede volgt de volgende afschuifstijfheid:

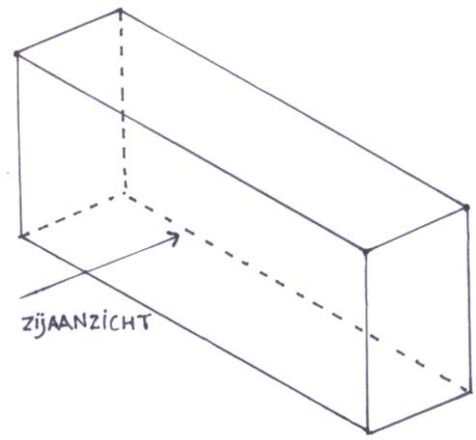
$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} GA$$

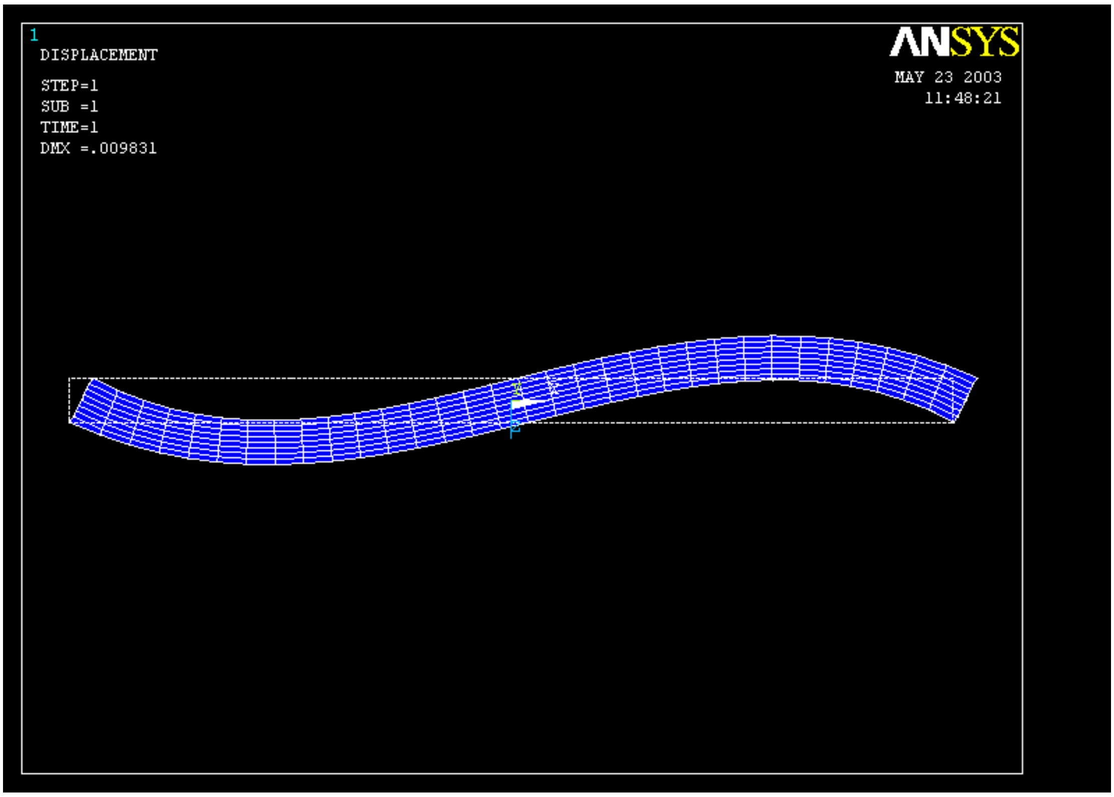
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad G = 2.1*10^5 \text{ en } \nu = 0.30$$

$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} \frac{2.1*10^5}{2(1+0.30)} (200*70)$$

$$GA_{sh2} = 0.9423076925*10^9$$

In figuur 7 Is te zien hoe de lange ligger vervormt ten gevolge van de momenten en de dwarskrachten die op de ligger werken.





Figuur 7: De vervormingen van Ligger 4 ten gevolge van de aangebrachte krachten gezien in een zijaanzicht van de ligger.

In paragraaf 1.2 werd de verwachte vervorming van de ligger beschreven. In het midden van de ligger zou dan een vloeiende S-vorm moeten ontstaan. Deze vervorming werd echter bij geen van de ingevoerde liggers duidelijk waargenomen. De bepaling van de afschuifhoek met

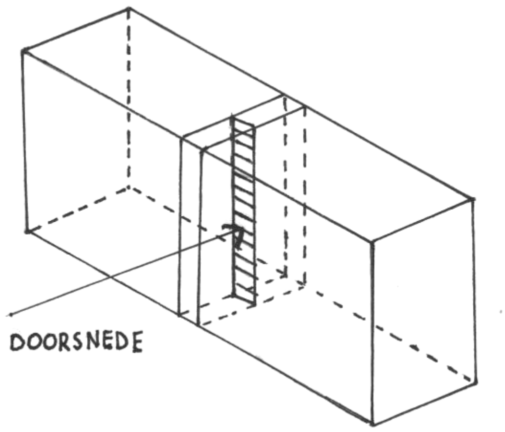
$$\gamma = \frac{u}{h}$$

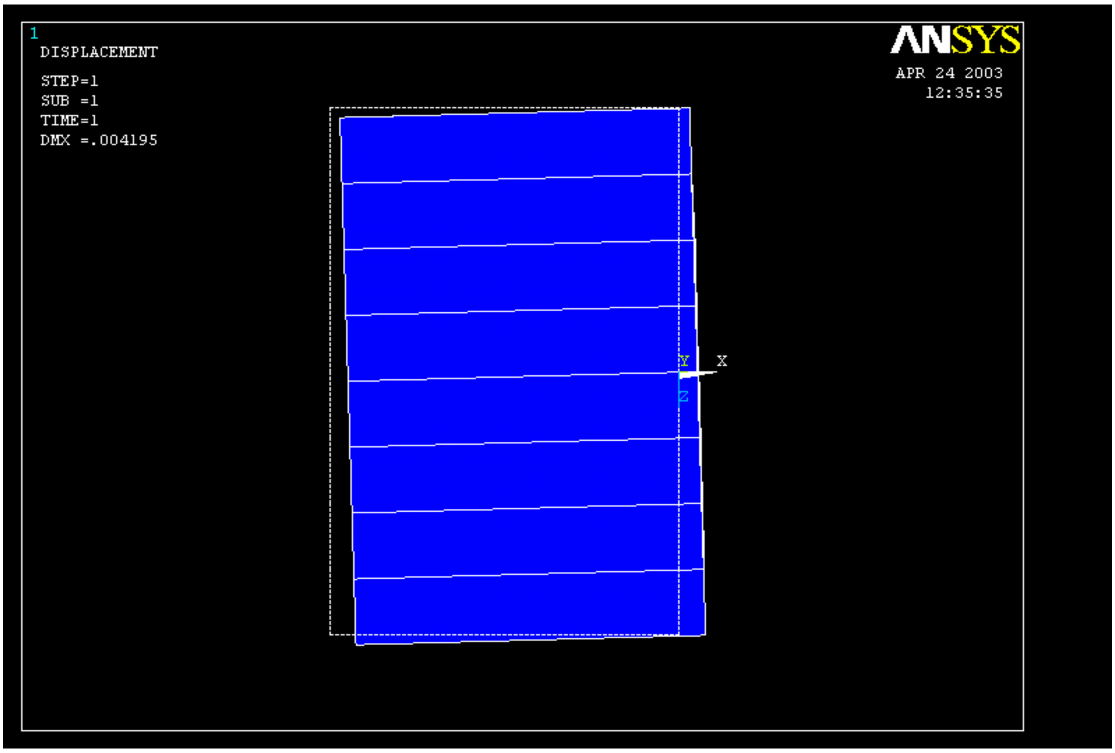
leidde dan ook bij geen enkele ligger tot resultaten die in de buurt kwamen van de afschuifstijfheid die uit de vuistregel komt.

In de onderstaande tabel staat de vergelijking van de resultaten van ANSYS met de afschuifstijfheid van de vuistregel:

Ligger:	**Afschuifstijfheid via ANSYS:**	**Verschil met vuistregel GA_{sh}=5/6GA:**
Ligger1	$0.6882312457 * 10^{10}$	86.31 %
Ligger2	$0.1269035533 * 10^{11}$	92.57 %
Ligger3	$0.1492537313 * 10^{11}$	93.69 %
Ligger4	$0.7142857143 * 10^{11}$	98.68 %

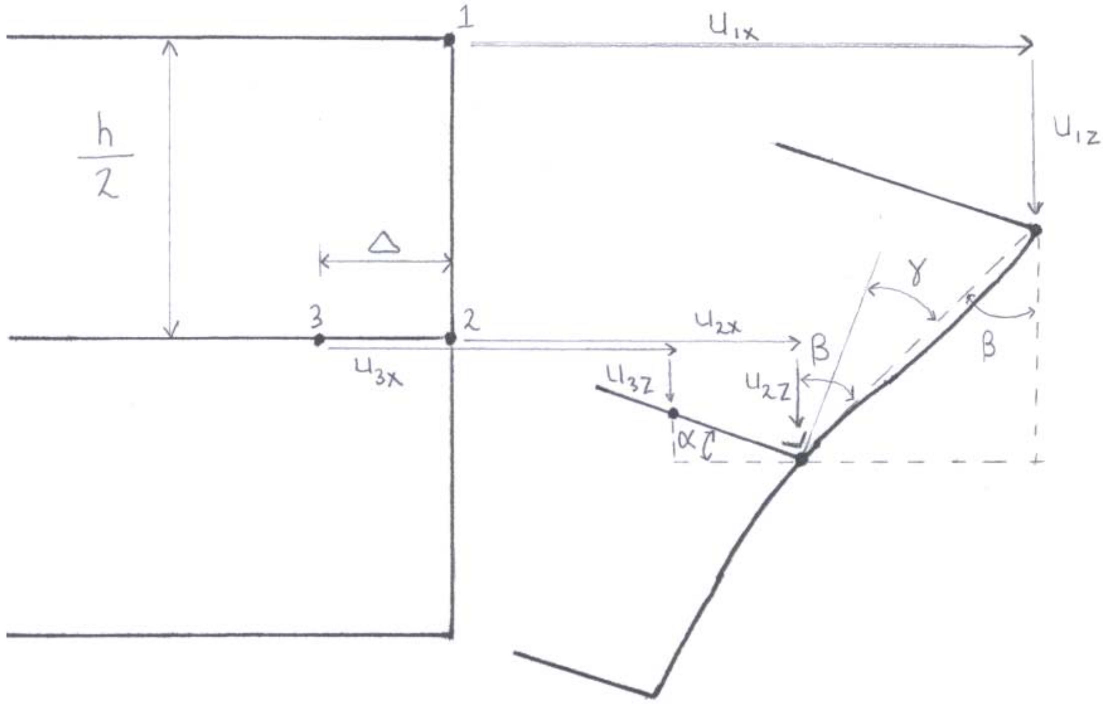
Zoals is te zien in de tabel zijn de verschillen met de vuistregel erg groot en nemen de verschillen zelfs toe bij een fijnere elementenverdeling. Bij nadere beschouwing van de vervorming bleek dat de middendoorsnede niet alleen afschuift maar dat er ook sprake is van rotatie en translatie (figuur 8).





Figuur 8: Vervorming en verplaatsing van een plak van de ligger. We kijken naar de doorsnede van een plak uit het midden van de ligger zoals dat in het overzichtplaatje is aangegeven.

Dit was aanleiding om de afschuifhoek van de ligger op een andere manier te berekenen. Door een verplaatsing en verdraaiing van de middendoorsnede aan te nemen kon hieruit de afschuifhoek en de rotatiehoek gescheiden worden (figuur 9).



Figuur 9: Berekening van de afschuiving van de middendoorsnede

Uit de verplaatsingen van de punten 1,2 en 3 kan de afschuifhoek γ als volgt worden bepaald:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{u_{2z} - u_{3z}}{\Delta + u_{2x} - u_{3x}}$$

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{u_{1x} - u_{2x}}{\frac{h}{2} + u_{2z} - u_{1z}}$$

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2} + \beta$$

$$\gamma = \beta - \alpha$$

In Maple is een klein programmaatje gemaakt. Hiermee worden de afschuifhoek en de afschuifstijfheid berekend uit de knoopverplaatsingen die met ANSYS worden berekend. De resultaten van de vier liggers in vergelijking met de afschuifstijfheid van de vuistregel (GA_{sh2}) is te vinden in de onderstaande tabel. Het Maple-programma en een invoervoorbeeld is te vinden in bijlage 1.

Ligger:	Afschuifstijfheid via ANSYS:	Verschil met vuistregel GA_{sh}=5/6GA:	Verschil met vuistregel GA_{sh}=GA:
Ligger1	$0.1133786848*10^{10}$	16.89 %	0.27 %
Ligger2	$0.1081081081*10^{10}$	12.84 %	4.60 %
Ligger3	$0.1086956522*10^{10}$	13.31 %	4.03 %
Ligger4	$0.1408450704*10^{10}$	33.10 %	19.72 %

De nieuwe berekeningen liggen al dichter in de buurt van de vuistregel dan de vorige berekeningen. Opvallend is echter dat de waarden nog veel dichter bij de vuistregel zonder de reductiecoëfficiënt van 5/6 liggen.

Hoewel de resultaten in de buurt komen van de afschuifstijfheid die uit de vuistregel wordt berekend zijn de resultaten nog niet echt bevredigend:

1. De vervorming van de ligger lijkt nog steeds niet op de vervorming zoals die van tevoren werd verwacht, namelijk met een vloeiende S-vorm in het midden van de doorsnede.
2. De berekende afschuifstijfheid van Ligger2 is kleiner dan die van Ligger1 en wijkt ook minder af van de vuistregel. Dit kan kloppen omdat Ligger2 met een fijnere elementennet is doorgerekend. Ligger3 daarentegen heeft weer een grotere afschuifstijfheid dan Ligger2 en wijkt daarmee ook weer meer af van de vuistregel. Dit is vreemd omdat hier nog weer een fijner net is gebruikt dan bij Ligger2.
3. De berekende afschuifstijfheid van Ligger4 is veel groter dan de afschuifstijfheid van de andere drie liggers en wijkt ook veel meer af van de vuistregel. Hieruit blijkt dat er waarschijnlijk een fout in de modellering zit. De afschuifstijfheid van de langere ligger moet namelijk eigenlijk hetzelfde zijn als van de andere liggers omdat de afmetingen van de doorsnede hetzelfde zijn.

Omdat deze eerste opzet om het probleem te modelleren niet tot voldoende bevredigende resultaten heeft geleid is besloten om een tweede opzet te maken welke in het volgende hoofdstuk zal worden uitgewerkt.

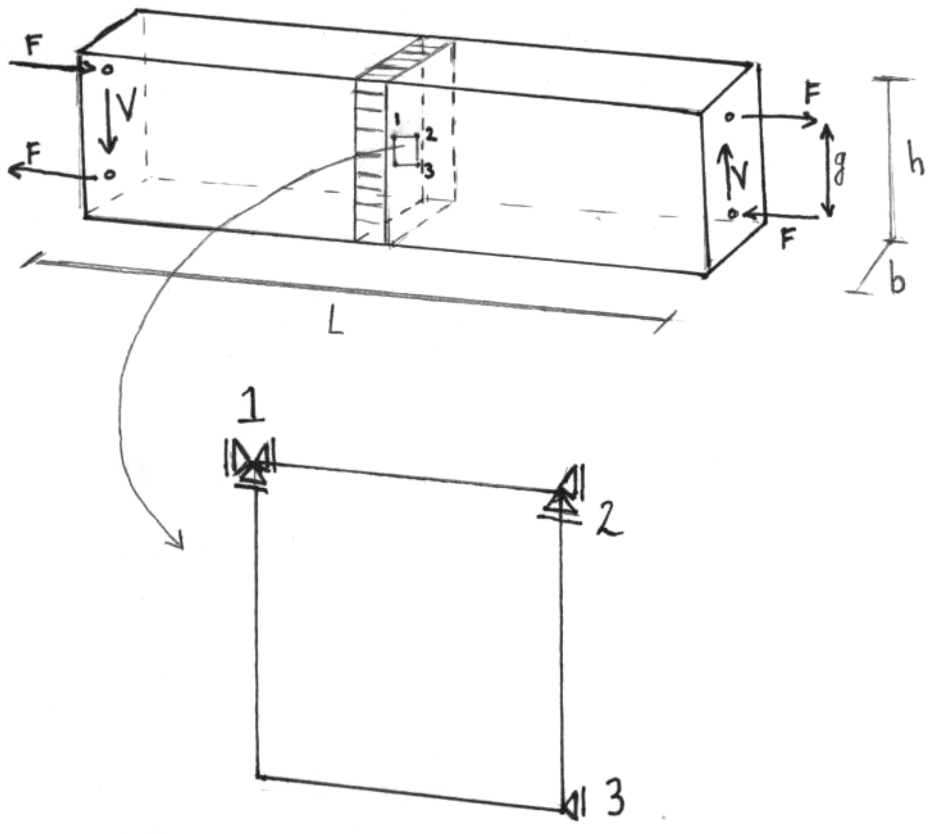
H2 Tweede modellering

2.1 Inleiding

Omdat het model dat in het vorige hoofdstuk is beschreven niet tot bevredigende resultaten heeft geleid is een tweede model bedacht. De theoretische beschrijving van dit model gebeurt in paragraaf 2.2. De invoering in ANSYS van dit model staat in paragraaf 2.3 beschreven. De uitkomsten van de berekeningen en de vergelijkingen met de vuistregels is in paragraaf 2.4 te vinden. In het volgende hoofdstuk zal worden gekeken naar de invloed van variaties op deze modellering.

2.2 Theoretische opzet van tweede modellering

In de eerste modellering was te zien dat in de middendoorsnede niet alleen afschuiving plaatsvindt maar dat deze ook roteert en transleert. De verplaatsingen overheersen de afschuiving zodat de afschuiving niet meer zichtbaar is. Om rotatie en translatie van de middendoorsnede te voorkomen is het volgende model bedacht. De ligger wordt vastgelegd aan knopen in het midden van de ligger (figuur 10). Er worden hier zes vrijheidsgraden vastgezet zodanig dat de ligger statisch bepaald is opgelegd.



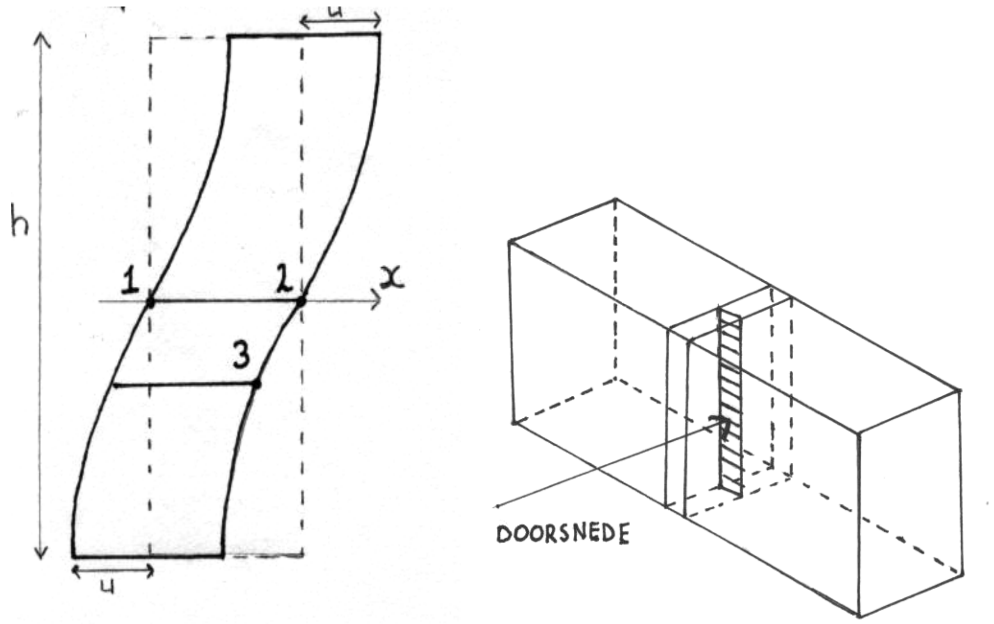
Figuur 10: Verhinderde verplaatsingen in het midden van het liggerdeel

De momenten die in de eerste modellering op de kopvlakken stonden blijven nu ook aanwezig. De verticale reactiekrachten die in de eerste modellering ontstonden om de ligger in evenwicht te houden worden nu zelf aangebracht. Voor deze krachten geldt:

$$V = \frac{2M}{l} = \frac{2Fg}{l}$$

met $g = \frac{6}{8}h$ (arm van het koppel)

De opgelegde dwarskrachten en momenten zijn precies in evenwicht zodat geen oplegreacties ontstaan in de vastgelegde knopen.
De berekening van de afschuifhoek en de afschuifstijfheid zijn bijna hetzelfde als in het begin van de eerste modellering werd beschreven (figuur 11).



Figuur 11: Verwachte vervorming van de middendoorsnede (in zijaanzicht), hierin zijn nog een keer de drie punten uit de modellering aangegeven

De afschuifstijfheid kan dan uit de vervormingen van de ligger worden bepaald via:

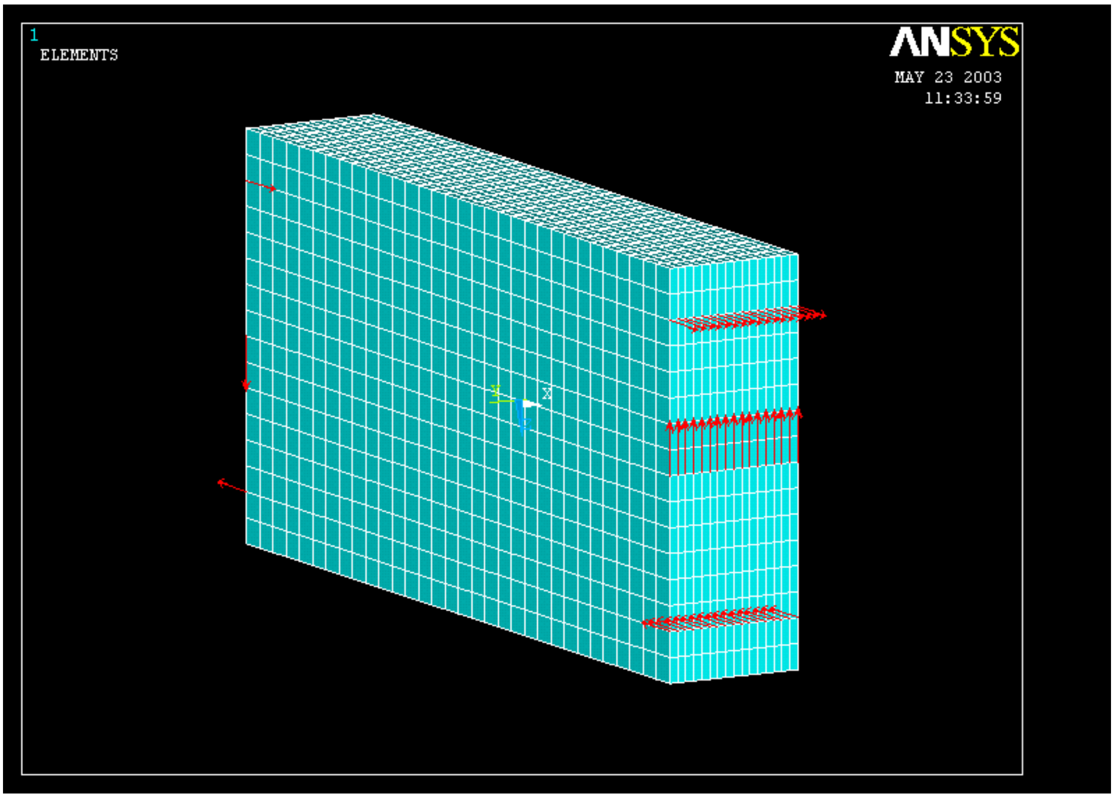
Afschuifhoek: $\gamma = \frac{2u}{h}$

Afschuifstijfheid: $GA_{sh1} = \frac{V}{\gamma}$

De vuistregel voor de afschuifstijfheid en het verschil tussen de berekende afschuifstijfheid en de vuistregel blijven vanzelfsprekend hetzelfde als in de eerste modellering.

2.3 Invoer van de tweede modellering

In deze tweede modellering zijn in totaal zes liggers doorgerekend, hieronder worden de liggers benoemd en de verschillen tussen de liggers aangegeven. Per verschillende soort ligger is een overzichtsplaatje uit ANSYS bijgevoegd met de elementenverdeling en de aangebrachte krachten .



Figuur 12: Overzichtsplaatje van Ligger32 met op de kopvlakken de aangebrachte krachten.

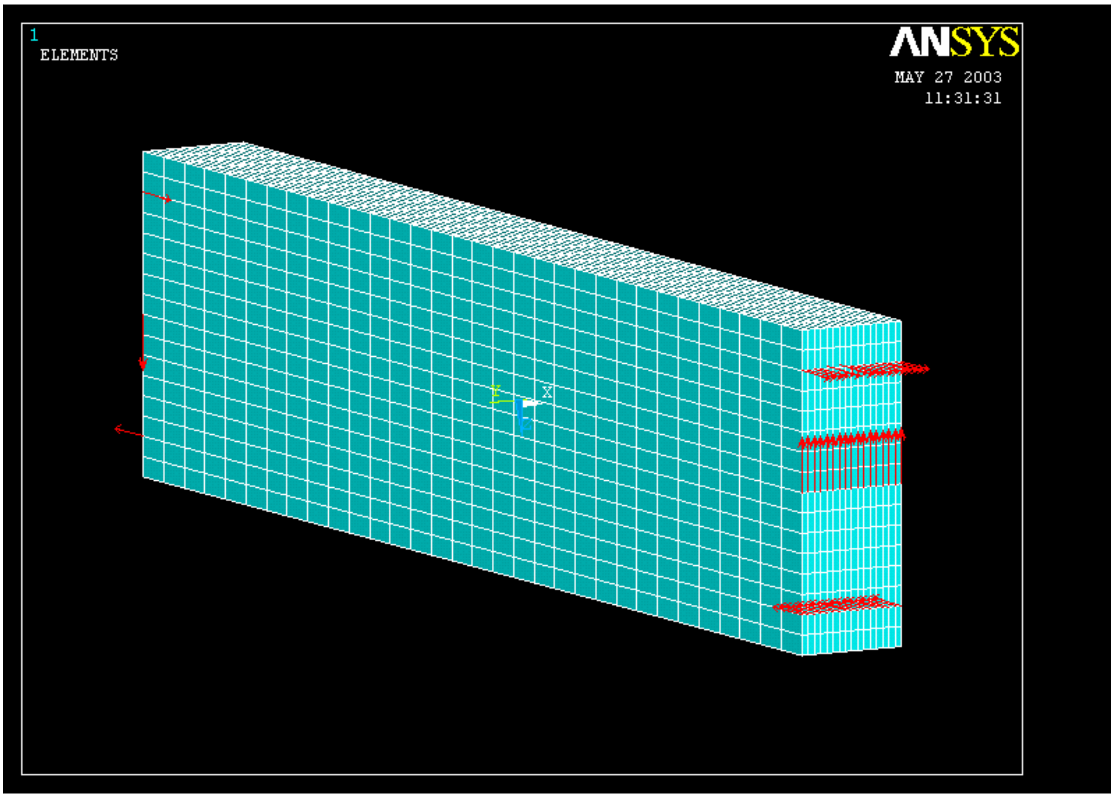
Ligger8

Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 200 mm
b = 70 mm
l = 400 mm
De ligger is verdeeld in 8*8*8 elementen.
Het moment dat op de kopvlakken staat is
$M = 1.35*10^5$ Nmm.
De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is
V= 675 N.

Ligger16

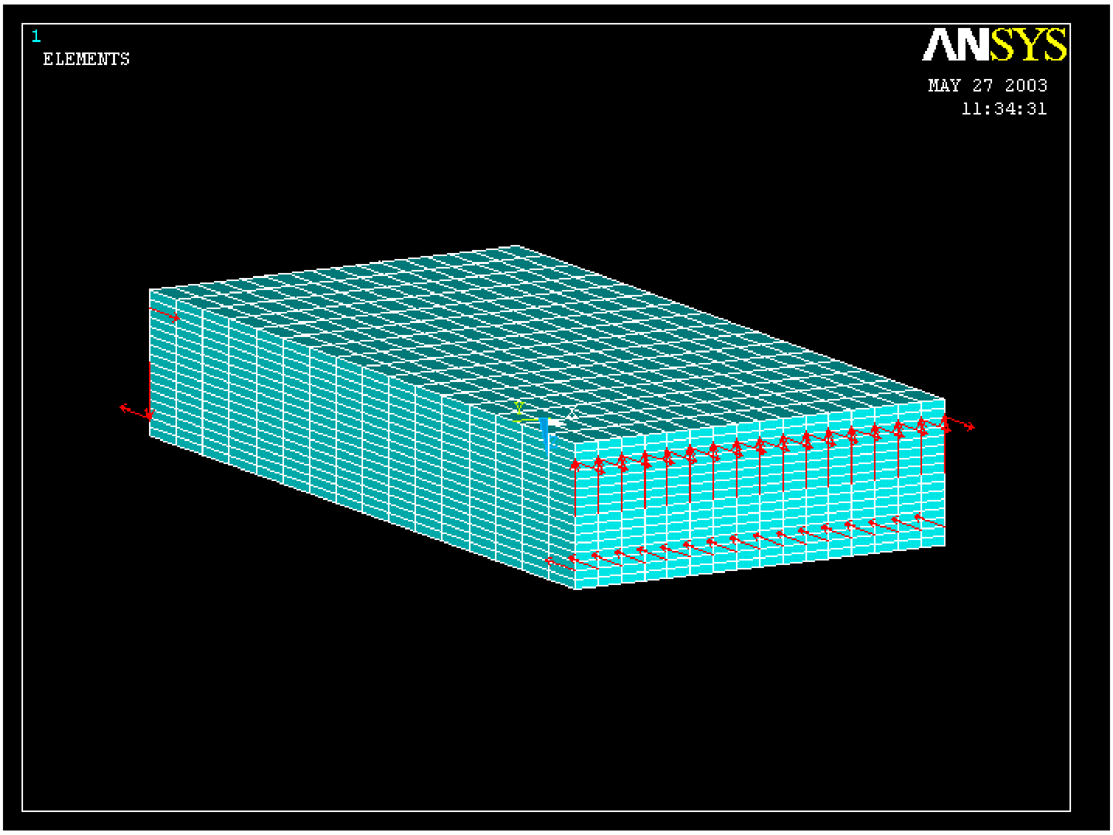
Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 200 mm
b = 70 mm
l = 400 mm
De ligger is verdeeld in 16*16*16 elementen.
Het moment dat op de kopvlakken staat is
$M = 2.55*10^5$ Nmm.
De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is V = 1275 N.

Ligger32 Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 200 mm
b = 70 mm
l = 400 mm
De ligger is verdeeld in 32*16*16 elementen. In de lengterichting is deze ligger dus in twee keer zoveel elementen verdeeld als Ligger16.
Het moment dat op de kopvlakken staat is
$M = 2.55*10^5$ Nmm.
De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is
V= 1275 N.



Figuur 13: Overzichtsplaatje van LiggerLang met op de kopvlakken de aangebrachte krachten.

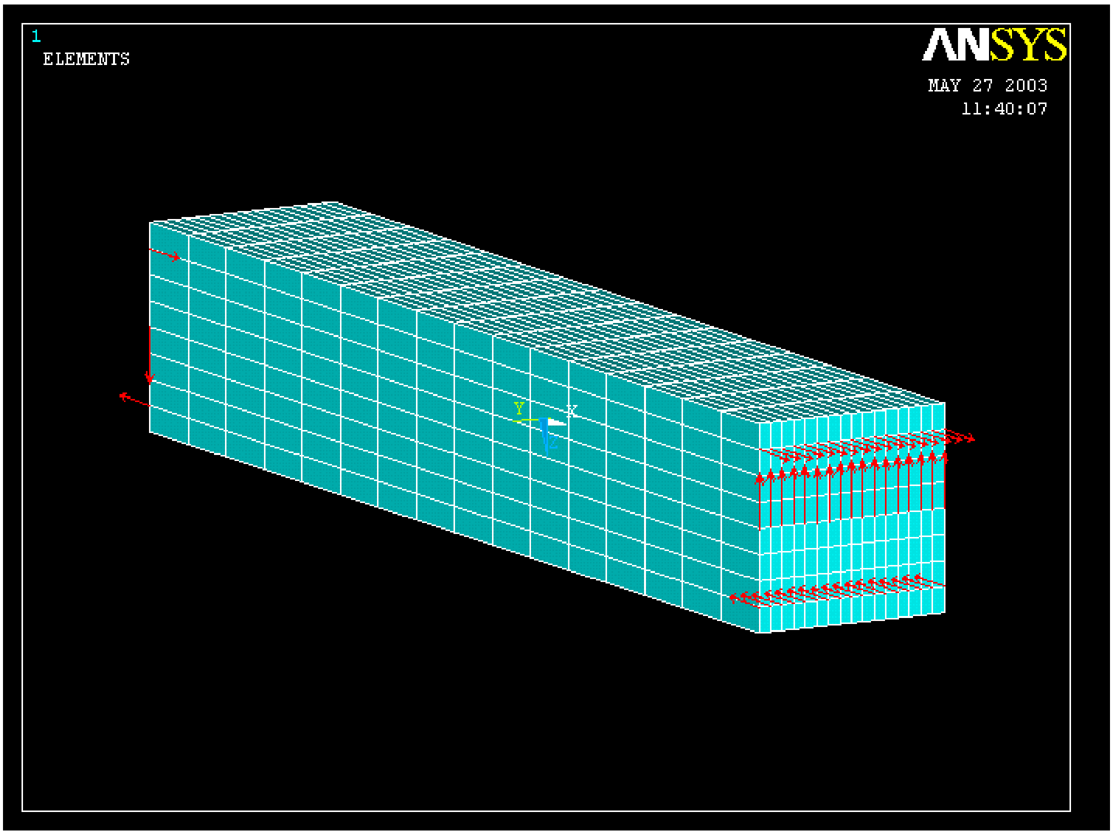
LiggerLang Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 200 mm
b = 70 mm
l = 800 mm
De ligger is verdeeld in 32*16*16 elementen. De ligger is twee keer zo lang als Ligger16 en is in de lengterichting ook in twee keer zoveel elementen opgedeeld
Het moment dat op de kopvlakken staat is $M = 2.55*10^5$ Nmm. De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is V = 637.5 N.



Figuur 14: Overzichtsplaatje van LiggerBreed met op de kopvlakken de aangebrachte krachten.

LiggerBreed

Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 70 mm
b = 200 mm
l = 400 mm
De ligger is verdeeld in 16*16*16 elementen. Dit is dus eigenlijk dezelfde ligger als Ligger16, alleen dan op zijn kant gelegd.
Het moment dat op de kopvlakken staat is
M = 8.925*10^4 Nmm.
De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is V = 446.25 N.



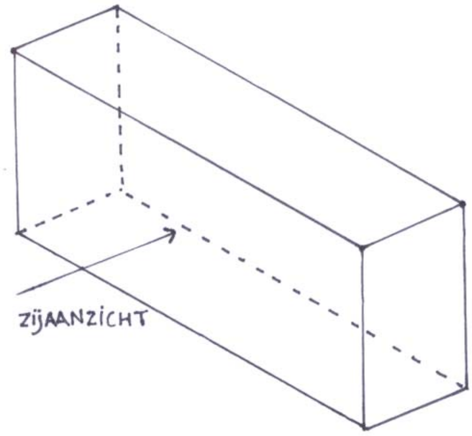
Figuur 15: Overzichtsplaatje van LiggerVierkant met op de kopvlakken de aangebrachte krachten.

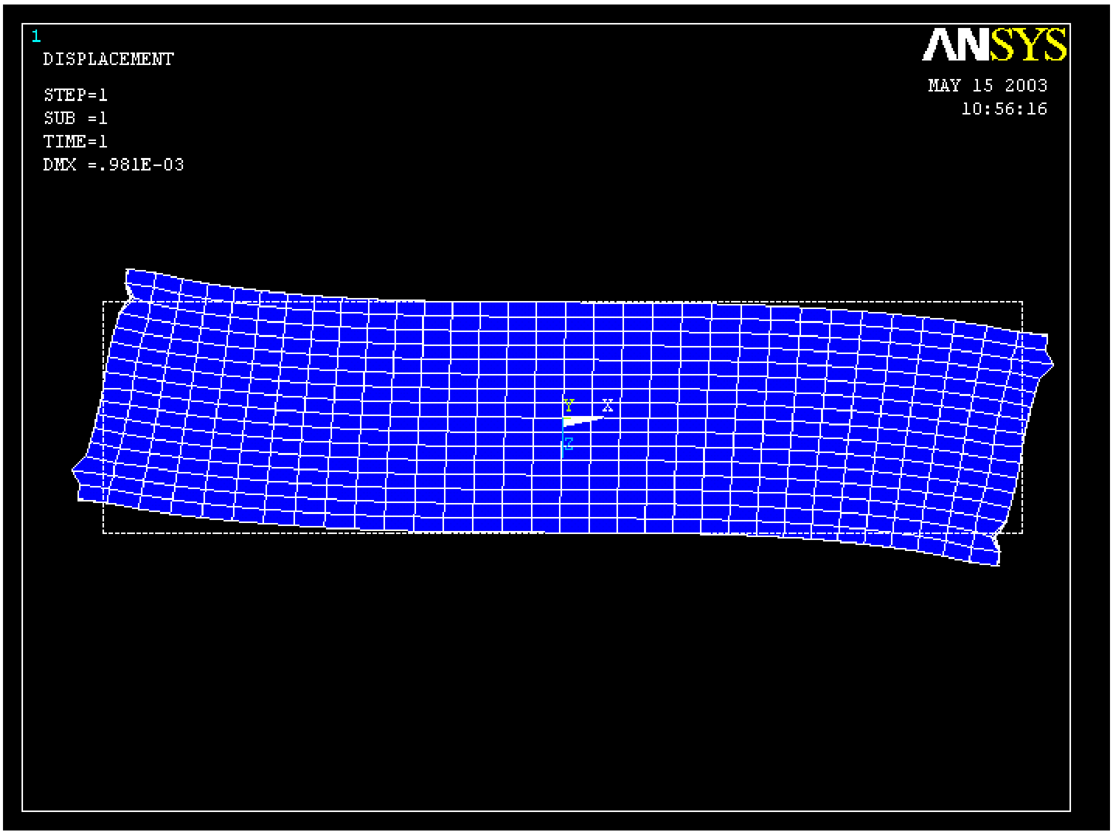
LiggerVierkant

Deze ligger heeft de volgende afmetingen:
h = 70 mm
b = 70 mm
l = 400 mm
De ligger is verdeeld in 16*16*8 elementen. In de hoogte is de ligger maar in 8 elementen opgedeeld.
Het moment dat op de kopvlakken staat is
$M = 8.925 \cdot 10^4$ Nmm.
De dwarskracht die op de kopvlakken is aangebracht is V = 446.25 N.

2.4 Resultaten van de tweede modellering

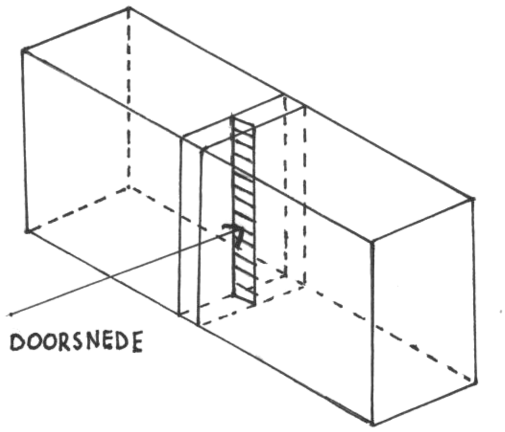
De totale vervorming van de ligger is zoals in figuur 16 is aangegeven

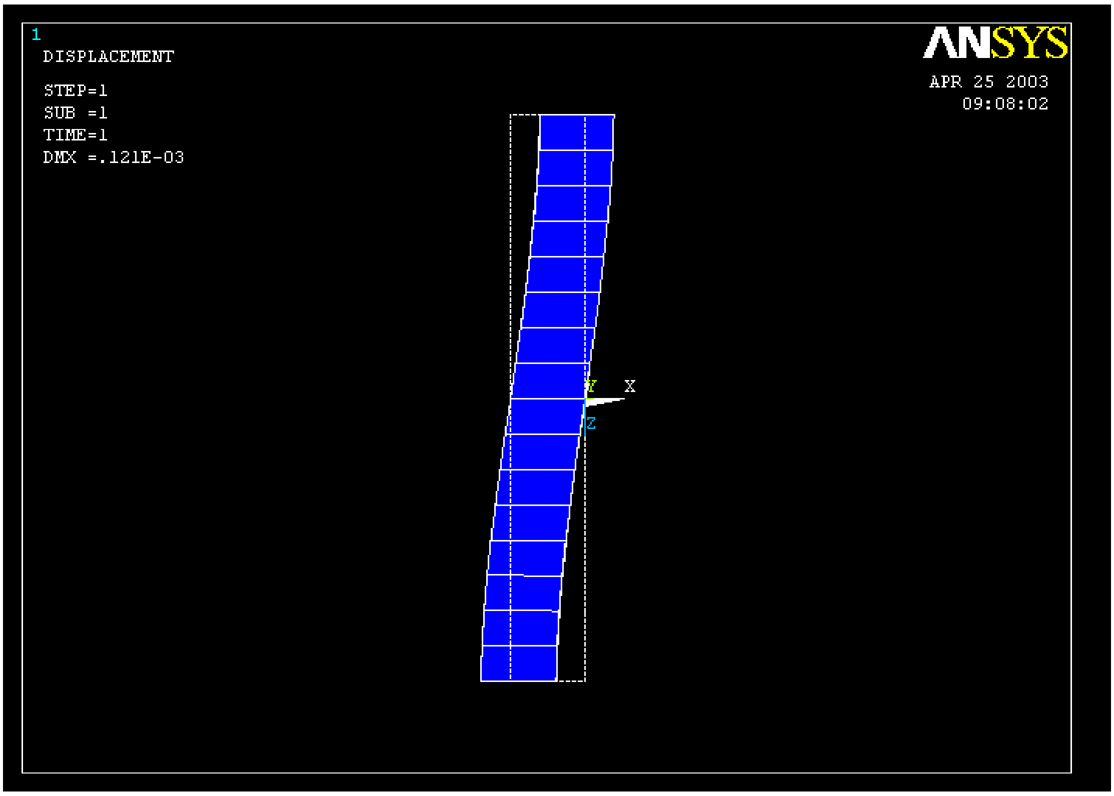




Figuur 16: De totale vervorming van Ligger32 ten gevolge van de aangebrachte krachten, gezien in het zijaanzicht zoals is aangegeven in het overzichtsplaatje.

De verwachte vervormingen zoals die in paragraaf 2.2 werden aangenomen werden nu duidelijk waargenomen in het midden van de liggers. Alleen bij de Liggerbreed was er niet zo een mooie S-vorm waar te nemen als bij de andere liggers. Een voorbeeld van de waargenomen vervormingen ten gevolge van afschuiving is te zien in figuur 17.





Figuur 17: Vervorming van Ligger16 in het midden van de ligger ten gevolge van afschuiving. De plak komt uit het midden van de ligger en is te zien in een zijaanzicht zoals is aangegeven in het overzichtsplaatje.

Zoals in figuur 17 is te zien komt de aangenomen vervorming mooi overeen met de uitkomsten van ANSYS. De berekening van de afschuifstijfheid uit de vervormingen zoals die in paragraaf 2.2 is aangenomen kan dus ook op de resultaten worden toegepast.

Voor de vergelijking van deze berekende afschuifstijfheid met de afschuifstijfheid uit de vuistregel (GA_{sh2}) kan dezelfde GA_{sh2} als in de eerste modellering worden gebruikt:

$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} GA$$
$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} \frac{2.1*10^5}{2(1+0.30)} (200*70)$$
$$GA_{sh2} = 0.9423076925*10^9$$

Alleen de LiggerVierkant heeft een andere doorsnede dan de andere vijf liggers. Voor de afschuifstijfheid van deze ligger geldt:

$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} GA$$
$$GA_{sh2} = \frac{5}{6} \frac{2.1*10^5}{2(1+0.30)} (70*70)$$
$$GA_{sh2} = 0.3298076923*10^9$$

De berekening van de afschuifstijfheid uit de resultaten van ANSYS is, met behulp van Maple, uitgevoerd zoals in paragraaf 2.2 is beschreven. Een voorbeeld van de berekening in Maple is te vinden in Bijlage 2. In de onderstaande tabel zijn de resultaten van deze berekeningen te vinden en staan ook de verschillen met de vuistregels aangegeven.

Ligger:	**Afschuifstijfheid via ANSYS:**	**Verschil met vuistregel GA_{sh}=5/6GA:**	**Verschil met vuistregel GA_{sh}=GA:**
Ligger8	$0.1166528411*10^{10}$	19.22 %	3.08 %
Ligger16	$0.1106578719*10^{10}$	14.84 %	-2.19 %
Ligger32	$0.1092919595*10^{10}$	13.78 %	-3.46 %
LiggerLang	$0.1100466080*10^{10}$	14.37 %	-2.75 %
LiggerBreed	$0.1362535985*10^{10}$	30.84 %	17.01 %
LiggerVierkant	$0.4753553276*10^{9}$	30.62 %	16.74 %

Dat het model nu beter klopt blijkt al uit de vervormingen die duidelijk bij afschuiving horen, maar ook uit de resultaten. Uit de resultaten is het volgende op te merken:

1. Uit de resultaten van Ligger8, Ligger16 en Ligger32 blijkt dat bij verfijning van de mesh de afschuifstijfheid daalt. Bij verdere verfijning is deze daling duidelijk kleiner en de waarde van de afschuifstijfheid lijkt dus naar een limiet toe te lopen.

2. tussen de twee waarden kan komen doordat het een model blijft dat is opgedeeld in elementen.
3. Het verschil van de afschuifstijfheid met de waarden van de vuistregel is bij alle liggers nog vrij groot. Voor alle liggers ligt deze waarde dichter in de buurt van de vuistregel zonder reductiefactor van 5/6. Voor de hoge liggers komt dit zelfs vrij goed overeen. Voor LiggerBreed en LiggerVierkant klopt dit ook niet goed. Opvallend is dat bij deze twee liggers de waarde weer heel goed overeenkomt met GA_{sh4}=6/5GA:

LiggerBreed:

$$GA_{sh1} = 0.1362535985*10^{10}$$

$$GA_{sh4} = \frac{6}{5} GA$$

$$GA_{sh4} = \frac{6}{5} \frac{2.1*10^5}{2(1+0.30)} (200*70)$$

$$GA_{sh4} = 0.1356923076*10^{10}$$

Verschil: $\frac{GA_{sh1} - GA_{sh4}}{GA_{sh1}} *100$

= 0.41 %

LiggerVierkant:

$$GA_{sh1} = 0.4753553276*10^{9}$$

$$GA_{sh4} = \frac{6}{5} GA$$

$$GA_{sh4} = \frac{6}{5} \frac{2.1*10^5}{2(1+0.30)} (70*70)$$

$$GA_{sh4} = 0.4749230770*10^{9}$$

Verschil: $\frac{GA_{sh1} - GA_{sh4}}{GA_{sh1}} *100$

= 0.09 %

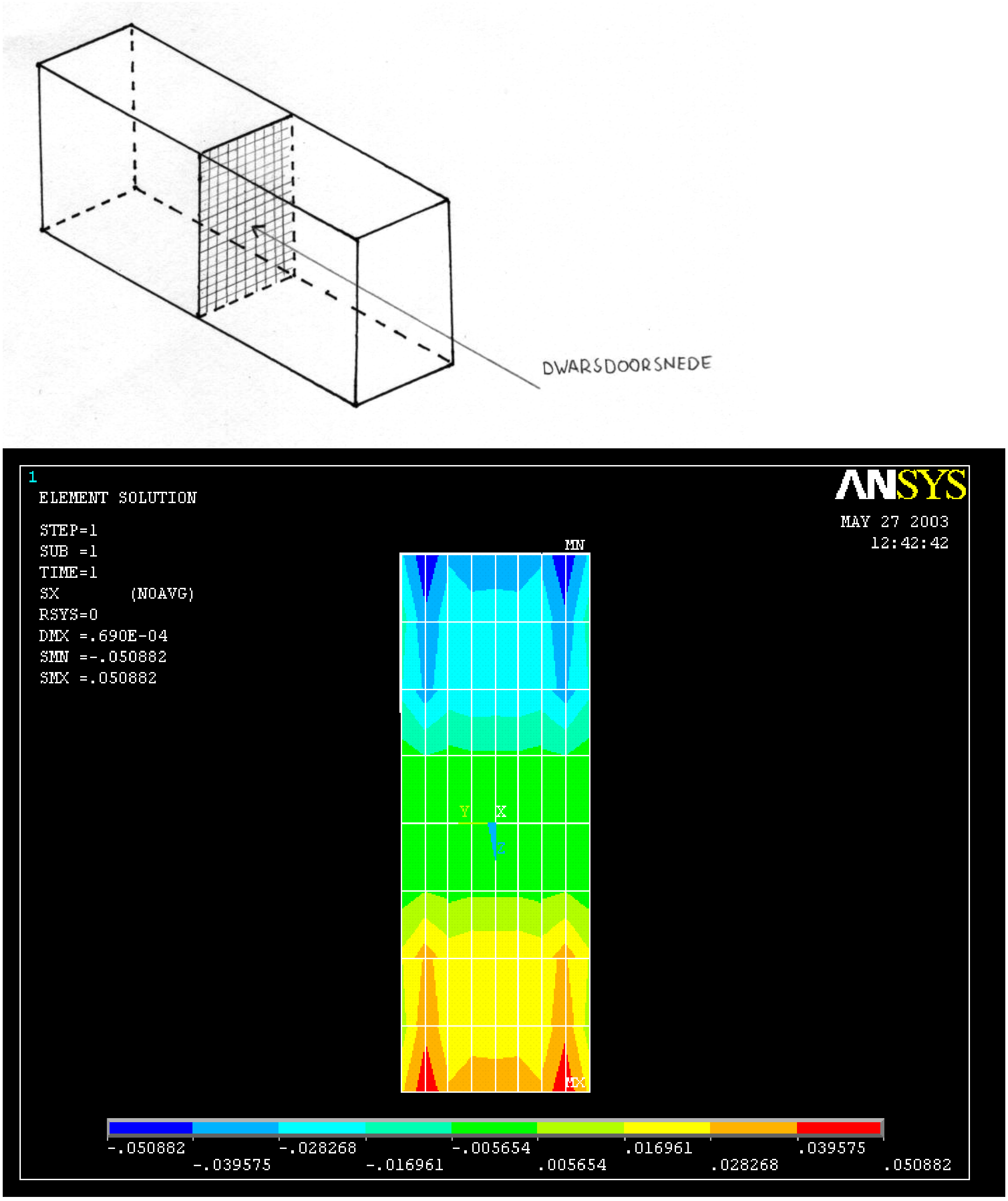
H3 Invloeden van modelvariaties op de uitkomsten

3.1 Inleiding

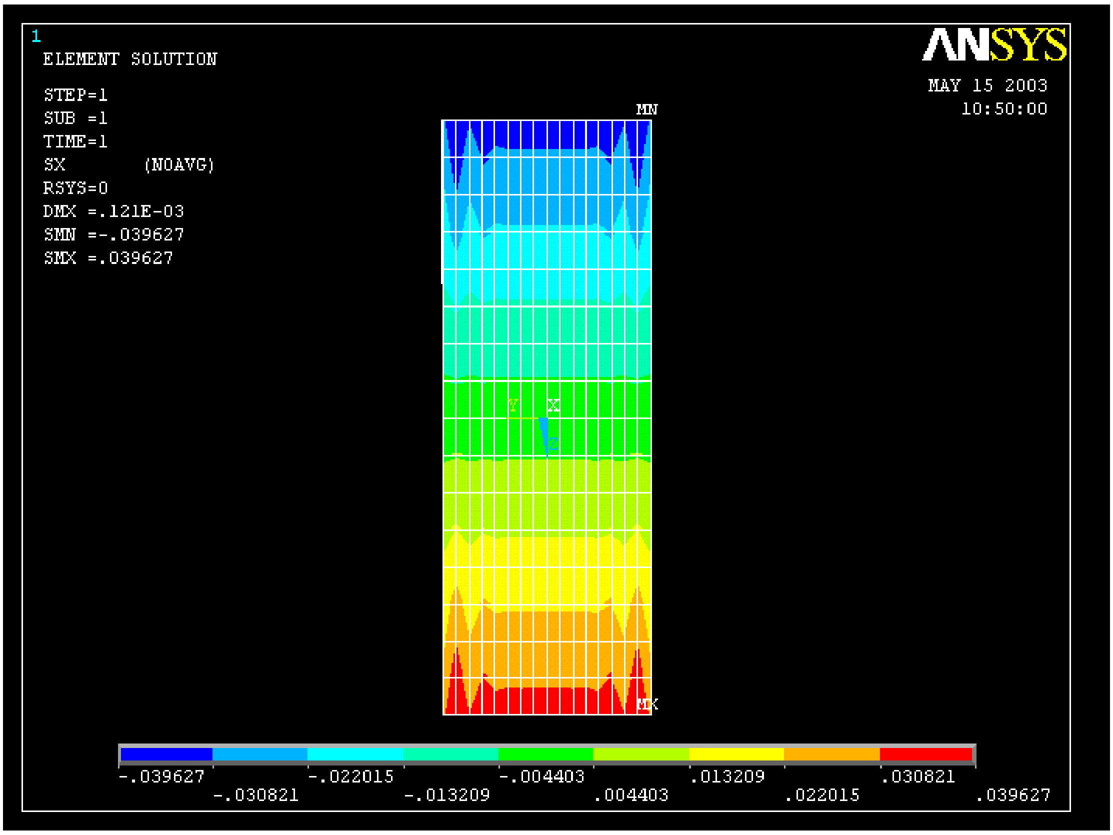
In dit hoofdstuk wordt gekeken naar de modellering zoals die in ANSYS is gemaakt. Wanneer een volume dat wordt doorgerekend wordt opgedeeld in meer elementen zullen de resultaten uiteraard nauwkeuriger zijn. Daarom wordt in de paragraven 3.2 en 3.3 gekeken wat de invloed is van de elementgrootte op de uitkomsten. In paragraaf 3.4 wordt gekeken of de keuze van een ander element met meer knopen nog tot duidelijk andere waarden leidt.

3.2 Verfijning mesh bij hoge liggers

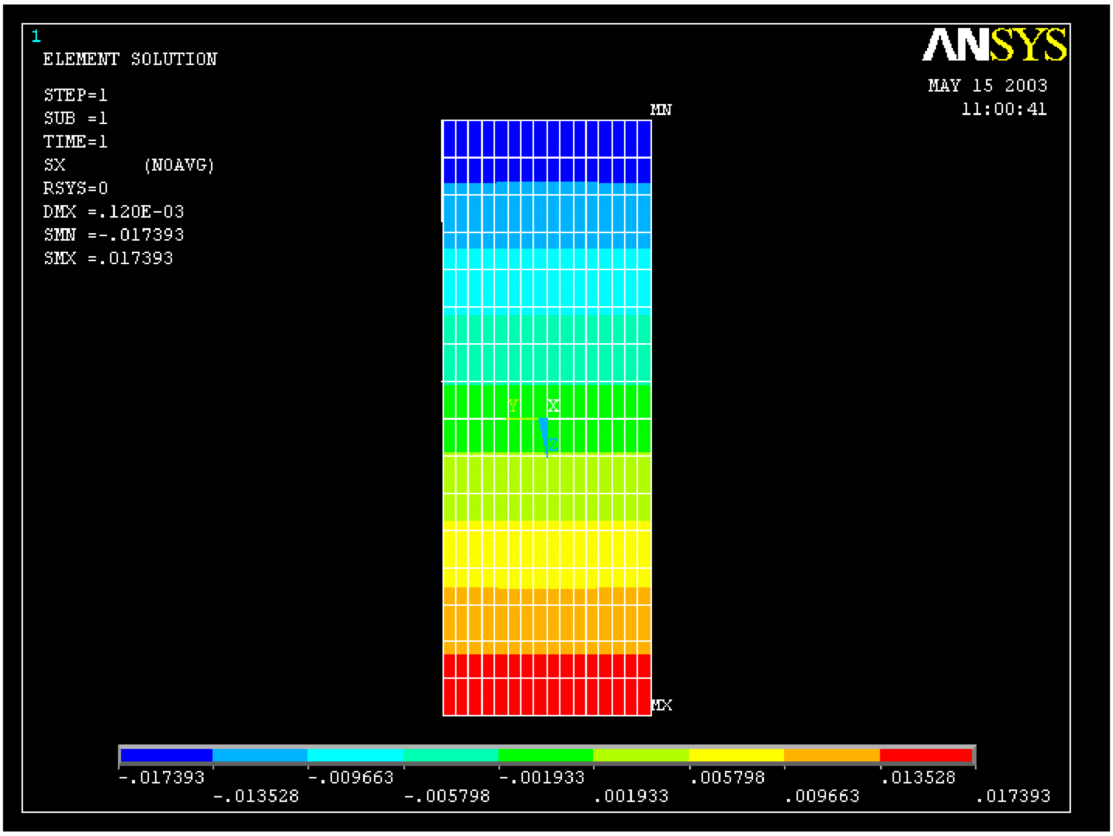
De vervormingen van de hoge liggers zien er allemaal strak uit zonder onverwachte vervormingen ten gevolge van de krachten die op de kopvlakken zijn gezet. In eerste instantie is er dus weinig verschil zien tussen de hoge liggers met verschillende verfijning van de mesh. Als er echter naar de spanningen gekeken wordt dan zijn er wel wat verschillen te zien. Voornamelijk bij de normaalspanningen zijn er in het midden van de ligger bij Ligger8 en Ligger16 nog pieken te zien ten gevolge van de puntlasten op de kopvlakken (figuur 18 en 19). Bij het fijnste model, Ligger32, zijn deze piekspanningen niet meer waar te nemen en ziet alles er strak uit (figuur 20).



Figuur 18: Normaalspanningen in de middendoorsnede van Ligger8. Er zijn duidelijk pieken in de spanningen te zien ten gevolge van de aangebrachte krachten.

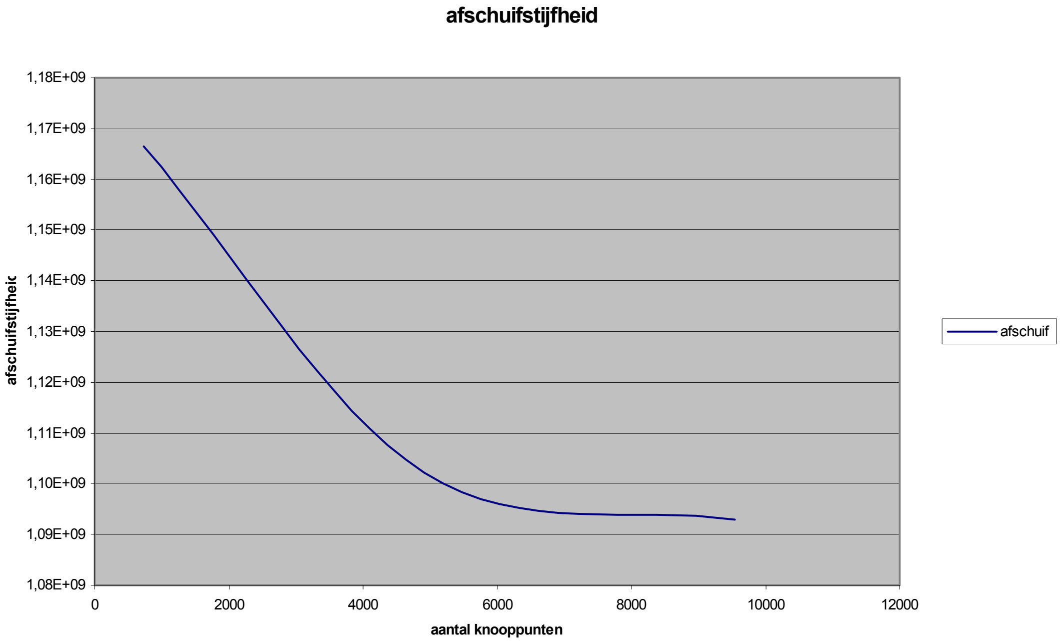


Figuur 19: Normaalspanningen in de middendoorsnede van Ligger16. Er zijn nog duidelijk pieken in de spanningen te zien ten gevolge van de aangebrachte krachten, maar deze pieken zijn kleiner dan bij Ligger8.



Figuur 20: Normaalspanningen in de middendoorsnede van Ligger32. Er zijn geen pieken meer te zien in de spanningen ten gevolge van de aangebrachte krachten.

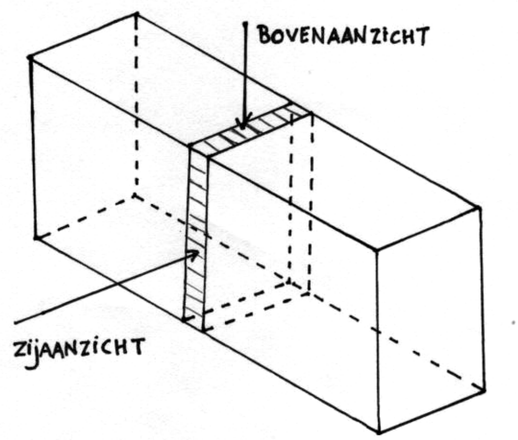
De verfijning van de mesh heeft dus duidelijk invloed op de uitkomsten en de resultaten van Ligger32 mogen dan ook als betrouwbaarder worden beschouwd dan de andere liggers. Het heeft niet heel veel zin om nog nauwkeuriger te gaan rekenen door de ligger nog verder op te delen, want het verschil in afschuifstijfheid tussen Ligger16 en Ligger32 niet zo heel groot. Dit blijkt ook uit de grafiek die hieronder in figuur 21 is te zien. Hierin zijn de berekende afschuifstijfheden van de hoge liggers uitgezet tegen het aantal knooppunten waaruit het model bestaat.

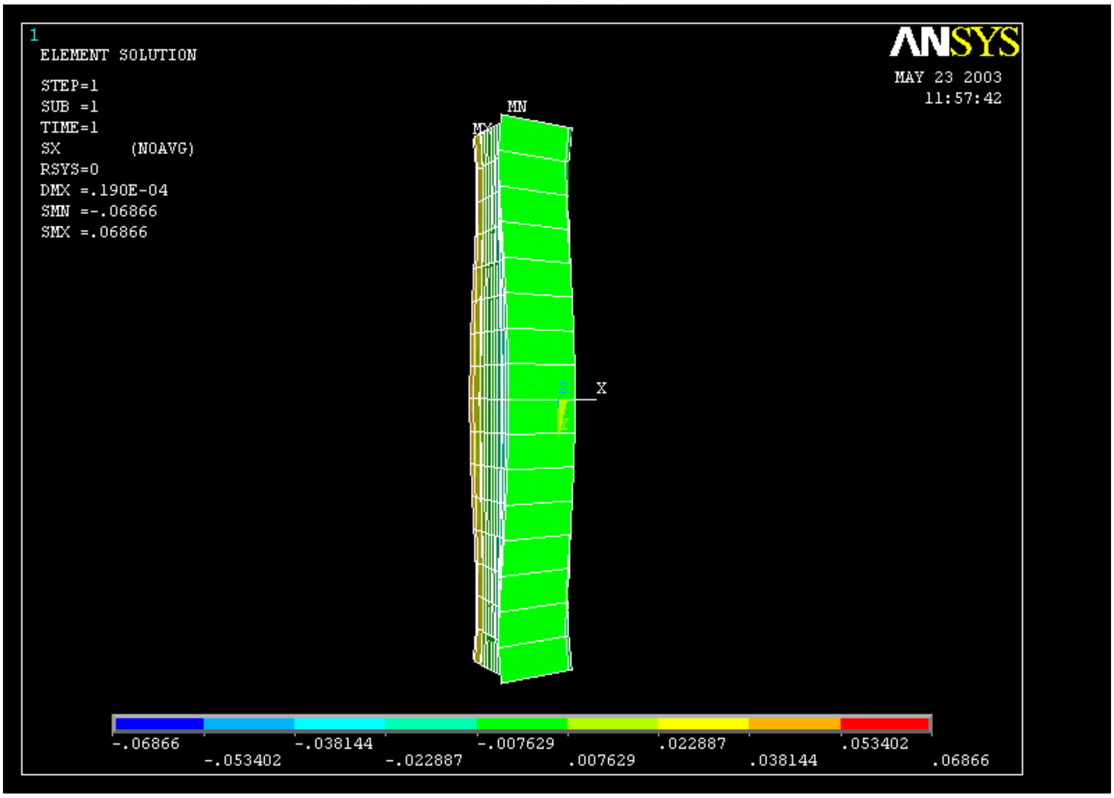


Figuur 21: De waarde van de berekende afschuifstijfheid uitgezet tegen het aantal knooppunten van het model.

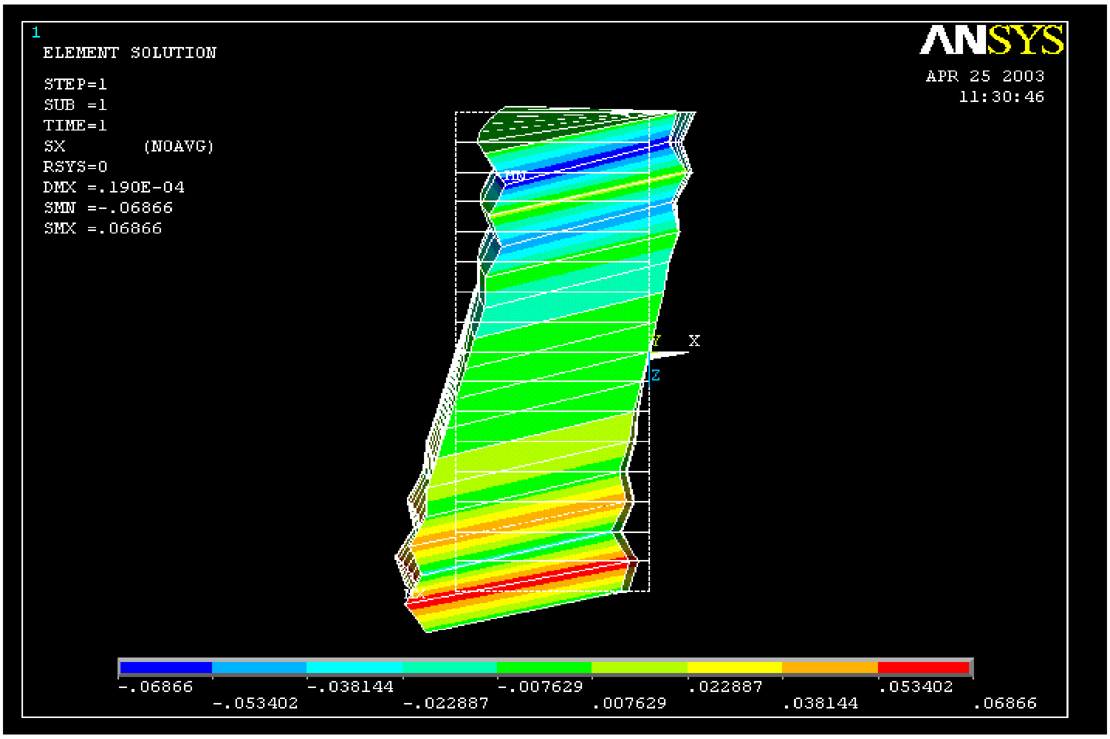
3.3 Verfijning mesh bij LiggerBreed

In paragraaf 2.3 was al te zien dat de resultaten van LiggerBreed afweken van zowel de vuistregel als de resultaten van de hoge liggers. Opvallend bij LiggerBreed is ook dat deze onverwachte krommingen laat zien en dat er nog duidelijke invloeden van de belasting in de kopvlakken aanwezig is, zie figuur 22 t/m 24. Daarom is LiggerBreed in de lengte richting in twee keer zoveel elementen verdeeld (32) om er voor te zorgen dat de elementen niet te lang werden. Dit heeft een gunstig resultaat op de vervormingen en de spanningen gehad. De vervormingen zijn als verwacht en er zijn geen piekspanningen meer te zien, zoals blijkt uit de figuren 25 t/m 27.

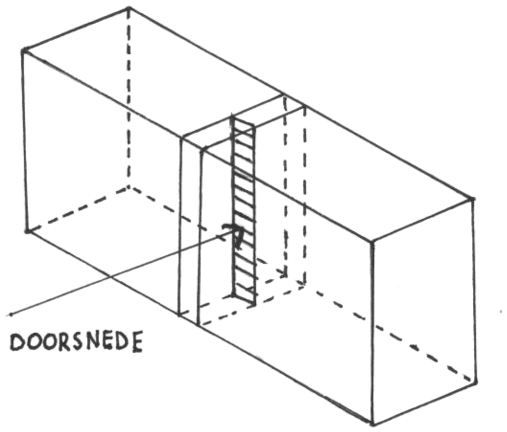


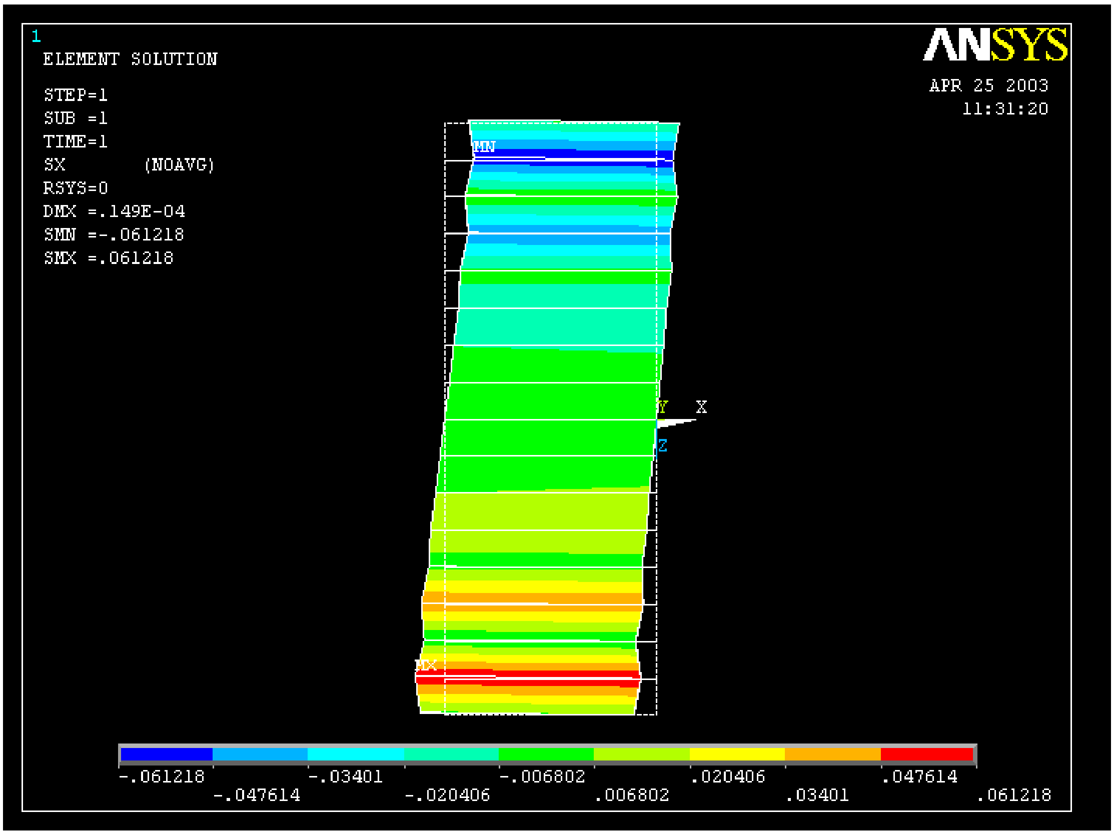


Figuur 22: Bovenaanzicht van de middelste plak uit de LiggerBreed, duidelijk is te zien dat de boven en onderkant taps verlopen.

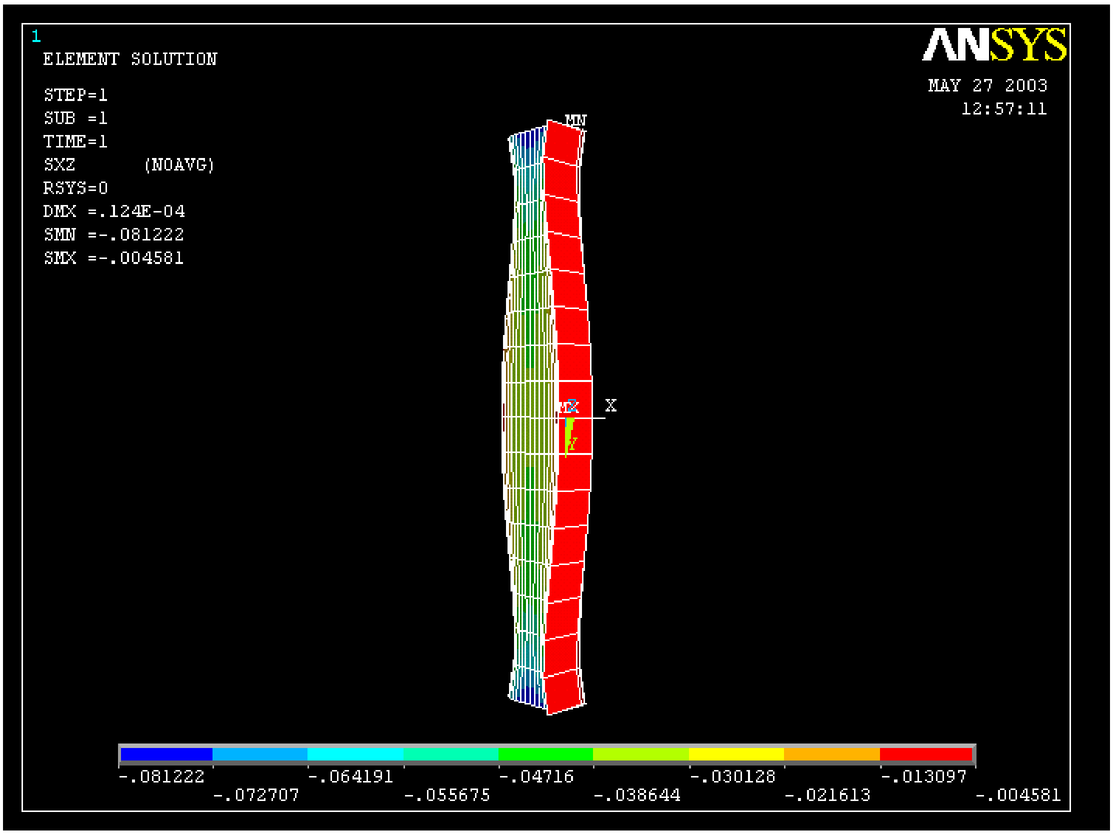


Figuur 23: Zijaanzicht van de middelste plak uit de LiggerBreed, onverwachte vervormingen zijn te zien en de invloeden van de krachten op de kopvlakken zijn nog heel geconcentreerd aanwezig.



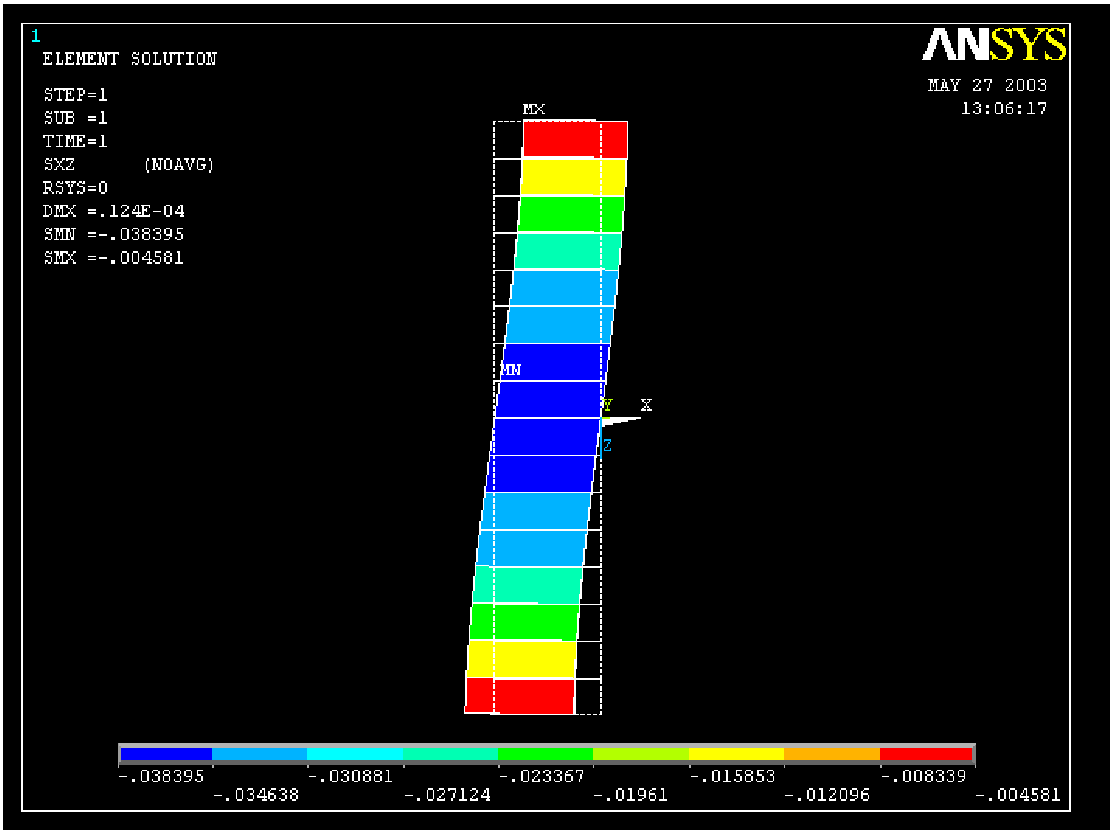


Figuur 24: Middendoorsnede van de middelste plak uit LiggerBreed. Er is geen mooie S-vorm te zien zoals bij de hoge liggers en de invloeden van de krachten op de kopvlakken zijn nog heel goed te zien.



Figuur 25: Bovenaanzicht van een plak in het midden van LiggerBreed.

Figuur 26: Zijaanzicht van een plak in het midden van LiggerBreed met verfijnde Mesh. Hier zijn geen hoge geconcentreerde spanningen meer als gevolg van de krachten op de kopvlakken.



Figuur 27: Middendoorsnede van de middelste plak van LiggerBreed na de verfijnde meshing. Er is een gladde S-vorm ontstaan zoals die ook te zien was bij de hoge liggers.

Hoewel de resultaten er beter uitzien in de figuren is er bijna geen verschil tussen de berekende afschuifstijfheden.

De in paragraaf 2.3 berekende waarde was:

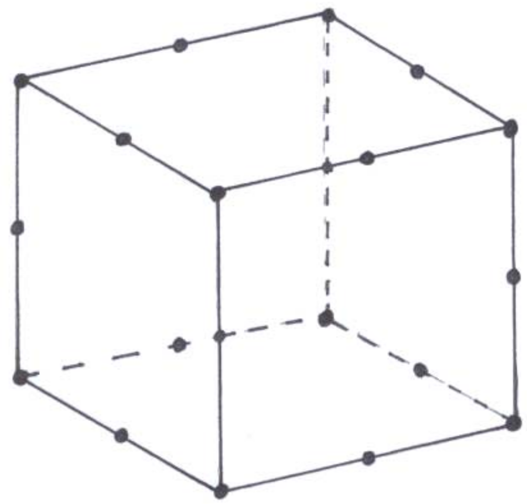
GA_{sh1}=0.1362535985*10^{10}

De waarde van de verfijnde LiggerBreed is:

Ga_{sh1}=0.1369465147*10^{10}

3.4 Keuze van een ander element

In principe komen voor dit soort volumes alleen de “solid” elementen in aanmerking en dan wel de blokvormige. Een verbetering ten opzichte van de tot nu toe gekozen solid45 zou de solid186 kunnen zijn (figuur 28).



Figuur 28: Andere elementkeuze zoals deze solid186 met tussenknooppunten geeft geen andere resultaten.

Dit element heeft naast knooppunten op de hoekpunten ook knooppunten halverwege de ribben. Dit element bestaat zo dus uit 20 knooppunten in plaats van 8 en is iets nauwkeuriger.

Het verschil in uitkomsten voor de afschuifstijfheden is echter heel klein. Voor Ligger16 is dit andere element ingevoerd en vergeleken met de gevonden waarden uit paragraaf 2.3.

De in paragraaf 2.3 berekende waarde was:

$GA_{sh1}=0.1106578719*10^{10}$

De waarde van de verfijnde LiggerBreed is:

$Ga_{sh1}=0.1101987900*10^{10}$

H4 Schuifspanningen

4.1 Inleiding

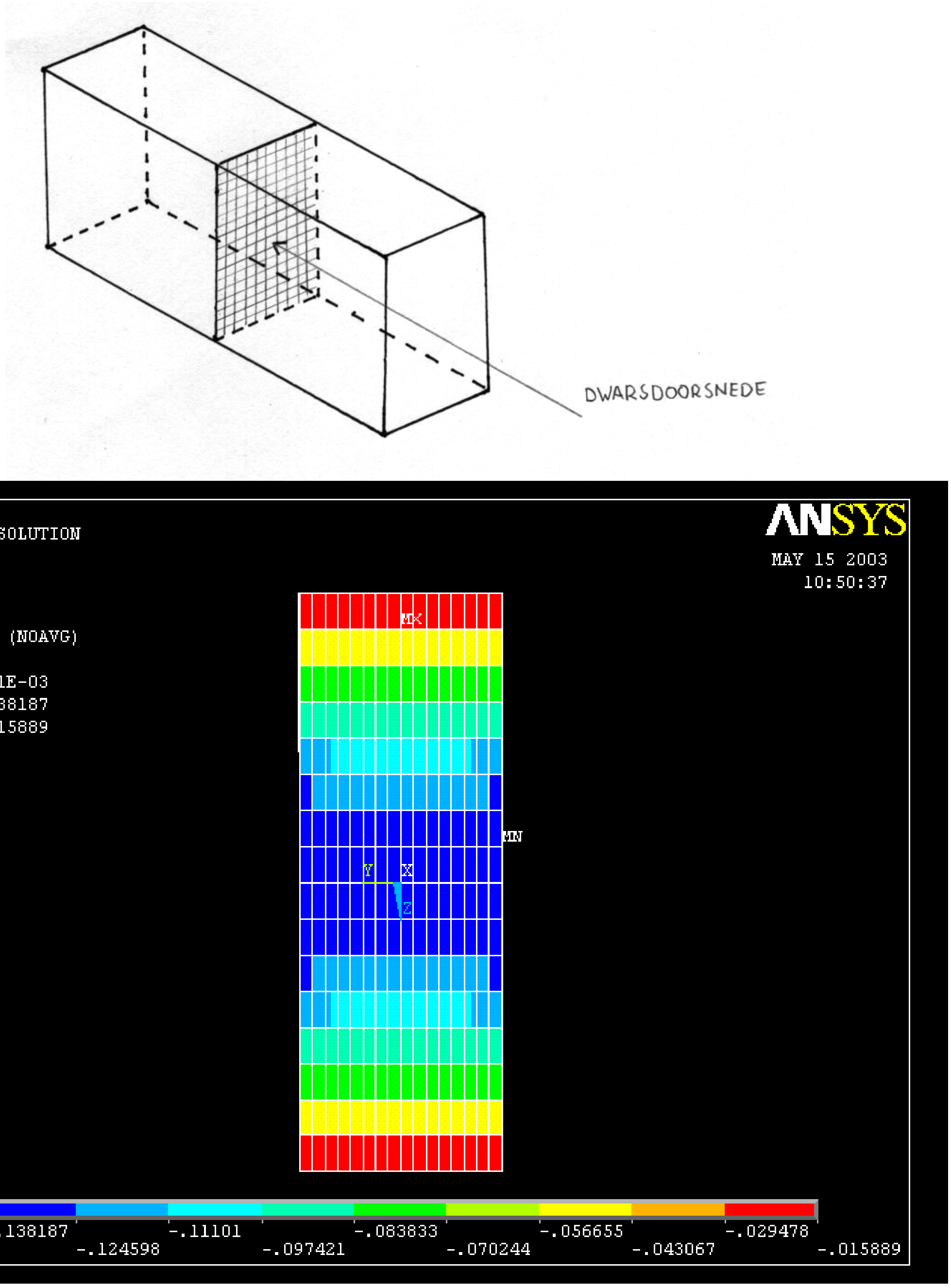
In dit hoofdstuk wordt een ander deel van de opdracht uitgewerkt. De maximale schuifspanningen die in de liggers voorkomen worden vergeleken met de vuistregel voor de maximale schuifspanning.

4.2 Vergelijking grootste schuifspanning met vuistregel

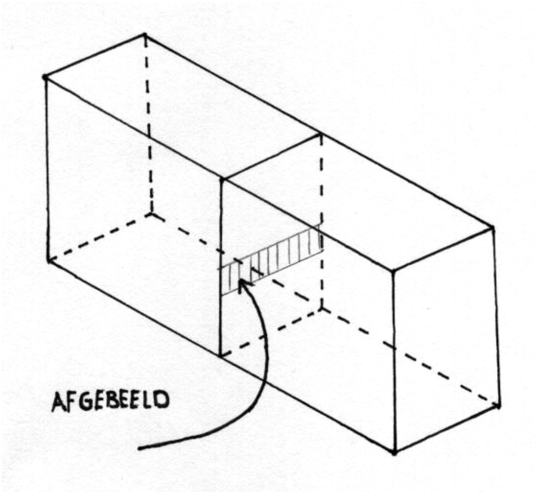
De vuistregel voor de maximale schuifspanning bij rechthoekige doorsneden is:

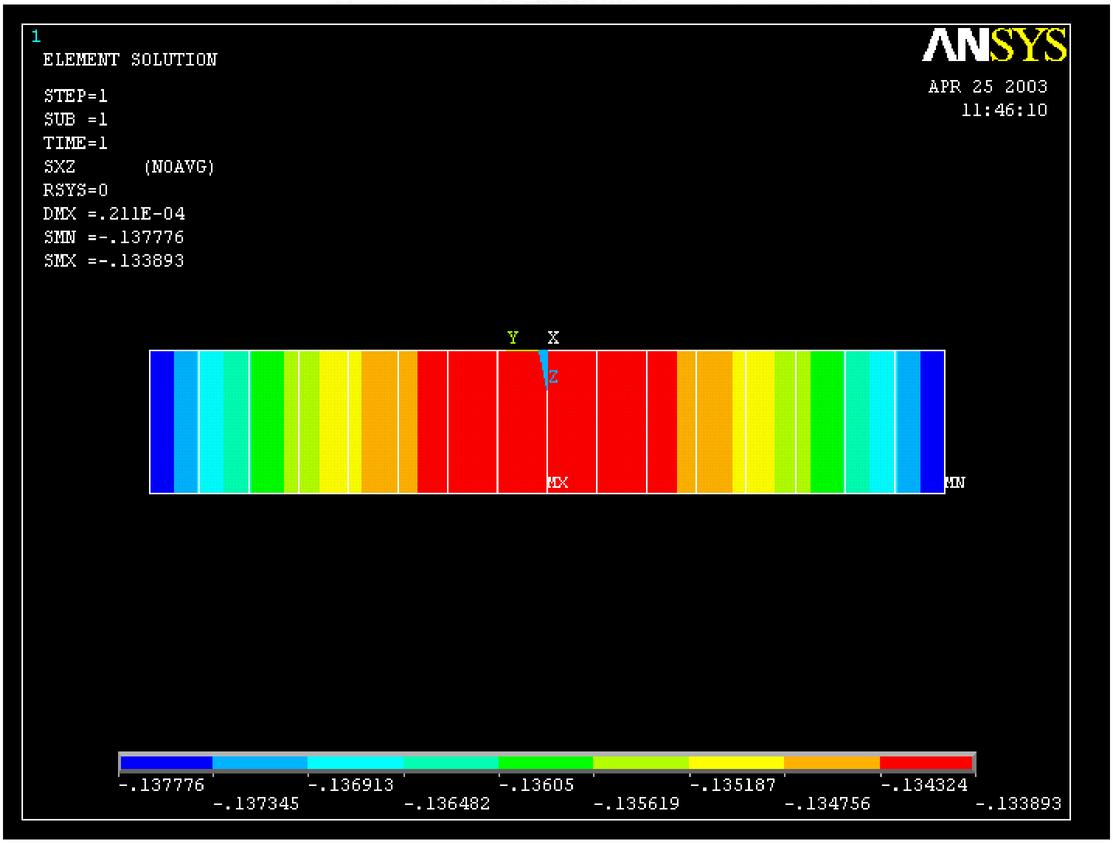
$$S_{xz,\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

De maximale schuifspanning treedt op in het midden van de dwarsdoorsnede (figuur 29). Over de breedte heeft de spanning dan nog een klein verloop met het echte maximum aan de randen, zie figuur 30.



Figuur 29: De schuifspanningen in de dwarsdoorsnede van Ligger32. Hier is te zien dat de spanningen in het midden het grootst zijn en aan de boven- en onderkant het kleinst.





Figuur 30: Schuifspanningen in het midden van de dwarsdoorsnede (zoals aangegeven in het overzichtsplaatje). De schuifspanningen zijn hier het grootst en hebben nog een klein verloop over de breedte (ongeveer 2,8%).

In de tabel hieronder staan de uit ANSYS afgelezen maximale schuifspanningen, de uit de vuistregel berekende schuifspanningen en de verschillen. De schuifspanningen van de liggers zijn onderling niet echt te vergelijken omdat op verschillende liggers verschillende dwarskrachten zijn gezet. De liggers kunnen via de verschillen wel met elkaar worden vergeleken.

Ligger:	**Schuifspanning via ANSYS**	**Schuifspanning via vuistregel:**	**Verschil met vuistregel :**
Ligger8	0.072612	0.072321	0.40 %
Ligger16	0.138287	0.136607	1.21 %
Ligger32	0.137776	0.136607	0.85 %
LiggerLang	0.069236	0.068304	1.35 %
LiggerBreed	0.081275	0.047813	41.17 %
LiggerVierkant	0.154924	0.136607	11.82 %

De grootste schuifspanning in de hoge liggers komt goed overeen met de vuistregel, maar de brede en de vierkante ligger vertonen grote verschillen.

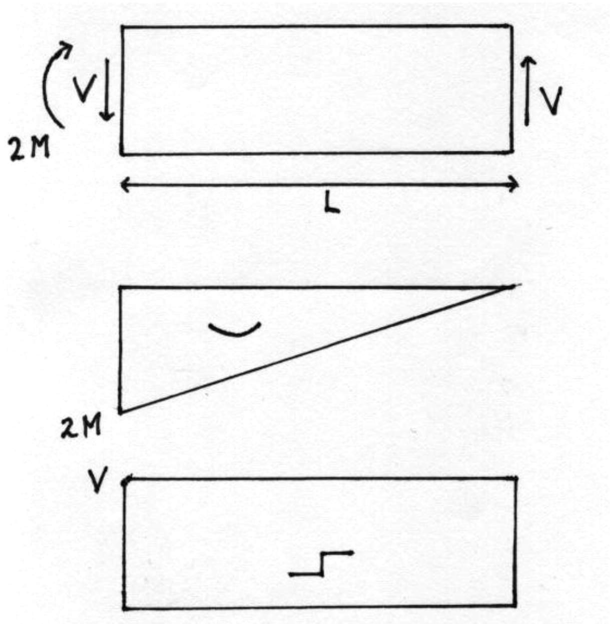
H5 Afschuiving en buiging

5.1 Inleiding

De hierboven beschreven modellen zijn zo opgezet dat in het midden van de liggers de buiging gelijk aan nul is en er dus zuivere afschuiving optreedt. In principe moet de buiging echter geen effect hebben op de afschuifstijfheid van een ligger. Om dit na te gaan is een model bedacht waar in het midden van de ligger wel een moment optreedt. Dit model wordt in paragraaf 5.2 beschreven. De vergelijking met de modellen waarbij zuivere afschuiving optreedt vindt in paragraaf 5.3 plaats.

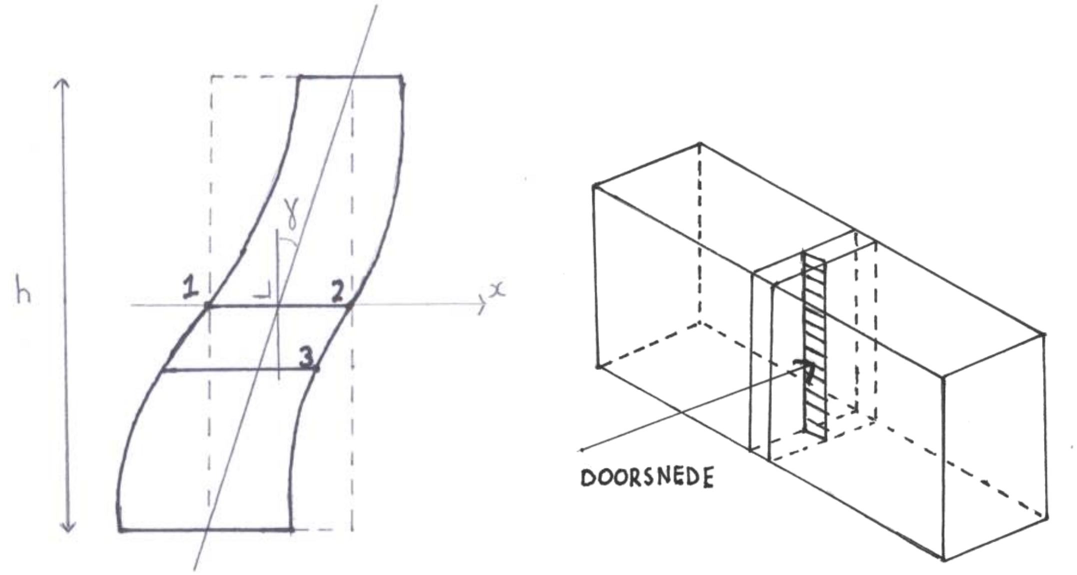
5.2 Beschrijving model met afschuiving en buiging

Het vastzetten van de vrijheidsgraden gebeurt net zo als bij de modellering van hoofdstuk 2. Ook de dwarskrachten die op de kopvlakken worden gezet zijn hetzelfde. Alleen de momenten die op de kopvlakken staan zijn anders, op het linker kopvlak staat een moment ter grootte van 2M, deze neemt lineair af naar 0 bij het rechter kopvlak (figuur 31).



Figuur 31: Het verloop van de dwarskrachten en de momenten over de ligger.

De vervorming van de middelste elementen zal ook volgens een S-vorm plaatsvinden zoals dat ook in hoofdstuk 2 werd gezien. Doordat er buiging plaatsvindt, zal er echter ook vervorming van de elementen plaatsvinden. Bij het berekenen van de afschuifhoek zal dus gekeken moeten worden naar het midden van de elementen (figuur 32).

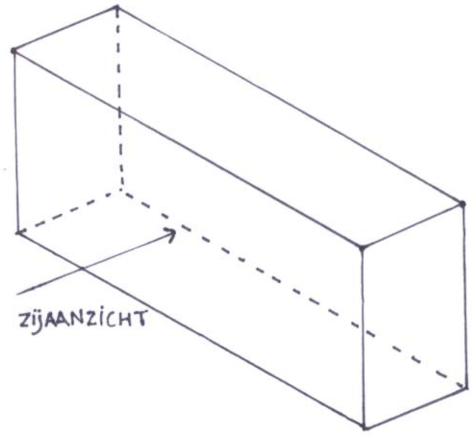


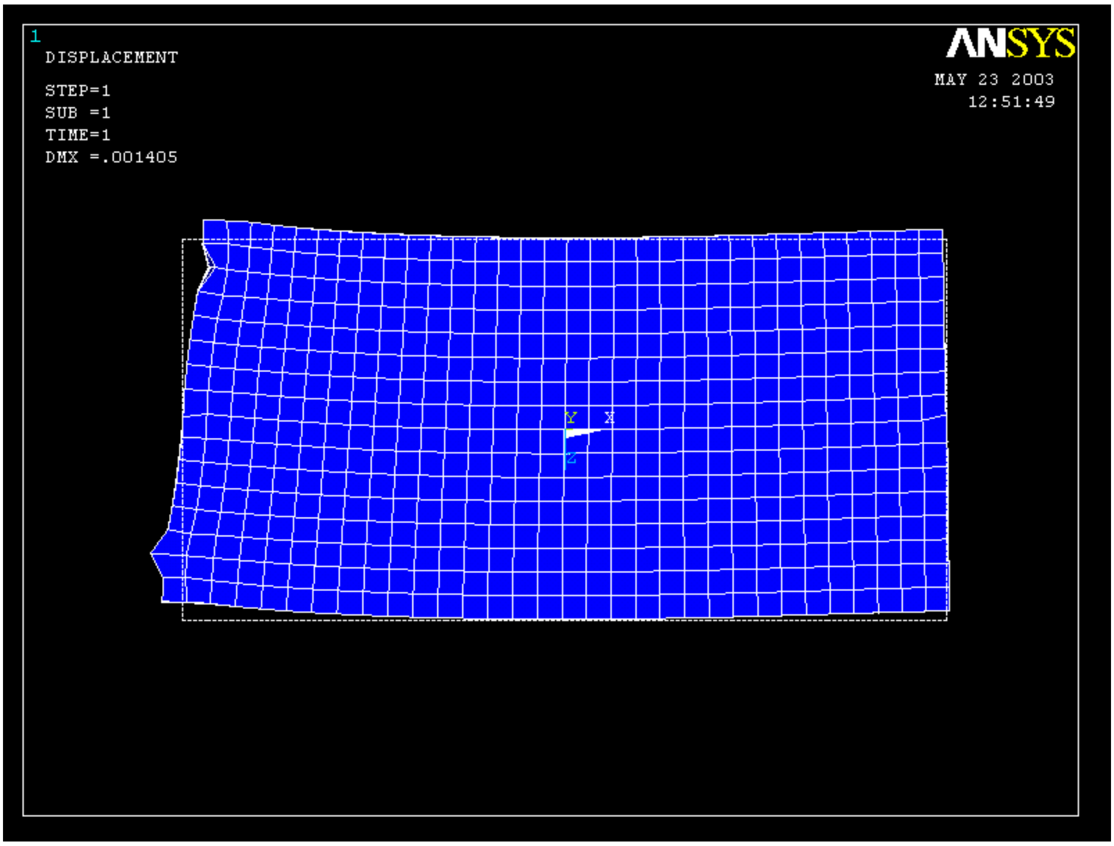
Figuur 32: Verwachte vervorming van een plak uit het midden van de ligger met hierin aangegeven de afschuifhoek γ.

Om dit model te vergelijken met het model voor zuivere afschuiving wordt uitgegaan van Ligger32. De ligger heeft dezelfde afmetingen en opdeling in elementen.

5.3 Vergelijking uitkomsten met zuivere afschuiving

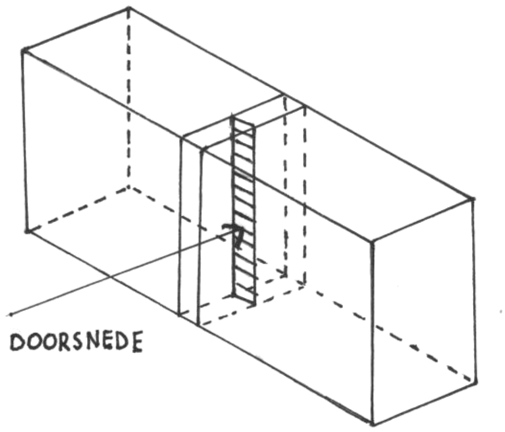
De totale vervorming van de ligger ten gevolge van de krachten die er zijn opgezet is te zien in figuur 33.

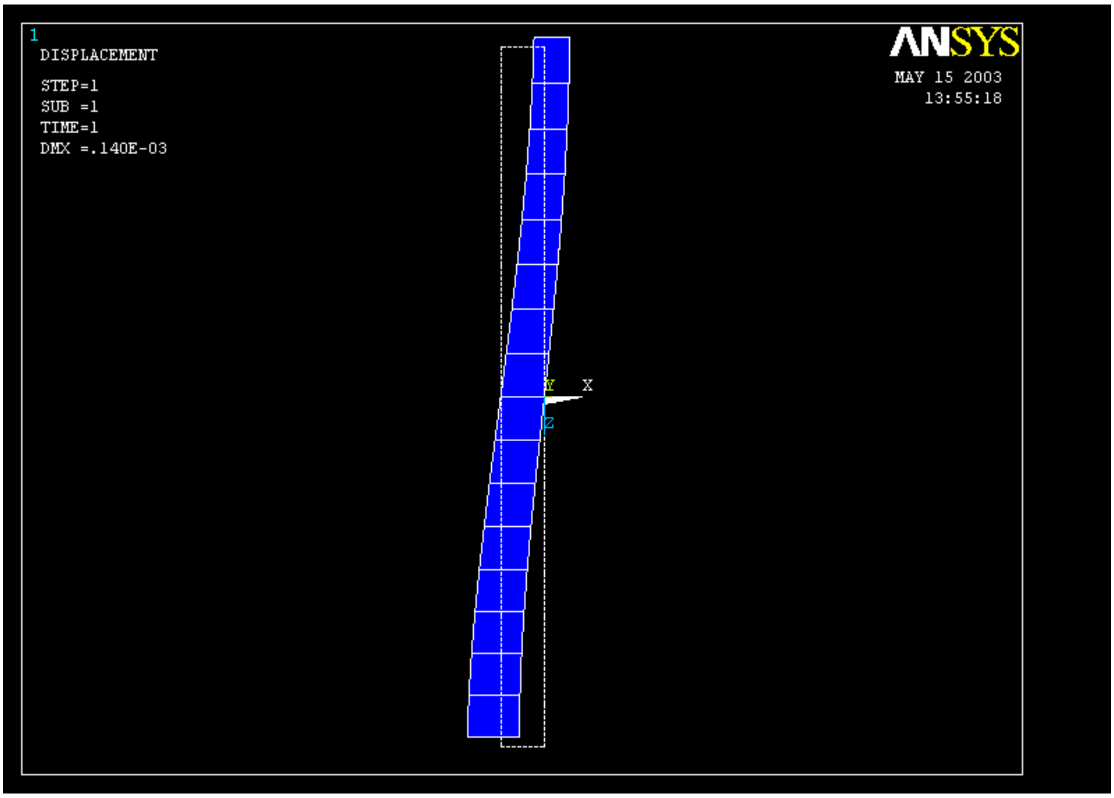




Figuur 33: De totale vervorming van Ligger32 ten gevolge van de aangebrachte krachten, gezien in het zijaanzicht zoals is aangegeven in het overzichtsplaatje.

De vervorming van de plak uit het midden van de ligger is zoals verwacht en is te zien in figuur 34.

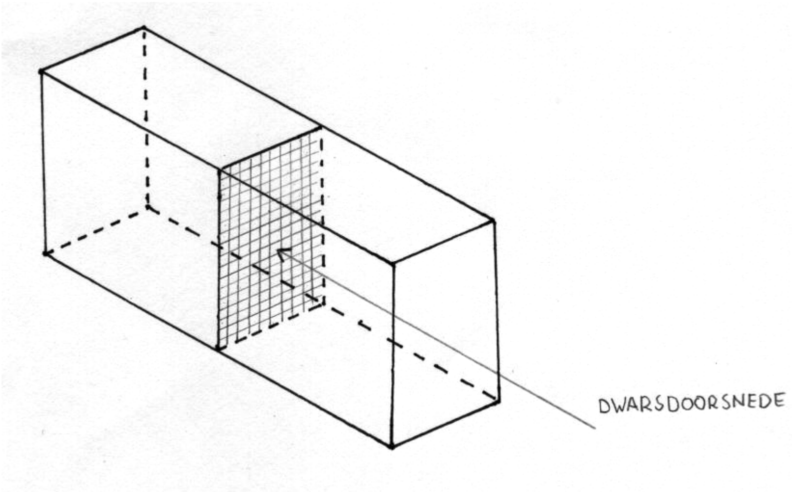


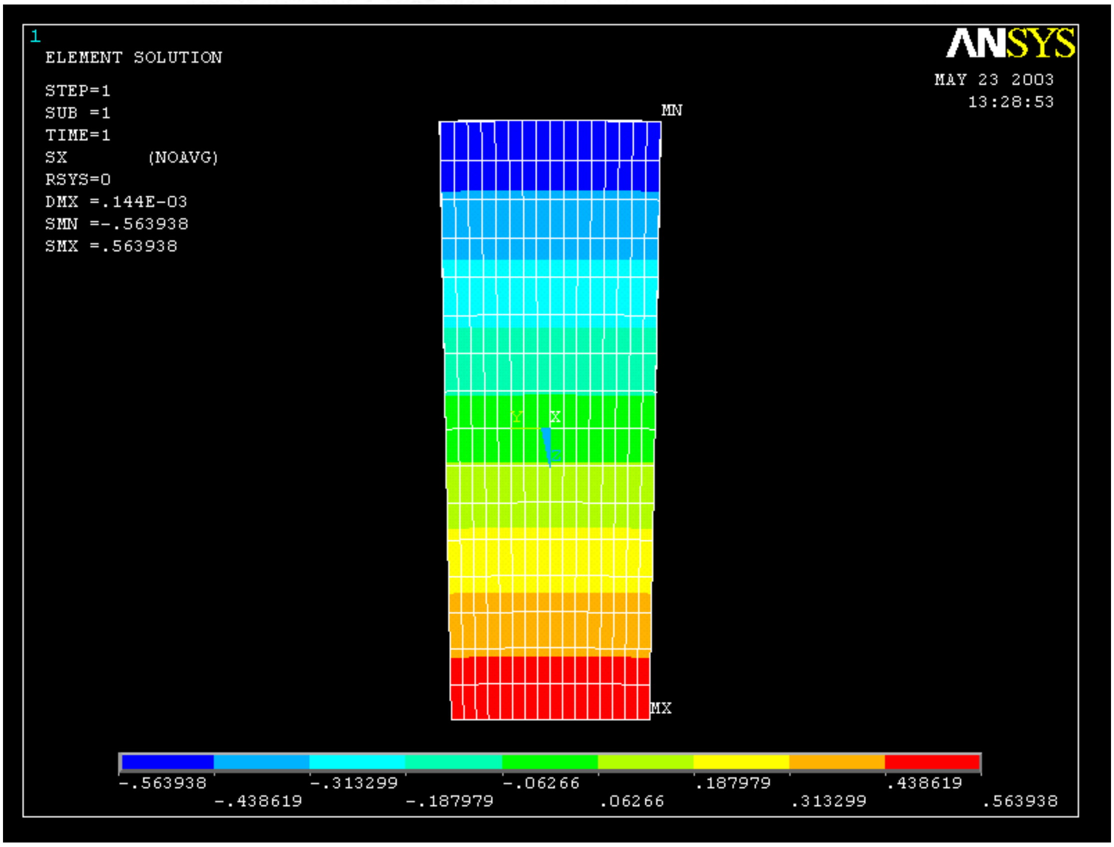


Figuur 34: Vervorming van Ligger32 in het midden van de ligger ten gevolge van afschuiving en buiging. De plak komt uit het midden van de ligger en is te zien in een zijaanzicht zoals is aangegeven in het overzichtsplaatje.

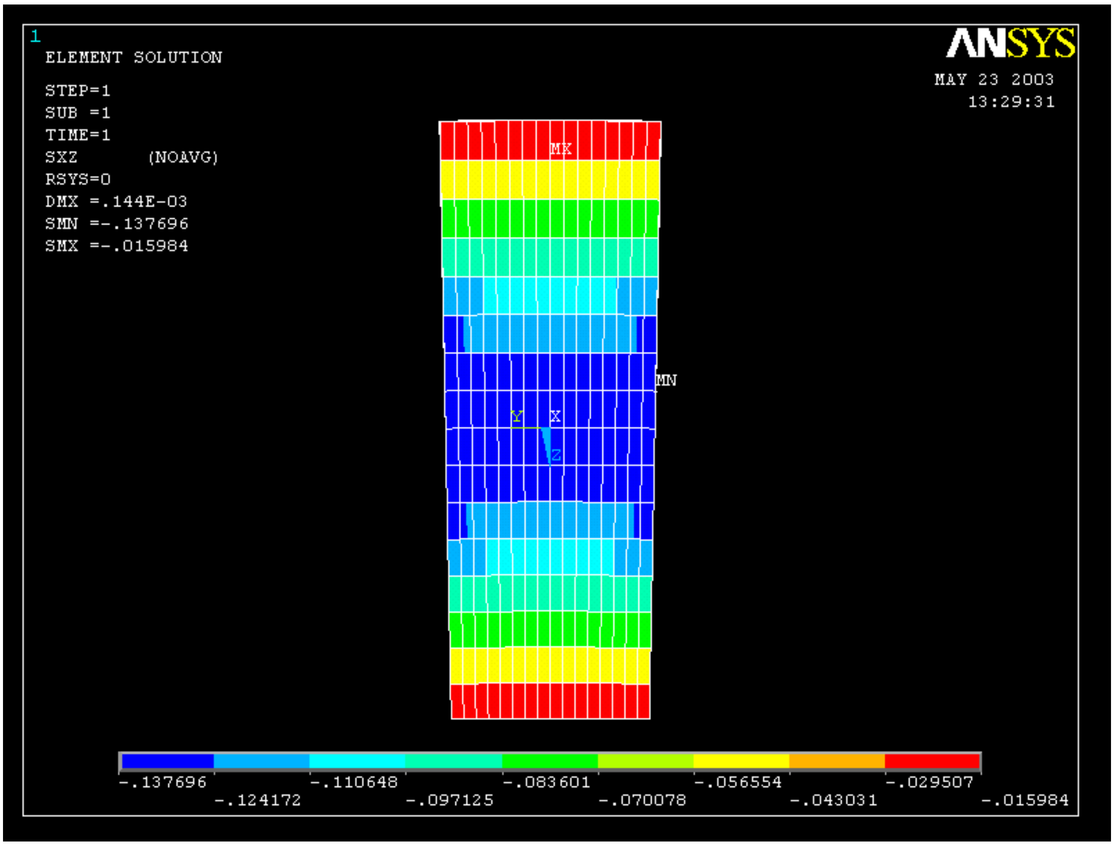
De vloeiende S-vorm is duidelijk aanwezig en ook duidelijk te zien is de vervorming van de elementen. Bovenin zijn ze meer gedrukt en onderin meer uit gerekt. Door de dwarscontractie is bovenin en onderin ook een verticale verplaatsing te zien.

Ook de normaal- en schuifspanningen zien er uit zoals verwacht en zonder piekspanningen (figuur 35 en 36).





Figuur 35: Normaalspanningen in de dwarsdoorsnede van Ligger32, er zijn geen piekspanningen waar te nemen ten gevolge van de krachten op de kopvlakken.



Figuur 36: De schuifspanningen in de dwarsdoorsnede van Ligger32. Hier is te zien dat de spanningen in het midden het grootst zijn en aan de boven- en onderkant het kleinst. Er is bijna geen verschil te zien met het geval van zuivere afschuiving.

Zowel de berekende afschuifstijfheid als de hoogste schuifspanning wijken zeer weinig af van het model met zuivere afschuiving. Dit klopt dus met de verwachtingen.

	Model “zuivere afschuiving”	Model “buiging en afschuiving”	Verschil tussen modellen
afschuifstijfheid	$0.1092919595 \cdot 10^{10}$	$0.1088673526 \cdot 10^{10}$	0.39%
hoogste schuifspanning	0.137776	0.137696	0.06%

H6 Conclusie

In ANSYS is zijn eindige-elementenmodellen gemaakt van rechthoekige prismatische liggers. De globale vervormingen die berekend werden komen goed overeen met de vervormingen die verwacht werden. Aan de hand van deze vervormingen zijn de afschuifstijfheden van drie doorsneden bepaald. Deze bleken soms 30% af te wijken van de afschuifstijfheden bepaald met de gebruikelijke benaderingsformule

$$GA_{sh} = \tfrac{5}{6} GA \,.$$

Het blijkt dat de vierkante en brede ligger sterk afwijken van de gebruikelijke regel omdat hun gedrag op dat van een plaat begint te lijken. De doorbuigingen die resulteren uit de gebruikelijke benaderingsformule zijn aan de veilige kant voor de bruikbaarheidsgrenstoestand.

Voor hoge liggers (h>3b) blijkt de volgende regel een afwijking van ten hoogste 4% te geven.

$$GA_{sh} = GA$$

Voor vierkante (h=b) en platte (h=b/3) liggers geeft de volgende regel een afwijking van 0,5%.

$$GA_{sh} = \tfrac{6}{5} GA \,.$$

Buigvervorming van de doorsnede blijkt een zeer kleine invloed (0,5%) te hebben op de afschuifstijfheid. Dit is in overeenstemming wat algemeen wordt aangenomen.

De met ANSYS berekende afschuifspanningen bleken soms 40% af te wijken van de benaderingsformule

$$S_{xz,\max} = \tfrac{3}{2} \frac{V}{A}$$

Voor hoge doorsnede (h>3b) was de afwijking minder dan slechts 1,5%. Voor de vierkante doorsnede (h=b) is de werkelijke grootste spanning 12% groter en voor de platte doorsnede (h=b/3) is de werkelijke grootste spanning 41% groter. De afwijking ontstaat doordat de spanning zich concentreert langs de verticale randen van de doorsnede. De resultaten van de benaderingsformule zijn derhalve aan de onveilige kant voor de uiterste grenstoestand. Een verbeterde formule voor de maximale spanning van platte doorsneden zou kunnen zijn

$$S_{xz,\max} = (0{,}2 \frac{b}{h} + 1{,}5) \frac{V}{A} \qquad b > h \,.$$

Echter, meer berekeningen zijn nodig om dit te valideren voor alle doorsnede vormen.

De uitkomsten van een programma als ANSYS moeten kritisch worden beschouwd. Met name de elementenverdeling blijkt belangrijk om betrouwbare resultaten te verkrijgen. Gebruik van een nauwkeuriger element met tussenknopen leidde niet tot wezenlijk andere resultaten.

Zelf evaluatie

Mijn keuze voor deze opdracht had vooral te maken met het verkennen van een eindig-elementenprogramma als ANSYS. De eerste twee weken heb ik dan ook besteed aan het leren werken met dit programma. De vele mogelijkheden van het programma zorgden er voor dat de invoer van modellen in het begin niet zo snel verliep. Maar na verloop van tijd krijg je een beetje overzicht en kan je veel sneller iets uitproberen en modellen aanpassen. Dit zorgt ervoor dat je een goed inzicht krijgt in de vervormingen en spanningen die ontstaan ten gevolge van de belastingen op de ligger. Vooral de 3D plaatjes en de kleurrijke doorsneden geven een goed beeld.

Belangrijk is wel dat je kritisch blijft kijken naar de uitkomsten die ANSYS geeft. Komt het overeen met de verwachtingen en is het model wel fijn genoeg opgebouwd?

Het verloop van het project had ik me iets anders voorgesteld dan dat het nu is verlopen. Het koste meer tijd om een goed model in ANSYS te maken dan verwacht. Er waren meer modellen nodig om aan te tonen dat de modellering die in ANSYS was gemaakt klopte. Ik ben dus eigenlijk dieper op de rechthoekige doorsnede ingegaan dan ik had verwacht en ben daardoor niet toegekomen aan de vergelijking van benaderingsformules van andere soorten doorsneden. Dit is wellicht een opdracht voor een volgende bachelor student.

Literatuur

1. Blaauwendraad, J. “Theory of Elasticity, Energy Principles”, Collegedictaat CT5141, *Technische Universiteit Delft*, Delft, 2002.
2. Hartsuiker, C. “Toegepaste mechanica deel 2: spanningen, vervormingen, verplaatsingen”, *Academic service*, Schoonhoven, 2000.

Bijlage 1: Maple programma voor berekening van de afschuifstijfheid van modellering 1

```
> restart:
> u1x:=0.78463E-03:
> u1z:=0.57825E-15:
> u2x:=0.77675E-03:
> u2z:=0.59586E-15:
> u3x:=0.77675E-03:
> u3z:=0.21141E-04:
> h:=200.0:
> Delta:=400/16:
> V:=1000:
> b:=70:
> E:=2.1e5: v:=0.30:
> alpha:=arctan((u2z-u3z)/(Delta+u2x-u3x));
```

$$\alpha := -0.8456400000\ 10^{-6}$$

```
> beta:=arctan((h/2+u2z-u1z)/(u1x-u2x));
```

$$\beta := 1.570796248$$

```
> gamma1:=evalf(Pi/2-alpha-beta);
```

$$\gamma 1 := 0.925\ 10^{-6}$$

```
> GAs1:=V/gamma1;
```

$$GAs1 := 0.1081081081\ 10^{10}$$

```
> GAs2:=5/6*E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs2 := 0.9423076925\ 10^{9}$$

```
> GAs3:= E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs3 := 0.1130769231\ 10^{10}$$

```
> (GAs1-GAs2)/GAs1*100;
```

$$12.83653844$$

```
> (GAs1-GAs3)/GAs1*100;
```

$$-4.596153875$$

```
>
```

Bijlage 2: Maple programma voor berekening van de afschuifstijfheid van modellering 2

```
> restart:
> ux1:=0.11568E-03:
> ux2:=-0.11568E-03:
> h:=200:
> V:=1275:
> b:=70:
> E:=2.1e5: v:=0.30:
> gamma1:=(ux1-ux2)/h;
```

$$\gamma 1 := 0.1156800000 \; 10^{-5}$$

```
> GAs1:=V/gamma1;
```

$$GAs1 := 0.1102178423 \; 10^{10}$$

```
> GAs2:=5/6*E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs2 := 0.9423076925 \; 10^{9}$$

```
> GAs3:= E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs3 := 0.1130769231 \; 10^{10}$$

```
> (GAs1-GAs2)/GAs1*100;
```

$$14.50497734$$

```
> (GAs1-GAs3)/GAs1*100;
```

$$-2.594027192$$

```
>
>
```

Bijlage 3: Maple programma voor berekening van de afschuifstijfheid bij afschuiving en buiging

```
> restart:
> ux1:=0.11666E-03:
> ux2:=-0.11666E-03:
> ux1b1:=0.10034e-3:
> ux1b2:=0.13389e-3:
> ux2b1:=0.53103E-16:
> ux2b2:=0:
> h:=200:
> V:=1275:
> b:=70:
> E:=2.1e5: v:=0.30:
> gamma1:=(ux1-ux2)/h;
```

$$\gamma 1 := 0.1166600000\ 10^{-5}$$

```
> gamma2:=((ux1b1+ux1b2)/2-(ux2b1+ux2b2)/2)/(h/2);
>
```

$$\gamma 2 := 0.1171150000\ 10^{-5}$$

```
> GAs1:=V/gamma1;
```

$$GAs1 := 0.1092919595\ 10^{10}$$

```
> GAs1b:=V/gamma2;
```

$$GAs1b := 0.1088673526\ 10^{10}$$

```
> GAs2:=5/6*E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs2 := 0.9423076925\ 10^{9}$$

```
> GAs3:= E/(2*(1+v))*b*h;
```

$$GAs3 := 0.1130769231\ 10^{10}$$

```
> (GAs1b-GAs2)/GAs1b*100;
```

$$13.44441929$$

```
> (GAs1b-GAs3)/GAs1b*100;
```

$$-3.866696856$$

```
>
> (GAs1b-GAs1)/GAs1b*100;
```

$$-0.3900222517$$

```
>
```