

Onderzoek naar een gebruiksvriendelijke
ontwerpformule voor de eigenfrequentie
van panelen ten gevolge van belasting.

Bachelor Eindwerk

Eigenfrequentie van belaste
panelen

Roland van Dijk
4189469
11/11/2014
Technische Universiteit Delft
Civiele Techniek en Geowetenschappen
Structural Engineering
Dr.Ir. P.C.J. Hoogenboom
Dr.Ir. F.P. van der Meer

Voorwoord

Geachte lezer,

Voor u ligt het eindrapport van een onderzoek naar de invloed van membraankrachten op de eigenfrequentie van een paneel. Dit onderzoek is uitgevoerd als zijnde het eindwerk van de opleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft.

Gedurende een periode van zeven weken, van 1 september 2014 tot en met 20 oktober 2014, heb ik met plezier aan dit onderzoek gewerkt. In deze periode is er geleerd te werken in een eindige elementenprogramma; er is een model gemaakt dat de eigenfrequentie van een paneel berekent ten gevolge van membraankrachten en aan de hand van dit model is een ontwerpformule bepaald die een nauwkeurige benadering van de eigenfrequentie levert van een door membraankrachten belast paneel.

Dit onderzoek is tot stand gekomen onder begeleiding van dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en dr.ir F.P. van der Meer. Ik wil beiden hierbij dan ook hartelijk danken voor hun geboden hulp en geïnvesteerde tijd. Beiden hebben ze mij tijdens besprekingen zeer nuttige adviezen en nieuwe inzichten verschaft. Voor mij was het erg leerzaam een dergelijk onderzoek te doen en ik hoop dat voor iedereen die dit rapport leest hetzelfde geldt.

R.M. van Dijk
Delft, November 2014

Samenvatting

Panelen worden vanwege de gunstige mechanische eigenschappen veelvuldig toegepast. In al deze toepassingen vinden verschillende belastingen plaats. De vergelijkingen die de mechanica van een paneel beschrijven zijn zeer ingewikkeld. Er is om deze reden behoefte aan een gemakkelijk hanteerbare en gebruiksvriendelijke ontwerpformule die een goede benadering van de laagste eigenfrequentie van een vierkant paneel geeft. Door een groot aantal eindige elementen berekeningen te doen in Ansys zijn de verbanden tussen membraankrachten en eigenschappen van het paneel gezocht en de manier waarop deze de eigenfrequentie van het paneel beïnvloeden. De grenzen waarvoor deze verbanden nog nauwkeurig genoeg gelden, zijn hierbij ook geformuleerd. Uit literatuur blijken de volgende ontwerpformules toepasbaar in verschillende belasting gevallen:

Vlak paneel zonder belasting:

$$f_{11, no\ load} = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

Vlak paneel onder invloed van normaalkracht:

$$f_{11, loads} = \sqrt{f_{11, no\ load}^2 + \frac{n_{xx}}{4\rho hl^2} + \frac{n_{yy}}{4\rho hl^2}}$$

De na onderzoek afgeleide formule voor een vlak paneel onder invloed van normaal- en schuifkracht en de toevoeging van kromming:

$$f_{11, load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho hl^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)}$$

$$f_{11, curve, load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\rho\pi^2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho hl^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)}$$

Deze formule is niet algemeen geldig en er moet worden voldaan aan verschillende eisen zodat voldoende nauwkeurigheid van de benadering gewaarborgd blijft.

De elasticiteitsmodulus [E] moet voldoen aan $1.0 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \leq E$

De verhouding $\frac{l}{h}$ moet voldoen aan: $30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000$.

De schuifkracht n_{xy} is in verhouding met de knikcapaciteit $n_{xy, cr}$ begrensd. Deze verhouding moet voldoen aan: $\left| \frac{n_{xy}}{n_{xy, cr}} \right| \leq 0.7$.

Normaalkrachten n_{xx}, n_{yy} worden in verhouding met knikcapaciteit $(n_{xx} + n_{yy})_{cr}$ begrensd. De verhoudingen moeten voldoen aan: $\frac{n_{xx} + n_{yy}}{n_{xx, cr} + n_{yy, cr}} \leq 0.9$

De kromtestraal $R_x = R_y$ moet voldoen aan: $0.5m \leq R_x, R_y$

Inhoudsopgave

Voorwoord	2
Samenvatting.....	3
Inhoudsopgave	4
Symbolenlijst	5
1. Inleiding	6
1.1 Probleemstelling.....	6
1.2 Doelstelling	7
1.3 Plan van aanpak.....	7
2. Theorie schalen	8
3. Vlakke panelen	10
4. Modellerings	11
5. Invloed membraankracht	16
5.1 Invloed van de dichtheid op n_{xy}	16
5.2 Invloed van de elasticiteitsmodulus op n_{xy}	17
5.3 Invloed van de dikte op n_{xy}	18
5.4 Opstellen van de formules	18
5.5 Combinatie n_{xx} , n_{yy} en n_{xy}	20
6. Bruikbaarheidsgrenzen.....	22
6.1 Elasticiteitsmodulus $[E]$	23
6.2 Dichtheid $[\rho]$	25
6.3 Verhouding lh	26
6.4 Verhouding $n_{xy}n_{cr}, xy$	27
6.5 Verhouding $n_{xx}n_{xx}, cr$ en $n_{yy}n_{yy}, cr$	28
6.6 Testen van de formules.....	30
6.7 Kromming	31
7. Conclusies en aanbevelingen	33
8. Literatuurlijst	35
Bijlagen	36
Bijlage A.....	37
Bijlage B	41
Bijlage C	42
Bijlage D.....	48
Bijlage E	51

Symbolenlijst

n_{xx}	Normaalkracht in x-richting.	$\left[\frac{N}{m}\right]$
n_{yy}	Normaalkracht in y-richting.	$\left[\frac{N}{m}\right]$
n_{xy}	Schuifkracht in het vlak.	$\left[\frac{N}{m}\right]$
κ	Kromming.	$\left[\frac{1}{m}\right]$
R	Kromtestraal.	$[m]$
f	Eigenfrequentie.	$\left[\frac{1}{s}\right]$
λ	Parameter voor paneel.	$[-]$
a, b, l	lengte van het paneel.	$[m]$
E	Elasticiteitsmodulus.	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
h	Dikte van het paneel.	$[m]$
ρ	Dichtheid van het materiaal.	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
ν	Dwarscontractie coëfficiënt	$[-]$
i, j	Aantal halve trillingen horizontaal en verticaal.	$[-]$
$n_{cr,xy}$	Knikcapaciteit voor afschuiving	$\left[\frac{N}{m}\right]$
$(n_{xx} + n_{yy})_{cr}$	Knikcapaciteit voor normaalkracht.	$\left[\frac{N}{m}\right]$

1. Inleiding

1.1 Probleemstelling

Gekromde panelen hebben hun toepassing op erg veel verschillende gebieden. Deze toepassing varieert van de lucht- en ruimtevaart industrie tot onderdelen voor auto's of gebouwen. Door het grote aantal verschillende toepassingen is er ook veel diversiteit tussen verschillende panelen. Zo kunnen de afmetingen en kromtestraal van een paneel per toepassing erg verschillen, maar ook zullen er verschillende belastingen op werken. Deze membraankrachten die op zo'n paneel werken, kunnen als een voorspanning worden gezien en zullen de eigenschappen van het paneel beïnvloeden. Bij het ontwerpen van een constructie waarbij gebruik wordt gemaakt van deze gekromde panelen is het van belang om te weten wat het effect van de optredende voorspanning zal zijn op de eigenschappen van de plaat.

Een eigenschap van een gekromd paneel is dat het erg stijf is. Een gebrek aan stijfheid zal zelden de oorzaak zijn van het falen van zo'n constructie onderdeel. In de hierboven genoemde toepassingen van panelen, of schalen, treden ook veel dynamische belastingen op. Als door zo'n belasting resonantie optreedt in het constructie element kan deze daardoor falen. In het ontwerp zal dus rekening moeten worden gehouden met de dynamische belastingen die optreden bij een bepaalde toepassing.



*Figuur 1: Three collapsed cooling towers at Ferrybridge, UK
[http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT4143_handout_15.pdf]*

1.2 Doelstelling

Figuur 1 is een afbeelding van ingestorte koeltorens als gevolg van resonantie door een optredende windbelasting. Het optreden van resonantie kan dus enorme gevolgen hebben. Om te kunnen voorkomen dat er onder de optredende dynamische belastingen resonantie op zal treden, is het van belang de eigenfrequentie van de constructie te kunnen berekenen. Voor schalen gebeurt dit aan de hand van eindige elementen programma's zoals Ansys. Dit is echter een tijdrovende bezigheid en is dus niet ideaal. In het voorontwerp zou het gunstiger zijn gebruik te kunnen maken van een ontwerpformule die simpel in het gebruik is en dus ook sneller dan een eindige elementen berekening. Dit onderzoek zal zo'n formule moeten opleveren. Zo'n ontwerpformule bestond al voor rechte panelen en een ander onderzoek heeft zich gericht op de invloed van de kromming van het paneel op de eigenfrequentie. Nu is het de bedoeling deze formule verder uit te breiden zodat ook rekening gehouden wordt met de invloed van optredende membraankrachten op het gekromde paneel.

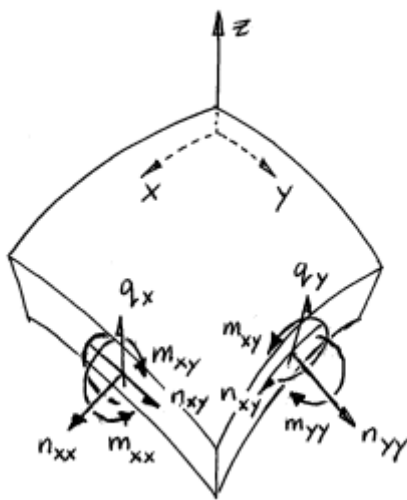
1.3 Plan van aanpak

Om aan de hand van gegevens die verkregen worden uit Ansys een formule op te stellen is het eerst van belang dat het model werkt. Eerst wordt het model zo gemaakt dat het te controleren is met een bekende formule van de eigenfrequentie. De formule uit (Blevins, 1979) kan hiervoor gebruikt worden. Als blijkt dat het model de juiste resultaten geeft voor deze formule kan het verder worden uitgebreid zodat de nog onbekende invloed van andere belastingen en krommingen kan worden gevonden. Aan de hand van dit steeds verder uitgebreide model kan er dan voor al deze gevallen gekeken worden wat hiervan de invloed op de eigenfrequentie is. Zo kan steeds het effect van een individuele verandering bekeken worden, maar daarna ook of het in combinatie met de eerder verkregen verbanden nog steeds opgaat. Zo wordt de formule uit (Blevins, 1979) steeds verder uitgebreid tot er een formule is die de eigenfrequentie goed kan benaderen voor een gekromd paneel onder invloed van membraankrachten.

2. Theorie schalen

Een schaal is een paneel met een zeer kleine dikte vergeleken met andere dimensies. In Figuur 2 is aangegeven wat de positieve snedekrachten zijn op een stukje van een schaal. Dit stukje zou een onderdeel kunnen zijn van een grotere schaalconstructie. In de afbeelding zijn de krachten op een plek aangegeven, maar in werkelijkheid zijn het spanningen die op de snede werken. Deze spanningen kunnen vervangen worden door krachten per eenheid van lengte $[\frac{N}{m}]$. Momenten kunnen ook per eenheid van lengte worden genomen $[\frac{Nm}{m}]$, maar hier zal verder niet op in worden gegaan.

De membraankrachten die op zo'n stukje van een schaal werken, dit zijn de n_{xx} , n_{yy} en de n_{xy} , zullen wel worden beschouwd. Als definitie voor n_{xx} geldt dat dit een kracht in de x-richting is die werkt op een oppervlakje waarvan de normaal ook in de x-richting is. Voor de n_{yy} geldt hetzelfde, maar dan in de y-richting. Bij n_{xy} staat de eerste index voor de richting van de kracht en de tweede voor de richting van de normaal van het vlakje waar de kracht op werkt.



Figuur 2: Positieve snedekrachten
[\[http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT4143_handout_1.pdf\]](http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT4143_handout_1.pdf)

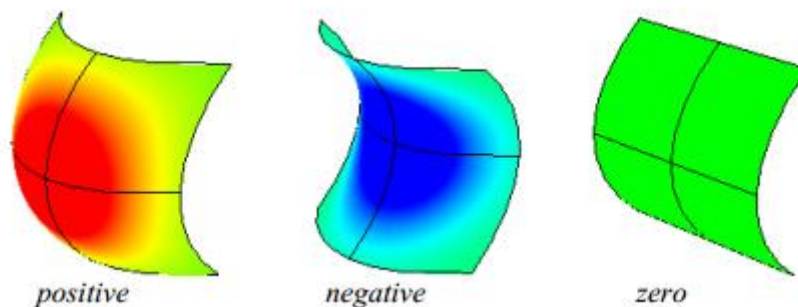
Schalen kunnen worden getypeerd in verschillende dikten. Er wordt gesproken van een dikke schaal als $5 < \frac{a}{t} < 30$. Hier is a de lengte van de schaal en t de dikte. In een dikke schaal moeten bij het modelleren alle vervormingen met betrekking tot membraankrachten, in het vlak werkende momenten en afschuifkrachten worden meegenomen. Bij een dunne schaal geldt $30 < \frac{a}{t} < 4000$. In dit geval kan de afschuifvervorming verwaarloosd worden en er kan worden aangenomen dat spanningen als gevolg van buigende momenten lineair over de dikte van de schaal zijn. Als $4000 < \frac{a}{t}$ wordt er gesproken van een membraan, bijvoorbeeld een tent. Alle belasting die hierin plaats vindt, zijn de membraankrachten. Buigende momenten en drukkrachten zijn verwaarloosbaar bij een membraan.

Bij schalen is het gebruikelijk de Gausskromming te gebruiken. Zoals te zien in Figuur 3 kan de Gausskromming positief, negatief of nul zijn. Vergelijking **(1)** laat zien hoe de Gausskromming berekend kan worden. Hierin zijn κ_{yy} en κ_{xx} de krommingen in x- en y-richtingen en κ_{xy} is de twist die in de schaal kan zitten.

$$\kappa_G = \kappa_{xx}\kappa_{yy} - \kappa_{xy}^2 \quad (1)$$

Bij een positieve Gausskromming heeft het oppervlak de vorm van een kom, hierin zijn de krommingen in dezelfde richting. Als de Gausskromming negatief is heeft het oppervlak de vorm van een zadel, de richting van κ_{xx} en κ_{yy} zijn hier in tegengesteld aan elkaar. Er zijn ook gevallen waarbij de Gausskromming gelijk is aan nul. In deze gevallen is κ_{xx} of κ_{yy} gelijk aan nul.

De Gausskromming heeft invloed op de doorbuiging die een schaal krijgt door krachten die er op werken. Er geldt dat een, in absolute zin, grote Gausskromming een kleine doorbuiging veroorzaakt. Ook heeft het invloed op membraanspanningen in de schaal. Deze treden op door een verandering in Gausskromming als gevolg van belastingen.



Figuur 3: Gausskromming

[http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/CT4143_handout_1.pdf]

3. Vlakke panelen

Een vlak paneel is een schaal waarin de krommingen in beide richtingen gelijk zijn aan nul. Dit wil zeggen dat de Gausskromming gelijk is aan nul. Dit houdt in dat de kromtestraal in x-richting en y-richting gelijk zijn aan ∞ .

Vergelijking **(2)** (Blevins, 1979) geeft een algemene vergelijking voor het berekenen van de eigenfrequentie van een vlak paneel. Hierin staan i en j respectievelijk voor het aantal halve golven in de trilvorm langs de horizontale as en het aantal halve golven in de trilvorm langs de verticale as. Aangezien we alleen geïnteresseerd zijn in de eerste mode zal voor i en j de waarde 1 gebruikt worden.

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (2)$$

In het geval van een aan alle vier de zijden scharnierend opgelegd paneel is vergelijking **(3)** (Blevins, 1979) van toepassing. Door uit te gaan van een vierkant paneel ($a=b$) en dat alleen de eerste mode interessant is volgt uit de vergelijking dat λ_{ij}^2 gelijk is aan $2\pi^2$.

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2 \left[i^2 + j^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] = 2\pi^2 \quad (3)$$

Als vergelijking **(2)** en **(3)** nu gecombineerd worden verkrijgen we de formule voor de laagste eigenfrequentie van een vierkant paneel met kromming gelijk aan nul. De formule die hieruit volgt **(4)** zal verder gebruikt worden. De lengten a en b zijn gelijk aan elkaar en wordt l genoemd. Het blijkt dat vergelijking **(4)** niet meer geldt als het paneel dikker wordt. Als de formule dan wordt vergeleken met een Ansys berekening blijken de resultaten een grotere afwijking te hebben dan als het gaat om een dunnere plaat. Er wordt om deze reden vooral gekeken naar dunne panelen.

$$f_{11, no\ load} = \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (4)$$

Bij het toepassen van een vlak paneel in een constructie zullen altijd krachten op het paneel werken. Deze membraankrachten, of voorspanning, hebben een invloed op de laagste eigenfrequentie. Trekkrachten veroorzaken een hogere eigenfrequentie en drukkrachten een lagere eigenfrequentie, tot deze gelijk is aan nul en het paneel zal knikken. Er is een formule **(5)** (Blevins, 1979) bekend voor het berekenen van de laagste eigenfrequentie van een vierkant paneel inclusief voorspanning. Deze benadering neemt aan dat belasting geen invloed heeft op de trilvorm van het paneel.

$$f_{11, loads} = \sqrt{f_{11, no\ load}^2 + \frac{n_{xx} J}{4\rho h l^2} + \frac{n_{yy} J}{4\rho h l^2}} \quad (5)$$

De coëfficiënt J in formule **(5)** is in het geval van een scharnierend opgelegde vierkante plaat gelijk aan 1. n_{xx} en n_{yy} zijn de membraankrachten in x-richting en y-richting, deze wordt positief aangenomen als het een trekkracht is en negatief bij een drukkracht.

4. Modelling

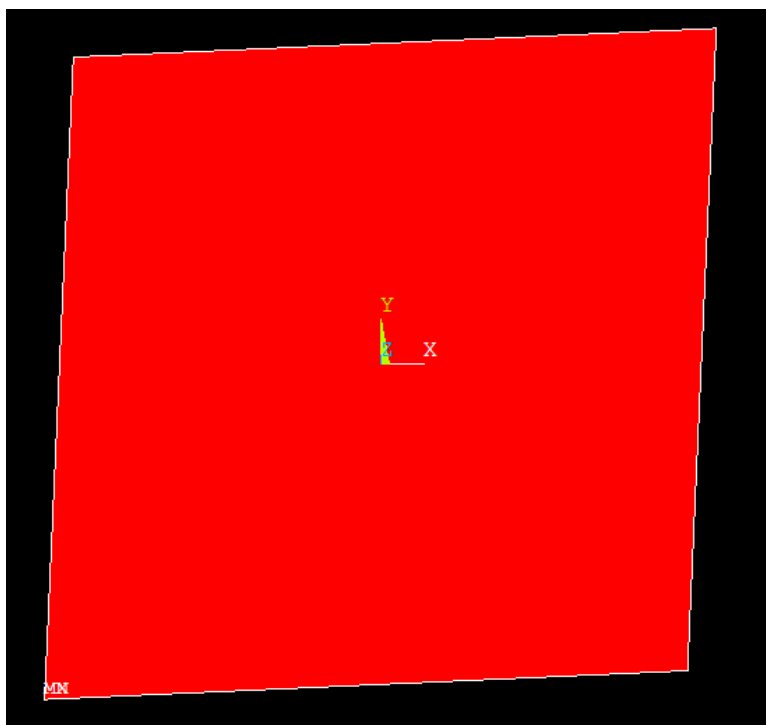
Met behulp van het eindige elementen programma Ansys kan een model gemaakt worden. Een groot aantal geometrieën kan hiermee gemodelleerd worden. Het is ook mogelijk een paneel te modelleren en aan de hand van het model allerlei eigenschappen van het paneel te berekenen. Zo kunnen spanningen en verplaatsingen berekend worden, maar ook de eigenfrequentie kan berekend worden.

Het is van belang een juist model te maken. De wijze waarop de verschillende onderdelen van het model worden gemodelleerd kan invloed hebben op de uitkomst die verkregen wordt. Zo heeft de wijze van oplegging invloed op de eigenfrequentie van de plaat.

Het model zoals in **Bijlage A** is opgebouwd uit verschillende onderdelen. Het preprocess, de solution en het post process. In het preprocess wordt het model opgebouwd; hier worden de materiaaleigenschappen gedefinieerd, de afmetingen en eventuele kromming alsook belastingen gedefinieerd en wordt het aantal elementen vastgesteld. Aan de hand van deze gegevens worden de knopen geplaatst; de elementen komen tussen deze knopen te liggen. Hierna volgt het roteren van het assenstelsel per knoop, zodat de krachten in de richting van het paneel werken. Voor de randen van het paneel worden de vrijheidsgraden gedefinieerd. Vervolgens worden de krachten op de knopen aan de rand van het paneel geplaatst.

Bij de solution wordt het soort analyse gedefinieerd; dit kan een “static” analyse of een “modal” analyse zijn. In het post process worden de resultaten van de analyse weergegeven. Hier kunnen conclusies uit worden getrokken.

Eerst is er een model gemaakt waarin nog geen kromming in het paneel zit, zodat het model gecontroleerd kan worden aan de hand van vergelijking (5). Ook is met behulp van Ansys een lineair elastische berekening uitgevoerd om te testen of de spanningsverdeling over het paneel uniform is. In Figuur 4 is de spanningsverdeling over het paneel weergegeven. Dit geldt voor een vlak paneel.



Figuur 4: Uniforme spanning in x-, y- en xy-richting

Als gevolg van de membraankrachten die in het vlak werken zullen er langs de randen verlengingen en verkortingen optreden. Deze zijn meegenomen in de randvoorwaarden van het model; in de richting langs de rand van het paneel zijn verplaatsingen opgelegd. Deze verplaatsingen zijn per knoop opgelegd naar aanleiding van de elastische rekken die op treden als gevolg van de membraankrachten. De vergelijkingen die hier aan ten grondslag liggen zijn vergelijking **(6)** en **(7)**. De randen kunnen in de richting loodrecht op het vlak (de z-richting) niet verplaatsen en kunnen onder invloed van de normaalkracht verplaatsen in de richting van het vlak (x- en y-richting). Dit is noodzakelijk, omdat de krachten anders direct in de oplettingen opgenomen zouden worden en het effect van de membraankrachten dus niet in het eindresultaat is terug te vinden.

$$U_x = \frac{n_{xx} - \nu n_{yy}}{Eh} x + \frac{n_{xy}}{2Gh} y \quad (6)$$

$$U_y = \frac{n_{yy} - \nu n_{xx}}{Eh} y + \frac{n_{xy}}{2Gh} x \quad (7)$$

In Tabel 1 staan de eigenschappen van het vierkante, niet gekromde paneel. De waarden zijn constant gehouden en alleen de membraankrachten zijn gevarieerd. In Tabel 2 zijn de waarden opgenomen die bij een bepaalde belasting met de formule berekend kunnen worden en de waarden die met behulp van het Ansys model verkregen zijn. De laatste kolom geeft aan wat het procentuele verschil is tussen deze twee waarden.

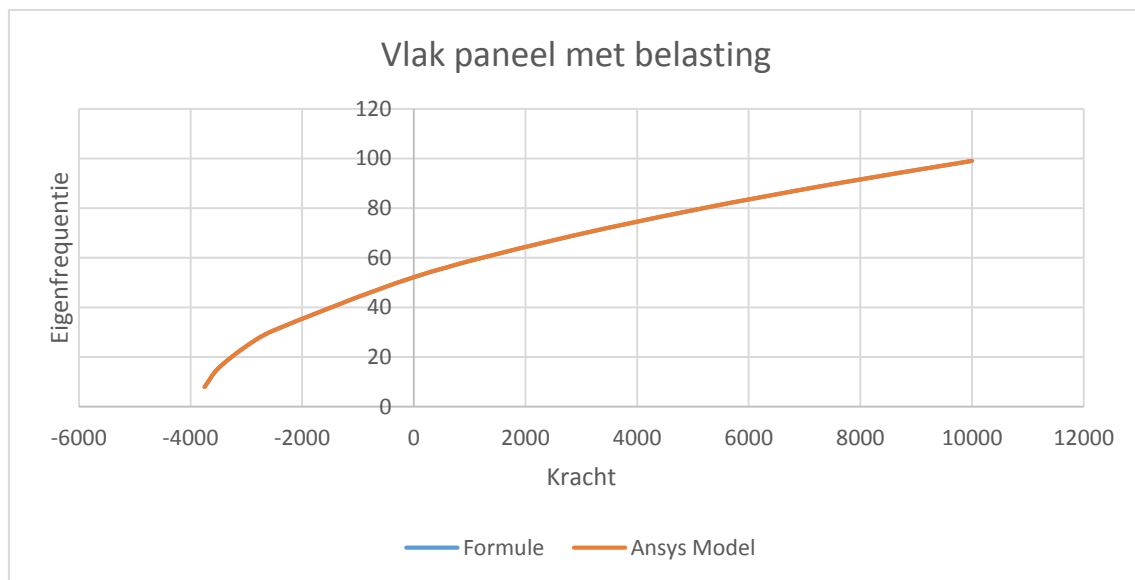
Parameter	Waarde	Eenheid
$l_x=l_y$	0,3	[m]
h	0,001	[m]
E	2,10E+11	[N/m ²]
ρ	7850	[kg/m ³]
ν	0	[-]

Tabel 1: Eigenschappen paneel

Kracht ($n_{xx}=n_{yy}$)	Formule	Ansys	Vershil
[N/m]	[Hz]	[Hz]	[%]
10000	99	98,9605	-0,0015008
7500	90	89,5763	-0,0017185
5000	79	79,0865	-0,0018355
2500	67	66,9732	-0,0023338
0	52	52,1168	-0,0031815
-2500	31	30,7719	-0,00732
-3000	24	24,3528	-0,0111743
-3500	15	15,4664	-0,0260883
-3750	8	7,89203	-0,0975781

Tabel 2: Vlak paneel met kracht

Uit onderstaand Figuur 5 blijkt dat er een goede overeenkomst is tussen de waarden berekend met behulp van formule (5) en het gemodelleerde Ansys model.



Figuur 5: Vlak paneel met belasting

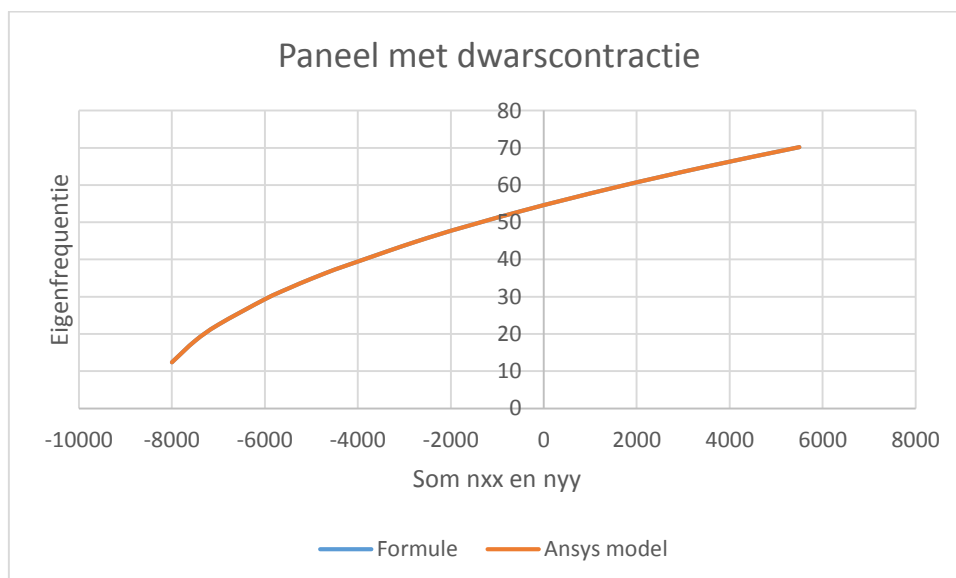
Er is gebleken dat als n_{xx} gelijk is aan n_{yy} en de dwarscontractie coëfficiënt gelijk is aan nul de waarden uit de formule en de waarden uit het model goed overeenkomen, maar de formule die bepaald gaat worden moet ook voor andere gevallen gelden. Voor staal geldt $\nu=0.3$

Parameter	Waarde	Eenheid
$l_x=l_y$	0,3	[m]
h	0,001	[m]
E	$2,10E+11$	[N/m ²]
ρ	7850	[kg/m ³]
ν	0,3	[-]

Tabel 3: Eigenschappen paneel

Kracht n_{xx}	Kracht n_{yy}	Formule	Ansys	Vershil
[N]	[N]	[Hz]	[Hz]	[%]
-4500	10000	70	70,2247	0,003171
-4000	7500	65	64,9908	0,003816
-3500	5000	59	59,2968	0,004876
-3000	2500	53	52,9944	0,006283
-2500	0	46	45,8334	0,008596
-2000	-2500	37	37,3229	0,013409
-1500	-3000	37	37,3229	0,013409
-1000	-4000	35	34,8723	0,015646
-500	-5000	32	32,2359	0,018526
-1000	-5000	29	29,3637	0,022453
-1500	-5500	23	22,5472	0,03872
-2000	-5500	18	18,2058	0,059927
-2000	-6000	12	12,4308	0,129375

Tabel 4: Vlak paneel met dwarscontractie

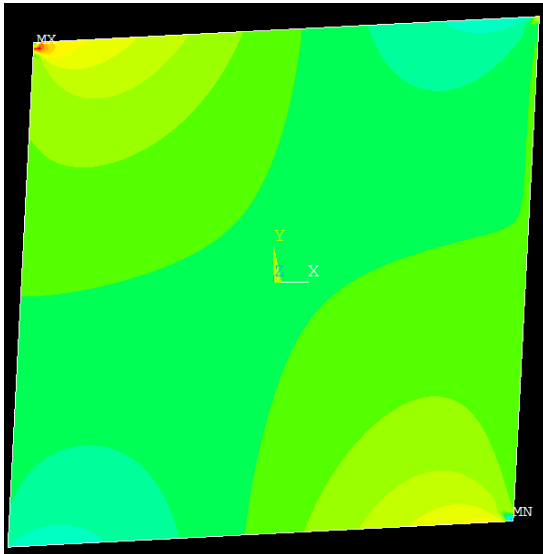


Figuur 6: Paneel met dwarscontractie

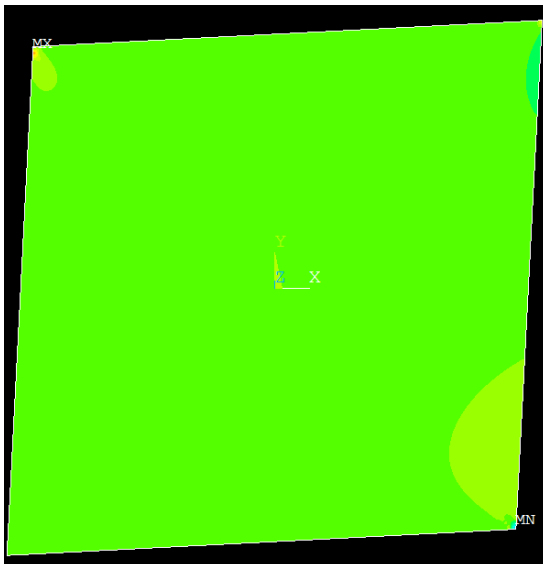
Er is gebleken dat het model goed gebruikt kan worden voor het berekenen van de eigenfrequentie van vierkante panelen zonder kromming waar membraankrachten op werken en de resultaten waar de dwarscontractie coëfficiënt niet gelijk gesteld is aan nul. Tabel 4 en Figuur 6 later duidelijk zien dat

de overeenkomsten tussen formule en model goed zijn. Nu kan het verder worden uitgebreid tot een model waar ook de n_{xy} wordt meegenomen.

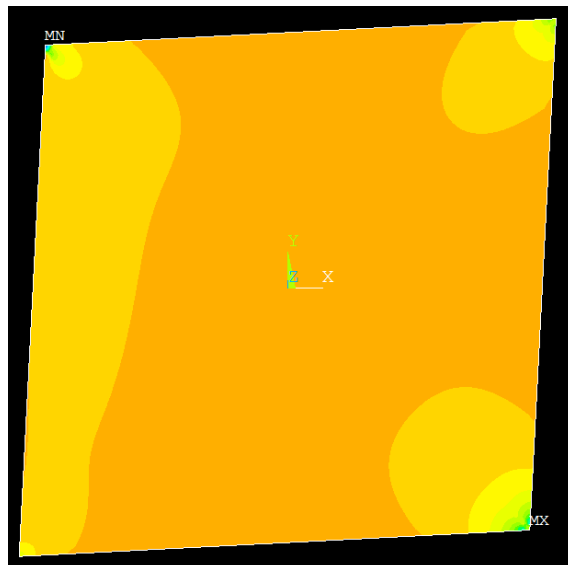
Het voorafgaande is allemaal gedaan om te kijken of het model in deze speciale gevallen een goed resultaat geeft. Dit blijkt zo te zijn, maar nu is de vraag of bij een gekromd paneel onder invloed van membraankrachten het model nog bruikbaar is. Om dit te onderzoeken is gekeken hoe de spanningen in het paneel lopen. Hiervoor is het paneel uit Tabel 3 met een kromming in x- en y-richting en toevoeging van membraankrachten gebruikt. Als nu de spanningsverdeling gelijkmatig over het oppervlak verloopt, is het model correct en zullen voor het verdere onderzoek juiste waarden voor de eigenfrequentie uit het model volgen.



Figuur 7: Spanning in x-richting



Figuur 8: Spanning in y-richting



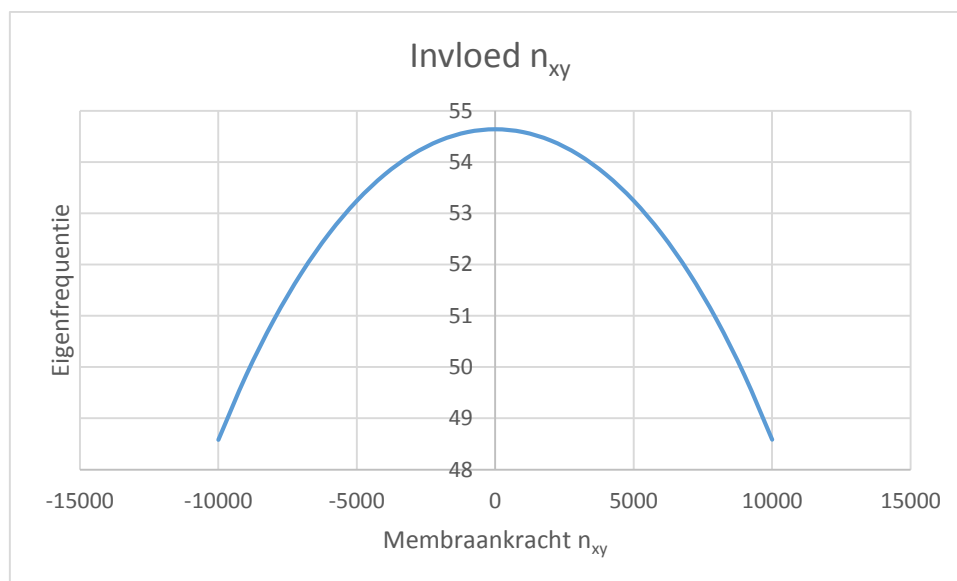
Figuur 9: Spanning in xy-richting

Bovenstaande figuren laten een niet uniforme spanningsverdeling zien. Er is door de kromming een verschil tussen de spanningsverdeling in de boven en onderkant van het paneel. Het gemiddelde van deze twee spanningsverdelingen zal optreden in het midden van de doorsnede. De spanningen hebben zo'n klein procentueel verschil met wat het zou moeten zijn als gevolg van de opgelegde belasting dat de invloed hiervan klein en dus acceptabel is.

5. Invloed membraankracht

Van de membraankrachten n_{xx} en n_{yy} is bekend wat de invloed op de eigenfrequentie van een vlak paneel is. Deze invloed is voor de kracht n_{xy} niet meegenomen in vergelijking (5). Het is interessant om ook de invloed van n_{xy} op te nemen in de vergelijking, zodat er een betere benadering van de werkelijkheid ontstaat. De membraankracht n_{xy} is een schuifkracht in het vlak, die zou kunnen ontstaan doordat er wrijving is tussen twee aan elkaar gelegen panelen. Een constructie waarbij panelen gebruikt worden zal altijd bestaan uit meerdere panelen die aan elkaar liggen.

Door het model in Ansys zo aan te passen dat alleen de kracht n_{xy} er op werkt, is er geprobeerd een verband te vinden tussen de kracht en de eigenfrequentie van het vlakke paneel. Zoals in Figuur 10 te zien is, lijkt het verband tussen de kracht n_{xy} en de eigenfrequentie parabolisch te zijn.

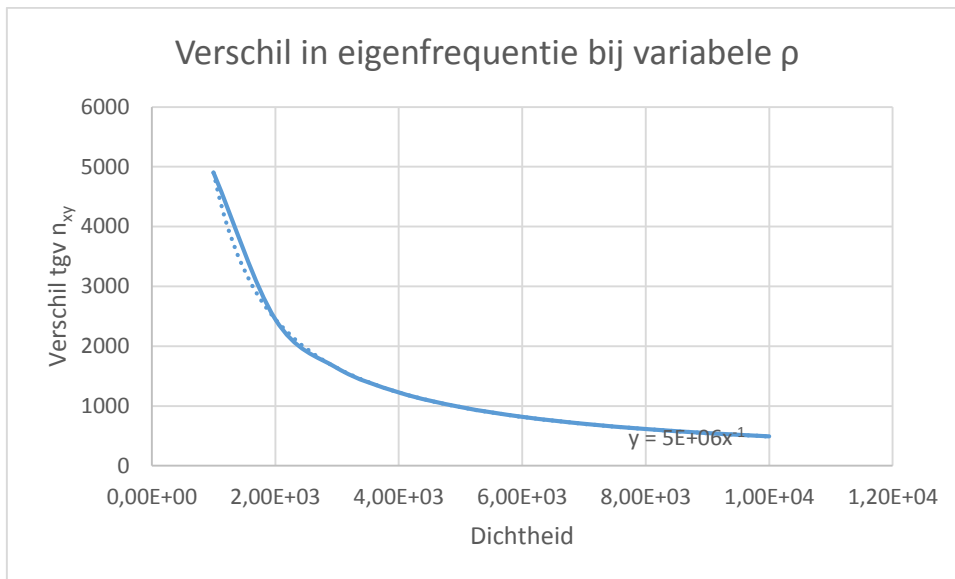


Figuur 10: Invloed n_{xy}

Voor het bepalen van dit verband is van hetzelfde paneel als in Tabel 3 uitgegaan. Vervolgens is er een hypothese geformuleerd en is deze met behulp van het model getest. Door de kracht n_{xy} eerst gelijk te stellen aan 0 N en vervolgens een hogere waarde (10000 N) te geven is er een verschil in eigenfrequentie waarneembaar. Dit verschil is toe te schrijven aan de kracht n_{xy} . Als nu per eigenschap van het paneel wordt gevarieerd kan er een verband tussen n_{xy} en deze variabele worden gevonden.

5.1 Invloed van de dichtheid op n_{xy}

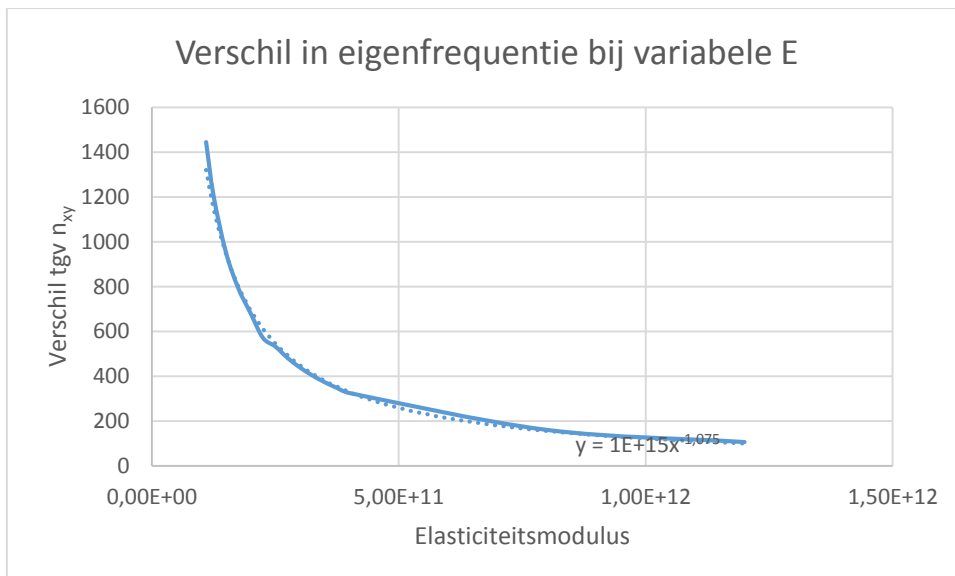
In **Error! Reference source not found.** is het verband weergegeven tussen de dichtheid van het materiaal en de invloed die de kracht n_{xy} heeft op de eigenfrequentie. Op de y-as is het verschil tussen de eigenfrequentie bij $n_{xy} = 0\text{ N}$ in het kwadraat en de eigenfrequentie bij $n_{xy} = 10000\text{ N}$ in het kwadraat weergegeven. Op de x-as is een toenemende dichtheid uitgezet. Uit **Error! Reference source not found.** blijkt dat een toenemende dichtheid resulteert in een afname van de invloed van n_{xy} op de eigenfrequentie. Dit impliceert dat het verband er als volgt uit ziet: $\frac{n_{xy}^2}{\rho}$. Deze stappen kunnen herhaald worden voor andere eigenschappen.



Figuur 11: Verband n_{xy} en p

5.2 Invloed van de elasticiteitsmodulus op n_{xy}

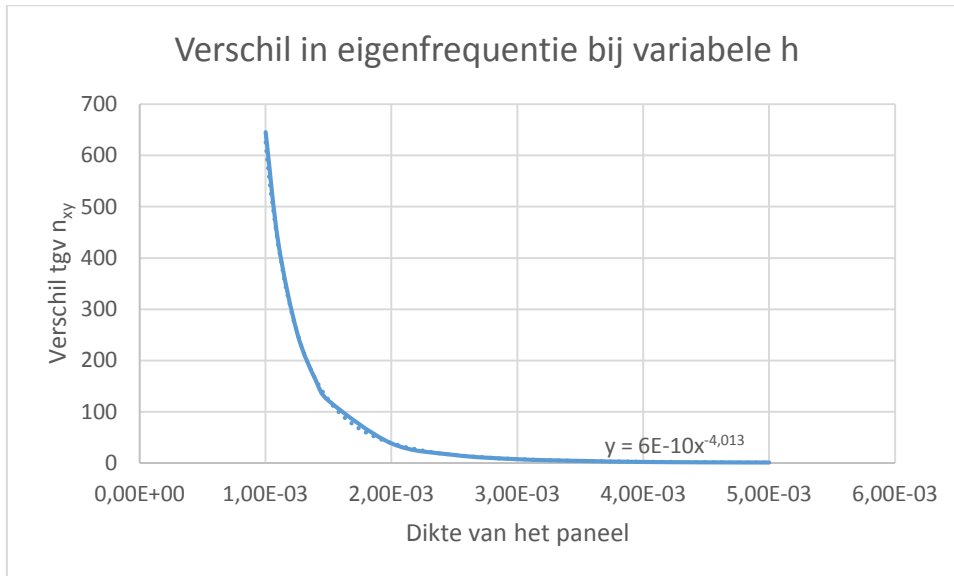
Op een zelfde manier als voor de dichtheid kan bepaald worden wat de invloed van de elasticiteitsmodulus is op de invloed die de kracht n_{xy} heeft op de eigenfrequentie van het paneel. Zoals in Figuur 12 te zien is geeft de curvefit niet zo'n precies verband als bij de dichtheid. Mogelijk dat bij een groter aantal punten de curvefit een beter verband laat zien. Ook hier blijkt een toenemende elasticiteitsmodulus te resulteren in een kleinere invloed van n_{xy} op de eigenfrequentie. Er moet rekening worden gehouden met het feit dat het totaal de juiste eenheid (Hertz) heeft en daarom wordt er van uitgegaan dat het verband tussen de schuifkracht en de elasticiteitsmodulus er als volgt uit ziet: $\frac{n_{xy}^2}{E}$.



Figuur 12: Verband n_{xy} en E

5.3 Invloed van de dikte op n_{xy}

Evenals in de twee voorgaande paragrafen kan ook de invloed van de dikte op de invloed die de kracht n_{xy} op de eigenfrequentie van het paneel heeft worden gevonden. Ook hier is, zoals bij de dichtheid, weer een erg precieze curvefit gevonden. Figuur 13 laat het volgende verband tussen de schuifkracht en de dikte van het paneel zien: $\frac{n_{xy}^2}{h^4}$.



Figuur 13: Verband n_{xy} en h

5.4 Opstellen van de formule

Zoals in de paragraaf over de invloed van elasticiteitsmodulus op n_{xy} al is genoemd, moet het totaal de eenheid (Hertz) hebben. Met in acht neming van deze voorwaarde is vergelijking **(8)** opgesteld.

In vergelijking **(8)** is x een constante waarde waarvoor geldt dat de fout tussen de waarden uit het model en de waarden berekend met de formule beperkt is.

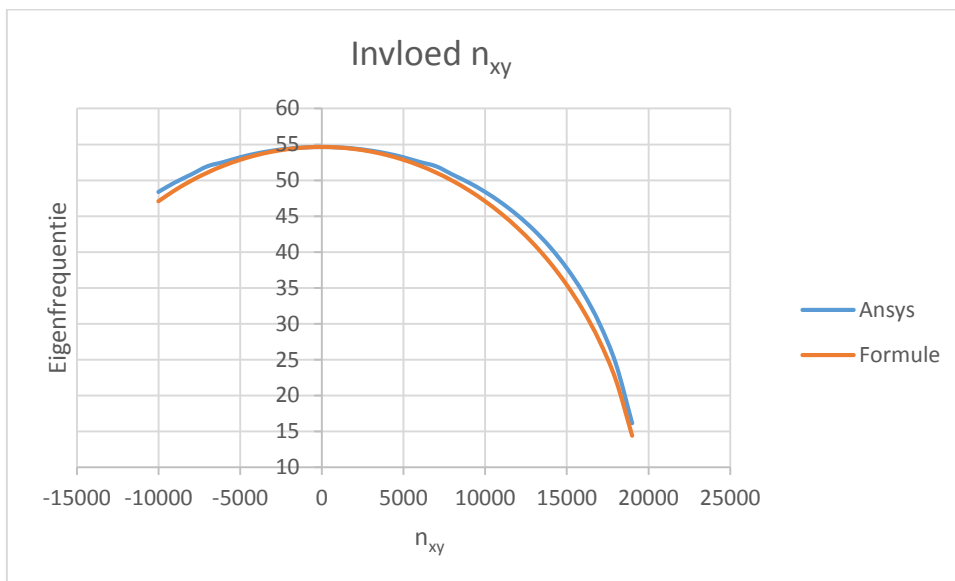
$$f_{11,n_{xy}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} - x \left(\frac{n_{xy}^2}{\rho h^4 E} \right)} \quad (8)$$

De waarde van x is bepaald door vergelijking **(6)** gelijk te stellen aan 0. Als de eigenfrequentie gelijk is aan 0 treedt er knik op. De formule voor knik is bekend er wordt gegeven in vergelijking **(9)**. Nu wordt vergelijking **(8)** geschreven in de vorm waar n_{xy} geïsoleerd wordt. Als nu wordt gesteld $n_{xy} = n_{cr,xy}$ kan x worden opgelost. Zie Bijlage C.

$$n_{cr,xy} = \frac{9.34\pi^2}{l^2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9)$$

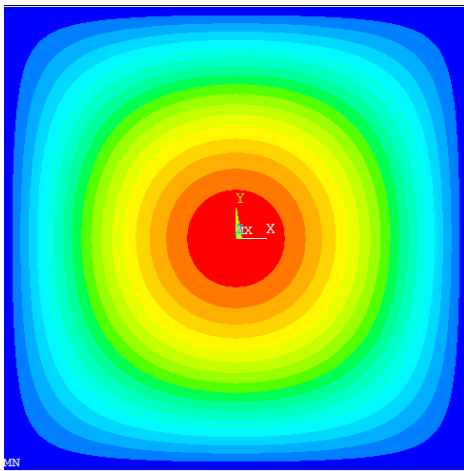
$$f_{11,n_{xy}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} - \left(\frac{n_{xy}^2(1-\nu^2)}{71.75\rho h^4 E} \right)} \quad (10)$$

De hierboven gegeven vergelijking **(10)** blijkt resultaten te geven die erg goed overeenkomen met de resultaten die verkregen zijn uit het model. In Figuur 14 is dit goed te zien, wel moet er opgemerkt worden dat bij een toenemende n_{xy} het verschil steeds groter wordt. Bij $n_{xy} = 19000 \frac{N}{m}$ ligt het procentuele verschil tussen de twee resultaten boven de tien procent. Als met vergelijking **(13)** de kracht $n_{cr,xy}$ wordt berekend blijkt die voor dit paneel $\sim 19700 \frac{N}{m}$ te zijn. Dus pas als de belasting de kniklast benadert wordt de procentuele fout groter dan de toelaatbare 10%.

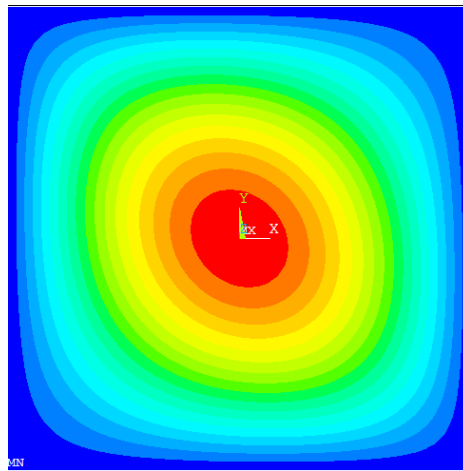


Figuur 14: Verschil tussen model en formule **(10)**

Zoals eerder benoemd geeft de verkregen formule een benadering van de eigenfrequentie en is deze waarde niet exact. Zo houdt deze formule, net als die van Blevins (vergelijking **(5)**), geen rekening met verandering van trilvorm ten gevolge van opgelegde belasting.



Figuur 15: Trilvorm zonder belasting



Figuur 16: Trilvorm ten gevolge van n_{xy}

Zoals hierboven te zien in Figuur 15 en Figuur 15ur 10 blijkt de kracht hier wel invloed op te hebben. Er zal altijd een afwijking zijn tussen formule en de werkelijke waarde, maar dit verschil is beperkt en klein genoeg om in het voorontwerp gebruik te kunnen maken van deze formule.

5.5 Combinatie n_{xx} , n_{yy} en n_{xy}

Voor de bruikbaarheid van de formule is het ook belangrijk te weten of deze nog bruikbaar is als er een combinatie van krachten op het paneel werkt. In werkelijkheid zullen de membraankrachten vaak ook tegelijk op het paneel werken en zal dus bij het voorontwerp rekening gehouden moeten worden met de combinatie van de belastingen en niet slechts met de individuele belastingen. Er wordt getest of een combinatie van vergelijking (5) en (8) nog steeds een goede benadering geeft van de daadwerkelijke eigenfrequentie van het paneel.

$$f_{11,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{n_{xy}^2(1-\nu^2)}{71.75\rho h^4 E}\right)} \quad (11)$$

Vergelijking (11) wordt hiervoor getest. Er wordt gekeken of de verschillen tussen het model en deze formule klein genoeg zijn zodat deze formule bruikbaar is. Dit zou voor het maken van een voorontwerp een behoorlijke tijdswinst en daarom een goed resultaat zijn. Er is weer uitgegaan van een paneel met de eigenschappen zoals weergegeven in Tabel 3.

n_{xy}	n_{yy}	n_{xx}	Ansyz	Formule	Fout
[N]	[N]	[N]	[Hz]	[Hz]	[%]
7500	-3000	-3000	21,1447	20,713867	-2,03755
10000	-1500	-1500	35,0038	33,971049	-2,9504
12500	0	0	44,0959	42,223545	-4,2461
15000	1500	1500	51,0757	48,119133	-5,7886
17500	3000	3000	56,7524	52,458573	-7,56589
20000	4500	4500	61,5031	55,607377	-9,58606
22500	6000	6000	65,5383	57,760598	-11,8674
25000	7500	7500	68,9887	59,027286	-14,4392
27500	9000	9000	71,9402	59,464124	-17,3423
30000	10500	10500	74,4518	59,089518	-20,6339
32500	18000	18000	106,53	87,162334	-18,1805

Tabel 5: Combinatie membraankracht

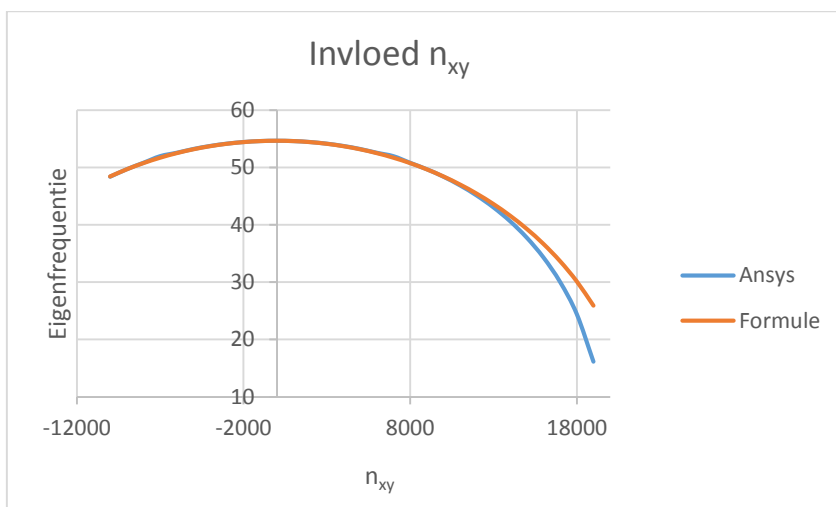
Er valt op dat de relatieve fout tussen de formule en de waarden uit Ansys erg groot is. Dit betekent dat bovenstaande vergelijking (11) geen goed resultaat oplevert voor de benadering van de eigenfrequentie. Een oorzaak hiervoor zou kunnen zijn dat de krachten n_{xx} en n_{yy} een interactie hebben met de kracht n_{xy} . Er is gezocht naar een x waarvoor de relatieve fout kleiner is dan de met vergelijking (11) berekende waarden. De waarde van x is bepaald door de kracht n_{xy} toe te laten nemen van 0 N tot 10000 N. Door tussen twee opeenvolgende belastingen het verschil tussen de resultaten uit het model te delen door het verschil tussen de resultaten uit de formule krijgt men de waarde waarmee de formule vermenigvuldigd moet worden om de waarde uit het model te krijgen. Als deze stap voor veel waarden van n_{xy} herhaald wordt en dezelfde factor oplevert, is dit de constante x. Uit de berekeningen blijkt de waarde voor x uit al deze berekeningen niet exact gelijk te zijn en daarom is gekozen om van een gemiddelde waarde voor x uit te gaan. Deze gemiddelde waarde blijkt te liggen bij $1.06 \cdot 10^{-2}$. Zie Bijlage C.

$$f_{11,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)} \quad (12)$$

n_{xy}	n_{yy}	n_{xx}	Ansysis	Formule	Fout
[N]	[N]	[N]	[Hz]	[Hz]	[%]
7500	-3000	-3000	21,1447	22,394614	5,91124
10000	-1500	-1500	35,0038	35,816758	2,322484
12500	0	0	44,0959	44,543127	1,014215
15000	1500	1500	51,0757	51,041835	-0,0663
17500	3000	3000	56,7524	56,092568	-1,16265
20000	4500	4500	61,5031	60,061737	-2,34356
22500	6000	6000	65,5383	63,153597	-3,63864
25000	7500	7500	68,9887	65,49252	-5,06776
27500	9000	9000	71,9402	67,157219	-6,64855
30000	10500	10500	74,4518	68,197087	-8,40102
32500	18000	18000	106,53	94,645689	-11,1558

Tabel 6: Combinatie membraankrachten

Eerder was al te zien dat bij drukkrachten de verschillen tussen beide resultaten groter zijn dan bij trek, ook in Tabel 6 is dit weer te zien. De procentuele verschillen zijn wel groter dan bij de individuele belastingen, maar omdat het gaat om een combinatie van benaderingen is deze toename van de fout wel te verwachten. Zowel procentueel als absoluut zijn de verschillen klein genoeg om gebruik te kunnen maken van vergelijking (12). Dat het procentuele verschil toeneemt naarmate de eigenfrequentie naar nul gaat ligt wel in de lijn der verwachting, want eenzelfde absolute fout resulteert bij een lagere waarde tot een grotere relatieve fout. Dit verklaart voor een deel de grotere relatieve fouten bij drukkrachten n_{xx} en n_{yy} . Ook valt op dat grote schuifkrachten resulteren in een grote procentuele fout. Echter zijn deze schuifkrachten erg groot, zonder de positieve normaalkrachten n_{xx} en n_{yy} was bij deze waarden van de schuifkracht de eigenfrequentie al afgenomen tot nul en had er knik opgetreden. Een grote fout valt dan te verwachten. Het gebruik van vergelijking (12) bij grote schuifkrachten en geen normaalkracht resulteert in een grote fout. In dit geval geeft vergelijking (11) een betere benadering.



Figuur 17: Verschil tussen model en formule (12)

6. Bruikbaarheidsgrenzen

Tot nu toe is er van een paneel uitgegaan waarbij de eigenschappen steeds gelijk waren. Door steeds één eigenschap te veranderen is geprobeerd de verbanden tussen de eigenfrequentie en deze eigenschappen van het paneel te beschrijven. Nu moet er voor de formule die hiermee gevonden is worden omschreven wat de grenzen zijn waarbinnen de gevonden formule resultaten geeft die een kleinere fout hebben dan de toelaatbare 10%. Voor elke eigenschap zal afzonderlijk gekeken moeten worden wat de range is waarbinnen de waarde moet zitten om een resultaat te krijgen dat voldoet aan deze eis. Er zijn voor alle eigenschappen grenzen opgesteld waar, bij normale gebruikstoestanden, binnen gebleven wordt.

$$\left| \frac{n_{xy}}{n_{cr,xy}} \right| < 0.5 \quad (13)$$

$$10^{10} \frac{N}{m^2} < E < 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

$$30 < \frac{l}{h} < 1000$$

$$500 \frac{kg}{m^3} < \rho < 7000 \frac{kg}{m^3}$$

$$-0.5 \leq \frac{n_{xx} + n_{yy}}{(n_{xx} + n_{yy})_{cr}} \leq 0.5$$

De vergelijkingen **(13)** geven deze grenzen weer. Theoretisch zouden voor elk van deze eigenschappen ook waarden gekozen kunnen worden buiten het aangegeven interval, maar in de praktijk zal dit zelden voorkomen en daarom is gekozen voor deze grenzen. In de komende paragrafen zullen deze grenzen worden gecontroleerd en zo nodig aangepast om een beeld te geven binnen welke grenzen de formule in werkelijkheid toepasbaar is. Hierbij is uitgegaan van een referentie paneel met de eigenschappen zoals weergegeven in Tabel 7.

Parameter	Waarde	Eenheid
lx=ly	3,00E-01	[m]
h	2,00E-03	[m]
E	1,05E+11	[N/m ²]
ρ	3,75E+03	[kg/m ³]
ν	3,00E-01	[-]
nxx	5,00E+02	[N/m]
nyy	5,00E+02	[N/m]
nxy	5,00E+03	[N/m]

Tabel 7: Referentie paneel

De eigenschappen van de plaat zijn zodanig gekozen dat het een goede referentie is binnen de bovenstaande grenzen **(13)**. Voor de belastingen is een waarde gekozen waarbij de invloed van de belasting voldoende groot is, en de invloed van de schuifkracht op de eigenfrequentie mag niet verwaarloosbaar klein zijn.

6.1 Elasticiteitsmodulus [E]

Zoals vergelijking **(12)** stelt, is het verband tussen de elasticiteitsmodulus en de schuifkracht n_{xy} gegeven door $\frac{n_{xy}^2}{E}$. Dit verband houdt in dat de invloed van de kracht n_{xy} op de eigenfrequentie afneemt naarmate de elasticiteitsmodulus van het materiaal hoger is. Uit de data, verkregen met behulp van Ansys, blijkt dit verband ook te kloppen. Er is echter wel een afwijking tussen het verband dat de data geeft en het verband $\frac{n_{xy}^2}{E}$. De fout die door deze afwijking ontstaat, mag niet groter worden dan de toegestane 10%. Er is een interval waarbinnen de elasticiteitsmodulus moet liggen zodat deze aan deze eis voldoet. Door de elasticiteitsmodulus te variëren en steeds de fout van de formule te berekenen ten opzichte van de gegeven waarden uit het model, kan er vastgesteld worden waar de grenzen van het bruikbaarheidsinterval liggen.

n_{xy}	E	Ansys	Formule	Fout
[N/m]	[N/m ²]	[Hz]	[Hz]	[%]
5,00E+02	1,00E+09	21,4891	21,104298	-1,79068
7,50E+02	1,50E+09	22,3865	21,975029	-1,83803
1,25E+03	2,50E+09	24,0217	23,620393	-1,6706
2,50E+03	5,00E+09	27,5985	27,303398	-1,06927
5,00E+03	1,00E+10	33,5613	33,475075	-0,25692
7,50E+03	1,50E+10	38,5976	38,674098	0,198193
1,00E+04	2,00E+10	43,0446	43,252641	0,483316
2,00E+04	4,00E+10	57,4819	58,062135	1,009423
2,88E+04	5,75E+10	67,6295	68,440336	1,198938
5,25E+04	1,05E+11	89,5515	90,81618	1,412238
7,63E+04	1,53E+11	107,075	108,67878	1,497811
1,00E+05	2,00E+11	122,109	123,99426	1,543915
1,00E+06	2,00E+12	381,416	387,83041	1,681737
1,00E+07	2,00E+13	1204,64	1225,0677	1,695755

Tabel 8: Fout elasticiteitsmodulus

In Tabel 8 geeft de eerste kolom weer tussen welke waarden de schuifkracht is gevarieerd, de tweede kolom geeft de waarden waar de elasticiteitsmodulus over is gevarieerd, de derde kolom geeft de overeenkomende eigenfrequentie die verwacht kan worden bij dit paneel met deze belasting en de vierde kolom geeft de waarden die uit vergelijking **(12)/(11)** volgen. In vergelijking **(14)** wordt weergegeven hoe de fout uit de laatste kolom berekend is.

$$Fout = \frac{Formule - Ansys}{Ansys} 100\% \quad (14)$$

Het interval dat gekozen is om de elasticiteitsmodulus in te variëren is gelijk aan het interval uit **(13)**. Dit is het interval waar de elasticiteitsmodulus in de meeste gevallen in blijft bij materialen die gebruikt worden voor panelen. Zoals Tabel 8 laat zien neemt de fout toe bij hogere waarden voor E, echter deze fout neemt steeds minder sterk toe. Bij een elasticiteitsmodulus van $2 \cdot 10^{12}$ is de fout

toegenomen tot 1.68%, de fout blijkt naar een asymptoot toe te gaan en de bovengrens voor E zou dus weggelaten kunnen worden. De fout is berekend tot waarden van E tien maal zo groot als de elasticiteitsmodulus van staal, en ook hier blijft de fout klein. Deze materialen zullen in werkelijkheid niet worden gebruikt, maar de formule zou voor deze materialen dus nog wel opgaan. Bij kleinere waarden dan $E = 10^{10}$ blijkt de fout juist sterk toe te nemen. Door de kleinere n_{xy} is de invloed op de eigenfrequentie kleiner dan bij de hogere waarden van E . In de tabel resulteert de kleinere elasticiteitsmodulus daarom niet in hele grote fouten.

$$1.0 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \leq E \quad (15)$$

6.2 Dichtheid [ρ]

Bij het bepalen van het verband tussen schuifkracht n_{xy} en de dichtheid van het materiaal viel direct al op dat de data uit het model erg goed overeen kwamen met de trendlijn $\frac{n_{xy}^2}{\rho}$. De verwachting was dat het variëren van de dichtheid dus geen grote invloed zal hebben op de fout tussen de formule en het model. Op dezelfde manier als bij de elasticiteitsmodulus is voor verschillende dichtheden de fout berekend tussen de formule en het model. In Tabel 9 is deze fout weergegeven voor de verschillende dichtheden. Opvallend is dat de fout zo goed als constant is over het gehele interval.

n_{xy}	ρ	Ansys	Formule	Fout
[N/m]	[kg/m ³]	[Hz]	[Hz]	[%]
40000	2,00E+00	4363,72	4370,1342	0,146989
40000	5,00E+02	275,986	276,39155	0,146947
40000	2,13E+03	133,873	134,0696	0,146853
40000	3,75E+03	100,776	100,92393	0,146787
40000	5,38E+03	84,1749	84,298634	0,146996
40000	7,00E+03	73,7603	73,86875	0,14703
40000	2,30E+04	40,6919	40,751711	0,146986

Tabel 9: Fout dichtheid

Er blijkt, binnen het interval waar de dichtheid in de meeste gevallen in ligt, weinig tot geen invloed te zijn op de fout. Ook buiten dit interval blijkt dat de fout constant blijft. Er is gekozen de grenzen aan te passen aan de gevonden gegevens en dus af te wijken aan de in **(13)** opgestelde grenzen. Afhankelijk van de samenstelling van staal kan de dichtheid tot zo'n $8000 \frac{kg}{m^3}$ oplopen. Staal is een veel voorkomend materiaal dat gebruikt wordt in panelen.

$$0 \frac{kg}{m^3} < \rho \quad (16)$$

Theoretisch zou elk materiaal met elke dichtheid berekend kunnen worden met de formule. De fout die de formule heeft ten opzichte van het model is dus onafhankelijk van de dichtheid van het materiaal.

6.3 Verhouding $\frac{l}{h}$

De verhouding tussen de lengte en de dikte van het paneel heeft grote invloed op de eigenfrequentie. Bij het zoeken naar een verband tussen schuifkracht n_{xy} en de lengte van het paneel bleek er geen duidelijke lijn in te zitten waarbij de eenheden van de term nog overeen kwamen met $\frac{1}{s}$. Voor de dikte van het paneel bleek dit verband er wel duidelijk te zijn. Er is daarom gekozen een zo goed mogelijke benadering te vinden waarbij de uitkomst van de vergelijking een frequentie oplevert. De beste benadering hiervan is in vergelijking (12) te zien, er valt op dat de lengte niet voorkomt in de term van de schuifkracht. Door deze aanname was het al te verwachten dat er een fout op zal treden die niet constant is. Zoals in (13) vermeld ligt voor een paneel de verhouding $\frac{l}{h}$ tussen de 30 en de 1000. Als deze verhouding lager dan 30 is, kan niet meer van een paneel worden gesproken, er is dan sprake van een volume. Ook bij een verhouding groter dan 1000 kan de aanname van een paneel niet meer worden toegepast, de eigenfrequentie is in dit geval erg laag en bij kleine drukkrachten treedt knik op.

n_{xy}	l/h	Ansys	Formule	Fout
[N/m]	[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
1,00E+05	3,00E+01	5480,84	5572,1361	1,665732
2,00E+04	1,00E+02	498,301	499,00503	0,141286
1,00E+04	2,73E+02	51,3654	52,966735	3,117537
5,00E+03	4,00E+02	26,7219	27,106174	1,438049
2,50E+03	5,15E+02	21,3619	21,059377	-1,41618
2,50E+03	6,00E+02	14,8479	14,588925	-1,74419
2,50E+03	6,75E+02	9,94525	10,03034	0,855583
1,25E+03	7,58E+02	12,6215	12,2939	-2,59557
1,25E+03	1,00E+03	7,68395	7,075969	-7,91235

Tabel 10: Fout verhouding lengte en dikte

Uit de gegevens in Tabel 10 blijkt dat over het gehele interval voor $\frac{l}{h}$ de fout kleiner dan 10% blijft. De schuifkracht is tegelijk met de verhouding $\frac{l}{h}$ gevarieerd zodat de invloed van de schuifkracht niet verwaarloosbaar klein is. Uit de tabel blijkt dat tot een verhouding van $\frac{l}{h} = 1000$ wordt voldaan aan de eis dat de fout niet meer dan 10% bedraagt.

$$30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000 \quad (17)$$

Men moet zich wel realiseren dat bij het toepassen van grotere belastingen de fout kan toenemen tot een waarde boven de 10%. Ook een verandering van elasticiteitsmodulus kan hier invloed op hebben.

6.4 Verhouding $\frac{n_{xy}}{|n_{cr,xy}|}$

De belasting die werkt op een paneel en de knikcapaciteit kunnen een bepaalde verhouding hebben. Bij het ontwerpen van een constructie zal rekening gehouden worden dat de knikcapaciteit voldoende groot is. Vergelijking **(18)** geeft de knikcapaciteit voor afschuiving, geldig voor vierkante platen die scharnierend zijn opgelegd.

$$n_{cr,xy} = \frac{9.34\pi^2}{l^2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (18)$$

De belasting zal over het algemeen niet groter worden dan 50% van de knikcapaciteit en daarom is dit in **(13)** als grenswaarde gekozen. Uit Figuur 17 bleek al dat bij toenemende schuifkracht de procentuele fout sterk toeneemt. In Figuur 14 werd nog geen rekening gehouden met de verhouding met de knikcapaciteit. Door wel naar deze verhouding te kijken kan er een percentage van de knikcapaciteit worden gevonden waarvoor vergelijking **(12)** voldoet aan de eis dat de fout niet groter dan 10% wordt.

$n_{xx}=n_{yy}$	$n_{xy}/n_{cr,xy}$	Ansys	Formule	Fout
[N/m]	[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
-500	-7,00E-01	81,5412	83,835336	2,813468
-500	-6,00E-01	90,6263	91,54779	1,016802
-500	-5,00E-01	97,2997	97,598845	0,307447
-500	-4,00E-01	102,223	102,28379	0,059468
-500	-3,33E-01	104,726	104,7409	0,014231
-500	-2,50E-01	107,109	107,12819	0,017918
-500	0,00E+00	110,03	110,12154	0,0832
-500	2,50E-01	107,109	107,12819	0,017918
-500	3,33E-01	104,726	104,7409	0,014231
-500	4,00E-01	102,223	102,28379	0,059468
-500	5,00E-01	97,2997	97,598845	0,307447
-500	6,00E-01	90,6263	91,54779	1,016802
-500	7,00E-01	81,5412	83,835336	2,813468

Tabel 11: Fout verhouding n_{xy} en $n_{xy,cr}$

De hierboven in Tabel 11 weergegeven data laten zien dat tot een schuifkracht n_{xy} van 70% van de knikcapaciteit voor afschuiving vergelijking **(12)** nog toegepast kan worden. Dit is een groter interval dan in eerste instantie in **(13)** van uit is gegaan. De fouten die in Tabel 11 zijn berekend nemen meer dan lineair toe, dit was ook al de verwachting door de verschillen die in Figuur 17 te zien waren. Dit betekent dat er bij kleine schuifkrachten ook juist kleine fouten zijn tussen de formule en het model. Bij een trekkracht zal een groter percentage van de knikcapaciteit voor afschuiving nog kunnen worden toegepast, bij een grotere drukkracht zal echter een lager percentage kunnen worden toegepast.

$$\left| \frac{n_{xy}}{n_{xy,cr}} \right| \leq 0.7 \quad (19)$$

6.5 Verhouding $\frac{n_{xx}}{|n_{xx,cr}|}$ en $\frac{n_{yy}}{|n_{yy,cr}|}$

De formule uit (Blevins, 1979) was erg nauwkeurig tot een groot percentage van de knikcapaciteit. De toevoeging van de term waarin ook de schuifkracht wordt meegenomen in de formule zal invloed hebben op de nauwkeurigheid van het geheel. Deze toevoeging in de formule zal dus ook invloed hebben op de fout die als gevolg van normaalkrachten n_{xx} en n_{yy} ontstaat. In **(13)** is in eerste instantie ook uitgegaan van een waarde die ligt tussen -0.5 en 0.5.

$$(n_{xx} + n_{yy})_{cr} = -\frac{4\pi^2}{l^2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (20)$$

Uit resultaten, **Bijlage E**, bleek dat normaalkracht en schuifkracht invloed op elkaar hebben. Het verband tussen deze krachten is in vergelijking **(12)** niet opgenomen; er zal dus een fout ontstaan.

n_{xy}	n/n_{cr}	Ansyz	Formule	Fout
[N/m]	[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
15000	9,00E-01	28,0736	29,539405	5,221292
20000	7,50E-01	48,3755	49,536018	2,39898
25000	5,00E-01	71,3462	72,117697	1,081343
30000	2,50E-01	88,232	88,680885	0,508756
35000	2,00E-01	88,5506	89,131384	0,655878
40000	1,00E-01	91,9768	92,550289	0,623515
45000	0,00E+00	94,8571	95,409121	0,58195
50000	-2,50E-01	107,075	106,91588	-0,14861
55000	-3,00E-01	105,777	105,71602	-0,05765
60000	-4,00E-01	107,232	107,05979	-0,1606
65000	-5,00E-01	108,274	107,99958	-0,25345
70000	-1,00E+00	132,342	129,54175	-2,11592
75000	-2,00E+00	173,838	167,52007	-3,63438

Tabel 12: Fout $n_{xx}/n_{cr,xx}$ en $n_{yy}/n_{cr,yy}$

In Tabel 12 staat de tweede kolom voor $\frac{n_{xx}+n_{yy}}{(n_{xx}+n_{yy})_{cr}}$. Er is geen duidelijk verband te zien in de fout, omdat er twee variabelen zijn. De n_{xy} is nu ook variabel gekozen om er voor te zorgen dat deze voldoende groot is en het effect van de schuifkracht niet verwaarloosbaar klein wordt bij grotere positieve normaalkrachten. Een oorzaak voor fouten die optreden is de invloed die normaal- en schuifkracht op elkaar hebben.

$$\frac{n_{xx} + n_{yy}}{(n_{xx} + n_{yy})_{cr}} \leq 0.9 \quad (21)$$

Als er gekeken wordt naar het verschil tussen Tabel 11 en Tabel 12 valt op dat in Tabel 11 zowel bij toenemende positieve als toenemende negatieve belasting de fout toeneemt. In Tabel 12 is dit niet het geval en zijn de negatieve (druk) belastingen maatgevend. Door de toename van n_{xy} in Tabel 12 wordt de fout groot ook al is er een grote positieve normaalkracht, dit komt doordat deze schuifkracht groter is dan $(0.7 n_{xy,cr})$ de grens die in vergelijking **(19)** is gegeven.

6.6 Testen van de formule

De formule om een benadering voor de eigenfrequentie van een paneel te vinden **(12)**, bestaat uit verschillende termen. De eerste term beschrijft de buigstijfheid van het paneel, de tweede term geeft de invloed van de normaalkracht op de eigenfrequentie en de derde term de invloed van de schuifkracht.

$$f_{11,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{E(\alpha^2 h)^2}{\rho(\alpha l)^4} + \left(\frac{\alpha^4 n_{xx} + \alpha^4 n_{yy}}{4\rho(\alpha^2 h)(\alpha l)^2} \right) - \left(\frac{1.06(\alpha^4 n_{xy})^2}{100\rho(\alpha^2 h)^4 E} \right)} \quad (22)$$

In vergelijking **(22)** is in alle drie de termen een factor α ingevoerd zodat voor verschillende α dezelfde eigenfrequentie uit de formule volgt. Als het model een goede overeenkomst geeft voor verschillende α , is vergelijking **(12)** een goede benadering van het model. Als referentie is weer het paneel uit Tabel 7 gebruikt.

α	Ansys	Formule	Fout
[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
1,00E+00	113,17	113,25013	0,070802
2,00E+00	111,606	113,25013	1,473153
3,00E+00	110,948	113,25013	2,07496
4,00E+00	110,391	113,25013	2,59
5,00E+00	109,849	113,25013	3,096184
6,00E+00	109,299	113,25013	3,614971
7,00E+00	108,734	113,25013	4,153372
8,00E+00	108,153	113,25013	4,712885
9,00E+00	107,553	113,25013	5,297042

Tabel 13: Eigenfrequentie bij verschillende α

Er valt op dat de eigenfrequentie volgens het model, bij toenemende α , af neemt. Deze afname is echter klein en wordt steeds kleiner bij toenemende α . Een oorzaak van deze afname zou de verwaarlozing van l in de term van de schuifkracht kunnen zijn. Deze term zou groter worden bij een grotere waarde van α en als gevolg daarvan neemt de eigenfrequentie af. Het is ook mogelijk dat bij deze toenemende dimensies en belastingen hogere orde termen een belangrijkere rol gaan spelen. Deze zijn niet beschreven in vergelijking **(22)** en kunnen leiden tot een oplopende fout.

6.7 Kromming

In vergelijking **(12)** zijn geen invloeden van kromming meegenomen, maar in veel situaties heeft een paneel wel een kromming. Het is daarom wel belangrijk te weten wat de invloed van deze kromming op de eigenfrequentie is. In een eerder onderzoek is de invloed van de kromming op de eigenfrequentie van een paneel bepaald. In dit onderzoek werd echter geen rekening gehouden met belastingen op het paneel. Toch zal deze invloed aan de formule worden toegevoegd en zal er een grens aan de kromming worden gesteld waarvoor deze vergelijking nog toepasbaar is.

$$f_{11,curve,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\rho\pi^2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)} \quad (23)$$

In vergelijking **(22)** is de term voor de kromming uit het eerdere onderzoek toegevoegd. Om te onderzoeken of vergelijking **(23)** toepasbaar is en een acceptabele fout heeft, is uitgegaan van de gegevens in Tabel 14.

Parameter	Waarde	Eenheid
lx=ly	3,00E-01	[m]
h	2,00E-03	[m]
E	2,10E+11	[N/m ²]
ρ	7,85E+03	[kg/m ³]
ν	0,00E+00	[-]
nxx	-1,50E+04	[N/m]
nyy	-1,50E+04	[N/m]
nxy	3,50E+04	[N/m]

Tabel 14: Eigenschappen van het paneel

Rx=Ry	Ansyz	Formule	Fout	Ansyz2	Formule3	Fout4
[m]	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]
inf	70,381	71,183159	1,139737	104,113	104,236916	0,119021
10	108,331	108,82692	0,457787	132,74	132,821656	0,061516
9	115,438	115,89992	0,400148	138,6	138,676187	0,054969
8	124,697	125,11972	0,338998	146,399	146,469236	0,047976
7	137,083	137,46323	0,277371	157,081	157,14462	0,040502
6	154,227	154,56384	0,218403	172,243	172,30285	0,034748
5	179,07	179,36575	0,165159	194,797	194,859859	0,032269
4	217,483	217,75824	0,126557	230,598	230,68798	0,03902
3	283,136	283,47626	0,120177	293,318	293,525271	0,070664
2	416,828	417,70023	0,209253	423,785	424,584235	0,188594
1	818,934	826,25226	0,893632	822,429	829,753629	0,890609
0,75	1079,98	1099,8796	1,842586	1082,57	1102,51228	1,842124
0,6	1332,51	1373,8125	3,099602	1334,76	1375,92118	3,083789
0,5	1571,63	1647,8987	4,852839	1574	1649,65704	4,806673

Tabel 15: Eigenfrequentie van een gekromd paneel met belasting en zonder belasting

Het valt op dat toenemende kromming resulteert in een kleinere fout tussen de formule en het model, tot een bepaalde kromming. In bovenstaand geval is dit bij een kromtestraal van 2 m, dit is ook het punt waar de kromming groot genoeg is om goed waarneembaar te zijn. Voor het berekenen van de tweede en derde kolom van Tabel 15 zijn de belastingen toegepast zoals in Tabel 14 staat aangegeven. In de kolommen vijf en zes zijn deze belastingen gelijk gesteld aan nul. De procentuele fout blijkt voor het referentie paneel een goede benadering van de eigenfrequentie te geven. Het toevoegen van de belastingen maakt de fout groter, maar elke term heeft een afwijking en daarom valt het toenemen van de fout te verwachten. Bij een kromtestraal van 0.5 m is de afwijking nog onder de 5 % en dus acceptabel. De trilvorm begint bij deze kromming echter te veranderen en daarom wordt dit als grens van de kromming gezien. Dit geldt in het geval dat beide krommingen even groot zijn. Ook kan het variëren van andere parameters invloed hebben op deze gevonden grens.

$$0.5m < R_x, R_y \quad (24)$$

7. Conclusies en aanbevelingen

De doelstelling van het onderzoek was een formule op te stellen voor de laagste eigenfrequentie van een schaalement onder invloed van membraankrachten. Voorwaarde hiervoor was dat de formule gebruiksvriendelijk is en de uitkomst een maximale fout van 10% mag bevatten. Al in een vroeg stadium bleek voor de membraankracht n_{xy} nog geen formule te bestaan voor een niet gekromde plaat. Het was noodzakelijk deze relatie eerst te vinden voordat er naar een schaal gekeken kon worden. De formule die voor dit specifieke geval, gecombineerd met de al bekende formule voor de membraankrachten n_{xx} en n_{yy} gevonden werd, ziet er als volgt uit:

$$f_{11,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)}$$

- Voor deze vergelijking is geprobeerd een dimensieloze begrenzing te vinden waarvoor de fout een waarde heeft die toelaatbaar is. Zie bijlage D. Dit bleek voor nu nog een te grote stap, omdat de fout nog afhankelijk is van hogere orde termen van de membraankrachten. Deze termen zijn nog onbekend en kunnen daarom niet in deze begrenzing worden meegenomen.

Er is voor verschillende parameters een grens gesteld waarvoor formule voldoet aan de gestelde eisen.

- Materiaaleigenschappen:
De elasticiteitsmodulus $[E]$ moet voldoen aan $1.0 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \leq E$
De dichtheid $[\rho]$ heeft geen invloed op de fout en kan dus elke waarde hebben.
- Afmetingen:
 - De formule is geldig voor platen, dit betekent dat $h \ll l$.
 - De verhouding $\frac{l}{h}$ moet voldoen aan: $30 \leq \frac{l}{h} \leq 1000$.
- Belasting:
 - De schuifkracht n_{xy} is in verhouding met de knikcapaciteit $n_{cr,xy}$ begrensd. Deze verhouding moet voldoen aan: $\left|\frac{n_{xy}}{n_{xy,cr}}\right| \leq 0.7$.
 - Normaalkrachten $n_{xx} + n_{yy}$ worden in verhouding met knikcapaciteit $(n_{xx} + n_{yy})_{cr}$ begrensd. De verhoudingen moeten voldoen aan: $\frac{n_{xx} + n_{yy}}{n_{xx,cr} + n_{yy,cr}} \leq 0.9$
- Kromming:

$$f_{11,curve,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{Eh^2}{\rho l^4} + \frac{E}{16\rho\pi^2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{n_{xx} + n_{yy}}{4\rho h l^2}\right) - \left(\frac{1.06n_{xy}^2}{100\rho h^4 E}\right)}$$

De kromming heeft een grote invloed op de eigenfrequentie van een paneel. De grens tot welke kromtestraal bovenstaande vergelijking nog opgaat: $0.5m \leq R_x, R_y$



De formule die gevonden is **(12)** heeft in verhouding met de formule **(5)** uit (Blevins, 1979) een grote fout. Dit is het gevolg van de individuele afwijkingen en de invloed die de membraankrachten



n_{xx} en n_{yy} op n_{xy} hebben en andersom. Vooral in het gebied rond de kniklast blijkt deze interactie toe te nemen. Dit geldt zowel voor de kniklast door afschuiving en de kniklast door normaalkracht.

Voor verder onderzoek zou het interessant kunnen zijn om de interactie tussen de membraankrachten te vinden en hogere orde termen toe te voegen aan de formule. Ook zou de kromming nog eens onderzocht kunnen worden, zowel met als zonder belastingen om de formule meer algemeen toepasbaar te maken. Er kan onderzocht worden of variërende eigenschappen van het paneel invloed hebben op de grens van de kromming. Dit geldt niet alleen voor de kromming, voor andere parameters kunnen bij andere combinaties ook grotere afwijkingen optreden. Door dit in kaart te brengen kunnen beter bruikbare grenzen worden opgesteld. Er kan ook gekeken worden of er interactie bestaat tussen de kromming en de belasting. Om dit te kunnen doen zou er nog eens naar de modellering voor gekromde panelen gekeken kunnen worden. De spanningsverdeling is bij kromming niet geheel uniform over het oppervlak en zou nog verbeterd kunnen worden.

8. Literatuurlijst

Blevins, R. D. (1979). *Formulas for natural frequency and mode shape*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Hoogenboom, P. (2014). *Notes on Shell Structures*. Delft: Delft University of Technology.

Metselaar, L. (2013). *Een ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen*. Delft: Technische Universiteit Delft.

Moerbeek, C. (2012). *De invloed van kromming op de eigenfrequentie van oppervlaktes*. Delft: Technische Universiteit Delft.

Scheltema, A. (2013). *BSc Eindwerk Eigenfrequenties, Dubbele Krommingen & Twist*. Delft: Technische Universiteit Delft.

Thin vs. Thick shells. (2014, 9 15). Opgehaald van CSI Knowledge Base:
<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Thin+vs.+Thick+shells>

Thin-shell structure. (2014, 9 15). Opgehaald van Wikipedia.org: http://en.wikipedia.org/wiki/Thin-shell_structure

Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1961). *Theory of Elastic Stability*. New York: the McGraw-Hill Book Company, Inc. .

Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Bijlagen

- Bijlage A:** Script om het model te maken.
- Bijlage B:** Model vergelijken met bekende formule.
- Bijlage C:** Bepalen verband n_{xy} en constante.
- Bijlage D:** Fout bij variabele parameters.
- Bijlage E:** Invloed normaalkracht op schuifkracht.
- Bijlage F:** Grens voor de kromming.

Bijlage A

```

a = 1
l = 0.3*a | ! m Lengte
lx => 1> ! m> lengte in de x-richting
ly => 1 ! m> breedte in de y-richting
h => 0.01*a*a ! m> dikte
kxx => 1/10> ! 1/m> kromming
kyy => kxx ! 1/m
kxy => 0> ! 1/m
E => 2.1e11> ! N/m2> elastiteitsmodulus
nu => 0> ! -> dwarscontractiecoefficient
rho => 7850> ! kg/m3> massadichtheid
n => 150> ! -> aantal elementen in beide richtingen
nxx = -1000*a*a ! N/m> membraankrachten
nyy => nxx ! N/m
nxy => 2500*a*a*a*a> ! N/m
ex = lx/n ! m lengte van een element in x-richting
ey = ly/n ! m lengte van een element in y-richting
epsxx = (nxx-nu*nyy)/(E*h) ! m/m rek in x-richting
epsyy = (nyy-nu*nxx)/(E*h) ! m/m rek in y-richting
G= E/(2*(1+nu)) ! N/m2 Glijdingsmodulus

pz = -kxx*nxx-2*kxy*nxy-kyy*nyy ! N/m2 belasting loodrecht op het oppervlak

/PREP7
MPTEMP,,,,,,,, >> ! isotroop materiaal
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,E
MPDATA,PRXY,1,,nu
MPDATA,DENS,1,,rho
ET,1,SHELL181 >> ! element type: 4 node quadrilateral
R,1,h,h,h,h, , , > ! element dikte

*DO,i,0,n> > ! plaats knopen
*DO,j,0,n
x=lx/n*i-lx/2
y=ly/n*j-ly/2
z1=0.5*x*x*kxx
z2=x*y*kxy
z3=0.5*y*y*kyy
z=z1+z2+z3
N,,x,y,z,,
*ENDDO
*ENDDO

```

```

*DO,i,1,n>          >          ! plaats elementen
  *DO,j,1,n
    k=i+(j-1)*(n+1)
    E,k,k+1,k+n+2,k+n+1
  *ENDDO
*ENDDO

*DO,i,1,(n+1)*(n+1)>          ! roteer de assenstelsels van alle knopen
  xx=1
  xy=0
  xz=NX(i)*kxx+NY(i)*kxy
  lx=SQRT(1+xz*xz)
  zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
  zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,i,xx/lx,xy/lx,xz/lx,,,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n>          >          ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=-lx/2
  yx=0
  yy=1
  yz=NX(i)*kxy+NY(i)*kyy
  ly=SQRT(1+yz*yz)
  zx=-NX(i)*kxx-NY(i)*kxy
  zy=-NX(i)*kxy-NY(i)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

*DO,i,2,n>          >          ! roteer de assenstelsels van de knopen in de rand x=lx/2
  j=n*(n+1)+i
  yx=0
  yy=1
  yz=NX(j)*kxy+NY(j)*kyy
  ly=SQRT(1+yz*yz)
  zx=-NX(j)*kxx-NY(j)*kxy
  zy=-NX(j)*kxy-NY(j)*kyy
  zz=1
  lz=SQRT(zx*zx+zy*zy+1)
  NANG,j,,,yx/ly,yy/ly,yz/ly,zx/lz,zy/lz,zz/lz
*ENDDO

```

```

*DO,i,1,n»          »          ! randvoorwaarde: geen verplaatsing loodrecht op het vlak
  j=i
  D,j,UZ,0
  j=i*(n+1)
  D,j,UZ,0
  j=i+n*(n+1)+1
  D,j,UZ,0
  j=i*(n+1)+1
  D,j,UZ,0
*ENDDO

*DO,i,1,n+1»        »          ! randvoorwaarde: verplaatsing in de richtingen van de randen
  U1=epsyy
  U2=nxy/(4*G*h)*(-1)
  D,i,UY,NY(i)*U1+U2
*ENDDO

*DO,i,n*(n+1)+1,(n+1)*(n+1)|
  U1=epsyy
  U2=nxy/(4*G*h)*1
  D,i,UY,NY(i)*U1+U2
*ENDDO

*DO,i,1,(n+1)*n+1,n+1
  U1=epsxx
  U2=nxy/(4*G*h)*(-1)
  D,i,UX,NX(i)*U1+U2
*ENDDO

*DO,i,n+1,(n+1)*(n+1),n+1
  U1=epsxx
  U2=nxy/(4*G*h)*1
  D,i,UX,NX(i)*U1+U2
*ENDDO

*DO,i,2,n»          »          ! put forces on nodes
  F,i,FX,-nxx*ey
*ENDDO
*DO,i,(n+1)*n+2,(n+1)*(n+1)-1
  F,i,FX,nxx*ey
*ENDDO
*DO,i,1,n-1
  j=i*(n+1)+1
  F,j,Fy,-nyy*ex
*ENDDO
*DO,i,1,n-1
  j=i*(n+1)+1+n
  F,j,Fy,nyy*ex
*ENDDO

*DO,i,1,(n+1)*(n+1)          ! force to compensate curvature
  F,i,FZ,pz*ex*ey
*ENDDO

FINISH

```

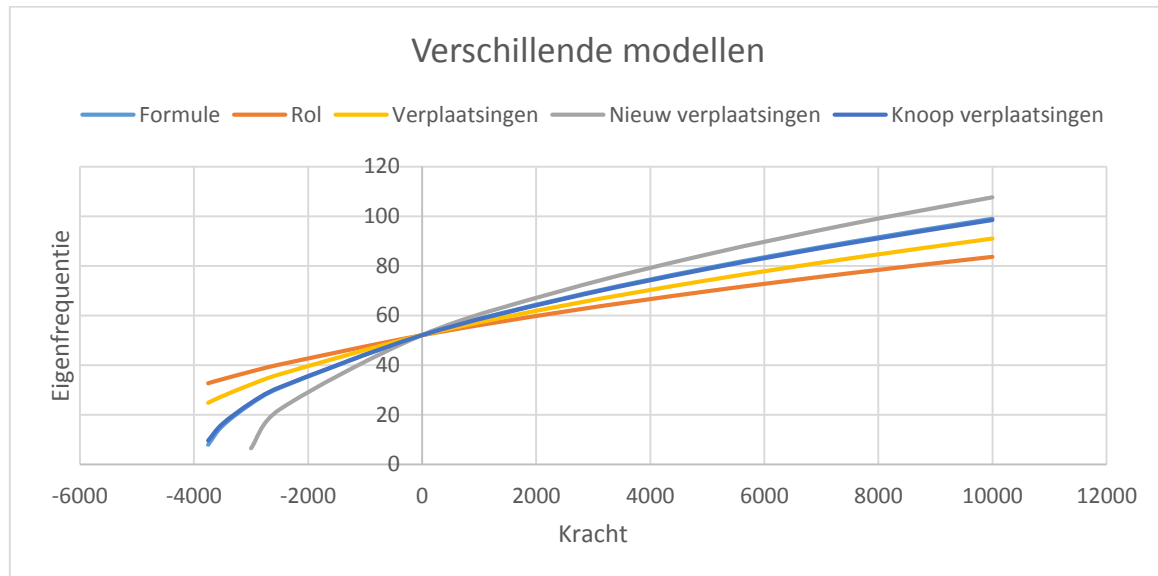
```
*DO,i,1,(n+1)*(n+1)          ! force to compensate curvature
  F,i,FZ,pz*ex*ey
*ENDDO

FINISH

/SOLU
!*
ANTYPE,0
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
|
/SOLU
ANTYPE, MODAL
MODOPT, LANB, 20,,,
MXPAND,20
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH

/POST1
/SHOW,WIN32C
SET,FIRST
/PLOPTS,INFO,3
/CONTOUR,ALL,18
/PNUM,MAT,1
/NUMBER,1
/REPLOT,RESIZE
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,,1
PLNSOL,U,Z
SET,,,,,,1
PLNSOL,U,Z
```

Bijlage B

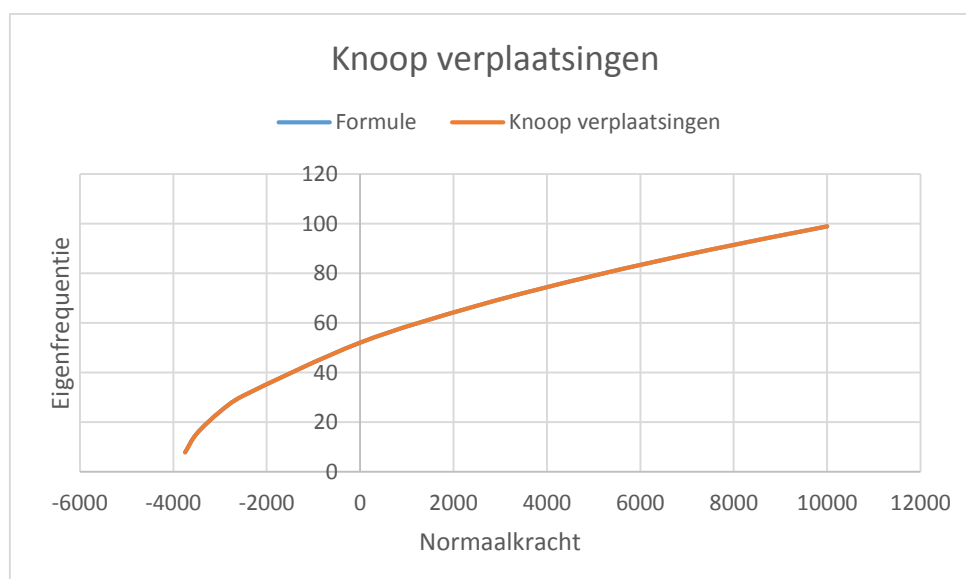


Figuur 18: Verschillende modellen testen

Beste model is die met knoopverplaatsingen.

$n_{xx}=n_{yy}$	Formule	Model	Vershil
[N]	[Hz]	[Hz]	[%]
10000	99	98,9605	-0,001500788
7500	90	89,5763	-0,001718461
5000	79	79,0865	-0,001835513
2500	67	66,9732	-0,002333834
0	52	52,1168	-0,003181502
-2500	31	30,7719	-0,007319974
-3000	24	24,3528	-0,011174345
-3500	15	15,4664	-0,026088276
-3750	8	7,89203	-0,097578079

Tabel 16: Fout model ten opzichte van formule



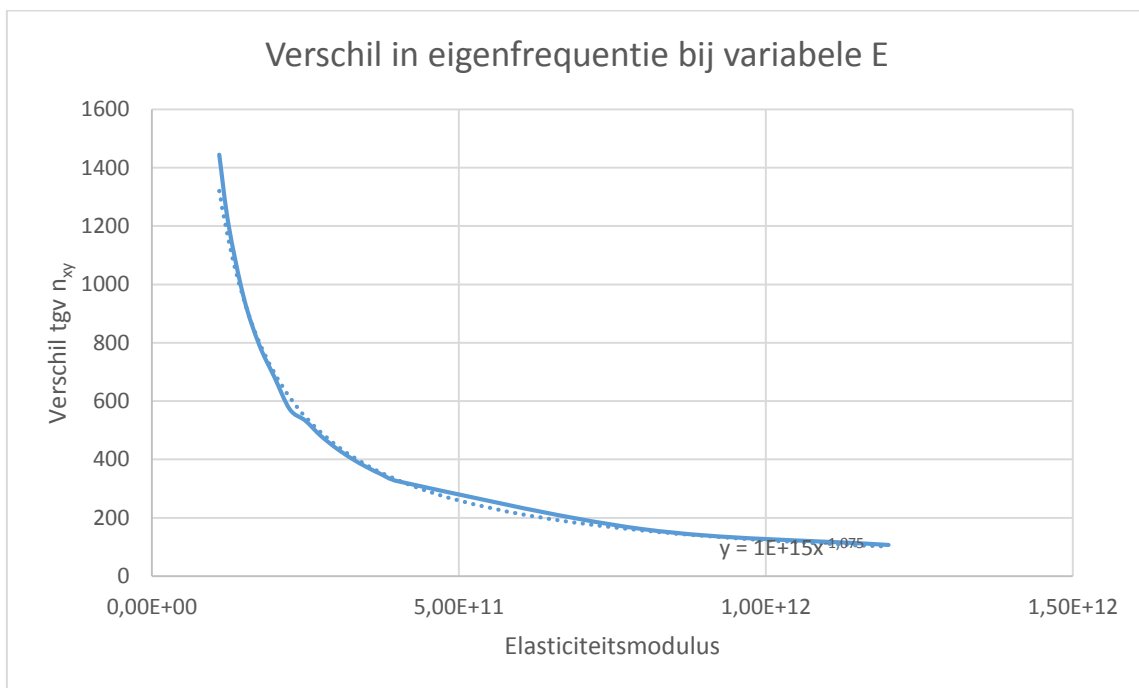
Figuur 19: Grafische weergave van de fout

Bijlage C

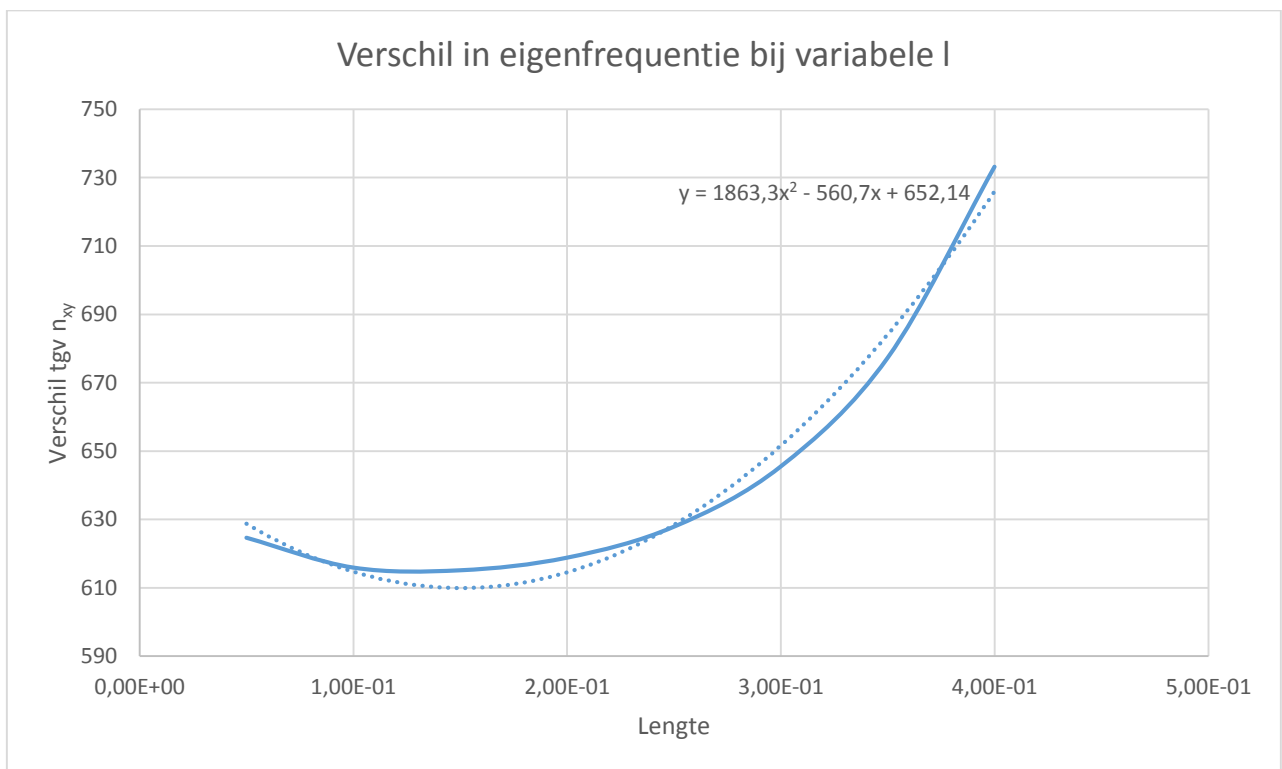
Parameter	Waarde	Eenheid
$l_x=l_y$	0,3	[m]
h	0,001	[m]
E	$2,10E+11$	$[N/m^2]$
ρ	7850	$[kg/m^3]$
ν	0,3	[-]

Tabel 17: Uitgangssituatie

E	Ansyz $n_{xy}=10000$	Ansyz $n_{xy}=0$	Vershil
$1,10E+11$	10,928	39,5442	1444,3226
$1,25E+11$	23,8875	42,1543	1206,3724
$1,50E+11$	34,3224	46,1777	954,35284
$1,75E+11$	41,1575	49,8776	793,83518
$2,00E+11$	46,4928	53,3214	681,59125
$2,25E+11$	50,9939	56,3214	571,72226
$2,50E+11$	54,9582	59,6151	533,5564
$2,75E+11$	58,5447	62,5249	481,88122
$3,00E+11$	61,8484	65,3051	439,5315
$3,25E+11$	64,9307	67,9717	404,1562
$3,50E+11$	67,8336	70,5376	374,15572
$3,75E+11$	70,5874	73,0133	348,36094
$4,00E+11$	73,2148	75,4078	325,92936
$8,00E+11$	105,884	106,643	161,30799
$1,20E+12$	130,199	130,61	107,1925

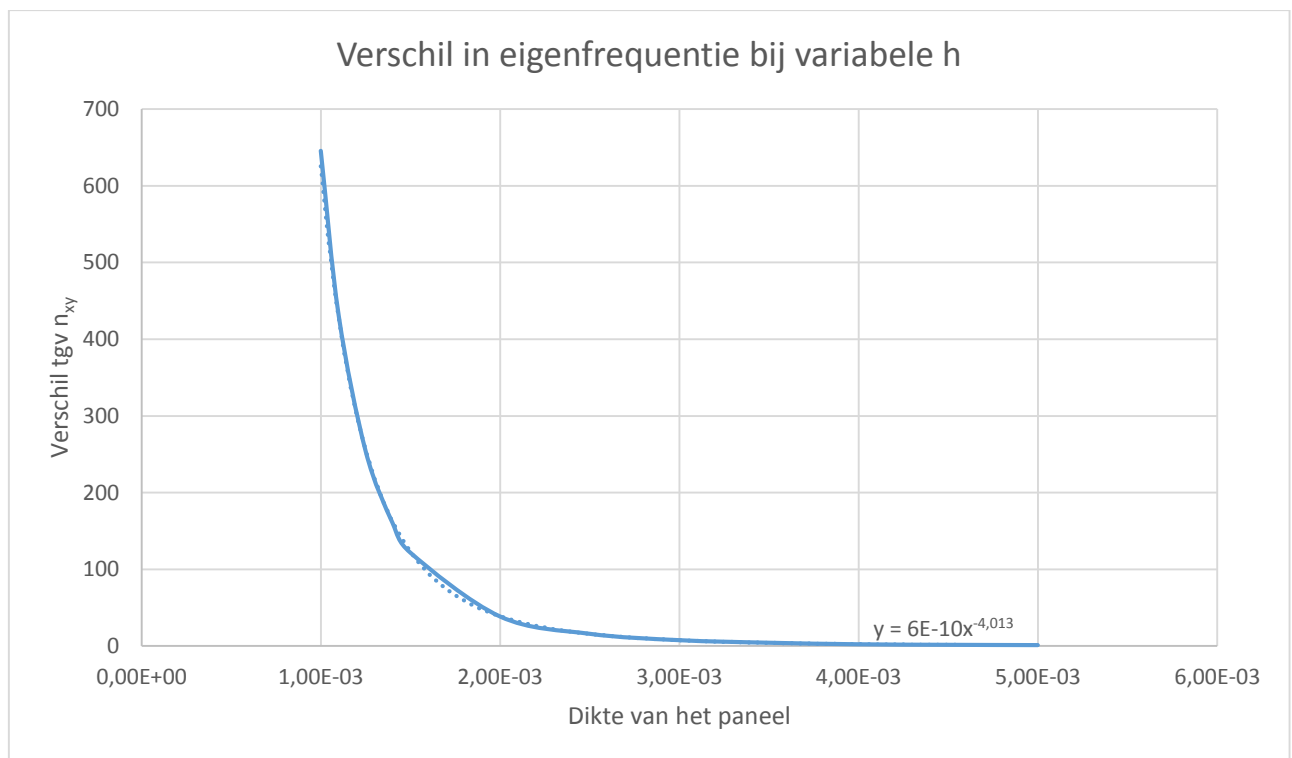
Tabel 18: Verband tussen n_{xy} en E Figuur 20: Vershil in eigenfrequentie bij variabele E

l	Ansyz	Ansyz	Verschil
	nxy=10000	nxy=0	
5,00E-02	1951,85	1952,01	624,6176
1,00E-01	490,045	490,673	615,8909
1,50E-01	216,95	218,363	615,09727
2,00E-01	120,346	122,89	618,79238
2,50E-01	74,5715	78,6686	627,84001
3,00E-01	48,3721	54,6382	645,47284
3,50E-01	30,568	40,1455	677,25855
4,00E-01	14,5494	30,738	733,1396

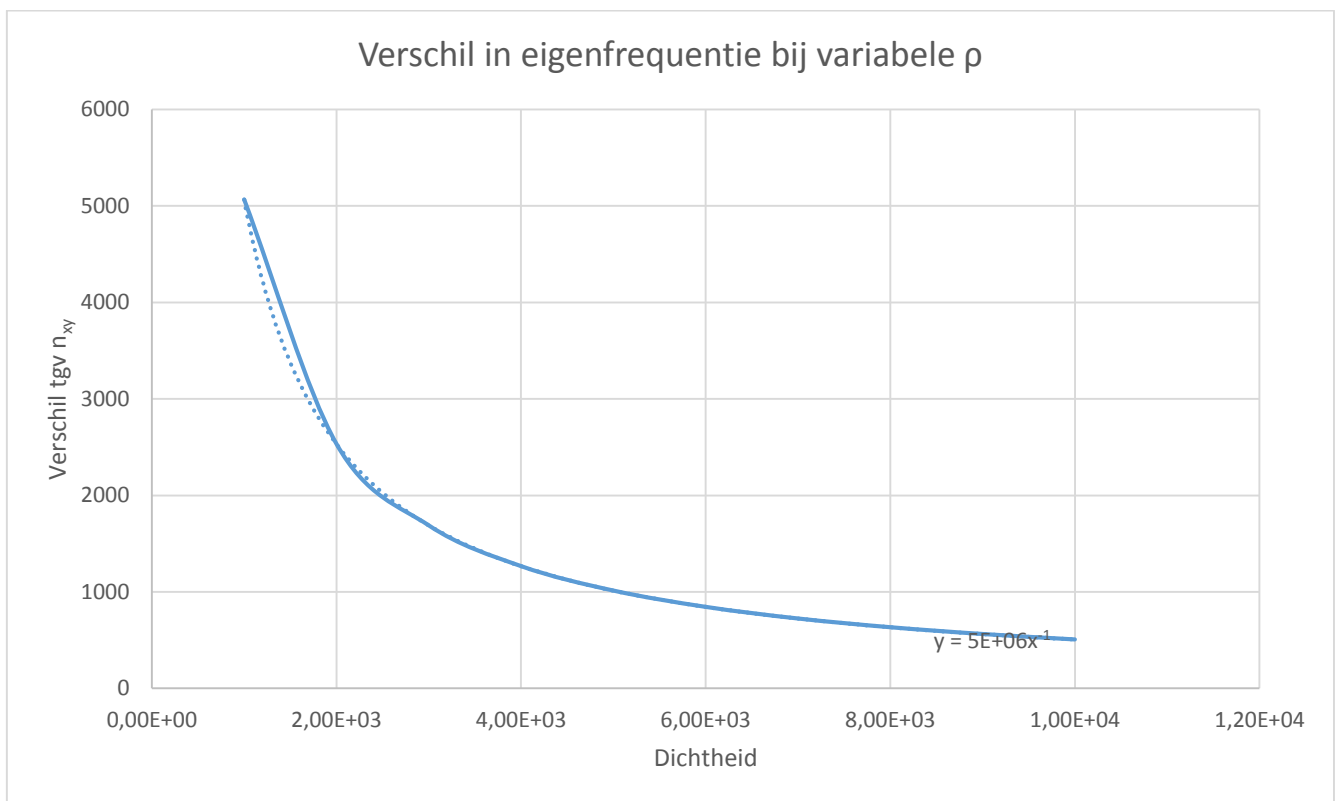
Tabel 19: Verband tussen n_{xy} en l

Figuur 21: Verschil in eigenfrequentie bij variabele l

h	Ansyz nxy=10000	Ansyz nxy=0	Vershil
1,00E-03	48,3721	54,6382	645,47284
1,10E-03	56,4017	60,0982	430,64188
1,25E-03	66,3987	68,2862	254,21775
1,40E-03	75,4148	76,4716	160,51355
1,50E-03	81,1817	81,927	121,56491
2,00E-03	109,006	109,182	38,401088
2,50E-03	136,336	136,394	15,81834
3,00E-03	163,535	163,558	7,523139
3,50E-03	190,657	190,668	4,194575
4,00E-03	217,717	217,722	2,177195
4,50E-03	244,714	244,717	1,468293
5,00E-03	271,65	271,652	1,086604

Tabel 20: Verband tussen n_{xy} en h Figuur 22: Vershil in eigenfrequentie bij variabele h

ρ	Ansyz nxy=10000	Ansyz nxy=0	Vershil
1,00E+03	135,528	153,084	5066,8723
2,00E+03	95,833	108,247	2533,4491
3,00E+03	78,2473	88,3833	1688,9678
4,00E+03	67,7642	76,5422	1266,7216
5,00E+03	60,6101	68,4614	1013,3791
6,00E+03	55,3292	62,4964	844,47964
7,00E+03	51,2249	57,8605	723,84708
8,00E+03	47,9165	54,1235	633,36228
9,00E+03	45,1761	51,0281	562,98698
1,00E+04	42,8578	48,4095	506,68867

Tabel 21: Verband tussen n_{xy} en ρ Figuur 23: Vershil in eigenfrequentie bij variabele ρ

$$f_{11,load} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{E h^2}{\rho l^4} - x \left(\frac{n_{xy}^2}{\rho h^4 E} \right)} \quad (25)$$

Om de constante x te berekenen is de volgende berekening gedaan.

restart :

$$DD := - \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} :$$

$$n_{xycr} := - \frac{9.34 \cdot \pi^2 \cdot DD}{l^2} :$$

$$eq := 0 = \frac{\pi^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{E \cdot h^2}{\rho \cdot l^4} - \frac{x \cdot n_{xy}^2}{\rho \cdot E \cdot h^4} ;$$

$$0 = \frac{1}{12} \frac{\pi^2 E h^2}{(-\nu^2 + 1) \rho l^4} - \frac{x n_{xy}^2}{\rho E h^4}$$

a := solve(eq, nxy);

$$- \frac{1}{2} \frac{\pi h^3 E}{\sqrt{-3x(\nu^2 - 1)} l^2}, \frac{1}{2} \frac{\pi h^3 E}{\sqrt{-3x(\nu^2 - 1)} l^2}$$

$$n_{xy} := \frac{1}{2} \frac{\pi h^3 E}{\sqrt{-3x(\nu^2 - 1)} l^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi h^3 E}{\sqrt{-3x(\nu^2 - 1)} l^2}$$

solve(n_{xycr} = n_{xy}, x);

$$-0.01393759203 \nu^2 + 0.01393759203$$

$$x := -0.01393759203 \nu^2 + 0.01393759203$$

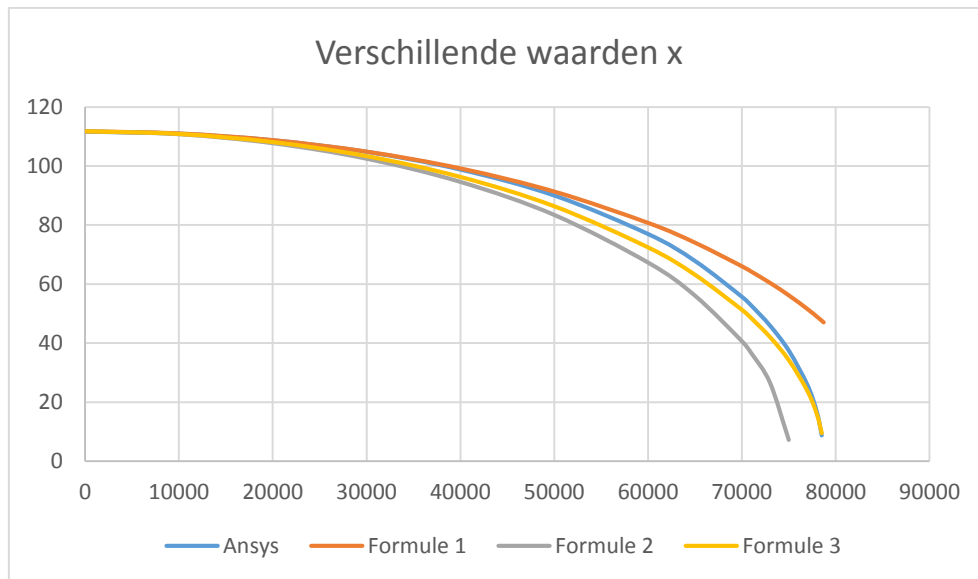
$$-0.01393759203 \nu^2 + 0.01393759203$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{-0.01393759203 \nu^2 + 0.01393759203}$$

$$\frac{1}{0.01393759203}$$

$$71.74840517$$



Figuur 24: Verschillende waarden van x vergeleken met het model

In dit figuur is de waarde van x voor formule 3 gelijk aan de hier boven berekende $\frac{1-v^2}{71.75}$. Voor de combinatie van normaal en schuifkracht is de volgende waarde voor x bepaald.

n_{xy}	Formule	Ansys	x -waarde
[N]	[Hz]	[Hz]	[-]
0	54,634989	54,6382	1,01002438
1000	54,579446	54,5821	1,01159137
2000	54,412476	54,4132	1,01562073
3000	54,133049	54,1294	1,02210333
4000	53,73941	53,727	1,03059473
5000	53,229024	53,2008	1,04132315
6000	52,598495	52,5437	1,05480597
7000	51,843439	51,7461	1,07059184
8000	50,95832	50,7961	1,08936847
9000	49,936222	49,678	1,11094693
10000	48,768535	48,3721	1,15881978
Gemiddelde			1,05598097

Tabel 22: Constante waarde x

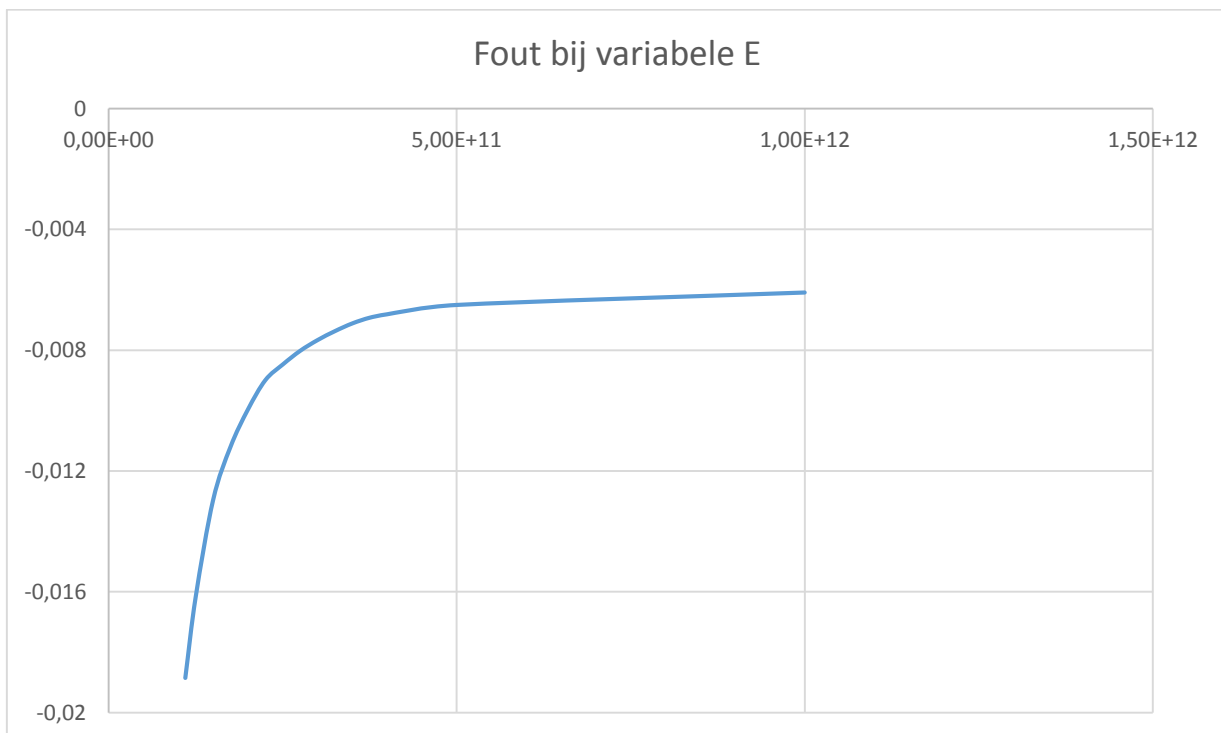
Bijlage D

$$n_{xy} = 10000 \text{ N}$$

$$n_{xy} = 1000 \text{ N}$$

E	Ansyz	Formule	Fout	Ansyz	Formule	Fout
N/m ²	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]
1,10E+10				3,45572	6	71,82105
1,10E+11	10,928	19	71,8202	39,3959	39	-0,01885
1,25E+11	23,8875	27	11,63281	42,032	42	-0,01616
1,50E+11	34,3224	35	2,764475	46,0847	46	-0,01295
1,75E+11	41,1575	42	0,950134	49,8039	50	-0,0112
2,00E+11	46,4928	47	0,351141	53,2611	53	-0,00996
2,25E+11	50,9939	51	0,110894	56,5053	57	-0,00899
2,50E+11	54,9582	55	0,005037	59,572	60	-0,00848
2,75E+11	58,5447	59	-0,04346	62,4875	62	-0,00802
3,00E+11	61,8484	62	-0,06537	65,2723	65	-0,00767
3,25E+11	64,9307	65	-0,07426	67,9426	68	-0,00737
3,50E+11	67,8336	68	-0,0764	70,5115	71	-0,00712
3,75E+11	70,5874	71	-0,07513	72,9898	73	-0,00693
4,00E+11	73,2148	73	-0,07234	75,3865	75	-0,00681
5,00E+11	82,7558	83	-0,05728	84,2933	84	-0,00651
1,00E+12	118,689	119	-0,02161	119,225	119	-0,00609
1,00E+14	1192,3	1.192	-0,00565	1192,3	1.192	-0,0056

Tabel 23: Fout tgv E



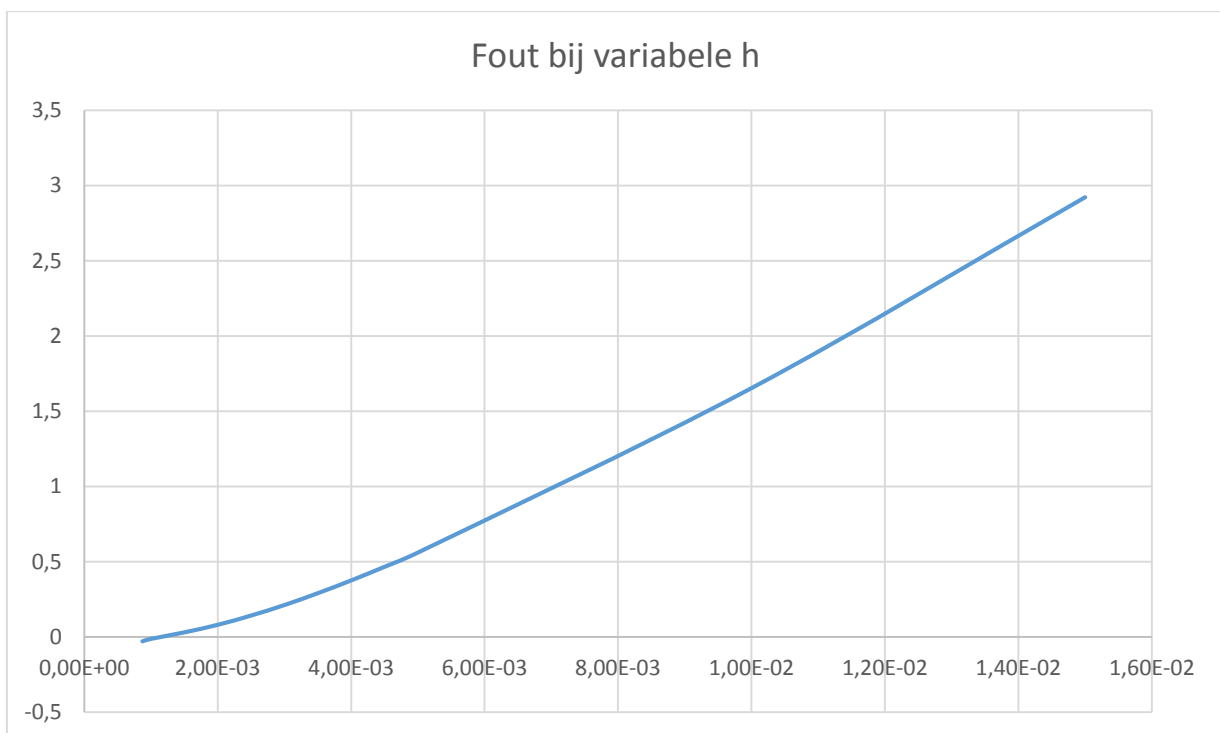
Figuur 25: Grafische weergave van Tabel 23

$$n_{xy} = 10000 \text{ N}$$

$$n_{xy} = 1000 \text{ N}$$

h	Ansysis	Formule	Fout	Ansysis	Formule	Fout
[m]	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]
8,70E-04	33,0159	33,94248	2,806461	47,4295	47,41583	-0,02883
1,00E-03	48,5844	48,48346	-0,20775	54,5838	54,57691	-0,01263
1,50E-03	81,2038	81,18441	-0,02388	81,9198	81,94484	0,030565
2,00E-03	109,011	109,0884	0,071016	109,18	109,2682	0,080752
2,50E-03	136,338	136,528	0,139371	136,393	136,5869	0,142147
3,00E-03	163,535	163,8811	0,211622	163,558	163,9047	0,211992
3,50E-03	190,658	191,2114	0,290263	190,668	191,2224	0,290742
4,00E-03	217,717	218,5343	0,37539	217,722	218,5399	0,375663
4,50E-03	244,714	245,8543	0,465975	244,717	245,8574	0,466016
5,00E-03	271,65	273,1731	0,560681	271,652	273,1749	0,560617
1,00E-02	537,465	546,3498	1,6531	537,465	546,3499	1,653111
1,50E-02	796,266	819,5248	2,920988	796,266	819,5248	2,920989

Tabel 24: Fout tgv h

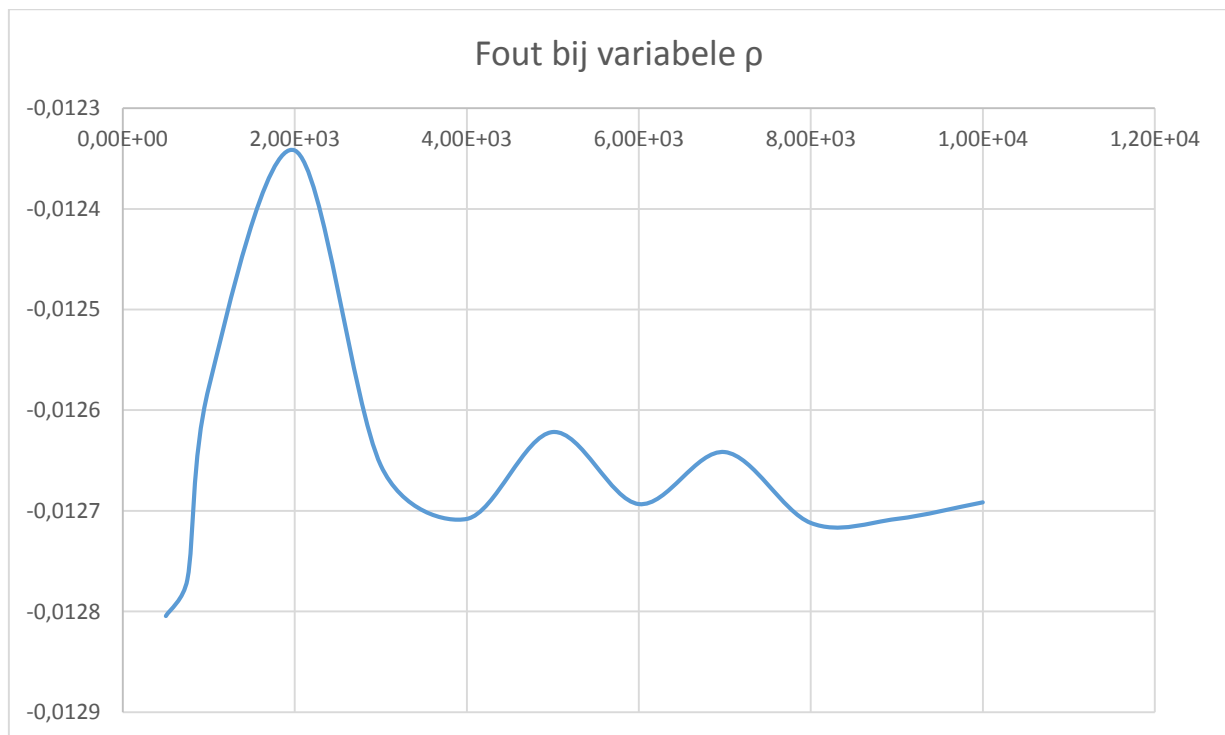


Figuur 26: Grafische weergave van Tabel 24

$$n_{xy} = 10000 \text{ N}$$

$$n_{xy} = 1000 \text{ N}$$

ρ	Ansys	Formule	Fout	Ansys	Formule	Fout
[kg/m ³]	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]
5,00E+02	192,507	192,1071	-0,20772	216,279	216,2513	-0,0128
7,50E+02	157,181	156,8548	-0,20753	176,591	176,5685	-0,01277
1,00E+03	136,123	135,8402	-0,20772	152,932	152,9128	-0,01258
2,00E+03	96,2535	96,05356	-0,20772	108,139	108,1257	-0,01234
3,00E+03	78,5906	78,4274	-0,20765	88,2954	88,28423	-0,01265
4,00E+03	68,0615	67,92012	-0,20772	76,4661	76,45638	-0,01271
5,00E+03	60,876	60,74961	-0,20762	68,3933	68,38467	-0,01262
6,00E+03	55,572	55,45655	-0,20775	62,4343	62,42638	-0,01269
7,00E+03	51,4496	51,34279	-0,2076	57,8029	57,79559	-0,01264
8,00E+03	48,1267	48,02678	-0,20762	54,0697	54,06283	-0,01271
9,00E+03	45,3743	45,28008	-0,20764	50,9774	50,97092	-0,01271
1,00E+04	43,0459	42,95646	-0,20778	48,3614	48,35526	-0,01269

Tabel 25: Fout tgv ρ 

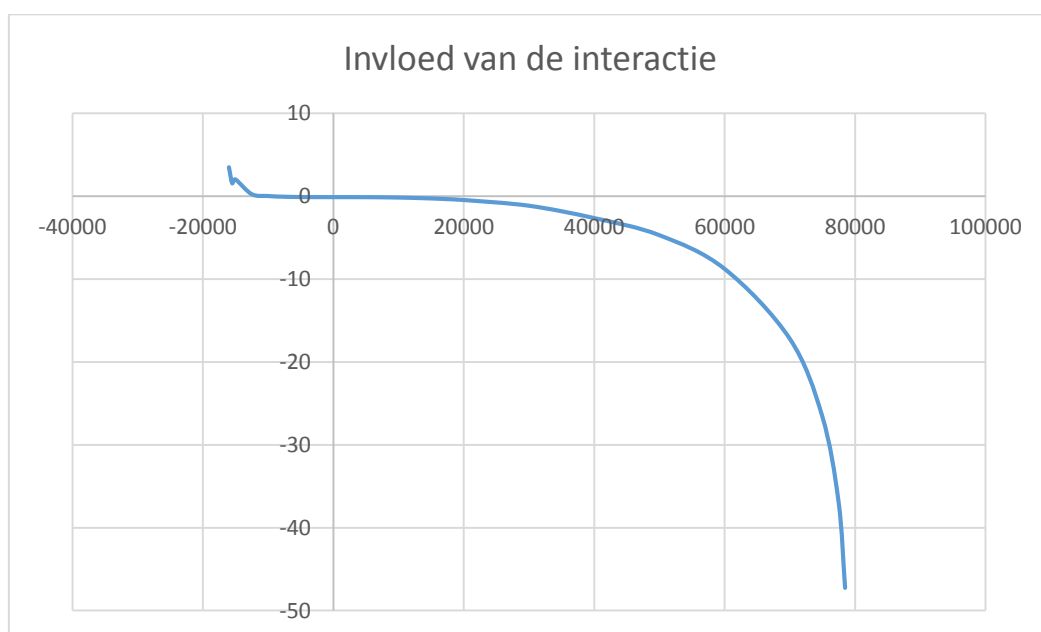
Figuur 27: Grafische weergave van Tabel 25

Bijlage E

nxx=nyy=nx	Ansyl	Formul	Afwijkin	Ansyl	Formule	Afwijking	Ansyl	Formule	Afwijking
[N]	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]	[Hz]	[Hz]	[%]
				nxy=0			nxx=nyy=0		
-16000	10,7762	14,702926	36,4388745	25,0188	25,4022255	1,53254969	109,83	109,854576	0,022376468
-15500	22,8391	24,757745	8,40070229	31,5639	31,8691612	0,967121163	109,947	109,974667	0,025164055
-15000	30,4233	31,762836	4,4029933	37,9679	37,2292063	-1,945574235	110,06	110,090821	0,028003753
-12500	54,069	54,552412	0,89406427	56,7304	56,9022465	0,30291781	110,566	110,612951	0,042463996
-10000	69,914	70,15769	0,34855694	71,2043	71,3422561	0,193746881	110,977	111,038322	0,055256229
-7500	82,6001	82,748325	0,17944932	83,1972	83,316081	0,142890666	111,295	111,368043	0,065629668
-5000	93,4392	93,549544	0,11809189	93,6669	93,7732436	0,113533783	111,52	111,602961	0,074391155
-2500	103,029	103,12515	0,09332558	103,079	103,175933	0,094037169	111,655	111,743675	0,079418786
0	111,7	111,79054	0,08105672	111,7	111,79054	0,081056725	111,7	111,79054	0,081056725
2500	119,662	119,74348	0,06809096	119,702	119,787215	0,071188899	111,655	111,743675	0,079418786
5000	127,053	127,11776	0,05096994	127,202	127,282476	0,063266058	111,52	111,602961	0,074391155
7500	133,973	134,00894	0,02682757	134,284	134,360264	0,056792865	111,295	111,368043	0,065629668
10000	140,497	140,48814	-0,00630919	141,01	141,083423	0,052069549	110,977	111,038322	0,055256229
12500	146,681	146,60997	-0,04842289	147,43	147,500455	0,047788662	110,566	110,612951	0,042463996
15000	152,569	152,41752	-0,09928717	153,581	153,649719	0,044744206	110,06	110,090821	0,028003753
17500	158,198	157,94545	-0,15964448	159,496	159,562176	0,041490435	109,456	109,470548	0,013290983
20000	163,596	163,22217	-0,2285102	165,199	165,263244	0,038888694	108,75	108,750452	0,000415612
30000	183,312	182,23831	-0,58571536	186,273	186,331283	0,031289184	104,829	104,826431	-0,002450507
40000	200,935	198,6074	-1,15838609	205,194	205,248032	0,02633204	98,8353	99,0720368	0,239526581
50000	216,477	212,94075	-1,63354725	222,511	222,562715	0,023241389	90,0489	91,1412323	1,21304352
60000	230,923	225,62667	-2,29354983	238,575	238,624327	0,020675611	76,9938	80,3924619	4,414202083
70000	244,333	236,92993	-3,02991026	253,624	253,671001	0,018531777	55,7349	65,4518111	17,43415908
75000	250,708	242,12451	-3,42369959	260,823	260,869087	0,017669777	37,4701	55,3960593	47,84070304
77500	253,822	244,61622	-3,62686482	264,349	264,394653	0,01726982	21,6467	49,2918581	127,7107279
78500	255,055	245,59388	-3,70944264	265,746	265,791785	0,017228921	8,80236	46,5640019	428,9945189

Tabel 26: Interactie tussen n_{xx} en n_{yy} en n_{xy}

Als er geen interactie tussen de krachten is, zal de afwijking van de totale formule gelijk zijn aan de afwijking van de afzonderlijke delen. Bij grote belastingen blijkt deze interactie een belangrijkere rol te gaan spelen.



Figuur 28: Verschil tussen de totale formule en de afzonderlijke delen