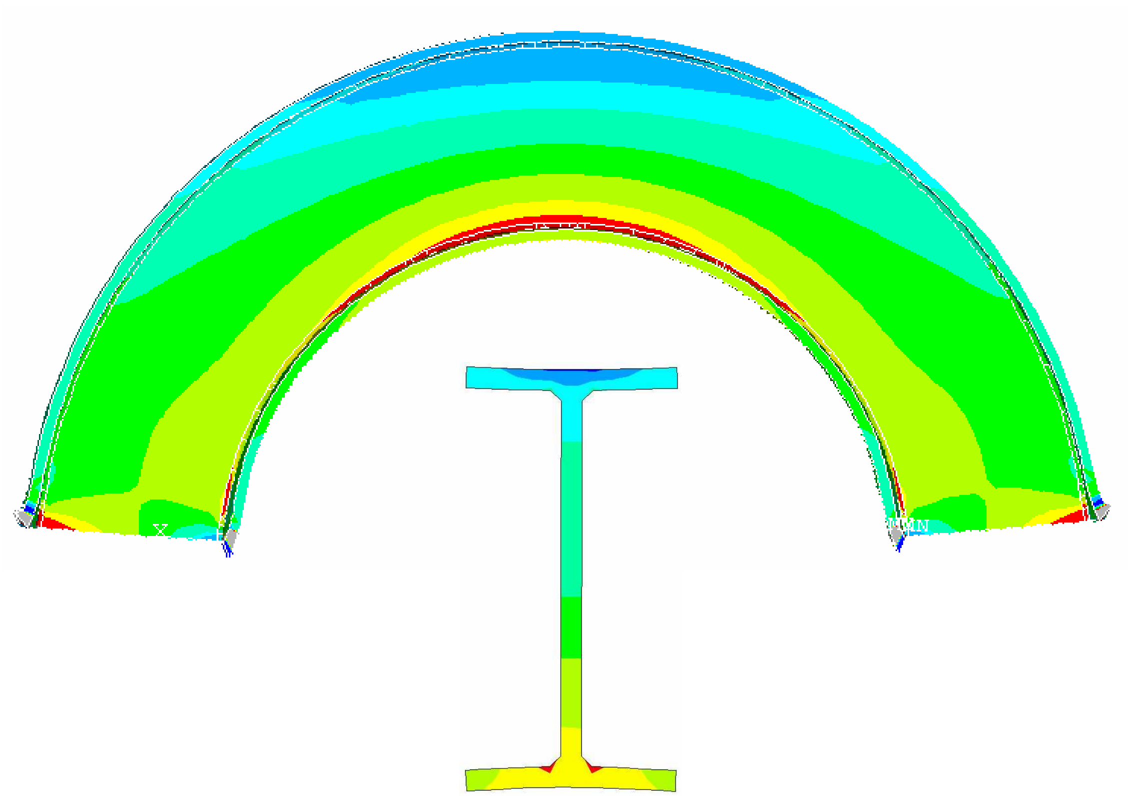
BUIGSPANNINGEN IN GEKROMDE LIGGERS

EINDRAPPORT BACHELOR EINDWERK



Naam Tim Gian van der Waart van Gulik

Studienummer 1259210

Vak CT3000 – Bachelor eindwerk

Datum april/mei 2008

Begeleiders dr. ir. P.C.J. Hoogenboom
ir. R. Abspoel

TU Delft

VOORWOORD

Dit rapport is een onderzoek naar het gedrag van gekromde stalen I-profielen, belast door zuiver en alleen een buigend moment. Specifiek gezegd is het een onderzoek naar de maximale buigspanning, een correctiefactor voor het weerstandsmoment en een vervangende buigstijfheid.
In hoofdstuk 1 is een analytische afleiding gegeven van de buigstijfheid van een ligger en de buigspanning in een ligger. In hoofdstuk 2 wordt het onderzoek met bijbehorende uitgangspunten geformuleerd. In hoofdstuk 3 wordt uitgelegd welke modellering wordt gebruikt om tot goede resultaten te komen. In hoofdstuk 4 is de maximale buigspanning weergegeven en wordt de correctiefactor voor het weerstandsmoment afgeleid. In hoofdstuk 5 is te zien hoe de liggers krommen onder de belasting van een buigend moment en wordt een factor voor de vervangende buigstijfheid afgeleid. In hoofdstuk 6 uiteindelijk worden de resultaten geïnterpreteerd.
Zelf vond ik het een eer om voor mijn bachelor eindwerk te kunnen werken aan een nieuw onderwerp als dit, alsmede het mogen leveren van het resultaat in de vorm van onder andere een correctiefactor.
Verder wil ik de heer dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en de heer ir. R. Abspoel bedanken voor hun begeleiding tijdens dit onderzoek, alsmede de bronnen die ik onder andere gebruikt heb bij het inhoudelijk tot stand komen van dit rapport.

Delft, mei 2008

T.G. van der Waart van Gulik

SAMENVATTING

Tegenwoordig worden gekromde liggers vaak gebruikt op plaatsen waar esthetica een belangrijke rol speelt. Het zijn liggers met een sterke kromming, die er uit zien als bogen, maar omdat de ondersteuningen geen spatkrachten kunnen opnemen gedragen de profielen zich als liggers. Omdat de verwachting was dat het gedrag van gekromde liggers niet te beschrijven zou zijn met de theorie voor rechte liggers gaf dit aanleiding voor onderzoek naar het gedrag van gekromde stalen I-profielen, belast door zuiver en alleen een buigend moment. Het belang van dit onderzoek wordt versterkt door het feit dat er nog geen theorie bestaat voor buigspanningen in gekromde I-profielen, terwijl dit soort profielen wel steeds vaker gebruikt worden.

Zoals verwacht bleek de buigspanning niet lineair over de hoogte van de doorsnede te verlopen en zijn de flenzen in staat om deels aan het opgelegde moment te "ontsnappen" door enigszins te verbuigen. Dit had een gereduceerd weerstandsmoment en een verhoogd traagheidsmoment tot gevolg. Als gevolg, logischerwijs volgend uit het gereduceerde weerstandsmoment, bleek de maximale optredende buigspanning ten opzichte van een rechte ligger een stuk hoger te zijn. Door de modellering van zeven profielen werd duidelijk dat vooral de breedte b, de flensdikte t_f en de straal van het gekromde profiel R een grote invloed hebben op het weerstandsmoment en het traagheidsmoment.
Door de flens steeds smaller en steeds dikker te kiezen en door de straal van het profiel steeds verder te laten toenemen nadert het weerstandsmoment van de gekromde ligger tot het weerstandsmoment van de rechte ligger. Door deze drie aanpassingen krijgt het traagheidsmoment echter steeds minder de mogelijkheid om groter te worden. De flenzen kunnen minder makkelijk naar buiten uitbuigen, waardoor het traagheidsmoment van de gekromde ligger steeds meer in de buurt van het traagheidsmoment van de rechte ligger blijft liggen. Hoewel het traagheidsmoment van de gekromde ligger altijd iets groter zal blijven dan het traagheidsmoment van de rechte ligger.

De formule, met daarin de correctiefactor, om direct te kunnen overstappen van het weerstandsmoment van een rechte ligger naar het weerstandsmoment van een gekromde ligger wordt hieronder gegeven:

$$W_{krom} = W_{recht}\left(0.250 + 0.047\frac{h}{b} + 0.412\frac{b}{h} + 3,000\frac{t_f}{b} - 0.150\frac{t_w}{h_l} - 0.280\frac{h_l}{t_w} + 0.060\frac{R}{b}\right)$$

De formule, met daarin de correctiefactor, om direct te kunnen overstappen van het traagheidsmoment van een rechte ligger naar het vervangende traagheidsmoment van een gekromde ligger wordt hieronder gegeven:

$$I_{krom} = I_{recht}\left(6.972 + 0.092\frac{h}{b} + 0.119\frac{b}{h} - 3,400\frac{t_f}{b} - 1.550\frac{t_w}{h_l} - 4.293\frac{h_l}{t_w} - 0.085\frac{R}{b}\right)$$

INHOUDSOPGAVE

1 INLEIDING

Gekromde liggers worden tegenwoordig vaak gebruikt op plaatsen waar esthetica een belangrijke rol speelt. Het zijn liggers die gekromd zijn om de z-as, gedefinieerd volgens het assenstelsel in figuur 1.4. Het zijn liggers die zeer sterk gekromd zijn. Ze zien er uit als bogen, maar omdat de ondersteuningen geen spatkrachten kunnen opnemen gedragen de profielen zich als liggers. Vanwege het gekromde karakter van de profielen verlopen de buigspanningen niet lineair over de hoogte van de doorsnede van de ligger. Het weerstandsmoment uit de tabellen voor standaard profielen kan dus niet gebruikt worden voor het bepalen van de maximale buigspanningen.
Wanneer het een I-profiel betreft wordt verwacht dat de doorsnede enigszins vervormd door het moment. De flenzen zullen waarschijnlijk meer vervormen dan het lijf, omdat ze aan het moment kunnen "ontsnappen".
Met een steeds belangrijker wordend uiterlijk van bouwwerken zullen gekromde liggers ook steeds meer worden toegepast. Dit geeft rede om eens te onderzoeken hoe sterk de vervangende buigstijfheid veranderd. En welke factor we moeten toepassen op het bekende weerstandsmoment om het weerstandsmoment te krijgen voor gekromde liggers, zodat we met het vervangende weerstandsmoment direct de maximale buigspanning kunnen bepalen.

1.1 ANALYTISCHE AFLEIDING BUIGSTIJFHEID

Om enig inzicht te geven in het doel van dit onderzoek en inzicht te krijgen in wat buigstijfheid nu precies is, wordt er hier een afleiding gegeven van buigstijfheid. Er is gebruik gemaakt van
A. Simone, Analysis of slender structures.

Definitie: *De buigstijfheid EI is de weerstand van de staaf tegen buiging.*

Beperkingen en veronderstellingen

- Vlakke doorsneden blijven vlak en loodrecht op de staafas in een ligger onderworpen aan buiging. Deze hypothese (van Bernoulli) is geldig wanneer verplaatsing door afschuiving en torsie klein zijn ten opzichte van verplaatsing door buiging.
- De theorie is alleen geldig onder aanname van kleine verplaatsingen.
- Verondersteld wordt dat de staaf een recht staaf as heeft en dat de doorsnede symmetrisch is om de y-as. In dit geval is er zelfs sprake van dubbelsymmetrie. Naast symmetrie om de y-as is het profiel ook symmetrisch om de z-as.

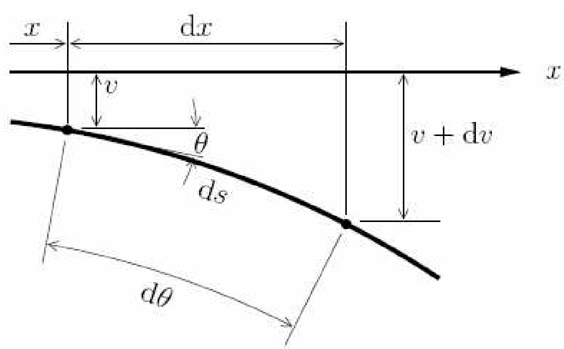
Verband tussen zakking en kromming

Over een stukje gebogen ligger dx hiernaast kan het volgende gezegd worden:

$$ds = r d\theta \qquad \text{en} \qquad \kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \qquad [1.1]$$

κ is de kromming en r de straal. De helling van de zakking kan worden gerelateerd aan de rotatie van de staafas:

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \qquad [1.2]$$



Figuur 1.1 – Stukje dx van een gebogen ligger

Omdat de lengte van een stukje dx nadert tot nul, kunnen we het gekromde lijnstuk ds vervangen door een rechte lijn. Van deze benadering is in formule [1.2] gebruik gemaakt. Onder de aanname van zeer kleine rotaties kan er het volgende gezegd worden:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta \qquad \text{en} \qquad \cos\theta \approx 1$$

Dus:

$$ds \approx dx \qquad \text{en} \qquad \kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} \quad [1.3] \qquad \text{en} \qquad \frac{dv}{dx} = \theta \quad [1.4]$$

Door [1.4] te substitueren in [1.3] wordt de volgende uitdrukking gevonden voor κ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \kappa = \frac{1}{r} \quad [1.5]$$

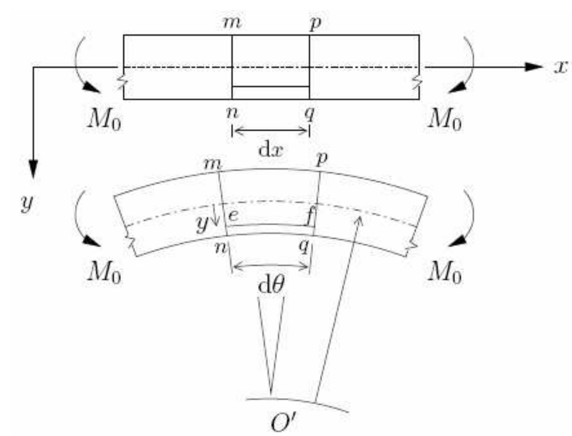
Verband tussen kromming en longitudinale rek

In de onbelaste situatie is vezel ef even lang als het oneindig kleine stukje dx. Zie ook het bovenste gedeelte van figuur 1.2. In de belaste situatie zal vezel ef korter worden dan dx. De rek in de vezel ef is dan als volgt uit te drukken:

$$\varepsilon_{xx}^{ef} = \frac{ds_{ef} - dx}{dx} \qquad [1.6]$$

Met de uitdrukkingen:

$$dx = rd\theta \qquad \text{en} \qquad ds_{ef} = (r-y)d\theta \qquad [1.7]$$



Figuur 1.2 – Stukje dx met gerekte vezel ef

Volgt door substitutie van deze twee formules [1.7] in [1.6] een uitdrukking voor ε_{xx}^{ef}:

$$\varepsilon_{xx}^{ef} = \frac{(r-y)d\theta - rd\theta}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx} = -y\kappa \qquad [1.8]$$

Verband tussen buiging en kromming

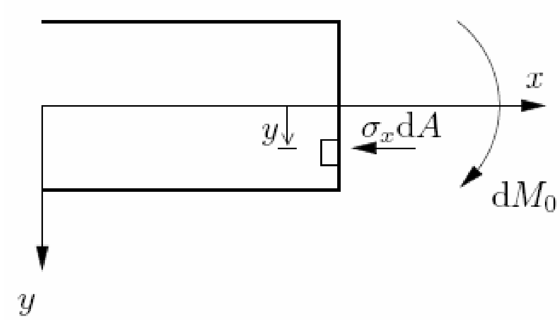
De wet van Hooke geeft het verband tussen de spanning in het materiaal en de rek van het materiaal in de lineair elastische tak van het $\sigma - \varepsilon$ diagram:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad [1.9]$$

E is een materiaaleigenschap en het stelt de helling van de lineaire elastische tak in het $\sigma - \varepsilon$ diagram voor, en heeft de eenheid N/mm^2.

Door substitutie van [1.8] in [1.9] is de uitdrukking voor σ nu als volgt:

$$\sigma_x = -Ey\kappa \qquad [1.10]$$



Figuur 1.3 – Een stukje dM werkend in de doorsnede

In figuur 1.3 is een stukje dM te zien dat werkt in de doorsnede. Om M te bepalen moeten alle stukjes dM over de doorsnede worden opgeteld door middel van integratie:

$$M_y = \int dM_y = -\int \sigma_x y dA \qquad [1.11]$$

Met $M_{y,0} = -M_y$ geeft dat door substitutie van [1.10] in [1.11] de volgende uitdrukking:

$$M_y = \int -Ey\kappa y dA = -EI_{yy}\kappa \qquad [1.12] \qquad \text{met:} \quad I_{yy} = \int y^2 dA$$

Hierin is I_{yy} het traagheidsmoment om de z-as.

Dit is de formule voor M, uitgedrukt in κ. De relatie tussen deze twee grootheden is de factor $-EI$. Nu deze uitdrukking bekend is, blijkt de definitie die aan het begin van dit kopje voor de buigstijfheid gesteld is ook juist te zijn. Als EI van een ligger toe neemt zal er een groter moment moeten optreden wil men eenzelfde mate van kromming bereiken. Met andere woorden: des te groter is EI des te groter is de weerstand tegen buigen.

1.2 ANALYTISCHE AFLEIDING BUIGSPANNING

Om ook enig inzicht te krijgen in wat buigspanning nu precies is, wordt er hier een afleiding gegeven van buigspanning. Er is gebruik gemaakt van *A. Simone, Analysis of slender structures* en *C. Hartsuijker, Toegepaste Mechanica Deel 2 – Spanningen, vervormingen en verplaatsingen*

Uit [1.12] volgt voor κ:

$$\kappa = -\frac{M}{EI} \qquad [1.13]$$

Door substitutie van [1.13] in [1.10] wordt de volgende uitdrukking voor σ gevonden:

$$\sigma(y) = -Ey\left(-\frac{M_y}{EI_{yy}}\right) = \frac{M_y y}{I_{yy}} \qquad [1.14]$$

In het geval van buiging zonder normaalkracht gaat de neutrale lijn door het normaalkrachtencentrum NC en treden de grootste normaalspanningen op in de uiterste vezels. In het geval van een symmetrisch profiel, zoals een I-profiel, is de afstand vanaf het NC tot aan de bovenste en de onderste vezel gelijk. Bovenste vezel: $y = -\tfrac{1}{2}h$, onderste vezel: $y = +\tfrac{1}{2}h$. In het gaval van een rechte ligger, en dus een lineair verlopende buigspanning over de hoogte van de doorsnede van de ligger, kan voor de maximale buigspanningen de volgende uitdrukking worden geschreven:

$$\sigma(\pm\tfrac{1}{2}h) = \frac{M_y\left(\pm\tfrac{1}{2}h\right)}{I_{yy}} = \pm\frac{M_y}{W_y} \qquad [1.15] \qquad \text{met: } W_{y,b} = \frac{I_{yy}}{-\tfrac{1}{2}h} \quad \text{of} \quad W_{y,o} = \frac{I_{yy}}{\tfrac{1}{2}h}$$

W is het zogenaamde weerstandsmoment. Nu is natuurlijk de vraag: wat is I_{yy}? Het traagheidsmoment I_{yy} moet bekend zijn om een mooie en eenduidige uitdrukking voor de maximale spanning in de uiterste vezels te kunnen geven, specifiek in het geval voor een I-profiel. Omdat het lijf van gekromde I-profielen moet worden gebrand uit plaatstaal, zullen de flenzen aan het lijf moet worden gelast. Hierdoor vervallen de afrondingsstralen en komen er hoeklassen voor in de plaats.

Zoals gezegd kan de geometrische doorsnedegrootheid I_{yy}, ook wel oppervlaktemoment van de tweede orde of kwadratisch oppervlaktemoment genoemd, geschreven worden als:

$$I_{yy} = \int y^2 dA$$

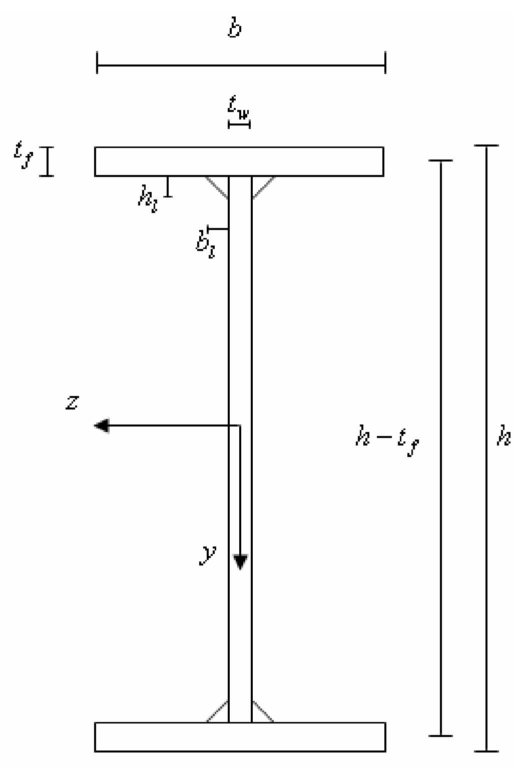
Het I-profiel kunnen we onderverdelen in drie strippen en vier driehoekjes: twee flenzen, het lijf en vier hoeklassen. Het is dus zaak om een formule af te leiden voor het eigen traagheidsmoment van een strip en een driehoek:

$$I_{yy}^{strip} = \sum I_{yy}^{strip} = \int_A y^2 dA = b \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 dy = \left[\frac{1}{3} bz^3\right]_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} = \frac{1}{12} bh^3 \qquad [1.16]$$

Voor een driehoek kan op dezelfde wijze een uitdrukking worden gevonden voor het eigen traagheidsmoment. Dit heeft geleid tot:

$$I_{yy}^{driehoek} = \frac{1}{36} bh^3 \qquad [1.17]$$

b is de basis en h de hoogte van de driehoek. Nu is van iedere strip en iedere driehoek het zogenaamde eigen traagheidsmoment bepaald. Dat wil zeggen het traagheidsmoment wanneer de oorsprong van het assenstelsel samenvalt met het NC. In dit geval zijn de coördinaten van het NC ook die van het zwaartepunt C omdat het een homogene doorsnede betreft. Uiteraard kan in de doorsnede van het I-profiel maar één assenstelsel gehandhaafd worden. Dit betekend dat we de zeven traagheidsmomenten van de drie strippen en de vier driehoekjes niet zomaar bij elkaar mogen optellen om het totale traagheidsmoment te krijgen van het I-profiel.
Omdat een I-profiel symmetrisch is hoeven we niet de zeven statische momenten S_y te berekenen om het NC van het I-profiel te kunnen bepalen. Er kan op voorhand al zeggen worden dat, vanwege symmetrie, het NC halverwege het lijf ligt, zie figuur 1.4 voor het NC. (is oorsprong assenstelsel)
De oplossing om de zeven traagheidsmomenten bij elkaar te mogen optellen is de zogenaamde Steiner bijdrage voor de strippen en driehoeken waarvan het eigen NC niet samen valt met de oorsprong van het algemene assenstelsel. In dit geval zijn dat de twee flenzen en alle vier de hoeklassen. Voor het lijf valt het eigen NC samen met de oorsprong van het algemene assenstelsel.



Figuur 1.4 – Een I-profiel

Door de oorspronkelijke assenstelsels van de flenzen en de hoeklassen in het zwaartepunt (=NC) te nemen zijn per definitie de statische momenten nul. Hierdoor treedt een sterke vereenvoudiging op van het totale traagheidsmoment, per strip en per driehoek, ten opzichte van het algemene assenstelsel:

$$I_{\overline{yy}} = I_{yy} + \overline{y}_C^2 A \qquad \text{dit betekent} \qquad I_{yy,totaal} = I_{yy,eigen} + I_{yy,steiner} \qquad [1.18]$$

Doordat de hoeklassen de vorm hebben van een gelijkbenige driehoek geldt dat de basis en de hoogte van de lassen gelijk zijn: $h_{hoeklas} = b_{hoeklas} = h_l$. Doordat de coördinaat bij de Steiner bijdrage er in het kwadraat in zit zijn de bijdragen van de boven- en onderflens en de hoeklassen allemaal positief, waardoor **het totale traagheidsmoment van het I-profiel** met de volgende uitdrukking kan worden beschreven:

$$I_{yy} = 2\left(I_{yy,eigen}^{flens} + I_{yy,steiner}^{flens}\right) + I_{yy,eigen}^{lijf} + 4\left(I_{yy,eigen}^{hoeklas} + I_{yy,steiner}^{hoeklas}\right) =$$

$$2\left(\frac{1}{12}bt_f^3 + \left(\frac{h-t_f}{2}\right)^2 bt_f\right) + \frac{1}{12}t_w\left(h-2t_f\right)^3 + 4\left(\frac{1}{36}h_l^4 + \left(\frac{1}{2}h - t_f - \frac{1}{3}h_l\right)^2 \frac{1}{2}h_l^2\right) \qquad [1.19]$$

Nu het totale traagheidsmoment van het I-profiel bekend is kan het weerstandsmoment nader geformuleerd worden:

$$W_y = \pm\frac{I_{yy}}{\frac{1}{2}h} = \pm\frac{\frac{1}{3}bt_f^3 + \left(h-t_f\right)^2 bt_f + \frac{1}{6}t_w\left(h-2t_f\right)^3 + \frac{2}{9}h_l^4 + 4\left(\frac{1}{2}h - t_f - \frac{1}{3}h_l\right)^2 h_l^2}{h} \qquad [1.20]$$

De maximale spanning in de uiterste vezels van een I-profiel kan dus worden beschreven met de volgende formule, door [1.20] te substitueren in [1.15]:

$$\sigma_x = \pm\frac{M_y}{W_y} = \pm\frac{M_y}{\left(\dfrac{\frac{1}{3}bt_f^3 + \left(h-t_f\right)^2 bt_f + \frac{1}{6}t_w\left(h-2t_f\right)^3 + \frac{2}{9}h_l^4 + 4\left(\frac{1}{2}h - t_f - \frac{1}{3}h_l\right)^2 h_l^2}{h}\right)} \qquad [1.21]$$

2 ONDERZOEKSFORMULERING EN UITGANGSPUNTEN

2.1 PROBLEEMSTELLING

Het probleem is een niet lineair verloop van de buigspanning over de hoogte van een gekromde ligger. In het geval van een I-profiel komt daar nog eens bij dat de doorsnede enigszins verandert door het moment. Voor de maximale buigspanningen kan nu niet meer gebruik worden gemaakt van de weerstandsmomenten uit de tabellen voor I-profielen. Daarnaast zijn ook de traagheidsmomenten uit de tabellen niet meer bruikbaar.

2.2 DOELSTELLING

Met behulp van het eindige-elementenprogramma ANSYS zullen verschillende I-profielen gemodelleerd worden, die worden belast op zuivere buiging. Hiervan worden vervolgens de vervangende buigstijfheid en de maximale buigspanning bepaald. Tevens is het doel het bepalen van een correctiefactor die kan worden toegepast op het standaard weerstandsmoment, zodat hieruit het weerstandsmoment voor gekromde liggers volgt.

2.3 ONDERZOEKSGRENZEN

Dit onderzoek gaat uitsluitend over de buigspanningen in een aantal gekromde stalen I-profielen. De maximale buigspanningen zullen alleen bekeken worden in de maatgevende doorsnede, dat wil zeggen de doorsnede halverwege de overspanning.
Ook voor de buigstijfheid geldt dat in dit onderzoek alleen zal worden gekeken naar de buigstijfheid van een aantal gekromde stalen I-profielen. Ook nu zal alleen halverwege de overspanning worden gekeken.
Het onderzoek beperkt zich tot de staalsoort S235.

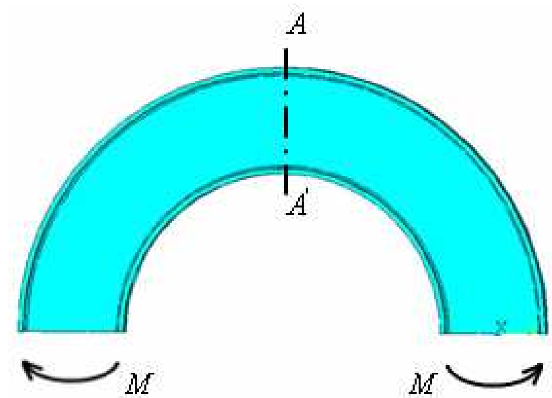
2.4 AANNAMEN

Voor het materiaal staal wordt uit gegaan van een homogene en isotrope opbouw. Daarnaast wordt aan genomen dat het materiaal zich elastisch gedraagt en dat de vloeigrens niet wordt bereikt (lineair elastisch).
Naast deze aannamen wordt gerekend met de volgende materiaaleigenschappen:

- De E-modulus van staal heeft een waarde van: $E_{staal} = 210 \cdot 10^3 \, N/mm^2$.
- De dwarskrachtcoëfficiënt van staal heeft een waarde van: $v_{staal} = 0.3$.

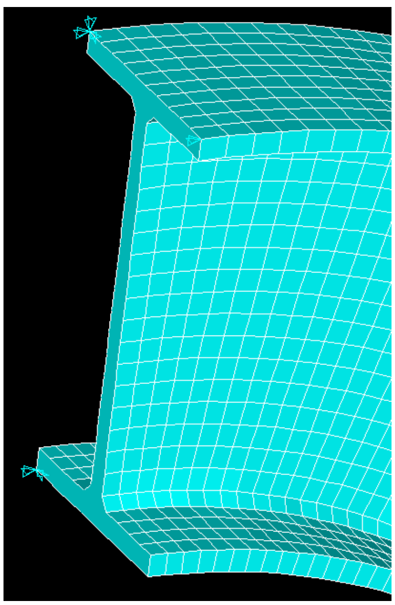
3 MODELLERING

Zoals al eerder gezegd gaat dit onderzoek over de buigspanningen in gekromde I-profielen. Het is dus zaak om er voor te zorgen dat er in het model geen normaal- en schuifspanningen aanwezig zijn. Daarnaast gaat dit onderzoek over het standaard weerstandsmoment dat vanwege de extreme kromming niet meer kan worden gebruikt om mee te rekenen. Er zal dus een model gemaakt moeten worden, waardoor er zo nauwkeurig mogelijk wat gezegd kan worden over deze twee zaken.



Figuur 3.1 – Het model

3.1 CONSTRUCTIEMECHANICA



Figuur 3.2 – De opleggingen

Een model waarbij alleen sprake is van buigspanningen is weergegevens in figuur 3.1. De opleggingen zitten in de middendoorsnede $A-A^{'}$ en is weergegeven in figuur 3.2.
De ligger heeft zes vrijheidsgraden: translatie in de x, y en z richting en rotatie om de x-, y- en z-as. In figuur 3.2 zijn dan ook zes verankeringen te zien die al deze vrijheidsgraden vastleggen. Het betreft dus een statisch bepaalde ligger.
Het krachtenevenwicht, waar in eerste instantie naar gekeken moet worden, kan dus gevonden worden door de sommaties van de krachten in de x, y en z richting en de momenten om de x-, y- en z-as, gelijk te stellen aan nul. Dit is echter zeer eenvoudig. Er is geen belasting aanwezig in één van de drie richtingen (x, y en z), waardoor de sommaties van de krachten in deze drie richtingen automatisch gelijk zijn aan nul.

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

Wat de momenten betreft zijn er alleen twee momenten aanwezig die werken om de z-as. Met de z-as gedefinieerd volgens figuur 1.4.

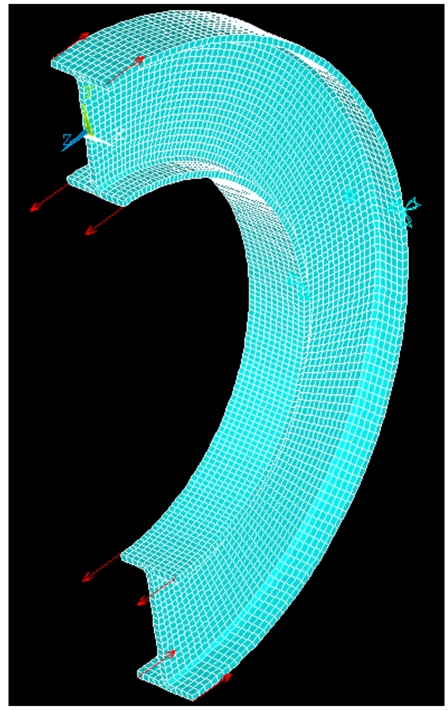
$$\sum M\big|_x = \sum M\big|_y = 0$$

$$\sum M\big|_z = 0 \quad \rightarrow \quad -M + M = 0$$

Het krachtenevenwicht en het momentenevenwicht zijn dus gegarandeerd, waardoor de ligger in evenwicht is. Hierbij moet de opmerking gemaakt worden dat het eigen gewicht van de ligger buiten beschouwing is gebleven. Met dit gegeven en het feit dat de belasting in evenwicht is met zichzelf kan geconcludeerd worden dat de oplegreacties allemaal gelijk zijn aan nul.
De momenten op de uiteinden van de ligger geven een constante momentenlijn en veroorzaken trek aan de onderkant van de ligger. Zoals hierboven aangetoond is dit ook de enige belasting die op de

ligger werkt. Van de tot lijnstuk geschematiseerde ligger zijn de M-, N- en V-lijn weergegeven in figuur 3.3

3.2 EINDIGE VOLUME ELEMENTEN



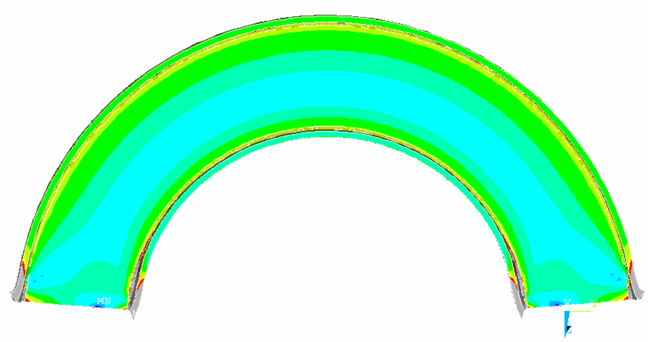
Figuur 3.4 – Het model in ANSYS

Nu het model bekend is kan het vervolgens met de eindige elementen methode gemodelleerd worden in het computerprogramma ANSYS. Hierbij wordt gebruik gemaakt van kubusvormige elementen met twintig controlepunten, ook wel knopen genoemd. Op iedere hoek en halverwege elke rib van de kubus zit een knoop (SOLID95). Het is ook mogelijk om gebruik te maken van kubusvormige elementen met acht knopen (SOLID45). Bij het gebruik van deze elementen zijn de uitkomsten wat minder nauwkeurig. Het voordeel is dat de benodigde rekentijd korter is, maar met de snelheid van de huidige computer vormt dat geen probleem. Ook is het mogelijk om van tetraëdervormige elementen gebruik te maken. Voor dit probleem is dat echter een zeer onhandige vorm, omdat het dan niet mogelijk is om een "plakje" te bekijken waaruit vervolgens de vervangende buigstijfheid bepaald moet worden. In figuur 3.4 is een gekromd I-profiel te zien, verdeeld in SOLID95 elementen.
Daarnaast is in deze afbeelding ook de belasting te zien. De momenten op de uiteinden van de gekromde ligger, zoals weergegeven in figuur 3.1, zijn gemodelleerd als krachtenkoppels. De rede dat er per uiteinde twee krachtenkoppels zijn gemodelleerd is het vereenvoudigen van de modellering. Bovendien heeft het geen invloed op de resultaten. De enige invloed die het op de resultaten kan hebben heeft betrekking op de invloedslengte die de krachten nodig hebben om zich gelijkmatige te verdelen over de doorsnede van het profiel. Door de uiteinden al gelijkmatiger verdeeld te belasten wordt de invloedslengte korter waardoor de resultaten halverwege de overspanning nauwkeuriger worden. Het aanbrengen van meerdere krachtenkoppels op de uiteinden is dus alleen maar gunstig voor de uitkomsten, al is de invloed klein.

3.3 VERIFICATIE

Nu alles bekend en ingevoerd is moet worden nagegaan of dit model ook daadwerkelijk doet wat er van verwacht mag worden.
Om aan te tonen dat de invloedslengte kort genoeg is, en de verstoringen bij de uiteinden van de ligger dus geen invloed meer hebben op de uitkomsten van de buigspanningen halverwege het profiel is de Von Mises-spanning geplot. Om te kunnen zien hoe groot de invloedslengte is moeten de normaalspanningen in tangentiële richting bekend zijn. Ofwel de normaalspanningen in de richting parallel aan axiale as van het profiel. In ANSYS kan slechts één assenstelsel gehandhaafd worden, waardoor het dus niet mogelijk is om de zojuist beschreven spanningen te weten te komen. Het gebruiken van de Von Mises-spanning is hierbij een rekentruc.
Het criterium van Von Mises, genoemd naar de Duitser Richard von Mises, geeft aan wanneer een stalen voorwerp begint te vloeien onder een meerdimensionale aangebrachte spanning. Uit de volgende formule voor de Von Mises-spanning blijkt hoe alle soorten spanningen in alle richtingen worden gemiddeld tot een spanning die onder de vloeispanning moet blijven:

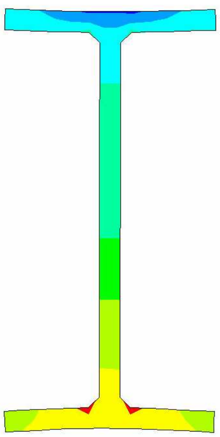
$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2+6\sigma_{xy}^2+6\sigma_{yz}^2+6\sigma_{zx}^2} \qquad [3.1]$$



Figuur 3.5 – Von Mises-spanning

Gezien het feit dat er alleen maar buigspanningen in het profiel aanwezig zijn, zoals uitgelegd in hoofdstuk 3.1 Constructiemechanica, bestaat ook de Von Mises-spanning alleen uit die buigspanningen die volgens formule [3.1] worden gecombineerd. Dit zijn dan ook precies de normaalspanningen in tangentiële richting die gezocht worden. Zoals in figuur 3.5 duidelijk te zien is zijn de buigspanningen bij de uiteinden van de ligger verstoord door de introductie van de krachten. Ook is duidelijk te zien dat dit probleem halverwege de overspanning geen rol meer speelt. De buigspanningen variëren alleen nog maar over de hoogte van het profiel en niet meer over de lengte.

Op deze manier is aan getoond dat de uitkomsten die dadelijk gevonden worden niet meer onder invloed zijn van verstoringen die het gevolg zijn van de introductie van de krachten in het profiel.



Figuur 3.6 – Verbogen flenzen

Vooraf aan dit onderzoek werd verwacht dat de doorsnede enigszins zou vervormen door het moment. De flenzen zullen waarschijnlijk meer doorbuigen dan het lijf. Uit figuur 3.6 blijkt ook dat dit het geval is. Ook de buigspanningen verlopen niet lineair over de hoogte van de doorsnede, zoals de verwachting ook was.

3.4 VARIANTEN

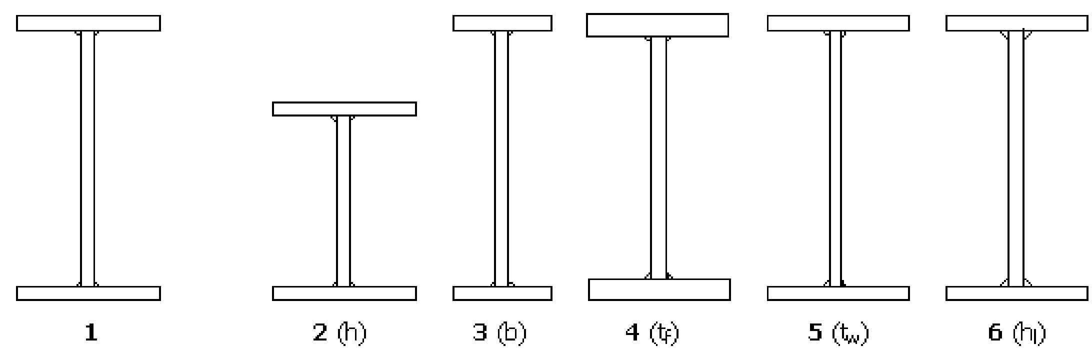
Nu alles bekend is, moeten er gegevens gegenereerd worden om het te kunnen vergelijken met de theorie, zodat er conclusies getrokken kunnen worden. Om een goede dataset te maken moet bekend zijn waarvan de resultaten afhangen. Dit zijn de variabele parameters van een I-profiel. In tabel 3.1 zijn deze parameters in de bovenste rij weergegeven en staan voor de hoogte (h), de breedte (b), de flensdikte (t_f), de lijfdikte (t_w), de hoogte (tevens de breedte) van de hoeklas (h_l) en de straal van de gekromde ligger (R). De getallen is de eerste kolom staan voor de profielen die onderzocht worden. Profiel 1 is een basisprofiel. Bij de profielen 2 tot en met 7 wordt iedere keer één parameter veranderd, zodat per variabele duidelijk wordt of die betreffende parameter veel of weinig invloed heeft op de buigstijfheid, de maximale buigspanning en het weerstandsmoment. Alle parameters zijn in millimeters.

	h	b	t_f	t_w	h_l	R
1	200	100	10	10	5	400
2	**140**	100	10	10	5	400
3	200	**70**	10	10	5	400
4	200	100	**15**	10	5	400
5	200	100	10	**7**	5	400
6	200	100	10	10	**7.5**	400
7	200	100	10	10	5	**600**

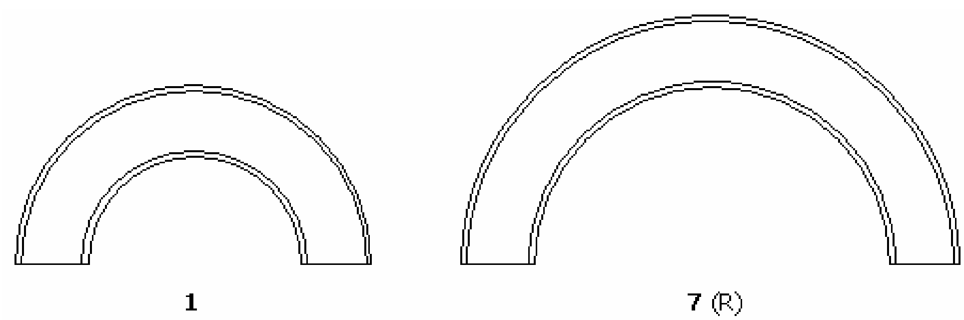
Tabel 3.1 – De zeven varianten

In figuur 3.7 en figuur 3.8 zijn de zeven profielen te zien om er visueel een indruk van te krijgen. In figuur 3.7 zijn alle verschillende doorsneden te zien zodat duidelijk wordt hoe de doorsnedenparameters van de profielen 2 tot en met 6 variëren ten opzichten van het basisprofiel 1.

Tussen haakjes is er van ieder profiel bij gezet welke doorsnedenparameter er gevarieerd is. In figuur 3.8 is het zijaanzicht te zien van de profielen 1 en 7. Hieruit blijkt dus hoe de straal van de gekromde ligger gevarieerd is ten opzichten van het basisprofiel.



Figuur 3.7 – De profielen 1 tot en met 6, met de gevarieerde doorsnedenparameters



Figuur 3.8 – De profielen 1 en 7, met de straal R als variabele

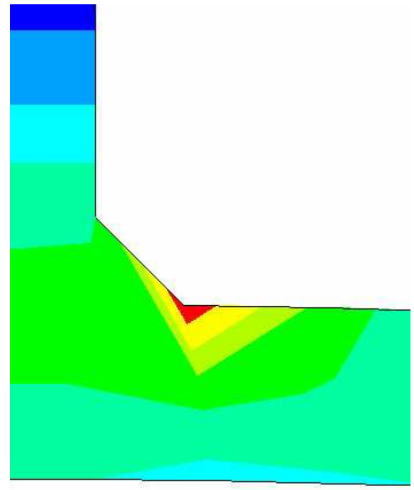
4 WEERSTANDSMOMENT

4.1 VAN SPANNING NAAR WEERSTANDSMOMENT

In hoofdstuk 1.2 is analytisch afgeleid welke formule er geldt voor de buigspanning van een ligger:

$$\sigma = \frac{M}{W} \qquad [4.1]$$

σ is de maximale buigspanning die bepaald moet worden met ANSYS. M is de opgelegde belasting die bekend is. Als σ bepaald is kunnen de vervangende weerstandsmomenten (W_{krom}) van de zeven profielen uitgerekend worden met behulp van formule [4.1].
Met behulp van ANSYS is in absolute zin gebleken dat de buigspanning op de overgang van de onderflens en het lijf (trek) groter is dan de buigspanning op de overgang van de bovenflens en het lijf (druk). Belangrijker is echter om te weten dat door de vorm van de ligger de buigspanning op de overgang van de onderflens en het lijf, ofwel de flens met de kleinste straal, in absolute zin het grootst is, ongeacht de draairichting van het moment. In figuur 4.1 is deze maximale spanning te zien. In het geval van deze zeven profielen is het de flens met trekspanningen. De maximale spanningen uit tabel 4.1 zijn dan ook positieve buigspanningen, afkomstig uit ANSYS. De weerstandsmomenten W_{recht} zijn analytisch bepaald met behulp van formule [1.20]. In de laatste kolom van tabel 4.1 zijn de verhoudingen weer gegeven tussen de weerstandsmomenten van de gekromde liggers en de weerstandsmomenten van de rechte liggers. Door de verhoudingen van de profielen 2 tot en met 7 te vergelijken met de verhouding van het basisprofiel, profiel 1, kunnen er uitspraken gedaan worden over de invloed van de verschillende variabele parameters op het weerstandsmoment.



Figuur 4.1 - Piekspanning

	σ_{max} $[N/mm^2]$	M $[Nmm]$	W_{krom} $[mm^3]$	W_{recht} $[mm^3]$	W_{krom}/W_{recht} [-]
1	13.30	$2.0 \cdot 10^6$	150421.2	233168.8	0.65
2	13.72	$1.4 \cdot 10^6$	102040.8	143955.4	0.71
3	12.99	$2.0 \cdot 10^6$	153964.6	178968.8	0.86
4	8.33	$2.0 \cdot 10^6$	240096.0	301664.6	0.80
5	13.46	$2.0 \cdot 10^6$	148588.4	218588.8	0.68
6	12.41	$2.0 \cdot 10^6$	161160.4	237883.5	0.68
7	11.19	$2.0 \cdot 10^6$	178731.0	233168.8	0.77

Tabel 4.1 – Van spanning naar weerstandsmoment

Zoals van tevoren al te verwachten was zijn het vooral de parameters met betrekking tot de flenzen, b en t_f, en de straal van de profielen, R, die de meeste invloed hebben op het weerstandsmoment.
Nog voor dat de belasting wordt aangebracht zijn de flenzen al sterk gekromd. Wanneer de belasting wordt aangebracht houdt dit in dat de flenzen deels de "mogelijkheid" hebben om niet met het lijf mee te vervormen. In de specifieke gevallen van deze zeven profielen zijn de flenzen met trekspanningen de flenzen met de kleinste straal en de flenzen met drukspanningen de flenzen met de grootste straal. Dit wil zeggen dat de flenzen met druk (de buitenste flenzen) deels niet met het lijf mee hoeven te vervormen door niet te verkorten. Voor de flenzen met trek (de binnenste flenzen) geldt dat ze deels niet met het lijf mee hoeven te vervormen door niet te verlengen. In het midden, waar de flenzen aan het lijf vast zitten, is dit niet mogelijk. Op deze punten krijgen de flenzen de vervormingen door het lijf opgelegd. De randen van de flenzen met trekspanningen krijgen deze

vervormingen niet opgelegd en willen populaire gezegd het liefst recht gaan staan onder de gegeven belasting. Hierdoor gaan de randen naar binnen staan. Dezelfde redenering geld ook voor de randen van de flenzen met drukspanningen. Deze randen zullen naar buiten gaan staan. Op deze manier verandert de doorsnede dus enigszins, zie figuur 3.6, en zijn de randen van de flenzen dus in staat om enigszins aan het moment te "ontsnappen".
Dit verklaart het verschil in weerstandsmoment (en traagheidsmoment) tussen een gekromde ligger en een rechte ligger. Van een gekromde ligger is slechts een kleiner deel van de doorsnede in staat om weerstand te bieden aan het moment. Hierdoor is de maximale buigspanning ook een stuk groter dan wanneer het een rechte ligger zou betreffen.
Naar mate een flens smaller (b wordt kleiner) en dikker (t_f wordt groter) wordt buigt die flens minder makkelijk door. Waardoor een steeds kleiner deel van de flens steeds moeilijker aan het moment kan "ontsnappen". Hierdoor gaat de verhouding W_{krom}/W_{recht} steeds meer naderen tot 1.
Naar mate de straal van een ligger met een I-profiel toe neemt (R wordt groter) gaat de gekromde ligger steeds meer lijken op een rechte ligger. Dit geldt ook voor het weerstandsmoment)en het traagheidsmoment). De verhouding W_{krom}/W_{recht} gaat steeds meer naderen tot 1. Dit is ook eenvoudig te verklaren door het feit dat de flenzen steeds rechter worden en dus minder de mogelijkheid hebben om door te buigen. De flenzen kunnen steeds minder aan het moment "ontsnappen" omdat ze naderen tot het gedrag van flenzen van een rechte ligger.

4.2 CORRECTIEFACTOR WEERSTANDSMOMENT

Nu de verhouding W_{krom}/W_{recht} van de zeven profielen bekend is, moet gezocht worden naar een correctiefactor, afhankelijk van de zes variabele parameters, die voldoet aan deze verhouding. Een formule die hieraan voldoet is de volgende:

$$\frac{W_{krom}}{W_{recht}} = \alpha_1 h + \alpha_2 b + \alpha_3 t_f + \alpha_4 t_w + \alpha_5 h_l + \alpha_6 R \qquad [4.2]$$

Een dergelijke formule als [4.2] kan voor alle zeven profielen opgesteld worden. Dit probleem is te schrijven in een matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} W_{krom,1}/W_{recht,1} \\ W_{krom,2}/W_{recht,2} \\ W_{krom,3}/W_{recht,3} \\ W_{krom,4}/W_{recht,4} \\ W_{krom,5}/W_{recht,5} \\ W_{krom,6}/W_{recht,6} \\ W_{krom,7}/W_{recht,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & b_1 & t_{f,1} & t_{w,1} & h_{l,1} & R_1 \\ h_2 & b_1 & t_{f,1} & t_{w,1} & h_{l,1} & R_1 \\ h_1 & b_2 & t_{f,1} & t_{w,1} & h_{l,1} & R_1 \\ h_1 & b_1 & t_{f,2} & t_{w,1} & h_{l,1} & R_1 \\ h_1 & b_1 & t_{f,1} & t_{w,2} & h_{l,1} & R_1 \\ h_1 & b_1 & t_{f,1} & t_{w,1} & h_{l,2} & R_1 \\ h_1 & b_1 & t_{f,1} & t_{w,1} & h_{l,1} & R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \qquad [4.3]$$

De oplossingen voor α_1 tot en met α_6 hebben nu de dimensie [mm^{-1}]. De correctiefactor voor het weerstandsmoment zou dan alleen geldig zijn wanneer voor de grootheid lengte de eenheid millimeter gebruikt wordt. Als dit niet het geval is moet het probleem eerst omgeschreven worden naar millimeter. Dit is echter eenvoudig te voorkomen door elk van de zes parameters te delen door één van de andere zes parameters. Hierdoor worden de op te lossen constanten α_1 tot en met α_6 allemaal dimensieloos. Door de parameters door elkaar te delen wordt de invloed van een parameter ten opzichte van de parameter waardoor gedeeld wordt duidelijk. Na verschillende mogelijkheden, van verschillende parameters door elkaar delen, bekeken te hebben is gebleken dat geen enkele combinatie van breuken verwaarloosd kan worden zonder dat het antwoord onnauwkeurig wordt. Uiteindelijk is formule [4.2] omgevormd tot de volgende formule:

$$\frac{W_{krom}}{W_{recht}} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{h}{b} + \alpha_3 \frac{b}{h} + \alpha_4 \frac{t_f}{b} + \alpha_5 \frac{t_w}{h_l} + \alpha_6 \frac{h_l}{t_w} + \alpha_7 \frac{R}{b} \qquad [4.4]$$

Een ander probleem is dat deze matrixvergelijking niet op te lossen is omdat er zeven vergelijkingen zijn met slechts zes onbekende. Om dit probleem toch te kunnen oplossen is een rekentruc toegepast. In de eerste kolom van de matrix worden allemaal enen geplaatst, zodat een 7*7 matrix ontstaat die wel op te lossen is. Als deze rekentruc wordt toegepast in combinatie met formule [4.4] voor alle zeven profielen dan ontstaat de volgende matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} W_{krom,1}/W_{recht,1} \\ W_{krom,2}/W_{recht,2} \\ W_{krom,3}/W_{recht,3} \\ W_{krom,4}/W_{recht,4} \\ W_{krom,5}/W_{recht,5} \\ W_{krom,6}/W_{recht,6} \\ W_{krom,7}/W_{recht,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_2/b_1 & b_1/h_2 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_2 & b_2/h_1 & t_{f,1}/b_2 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_2 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,2}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,2}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,2} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,2} & h_{l,2}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_2/b_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \qquad [4.5]$$

Met behulp van Maple is dit probleem opgelost. De gebruikte sheet is te zien in bijlage D.1. De uiteindelijke correctiefactor waarmee overgestapt kan worden van het weerstandsmoment van een recht I-profiel naar het weerstandsmoment van een gekromd I-profiel is gegeven in formule [4.6]:

$$W_{krom} = W_{recht}\left(0.250 + 0.047\frac{h}{b} + 0.412\frac{b}{h} + 3{,}000\frac{t_f}{b} - 0.150\frac{t_w}{h_l} - 0.280\frac{h_l}{t_w} + 0.060\frac{R}{b}\right) \qquad [4.6]$$

5 BUIGSTIJFHEID

5.1 VAN VERPLAATSING NAAR KROMMING

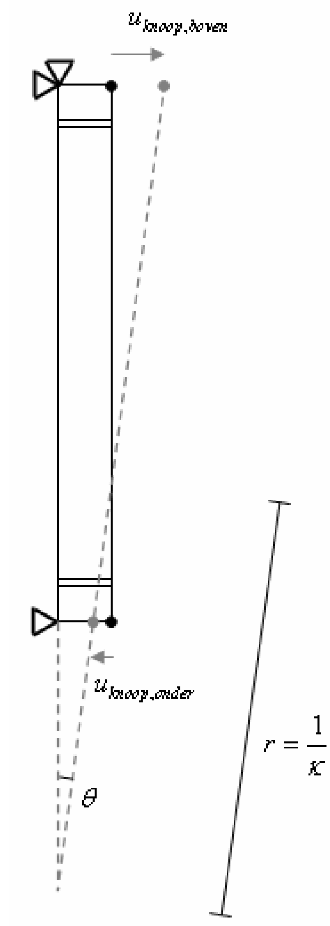
In hoofdstuk 1.1 is analytisch afgeleid welke relatie er geldt tussen het moment en de kromming:

$$M = EI\kappa \qquad [5.1]$$

M is ook nu dezelfde opgelegde belasting en is dus bekend. E is een materiaal eigenschap die ook bekend is. κ is de kromming die bepaald moet worden met behulp van ANSYS. Als κ bepaald is kunnen de vervangende traagheidsmomenten (I_{krom}) van de zeven profielen uitgerekend worden met behulp van formule [5.1].
In hoofdstuk 3.1 is uitgelegd hoe de gekromde ligger is opgelegd. In de middendoorsnede zitten zes verankeringen die de doorsnede op zijn plaats houden. Van de knopen in deze doorsnede is bekend dat ze niet zullen verplaatsen. Nu kan eenvoudig de kromming κ bepaald worden uit de verplaatsingen van de naast gelegen knopen. In figuur 5.1 is te zien hoe deze knopen zich verplaatsen wanneer de I-profielen worden belast met een moment.
Normaal gesproken moet in een dergelijke situatie met gekromde liggers, voor het bepalen van de kromming ten gevolge van alleen het moment, de initiële kromming van de ligger worden meegenomen (in mindering worden gebracht). In absolute zin zou κ dan uit de volgende formule volgen:

$$\kappa = \left| \frac{1}{R_{initieel}} - \frac{1}{R_{uiteindelijk}} \right|$$

Maar ANSYS werkt met verplaatsingen van knopen. Dit houdt in dat de initiële kromming er al in verwerkt zit, en dat de kromming ten gevolge van alleen het moment kan worden bepaald aan de hand van de verplaatsingen van de twee knopen uit figuur 5.1.
Wanneer de rotaties die optreden ten gevolge van het moment zeer klein zijn is het geoorloofd om de volgende benadering toe te passen (Zie ook beperkingen en veronderstellingen van hoofdstuk 1.1):



Figuur 5.1 – Zijaanzicht van "plakje" uit middendoorsnede

$$\theta \approx \frac{|u_{knoop,onder}| + |u_{knoop,boven}|}{h} \qquad [5.2]$$

De kromming κ van de ligger door de verbuiging ten gevolge van alleen het moment kan op de volgende manier gevonden worden. Hierbij moet [5.2] gesubstitueerd worden in [5.3]:

$$r = \frac{1}{\kappa} \approx \frac{d}{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \kappa \approx \frac{\theta}{d} \qquad [5.3]$$

r is de straal van de cirkel die door deze verbuiging ontstaat, θ is de hoek die de rechter zijde van het plakje uit figuur 4.1 met de verticaal maakt en d is de dikte van het plakje. In tabel 5.1 zijn de resultaten te zien. De traagheidsmomenten I_{recht} zijn analytisch bepaald met behulp van formule [1.19]. In de laatste kolom van tabel 5.1 zijn de verhoudingen weer gegeven tussen de traagheidsmomenten van de gekromde liggers en de traagheidsmomenten van de rechte liggers. Door de verhoudingen van de profielen 2 tot en met 7 te vergelijken met de verhouding van het basisprofiel, profiel 1, kunnen er uitspraken gedaan worden over de invloed van de verschillende variabele parameters op het traagheidsmoment.

	$u_{knoop,onder}$ $[mm]$	$u_{knoop,boven}$ $[mm]$	κ $[mm^{-1}]$	I_{krom} $[mm^4]$	I_{recht} $[mm^4]$	I_{krom}/I_{recht} $[mm^4]$
1	$0.17239 \cdot 10^{-3}$	$-0.33378 \cdot 10^{-3}$	$3.16356 \cdot 10^{-7}$	30104722.3	23316875	1.29
2	$0.22895 \cdot 10^{-3}$	$-0.36078 \cdot 10^{-3}$	$5.26545 \cdot 10^{-7}$	12661152.7	10076875	1.26
3	$0.32101 \cdot 10^{-3}$	$-0.47885 \cdot 10^{-3}$	$4.99913 \cdot 10^{-7}$	19050933.9	17896875	1.06
4	$0.16769 \cdot 10^{-3}$	$-0.28436 \cdot 10^{-3}$	$2.82531 \cdot 10^{-7}$	33708871.2	30166458	1.12
5	$0.17728 \cdot 10^{-3}$	$-0.36029 \cdot 10^{-3}$	$3.35981 \cdot 10^{-7}$	28346253.0	21858875	1.30
6	$0.17883 \cdot 10^{-3}$	$-0.33411 \cdot 10^{-3}$	$3.20588 \cdot 10^{-7}$	29707363.9	23788346	1.25
7	$0.24317 \cdot 10^{-3}$	$-0.33915 \cdot 10^{-3}$	$3.63950 \cdot 10^{-7}$	26167906.4	23316875	1.12

Tabel 5.1 – Van verplaatsing naar kromming en van kromming naar traagheidsmoment

Net als voor het weerstandsmoment geldt ook voor het traagheidsmoment dat te verwachten was dat het vooral de parameters zijn met betrekking tot de flenzen, b en t_f, en de straal van de profielen, R, die de meeste invloed hebben op het traagheidsmoment.
De randen van de flenzen van een gekromde ligger bieden aanzienlijk meer weerstand tegen buiging dan de randen van de flenzen van een rechte ligger. De randen van de flenzen van een gekromde ligger gaan naar mate de belasting groter wordt steeds verder naar buiten staan. Het materiaal van zowel de boven- als de onderflens komt hierdoor verder van het NC af te ligger waardoor vooral de Steiner bijdrage van de flenzen flink toeneemt. Dus naar mate de belasting groter wordt neemt ook het traagheidsmoment van het I-profiel toe, doordat de flenzen steeds veder doorbuigen. Dit betekent een steeds groter wordende buigstijfheid.
Wanneer deze drie parameters (b, t_f en R) groter worden geldt dat van de flenzen een steeds kleiner deel steeds moeilijker aan het moment kan "ontsnappen". Dit betekent dat de randen van de flenzen steeds minder zullen doorbuigen, waardoor de vervangende buigstijfheid steeds minder sterk kan toenemen. Dit verklaart waarom door vergroting van deze drie parameters het vervangende traagheidsmoment I_{krom} steeds meer gaat naderen tot het traagheidsmoment van een rechte ligger I_{recht}. De verhouding I_{krom}/I_{recht} nadert tot 1.

5.2 VERVANGENDE BUIGSTIJFHEID

Voor het bepalen van de vervangende buigstijfheid is dezelfde methode toegepast als bij het bepalen van de correctiefactor van het weerstandsmoment. Ook hier geldt dat de verhouding I_{krom}/I_{recht} van de zeven profielen bekend is en dat gezocht wordt naar een factor, afhankelijk van de zes variabele parameters, die voldoet aan deze verhouding. Om een uniform geheel te houden is er voor gekozen om de breuken van de verschillende parameters hetzelfde te houden:

$$\begin{bmatrix} I_{krom,1}/I_{recht,1} \\ I_{krom,2}/I_{recht,2} \\ I_{krom,3}/I_{recht,3} \\ I_{krom,4}/I_{recht,4} \\ I_{krom,5}/I_{recht,5} \\ I_{krom,6}/I_{recht,6} \\ I_{krom,7}/I_{recht,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_2/b_1 & b_1/h_2 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_2 & b_2/h_1 & t_{f,1}/b_2 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_2 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,2}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,2}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,2} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,2} & h_{l,2}/t_{w,1} & R_1/b_1 \\ 1 & h_1/b_1 & b_1/h_1 & t_{f,1}/b_1 & t_{w,1}/h_{l,1} & h_{l,1}/t_{w,1} & R_2/b_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \qquad [5.4]$$

Bovenstaande matrixvergelijking [5.4] is met behulp van Maple opgelost. De gebruikte sheet is te zien in bijlage D.2. De uiteindelijke factor waarmee overgestapt kan worden van het traagheidsmoment van een recht I-profiel naar het traagheidsmoment van een gekromd I-profiel is gegeven in formule [5.5]:

$$I_{krom} = I_{recht}\left(6.972 + 0.092\frac{h}{b} + 0.119\frac{b}{h} - 3,400\frac{t_f}{b} - 1.550\frac{t_w}{h_l} - 4.293\frac{h_l}{t_w} - 0.085\frac{R}{b}\right) \qquad [5.5]$$

6 CONCLUSIE EN INTERPRETATIE

Nu het onderzoek verricht is en de gegevens ververwerkt zijn tot resultaten moeten deze resultaten geïnterpreteerd worden zodat er conclusies aan verbonden kunnen worden.

Doordat de tijd beperkt was en de eventuele automatisering van de berekeningen in ANSYS zeer complex is, is er slechts een dataset van zeven profielen tot stand gekomen. Door dit feit zullen ook de resultaten beperkt geldig zijn.
Door middel van het oplossen van een matrixvergelijking is voor de zeven constanten, voor deze zeven profielen, de "perfecte" oplossing gevonden met betrekking tot de correctiefactor voor het weerstandsmoment en het traagheidsmoment. Voor I-profielen met andere waarden van de zes variabele parameters zullen deze formules zeker niet de "perfecte" oplossing geven. Het is echter wel een flinke stap in de goede richting.
Daarbij zijn de resultaten ook niet perfect voor de zeven profielen die in dit onderzoek zijn onderzocht. De zeven I-profielen zijn opgedeeld in eindige elementen, waardoor de uitkomsten ook een beperkte nauwkeurigheid hebben. Naar mate de resolutie hoger zou worden en de elementen dus kleiner, zouden de uitkosten nauwkeuriger worden. De perfecte oplossing bestaat dus niet, omdat de stalen profielen dan opgedeeld moeten worden in oneindig kleine elementen.
Het is niet mogelijk om te zeggen hoe groot de fout is die gemaakt wordt met de nieuwe formules, omdat er geen extra profielen gemodelleerd en doorgerekend zijn, zodat de numerieke uitkosten niet vergeleken kunnen worden met de uitkomsten van de nieuwe formules. Bovendien was er geen eerdere theorie beschikbaar voor gekromde I-profielen, waardoor ook dit geen houvast kon bieden.

Ondanks het feit dat de resultaten dus een beperkte geldigheid hebben is er wel goed inzicht verkregen in het gedrag van gekromde I-profielen, onder belasting van buigende momenten, en de invloed van de verschillende parameters op dat gedrag.

BIJLAGE A DE ORIGINELE OPDRACHT

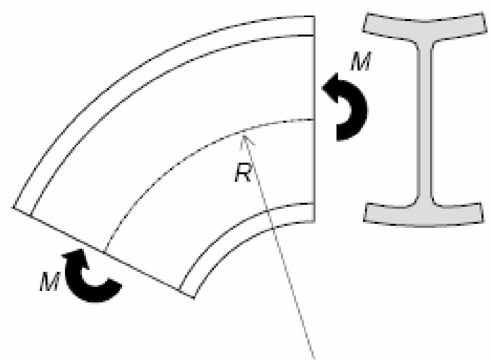
BSc – eindwerk

Structural Engineering

Buigspanningen in gekromde liggers

Toelichting

Sterk gekromde liggers worden regelmatig toegepast op plaatsen waar vormgeving belangrijk is. Ze zien er uit als bogen maar omdat de ondersteuning geen spatkracht kan opnemen werken ze niettemin als liggers. De buigspanning in deze liggers zijn niet-lineair verdeeld over de hoogte van de doorsnede. We kunnen dus niet het weerstandsmoment gebruiken om de grootste spanning te berekenen. Een verdere complicatie is dat – indien het een I-profiel betreft – de vorm van de doorsnede enigszins verandert door het moment: De flenzen kunnen namelijk aan het moment ontsnappen door meer door te buigen dan het lijf.



Opdracht

Modelleer gekromde I-profielen van verschillende afmetingen (standaard en gelast) met het eindige-elementenprogramma ANSYS (drie-dimensionaal met volume elementen). Belast de liggers op buiging en bepaal de buigstijfheid en grootste buigspanning. Bepaal een correctiefactor voor het toe te passen weerstandsmoment.

Secties

Constructiemechanica en Staalconstructies

Nadere info

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom kamer 6.48 tel. 015 278 8081
p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl

ir. R. Abspoel tel. 015 278 5358
r.abspoel@citg.tudelft.nl

TU Delft Bachelor Opleiding Civiele Techniek

21 februari 2007

BIJLAGE B STARTNOTITIE

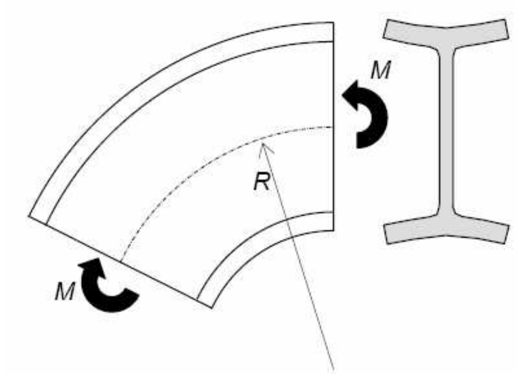
Inleiding
Vanwege esthetica wordt tegenwoordig vaak gebruik gemaakt van gekromde liggers. Het zijn liggers die meer dan zo maar een beetje zijn gekromd. Ze zien er uit als bogen, maar omdat de ondersteuningen geen spatkrachten kunnen opnemen gedragen de profielen zich als liggers. Vanwege het gekromde karakter van de profielen verlopen de buigspanningen niet lineair over de hoogte van de doorsnede van de ligger. Het weerstandsmoment uit de tabellen voor standaard profielen kan dus niet gebruikt worden voor het bepalen van de maximale buigspanningen.
Wanneer het een I-profiel betreft wordt verwacht dat de doorsnede enigszins vervormt door het moment. De flenzen zullen waarschijnlijk meer doorbuigen dan het lijf.

Probleemstelling
Het probleem is een niet lineair verloop van de buigspanning over de hoogte van een gekromde ligger. In het geval van een I-profiel komt daar nog eens bij dat de doorsnede enigszins verandert door het moment. Voor de maximale buigspanningen kan nu niet meer gebruik worden gemaakt van de weerstandsmomenten uit de tabellen voor standaard (I-)profielen. Uiteraard veranderen hierdoor ook de traagheidsmomenten en dus de buigstijfheden van de gekromde liggers.

Doelstelling
Met behulp van het eindige-elementenprogramma ANSYS verschillende standaard I-profielen modelleren die worden belast op zuivere buiging, waarvan vervolgens de buigstijfheid en de maximale buigspanning wordt bepaald. Tevens is het doel het bepalen van een correctiefactor voor het toe te passen weerstandsmoment.

Onderzoeksgrenzen
Dit onderzoek gaat uitsluitend over de buigspanningen in een aantal gekromde stalen standaard I-profielen (IPE). De buigspanningen zullen alleen bekeken worden in de maatgevende doorsnede. Ik zal mij beperken tot de staalsoort S235.

Model
Het betreft een gekromde ligger op twee steunpunten, een scharnieroplegging en een roloplegging, die zuiver op buiging wordt belast en driedimensionaal met volume-elementen in ANSYS wordt gemodelleerd. De buigspanning zal in het midden van de ligger worden geanalyseerd omdat het beeld hier niet meer vertekend is door verstoringen bij de opleggingen die ontstaan door de introductie van de krachten in de profielen aan de uiteindes.
Voor het materiaal staal ga ik uit van een uiteraard homogene, en ook belangrijk, isotrope opbouw.



Figuur B.1 – Hier gaat het om

Kennisgebrek
- Totaal onbekend met het computerprogramma ANSYS.
- Daarnaast ben ik ook onbekend met het programma DATAFIT voor curvefitting.
-

Werkplan
Wat de tijdsplanning betreft wordt ongeveer de planning in de handleiding voor het bachelor eindwerk gevolgd. Deadlines zijn echter wel strikt. Voor begeleiding kan ik terecht bij de heer Hoogenboom en de heer Abspoel. Voor computer informatie kan ik tevens terecht bij de heer Custers.

BIJLAGE C BESPREKINGSVERSLAGEN

C.1 BESPREKINGSVERSLAG STARTNOTITIE

Gegevens
De bespreking van de mijn startnotitie vond plaats op maandag 14 april 2008 om 10.30 uur. Beide begeleiders, de heer Hoogenboom en de heer Abspoel, waren aanwezig voor de bespreking.

Bespreking
De inhoud van de startnotitie was in orde. Beide begeleiders hadden een aantal kleine opmerkingen. Deze opmerkingen moest ik verwerken en de nieuwe versie daarna opsturen naar beide begeleiders. Ik heb een plaatje toegevoegd om het probleem te verduidelijken. Daarnaast heb ik een aantal zinnen verfijnd.
Verder is besproken hoe het nu verder moet. Met dit BSc eindwerk is het de bedoeling dat ik langzamerhand naar het eindresultaat toe werk. Het programma ANSYS is een complex en uitgebreid programma. Het zal ongeveer 3 weken duren voordat ik het programma een beetje onder de knie heb. Daarom is mij aangeraden om simpel te beginnen. Ik moet beginnen met het modelleren van een rechte ligger (boogstralen bij de aansluiting van de flenzen en het lijf (nog) niet mee genomen). Breng de opleggingen en de krachten aan en laat het programma het een en ander berekenen. Dit simpele voorbeeld moet dan met de hand worden nagerekend om te kijken of het programma doet wat ik mag verwachten. Als dit genoeg overeen komt is de modellering juist en is het tijd voor een volgende stap. Het daadwerkelijke model moet gemaakt worden.
Verder zijn er nog twee manieren besproken om uit de resultaten het nieuwe traagheidsmoment (I) van de profielen te berekenen.
Het model is nauwkeurig genoeg wanneer de uitkomsten bij een verdubbeling van het aantal elementen een afwijking van minder dan 1% geeft ten opzichte van het vorige resultaat.

Afspraak
Op vrijdag 25 april 2008 stuur ik mijn werk, dat ik tot dan heb geproduceerd, naar beide begeleiders, zodat we het dinsdag na de meivakantie kunnen bespreken. De afspraak met beide begeleiders voor de tussenpeiling staat gepland op dinsdag 6 mei 2008 om 9.30 uur.

C.2 BESPREKINGSVERSLAG TUSSENRAPPORT

Gegevens
De bespreking van tussenpeiling vond plaats op 6 mei 2008 om 9.30 uur. Beide begeleiders, de heer Hoogenboom en de heer Abspoel, waren aanwezig tijdens de bespreking.

Bespreking
De inhoud van het tussenrapport was over het algemeen in orde. De heer Abspoel heeft mij gevraagd zijn commentaar door te lezen, om vervolgens het commentaar naar eigen inzicht te verwerken. Dit had vooral betrekking op de schrijfwijze en op de afleidingen die ik heb gegeven voor buigstijfheid en buigspanning. De nieuwe versie mail ik door. Naast de kwaliteit van het rapport was ook de hoeveelheid geproduceerd werk voldoende. Beide begeleiders waren dan ook tevreden en ik heb toestemming gekregen om verder te gaan.
Daarnaast zijn er natuurlijk de resultaten van ANSYS. De voortgang met de modellering was prima, ik lag goed op schema. Aan de hand van de resultaten is vooral besproken wat er verder moet gebeuren. De modellering en de resultaten waren op een paar details na in orde. Naast deze kleine aanpassing in de modellering moeten de resultaten nauwkeuriger worden.
Er zijn een aantal zaken aan de orde gekomen:

- Het "proef" profiel dat ik had gemodelleerd voldeed niet aan de afmetingen van een standaard IPE profiel. Beide begeleiders vonden dit geen probleem. Het "proef" profiel kon wat hun betreft dienen als basis profiel voor het verkrijgen van resultaten. Aangezien er niet gebruik gemaakt kan worden van standaard profielen, vanwege de sterke kromming, moeten de profielen worden opgebouwd uit losse plaatelementen waarvan je de afmetingen naar eigen smaak kan kiezen. Hierdoor is er ook voor gekozen om de afrondingsstralen, die worden gebruikt voor standaard IPE profielen, te vervangen door een hoeklas omdat de delen aan elkaar gelast moeten worden. Hiermee wordt de onderzoeksgrens enigszins aangepast.

- Het aantal profielen dat gemodelleerd moet worden. Dit zullen er ongeveer zes zijn, vanwege het aantal parameters die kunnen variëren. Te weten: de hoogte, de breedte, de flens- en lijfdikte, de keeldoorsnede van de hoeklassen en de straal van de gekromde ligger. Ieder profiel wordt gebaseerd op het basis profiel. En iedere keer wordt er bij elk profiel aan parameter aangepast. Van het standaard profiel wordt de vervangende W en I berekend. Door nu één voor één de verschillende parameter een keer te veranderen wordt duidelijk welke parameters eventueel veel invloed hebben op de W en I. Als de tijd het toe laat kan ook voor deze parameters nog een derde profiel worden gemodelleerd voor nog meer nauwkeurigheid.
- De meshing moet gehalveerd worden voor een nauwkeurigere uitkomst. Het was 30 mm en moet dus ongeveer 15 mm worden. Bij het kiezen van de afmetingen van het profiel en de mesh moet het volgende punt in de gaten worden gehouden: halverwege de breedte van het profiel moet er in de flenzen een overgang zijn van twee element zodat het optisch aanbrengen van de krachten nauwkeurig kan verlopen.
- Het verkrijgen van de maximale buigspanningen kan eenvoudig gebeuren door de maximale waarde af te lezen.
- Voor het bepalen van de vervangende buigstijfheid is er een methode nodig om de kromming te weten te komen. Hier is een formule voor nodig waar onduidelijkheid over bestond. De heer Hoogenboom zou hier ook even naar kijken.

BIJLAGE D MAPLE SHEETS

D.1 CORRECTIEFACTOR WEERSTANDSMOMENT

```
> restart;
>
h1:=200;h2:=140;b1:=100;b2:=70;tf1:=10;tf2:=15;tw1:=10;tw2:=7;
hl1:=5;hl2:=7.5;R1:=400;R2:=600;
```

$$h1 := 200$$

$$h2 := 140$$

$$b1 := 100$$

$$b2 := 70$$

$$tf1 := 10$$

$$tf2 := 15$$

$$tw1 := 10$$

$$tw2 := 7$$

$$hl1 := 5$$

$$hl2 := 7.5$$

$$R1 := 400$$

$$R2 := 600$$

```
>
eq1:=0.65=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1
)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq1 := 0.65 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
>
eq2:=0.71=(a1*1)+(a2*h2/b1)+(a3*b1/h2)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1
)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq2 := 0.71 = a1 + \frac{7\,a2}{5} + \frac{5\,a3}{7} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
>
eq3:=0.86=(a1*1)+(a2*h1/b2)+(a3*b2/h1)+(a4*tf1/b2)+(a5*tw1/hl1
)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b2);
```

$$eq3 := 0.86 = a1 + \frac{20\,a2}{7} + \frac{7\,a3}{20} + \frac{a4}{7} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + \frac{40\,a7}{7}$$

```
>
eq4:=0.80=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf2/b1)+(a5*tw1/hl1
)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq4 := 0.80 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{3\,a4}{20} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
>
eq5:=0.68=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw2/hl1
)+(a6*hl1/tw2)+(a7*R1/b1);
```

$$eq5 := 0.68 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + \frac{7\,a5}{5} + \frac{5\,a6}{7} + 4\,a7$$

```
> eq6:=0.68=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl2)+(a6*hl2/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq6 := 0.68 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 1.333333333\,a5 + 0.7500000000\,a6 + 4\,a7$$

```
> eq7:=0.77=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R2/b1);
```

$$eq7 := 0.77 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 6\,a7$$

```
> solution:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7},{a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```

$$solution := \{a4 = 3., a5 = -0.1500000015, a2 = 0.04705882353, a1 = 0.2500000051, a6 = -0.2800000042, a3 = 0.4117647059, a7 = 0.06000000000\}$$

```
>
```

D.2 VERVANGENDE BUIGSTIJFHEID

```
> restart;
> h1:=200;h2:=140;b1:=100;b2:=70;tf1:=10;tf2:=15;tw1:=10;tw2:=7;hl1:=5;hl2:=7.5;R1:=400;R2:=600;
```

$$h1 := 200$$
$$h2 := 140$$
$$b1 := 100$$
$$b2 := 70$$
$$tf1 := 10$$
$$tf2 := 15$$
$$tw1 := 10$$
$$tw2 := 7$$
$$hl1 := 5$$
$$hl2 := 7.5$$
$$R1 := 400$$
$$R2 := 600$$

```
> eq1:=1.29=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq1 := 1.29 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
> eq2:=1.26=(a1*1)+(a2*h2/b1)+(a3*b1/h2)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq2 := 1.26 = a1 + \frac{7\,a2}{5} + \frac{5\,a3}{7} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
> eq3:=1.06=(a1*1)+(a2*h1/b2)+(a3*b2/h1)+(a4*tf1/b2)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b2);
```

$$eq3 := 1.06 = a1 + \frac{20\,a2}{7} + \frac{7\,a3}{20} + \frac{a4}{7} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + \frac{40\,a7}{7}$$

```
> eq4:=1.12=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf2/b1)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq4 := 1.12 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{3\,a4}{20} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 4\,a7$$

```
> eq5:=1.30=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw2/hl1)+(a6*hl1/tw2)+(a7*R1/b1);
```

$$eq5 := 1.30 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + \frac{7\,a5}{5} + \frac{5\,a6}{7} + 4\,a7$$

```
> eq6:=1.25=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl2)+(a6*hl2/tw1)+(a7*R1/b1);
```

$$eq6 := 1.25 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 1.333333333\,a5 + 0.7500000000\,a6 + 4\,a7$$

```
> eq7:=1.12=(a1*1)+(a2*h1/b1)+(a3*b1/h1)+(a4*tf1/b1)+(a5*tw1/hl1)+(a6*hl1/tw1)+(a7*R2/b1);
```

$$eq7 := 1.12 = a1 + 2\,a2 + \frac{a3}{2} + \frac{a4}{10} + 2\,a5 + \frac{a6}{2} + 6\,a7$$

```
> solution:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7},{a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7});
```

$$solution := \{a2 = 0.09248366013, a1 = 6.972222275, a5 = -1.550000016, a3 = 0.1189542484, a7 = -0.08500000000, a6 = -4.293333377, a4 = -3.400000000\}$$

```
>
```

BIJLAGE E LITERATUURLIJST

- C. Hartsuijker, Toegepaste Mechanica Deel 2 – Spanningen, vervormingen en verplaatsingen
- A. Simone, Analysis of slender structures
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Von_Mises-spanning