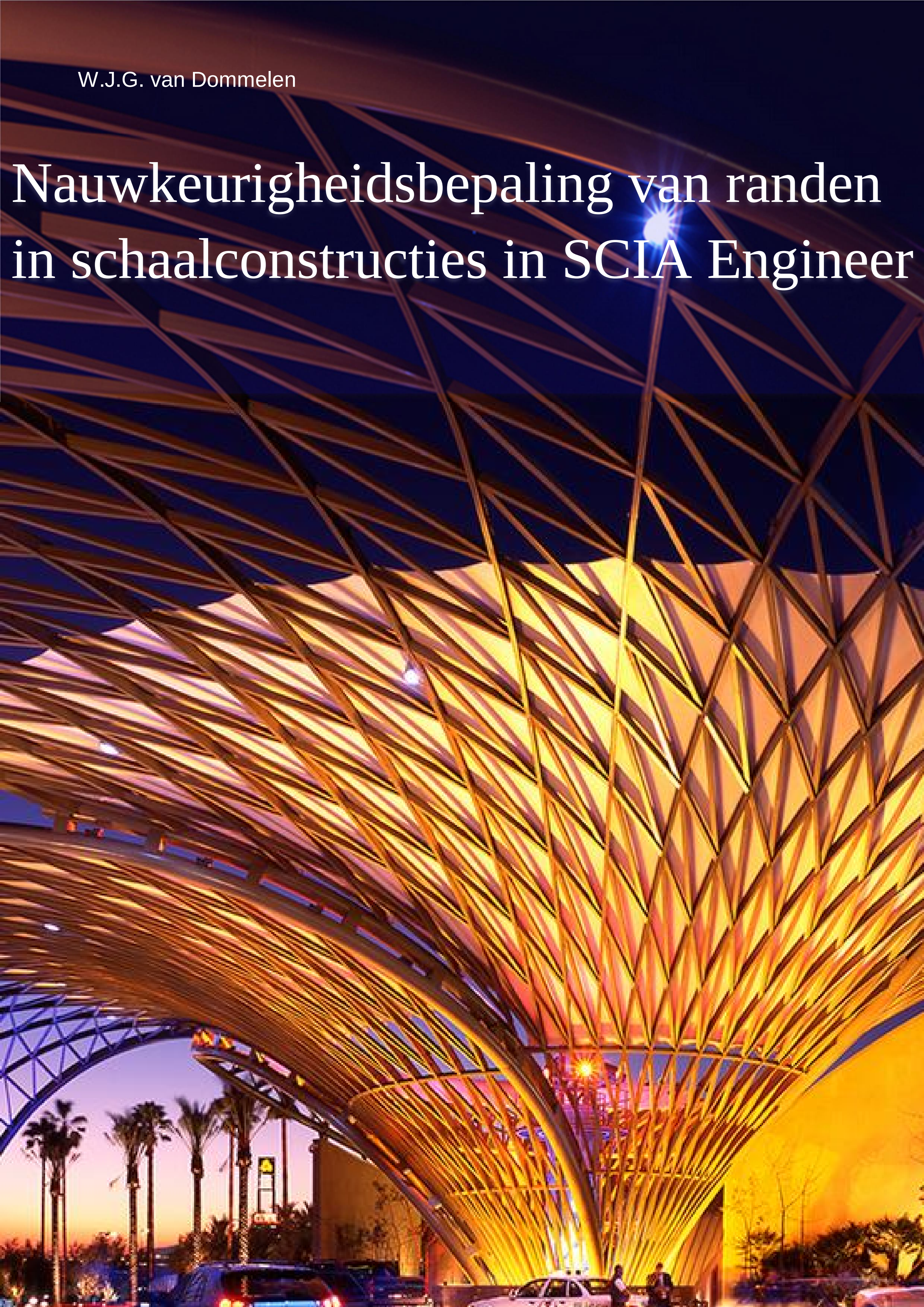
W.J.G. van Dommelen

Nauwkeurigheidsbepaling van randen in schaalconstructies in SCIA Engineer



Nauwkeurigheidsbepaling van randen in schaalconstructies in SCIA Engineer

Door

W.J.G. van Dommelen

Studentnummer:	4362128
Datum:	September 2017 - oktober 2017
Eerste begeleider:	Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom
Tweede begeleider:	Dr. Ir. F.P. van der Meer

Voorwoord

Hierbij treft u het BSc-Eindwerk aan dat is gemaakt ter afronding van de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Dit verslag beschrijft de nauwkeurigheid van randen van schaalelementen in SCIA Engineer; dit werk is een vervolg op bevindingen van E.M.J. Vicca die van november 2015 tot januari 2016 zich bezig heeft gehouden met de bepaling van de nauwkeurigheid van schaalelementen in SCIA Engineer.

Gedurende september 2017 tot het eind van oktober 2017 heb ik me bezig gehouden met dit BSc-Eindwerk. Tijdens het schrijven hebben dr. ir. P.C.J. Hoogeboom en dr. ir. F.P. van der Meer mij begeleid. Graag zou ik hen willen bedanken voor hun feedback, inzichten en begeleiding. Zij hebben mij geholpen tot dit resultaat te komen.

Willem van Dommelen

Oktober 2017

Samenvatting

In dit werk staat de bepaling van de orde van de fout op randen van schaalconstructies in SCIA Engineer centraal. Om dit te onderzoeken worden vier verschillende locaties die elk op een rand liggen onder de loep genomen in een dikke en een dunne schaal. Daarnaast wordt gekeken of de randvoorwaarden die op grond van een analytische aanpak verkregen zijn, overeenkomen met de uitkomsten die worden geleverd via de eindige-elementenmethode die SCIA Engineer toepast. Daarnaast is er een koppeling gemaakt met het programma Ansys waarin dezelfde constructie ook onderzocht is via de eindige-elementenmethode.

Alvorens de resultaten verwerkt kunnen worden, dienen er in SCIA Engineer numerieke waarden weergegeven te worden voor elke grootheid. Vooraf is een methode ontwikkeld om numerieke waarden af te lezen, omdat het standaard namelijk niet mogelijk is om in dit eindige-elementenprogramma getalswaarden te tonen. Getalswaarden moeten gewoonlijk worden bepaald door middel van een kleurenschaal.

Een andere bijkomstigheid is de benodigde capaciteit van de computer. In het geval dat een gehele constructie tot een zeer kleine elementgrootte verfijnd wordt, vergt dit te veel capaciteit waardoor de berekening praktisch onmogelijk wordt. Om deze reden is er alleen ter plekke van de randen verfijnd tot de gewenste elementgrootte. Echter, het dient nader onderzocht te worden of resultaten van geheel verfijnde constructies en constructies met randverfijning in combinatie met elkaar gebruikt mogen worden.

Het valt op dat voor de dikke schaal van 70 mm een grotere waarde voor de orde van de fout gevonden wordt dan bij de dunne schaal; wanneer randverfijning wordt toegepast, heeft bij de dikke schaal α voornamelijk een waarde die gelijk is aan 1, terwijl voor de dunne schaal van 7 mm de waarde 0 gevonden wordt. Een waarde van 0 duidt op een niet-convergerend resultaat, ofwel op een fout die niet monotoon afneemt. Bij algehele netverfijning lijkt de waarde voor α gelijk te zijn aan 2 aan de randen. Dit is meer in lijn met veldelementen in schaalconstructies waar voor α overwegend $\alpha = 2$ en $\alpha = 3$ gevonden wordt. (Vicca, 2015)

De nauwkeurigheid van randen in Ansys en SCIA Engineer voor randen van schaalconstructies zijn vergelijkbaar. Beide schalen van 70 mm hebben immers overwegend een waarde van α die gelijk is aan 1. Al lijkt bij algehele netverfijning in SCIA Engineer de waarde van α meer in de buurt van 2 te liggen en komt de waarde $\alpha = 1$ in SCIA Engineer zoals gezegd voort uit randverfijning.

Ofschoon de dunnere schaal minder snel convergeert naar de uiteindelijke waarde, voldoet deze schaal wel beter aan de analytische randvoorwaarden. Ten slotte geldt voor zowel de dunne als de dikke schaal dat er op de rand grote gradiënten in de verschillende onderzochte krachtsgrootheden voorkomen.

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Voor het berekenen van elementen in constructies bestaat er tegenwoordig een breed scala aan softwareprogramma's die, op basis van een bepaalde input, gewenste uitkomsten geven, e.g. spanningen, verplaatsingen of snedekrachten. Eén van dergelijke programma's is SCIA Engineer; deze software maakt gebruik van de eindige-elementenmethode[1] voor het berekenen van gewenste grootheden.

In eerdere projecten is geobserveerd dat berekeningen van schaalconstructies met SCIA Engineer nauwkeuriger zijn dan verwacht: Op theoretische gronden werd verwacht dat de schaalelementen afwijken van de exacte oplossing evenredig met de elementgrootte h. Dit wil zeggen dat de fout O(h) is. Echter, uit metingen blijkt dat de fout O(h^2) is (Vicca, 2015). Dit geldt voor alle berekende grootheden, vervorming, momenten, membraankrachten, dwarskrachten en spanningen. Dit klinkt gunstig maar het lijkt niet te gelden voor elementen in de randen van schaalconstructies; deze hebben een grotere fout. Dit is jammer aangezien juist in de randen van schalen grote gradiënten in spanningen optreden. De elementgrootte in de randen heeft een aanzienlijke invloed op het hele elementennet. Om dit duidelijk te maken is het belangrijk dat de orde van de fout op randen wordt vastgesteld. De zaken worden bemoeilijkt doordat randvoorwaarden kunnen variëren (ingeklemd, scharnierend of vrij). Ook kan de schaaltheorie variëren (met en zonder dwarskrachtvervorming).

Naast de nauwkeurigheid van de schaalelementen is er ook onduidelijkheid over de randvoorwaarden; bij numerieke berekeningen worden randvoorwaarden op verplaatsingen en rotaties opgelegd. De randvoorwaarden voor normaalkrachten en momenten worden niet opgelegd maar treden vanzelf op als resultaat van de elementenberekening. Daarentegen worden bij analytische berekeningen alle randvoorwaarden opgelegd. De analytische randvoorwaarden voor schaalconstructies zijn afgeleid door Koiter in 1951. Men zou verwachten dat de numeriek berekende randvoorwaarden overeenkomen met de analytische randvoorwaarden. Echter, uit een korte studie blijken deze niet overeen te komen (Hoogenboom, 2016/2017) Het is niet duidelijk wat dit veroorzaakt. Belangrijk is dat eerst de situatie in kaart wordt gebracht. De zaken worden bemoeilijkt doordat het niet eenvoudig is om in SCIA engineer de rekenresultaten in individuele elementen af te lezen. Hiervoor dient een methode te worden bedacht die dit probleem omzeilt.

[1] De eindige-elementenmethode deelt constructies op in een groot aantal kleine elementen. Vervolgens wordt per elementje de krachtsverdeling en spanningsverdeling bepaald door middel van het oplossen van matrixvergelijkingen die de elementen onderling koppelen.

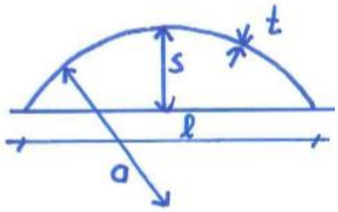
2. Sanders-Koiter vergelijkingen

Dit hoofdstuk zal worden gebruikt om Warner Koiter te introduceren. Daarnaast worden de vergelijkingen van Sanders-Koiter toegelicht en die zullen ten slotte in perspectief worden geplaatst met SCIA Engineer.

2.1 Introductie Koiter

Indien er in een constructie gebruik gemaakt wordt van gekromde panelen, wordt er gesproken van schaalelementen. Een belangrijk kengetal is de verhouding tussen de straal van de kromming *a* en de dikte *t* dat wordt gebruikt om schalen onder te verdelen in:

- Dikke schalen: 5 < a/t < 30
- Dunne schalen: 30 < a/t < 4000
- Membranen: 4000 < a/t



Figuur 2.1 Parameters schaalconstructie

Om het gedrag van dunne schalen te bestuderen middels een lineair elastische benadering is er aan het eind van de negentiende eeuw een aantal vergelijkingen opgesteld door Augustus Love. Hij heeft daarbij, evenals Gustav Kirchhoff, de hypotheses van Bernoulli gebruikt voor de plaattheorie. Deze vergelijkingen vormen de basis van de schaalanalyse. Later, halverwege de twintigste eeuw, heeft Warner Koiter[2] bewezen dat de aannames voor de vergelijkingen van Love correct waren. Er was echter wel een aantal onvolkomenheden. Met de correcties van Koiter worden de vergelijkingen van Love aangeduid als de Sanders-Koiter vergelijkingen. (Hoogenboom, 2016/2017)

2.2 Vergelijkingen van Koiter

De vergelijkingen van Koiter, de Sanders-Koiter vergelijkingen zoals er in de literatuur naar gerefereerd wordt, zijn weergegeven in Tabel 2.1. Er valt een onderscheid te maken in equilibriumvergelijkingen, constitutieve vergelijkingen en kinematische vergelijkingen. Equilibriumvergelijkingen dienen voor het toetsen van het krachtenevenwicht binnen de schaal, terwijl de constitutieve vergelijkingen gebruikt worden om materiaaleigenschappen mee te nemen binnen de berekeningen. Ten slotte dienen de kinematische vergelijkingen om de relaties binnen de vervormde constructie te beschrijven. (Hoogenboom, 2016/2017)

[2] Koiter was een Nederlandse professor voor toegepaste mechanica aan de Technische Universiteit Delft

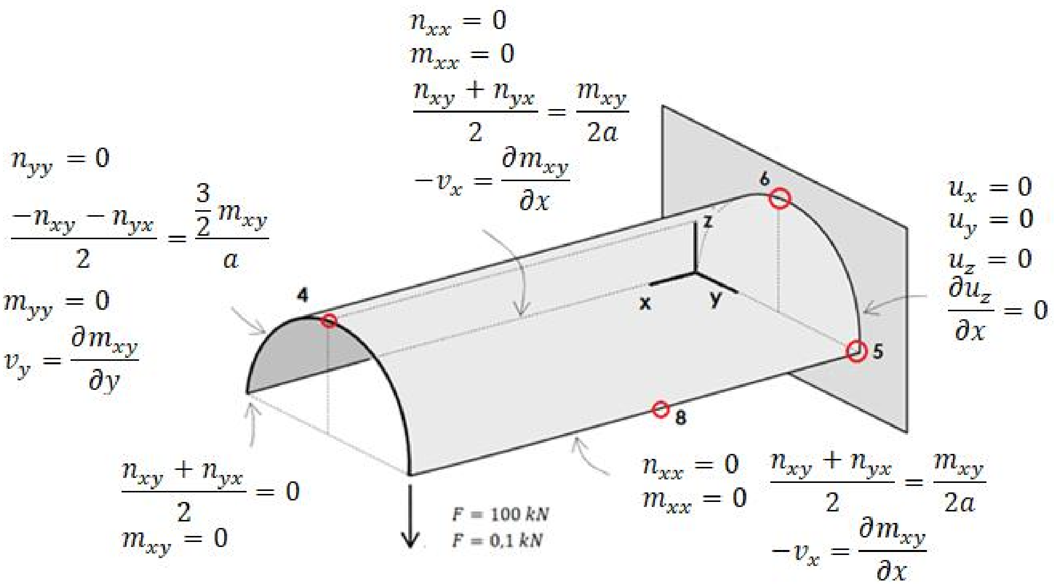
Tabel 2.1 Sanders-Koiter vergelijkingen (Metselaar, 2013)

Equilibrium vergelijkingen	$k_{xx}n_{xx}+k_{xy}(n_{xy}+n_{yx})+k_{yy}n_{yy}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+k_y q_x+k_x q_y+p_z=0$	1
	$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial n_{yx}}{\partial y}+k_y(n_{xx}-n_{yy})+k_x(n_{xy}+n_{yx})-k_{xx}q_x-k_{xy}q_y+p_x=0$	2
	$\frac{\partial n_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}+k_x(n_{yy}-n_{xx})+k_y(n_{xy}+n_{yx})-k_{yy}q_y-k_{xy}q_x+p_y=0$	3
	$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}+k_y(m_{xx}-m_{yy})+2k_x m_{xy}-q_x=0$	4
	$\frac{\partial m_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}+k_x(m_{yy}-m_{xx})+2k_y m_{xy}-q_y=0$	5
	$k_{xy}(m_{xx}-m_{yy})-(k_{xx}-k_{yy})m_{xy}+n_{xy}-n_{yx}=0$	6
Constitutieve vergelijkingen	$n_{xx}=\frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy})$	7
	$n_{yy}=\frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy}+\nu\varepsilon_{xx})$	8
	$\frac{n_{xy}+n_{yx}}{2}=\frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$	9
	$m_{xx}=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx}+\nu\kappa_{yy})$	10
	$m_{yy}=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{yy}+\nu\kappa_{xx})$	11
	$m_{xy}=\frac{Et^3}{24(1+\nu)}\rho_{xy}$	12
Kinematische vergelijkingen	$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}-k_{xx}u_z+k_x u_y$	13
	$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}-k_{yy}u_z+k_y u_x$	14
	$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}-2k_{xy}u_z-k_x u_x-k_y u_y$	15
	$\phi_x=-\frac{\partial u_z}{\partial x}-k_{xx}u_x-k_{xy}u_y$	16
	$\phi_y=-\frac{\partial u_z}{\partial y}-k_{yy}u_y-k_{xy}u_x$	17
	$\phi_z=\frac{1}{2}(-\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}-k_x u_x+k_y u_y)$	18
	$\kappa_{xx}=\frac{\partial \phi_x}{\partial x}-k_{xy}\phi_z+k_x\phi_y$	19
	$\kappa_{yy}=\frac{\partial \phi_y}{\partial y}+k_{xy}\phi_z+k_y\phi_x$	20
	$\rho_{xy}=\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}+(k_{xx}-k_{yy})\phi_z-k_x\phi_x-k_y\phi_y$	21

2.3 Praktische implicaties van Koiter

Schalen kunnen dus op basis van de Sanders-Koiter vergelijkingen beschreven worden. Om tot deze relaties te komen is gebruik gemaakt van een afleiding via tensoranalyse. Desalniettemin wordt er in SCIA Engineer gebruikt gemaakt van een truc achter de schermen waarin schaalconstructies gemodelleerd worden doordat een blokvormig stuk materiaal wordt 'platgeslagen en 'uitgerekt' totdat een gewenst resultaat is bereikt (Hoogenboom, 2017). Onderzocht dient te worden of SCIA Engineer ondanks de truc die toegepast wordt, resultaten levert die overeenkomen met de analytische randvoorwaarden. Dit komt in hoofdstuk 6 aan bod.

De vergelijkingen die in Tabel 2.1 getoond zijn, kunnen in elkaar worden gesubstitueerd en worden herleid om zo tot eenvoudigere voorwaarden te komen. De vergelijkingen van Koiter kunnen zodanig vereenvoudigd worden zodat ze in staat zijn om onder andere platen die uit hun vlak belast worden te beschrijven; dit komt overeen met de Kirchhoff theorie. Onderstaande constructie, die in hoofdstuk 4 nader wordt toegelicht, wordt in dit werk in SCIA Engineer middels Kirchhoff onderzocht. De randvoorwaarden die hierbij horen zijn als volgt:



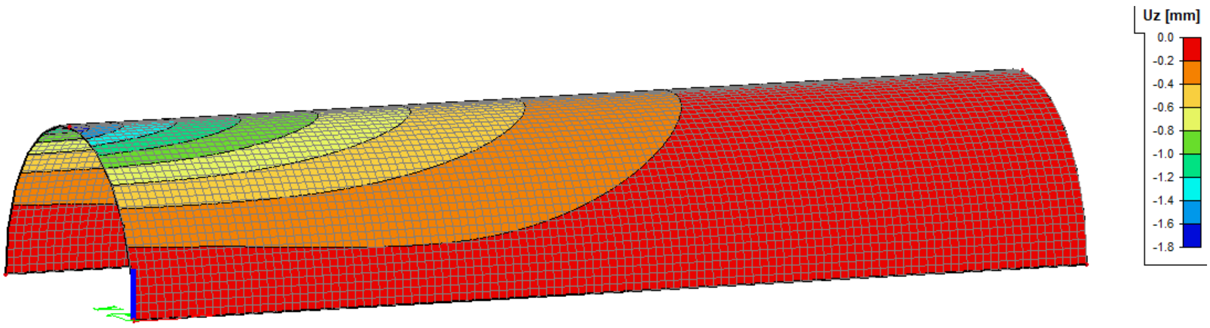
Figuur 2.2 Belasting en bijbehorende randvoorwaarden overkapping, naar: (Hoogenboom, 2016/2017)

3. SCIA Engineer

In dit hoofdstuk zal het programma SCIA Engineer toegelicht worden. Hierbij komt vooral het probleem aan de orde dat het niet mogelijk zou zijn om numerieke waarden af te lezen op specifieke locaties in de constructie. Vervolgens wordt er beschreven of en hoe het mogelijk is om dit probleem te omzeilen.

3.1 Probleem omtrent numerieke waarden in SCIA Engineer

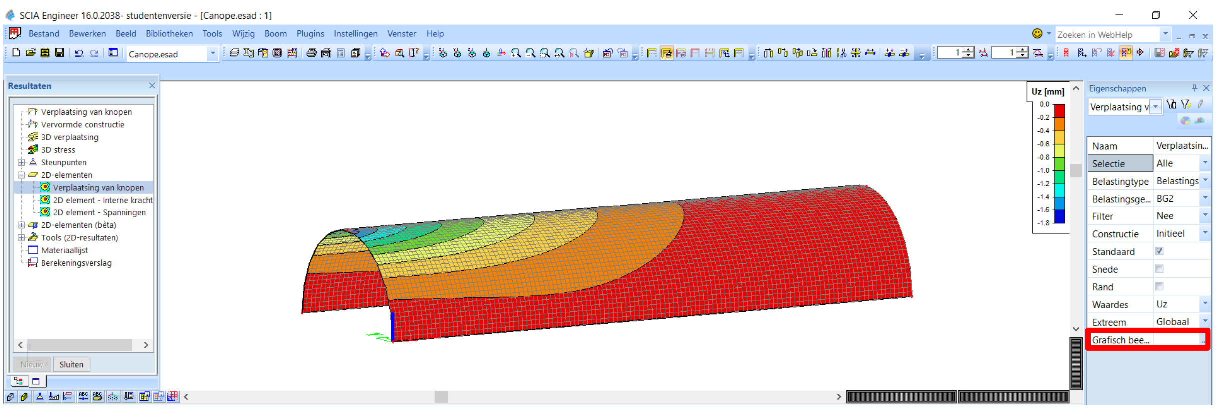
Een probleem dat voorafgaand aan het project werd aangekaart, is dat numerieke waarden in SCIA Engineer voor krachtsgrootheden en verplaatsingen niet zichtbaar zouden zijn. Aflezen van de resultaten zou moeten geschieden door middel van de kleurschaal die gebruikt wordt zoals weergegeven in Figuur 3.1. Dit zorgt echter voor onnauwkeurigheden doordat er een relatief grote spreiding kan zitten binnen één bepaalde kleur; hierdoor blijft de 'exacte' numerieke waarde onbekend wat het verwerken van de resultaten bemoeilijkt.



Figuur 3.1 Impressie resultaatweergave SCIA Engineer

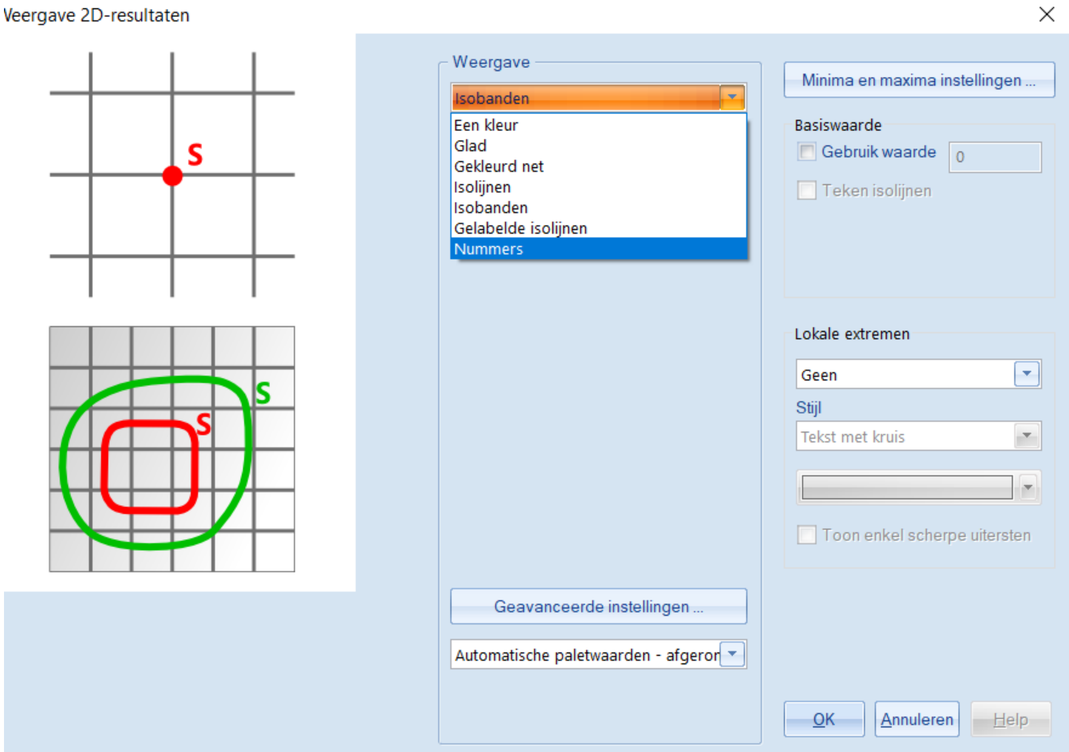
3.2 Aflezen numerieke waarden in SCIA Engineer

Op het moment dat het model en de bijbehorende modeleigenschappen zijn ingevoerd, kunnen de opleggingen en belastingen worden toegevoegd. Ten slotte dient het net dat gebruikt wordt gedefinieerd te worden. Nadat dit alles is ingevuld, kunnen de resultaten worden afgelezen. De standaardweergave van de resultaten in SCIA Engineer geeft inderdaad geen numerieke waarden weer zoals beschreven in paragraaf 3.1. Door het klikken op *Grafisch beeld instellen 2D*, aangegeven met het rode kader in Figuur 3.2, kan er echter een andere keuze gemaakt worden voor het weergeven van de resultaten.

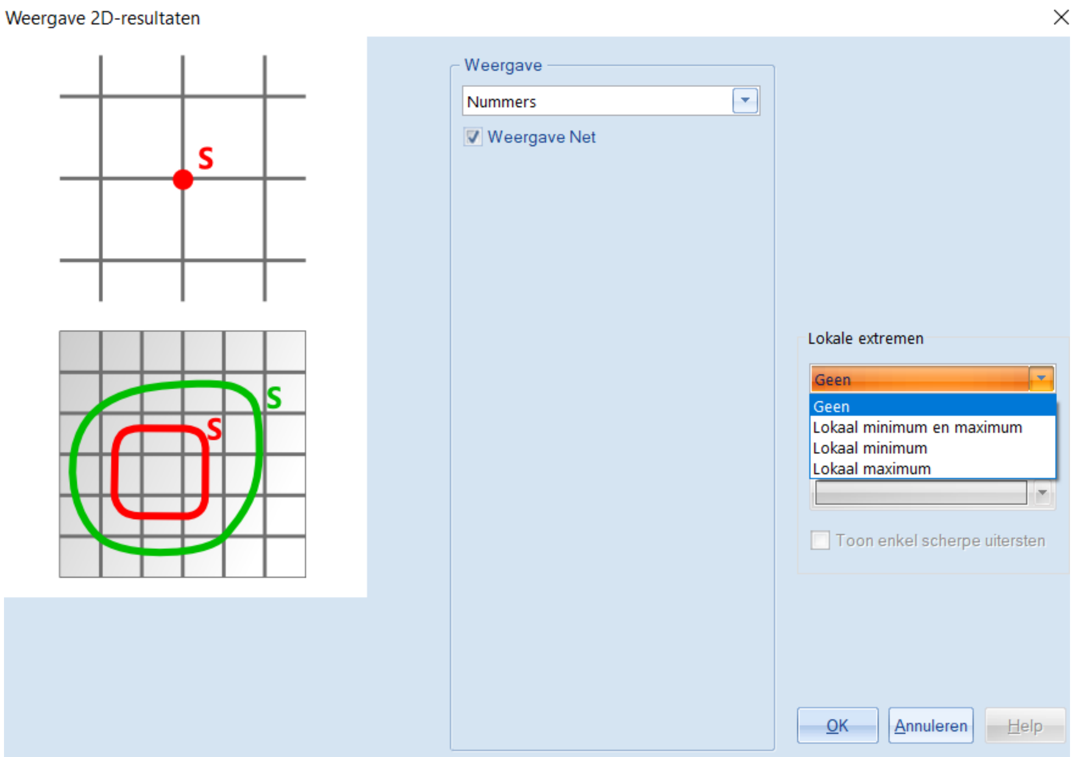


Figuur 3.2 Grafisch beeld instellen 2D

In dit geval zijn de numerieke waarden de output die verkregen wil worden. Figuur 3.3 toont het pop-upmenu dat tevoorschijn komt. Door bij *weergave* te klikken op *nummers* kunnen nu de numerieke waarden worden getoond op elk knooppunt in het schaalelement. Vervolgens kan nog gekozen voor extra features binnen deze weergave zoals te zien in Figuur 3.4.

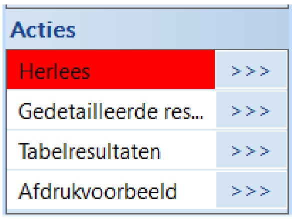


Figuur 3.3 Optiemenu resultaatweergave



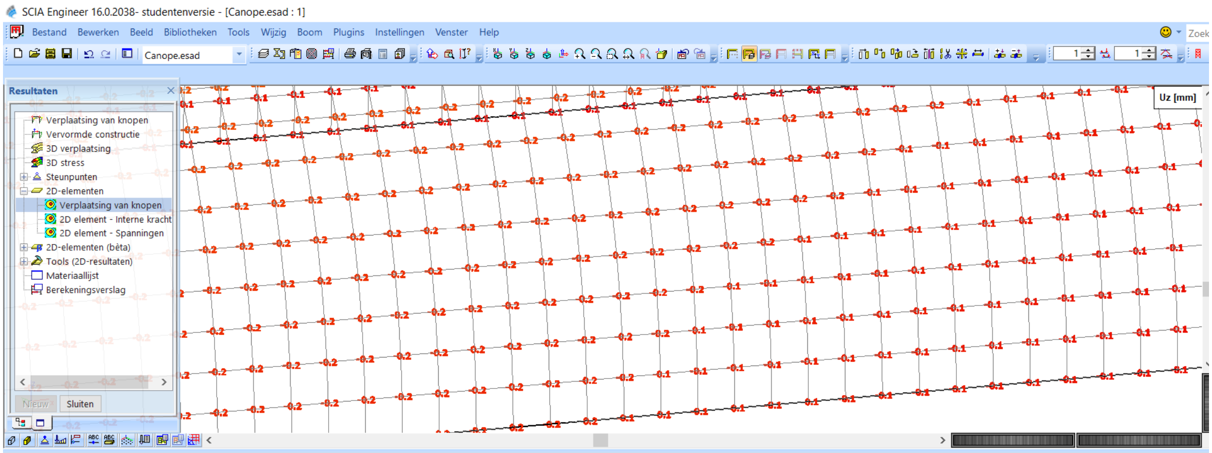
Figuur 3.4 Instellingen numerieke waarden

Nadat de instellingen voor de weergave gewijzigd zijn, moet de resultaten herlezen worden. Dit kan worden gedaan door de *herlees* optie in de hoek rechtsonder op het scherm. Dit is afgebeeld in Figuur 3.5.



Figuur 3.5 Herlezen resultaten

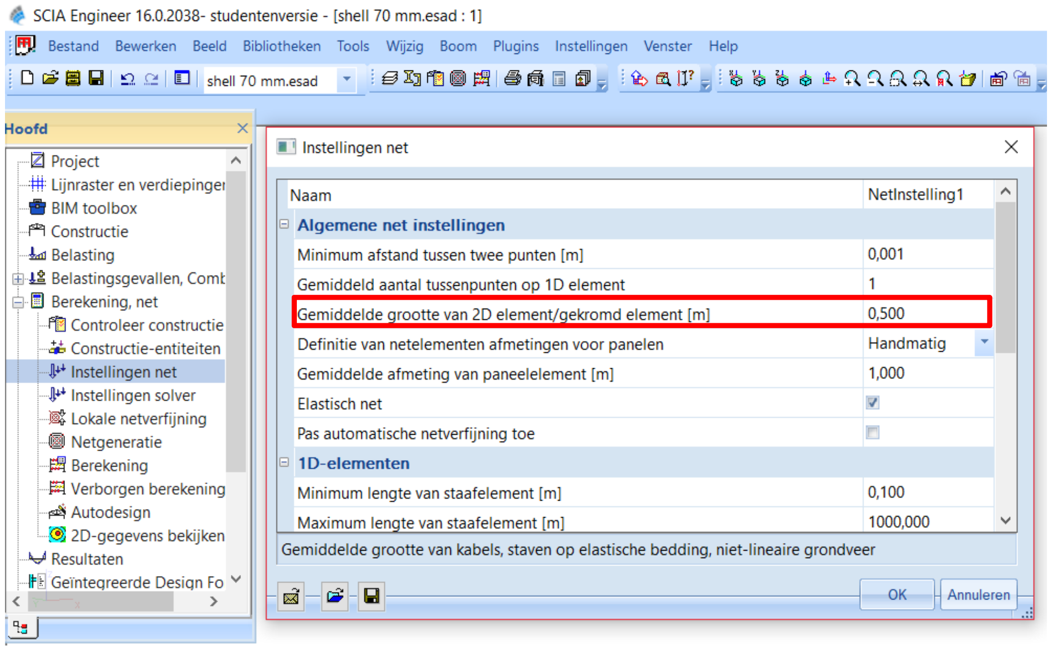
Uiteindelijk zullen de numerieke waarden zichtbaar zijn bij het bekijken van de resultaten van de eindige-elementenmethode. Op elk knooppunt van de verschillende elementen wordt nu de waarde weergegeven van de gewenste grootheid die onderzocht wordt. Een impressie van deze weergave is te zien in Figuur 3.6.



Figuur 3.6 Weergave numerieke waarden

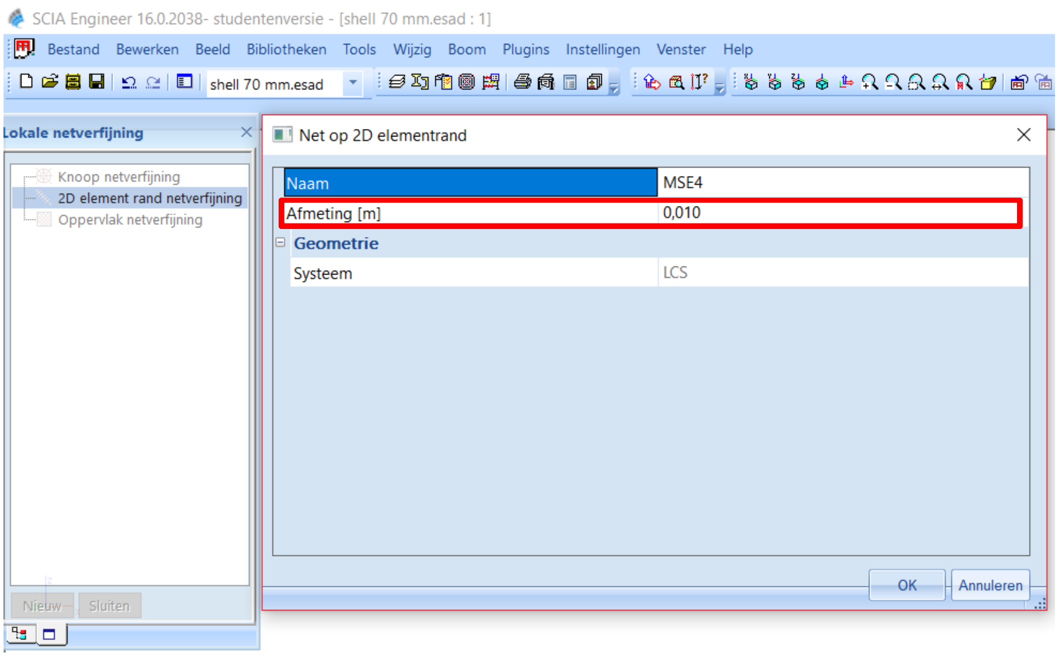
3.3 Lokale netverfijning

In dit onderzoek ligt de focus op de nauwkeurigheid van SCIA Engineer op de randen van schaalconstructies. Om bruikbare resultaten te krijgen voor de verwerken van de analyse in SCIA Engineer, wordt er gerekend met verschillende elementgroottes. Het gebruik van zeer kleine elementen vraagt een enorme capaciteit van de computer doordat er significant aantal berekeningen moeten worden opgelost en er een grote hoeveelheid data moet worden gegenereerd. Er is daarom gekozen voor het toepassen van relatief grote veldelementen; tegelijkertijd is er lokale netverfijning toegepast rondom de punten op de randen die onderzocht worden. Hierdoor is het mogelijk om toch een kleine elementgrootte toe te passen voor de te onderzoeken punten, terwijl het vereiste vermogen van de computer redelijk beperkt blijft. Een overzicht van de algemene netinstelling is te zien in Figuur 3.7, met als belangrijkste variabele de gemiddelde grootte van 2D element/gekromd element.



Figuur 3.7 Algemene instellingen net

Voor de netverfijning kan er in het *boom menu* gekozen worden voor de optie *lokale netverfijning*. Hier kan gekozen worden op wat voor manier je verfijning wil toepassen; in het geval van dit eindwerk is er gekozen voor de optie *2D element rand netverfijning*, omdat dit onderzoek zich focust op de randen. Vervolgens kan er aangegeven worden wat de elementgrootte moet zijn die toegepast wordt. Dit is weergegeven in Figuur 3.8. Ten slotte kunnen de lijnelementen aangeklikt worden waarop deze verfijning toegepast moet worden.



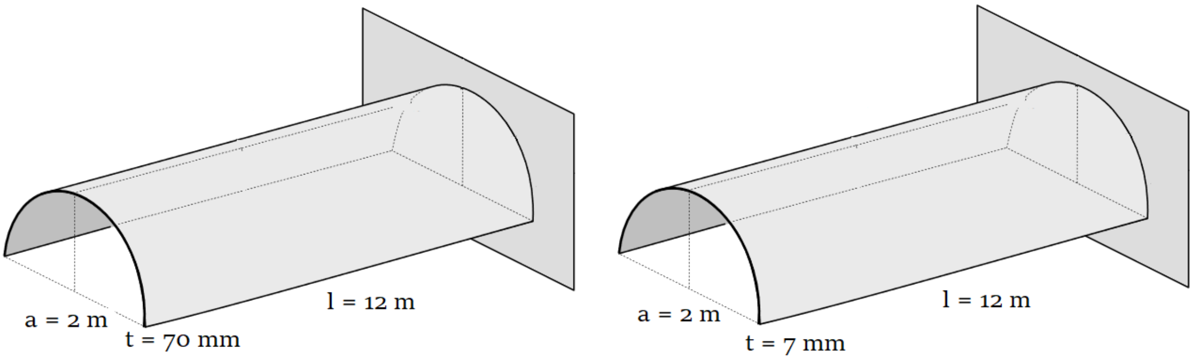
Figuur 3.8 Instellingen netverfijning

4. Schaalvormig afdak in SICA Engineer

Dit hoofdstuk zal worden toegewijd aan het beschrijven van de schaalconstructies die in SCIA Engineer gemodelleerd zijn. Allereerst worden de gegevens van de constructie beschreven, gevolgd door de belastingen die werkzaam zijn en dit hoofdstuk wordt afgesloten met de resultaten in de vorm van membraankrachten en verplaatsingen en hoeveel deze afwijken van de 'exacte' waarden.

4.1 Gebruikte modellen

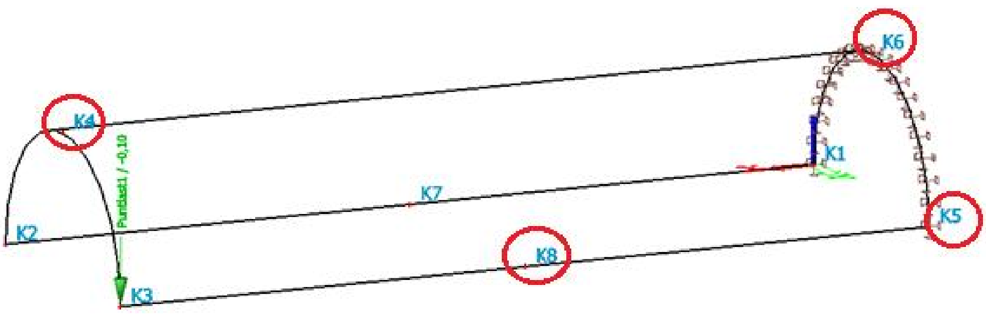
Als basis voor de modellen die gebruikt worden voor de analyse met SCIA Engineer wordt het voorbeeld op pagina 56 van hand-out 3 voor het vak *CIE4143 Shell Analysis, Theory and Application* gebruikt. Een verschil is wel dat er analyses worden uitgevoerd voor twee verschillende schaaldiktes, 70 mm en 7 mm respectievelijk. De geometrie komt er als volgt uit te zien:



Figuur 4.1 Overzicht geometrie schaalvormige overkapping, naar: (Hoogenboom, 2016/2017)

Verder geldt dat de constructie uit beton met kwaliteit C25/30 vervaardigd is, hetgeen inhoudt dat er gerekend wordt met een elasticiteitsmodulus van E ≈ 30 GPa en een Poisson ratio ν = 0,2. De schaal wordt belast door middel van een puntlast die aangrijpt op een hoekpunt van de vrije rand; 100 kN voor de schaal met een dikte van 70 mm en 0,1 kN voor de schaal met een dikte van 7 mm. Het eigen gewicht wordt in de berekening niet meegenomen, omdat de nauwkeurigheid van het resultaat belangrijker is dan de accuraatheid ervan.

Figuur 4.2 geeft weer hoe de constructie er uitziet wanneer deze is ingevoerd in SCIA Engineer. De dikte van de schaal is niet zichtbaar in dit figuur, maar is elders in het programma ingevoerd. Coördinaten van de knopen, met de oorsprong van het assenstelsel in knoop 1, zijn te zien in Figuur 4.3. De rode cirkels duiden aan van welke knopen de resultaten zullen worden bekeken in dit verslag.

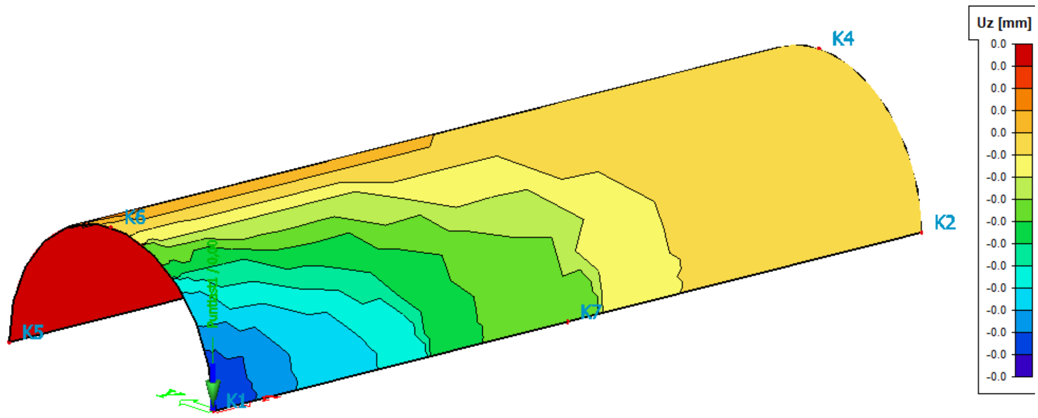


Figuur 4.2 Geometrie schaalconstructie

	Naam	Coördin...	Coördina...	Coördina...	Staaf	2D-elem...
1	K1	0,000	0,000	0,000		E1
2	K2	12,000	0,000	0,000		E1
3	K3	12,000	4,000	0,000		E1
4	K4	12,000	2,000	2,000		E1
5	K5	0,000	4,000	0,000		E1
6	K6	0,000	2,000	2,000		E1
7	K7	6,000	0,000	0,000		
8	K8	6,000	4,000	0,000		

Figuur 4.3 Coördinaten knopen schaalconstructie

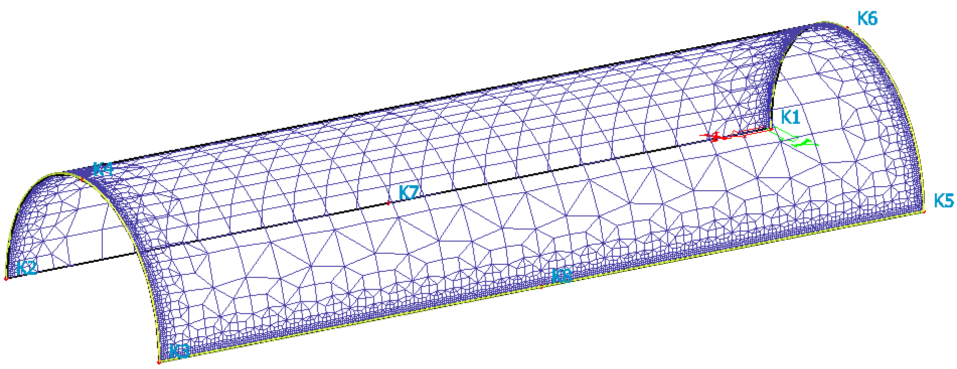
Eigen gewicht van de constructie wordt niet meegenomen in de berekening. Dit is gedaan door één belastingsgeval aan te maken welke de puntlast van 100 kN ofwel 0,1 kN met zich meebrengt. Figuur 4.4 dient ter controle dat het eigen gewicht daadwerkelijk buiten beschouwing wordt gelaten bij het gebruik van slechts één belastingsgeval. De puntlast nadert in dit figuur 0 kN, waardoor het correct is dat nergens een verplaatsing optreedt binnen de schaal. Alle berekeningen worden uitgevoerd met Kirchhoff, waardoor dwarskrachtvervorming wordt genegeerd.



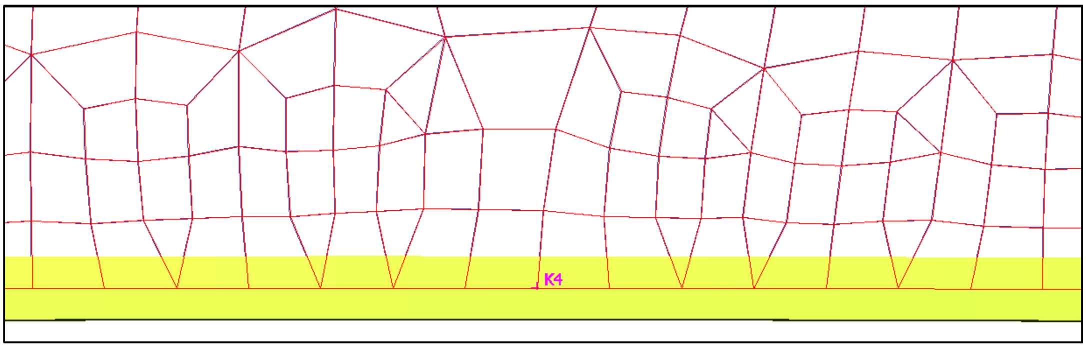
Figuur 4.4 Verificatie belastinginvoer

4.2 Netverfijning

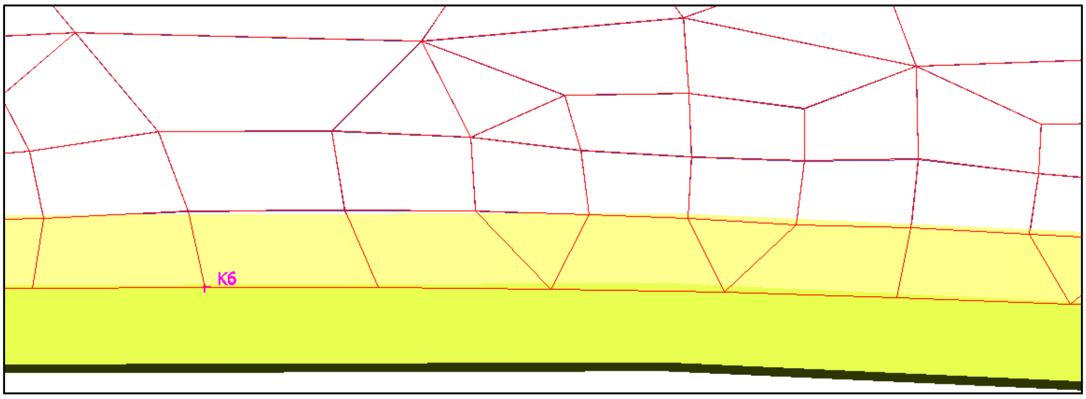
Om de rekentijd te beperken maar niet in te leveren op de afmetingen van de elementen, is er netverfijning zoals beschreven in paragraaf 3.3 toegepast op de randen waarop de knopen liggen die onderzocht worden. Belangrijk is wel om hierbij te controleren of de knopen die onderzocht worden verbonden zijn door middel van vierhoekige elementen op die locatie. Om van het grovere net dat toegepast is op de veldelementen over te gaan naar de kleine elementgrootte van de randen, maakt SCIA Engineer namelijk gebruik van driehoekige elementen om deze overgang mogelijk te maken. Driehoekige elementen geven immers een andere nauwkeurigheid dan vierhoekige elementen. Voor alle analyses is dit gecontroleerd. Een voorbeeld van deze controle voor de schaal van 70 mm met elementgrootte aan de randen van 20 mm is weergegeven in de figuren op de volgende pagina.



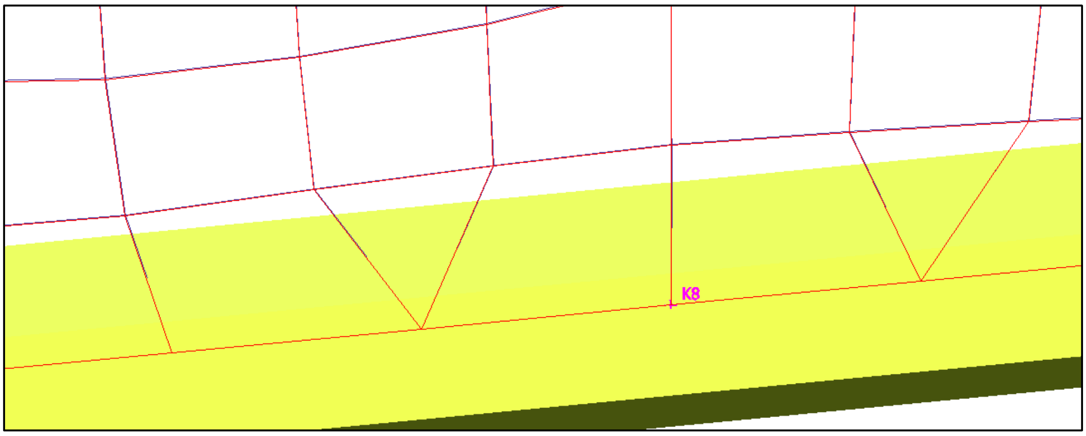
Figuur 4.5 Voorbeeld constructie met randverfijning



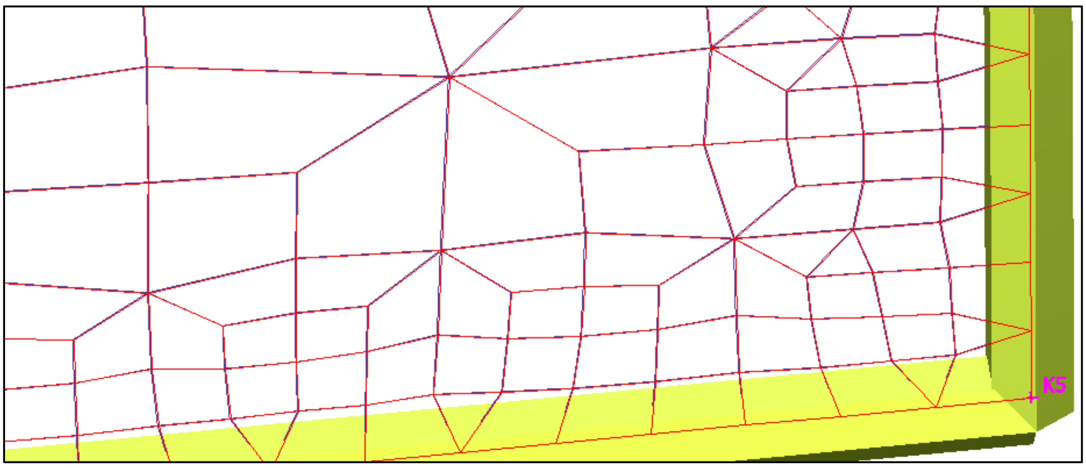
Figuur 4.6 Controle netverfijning knoop 4



Figuur 4.7 Controle netverfijning knoop 6



Figuur 4.8 Controle netverfijning knoop 8

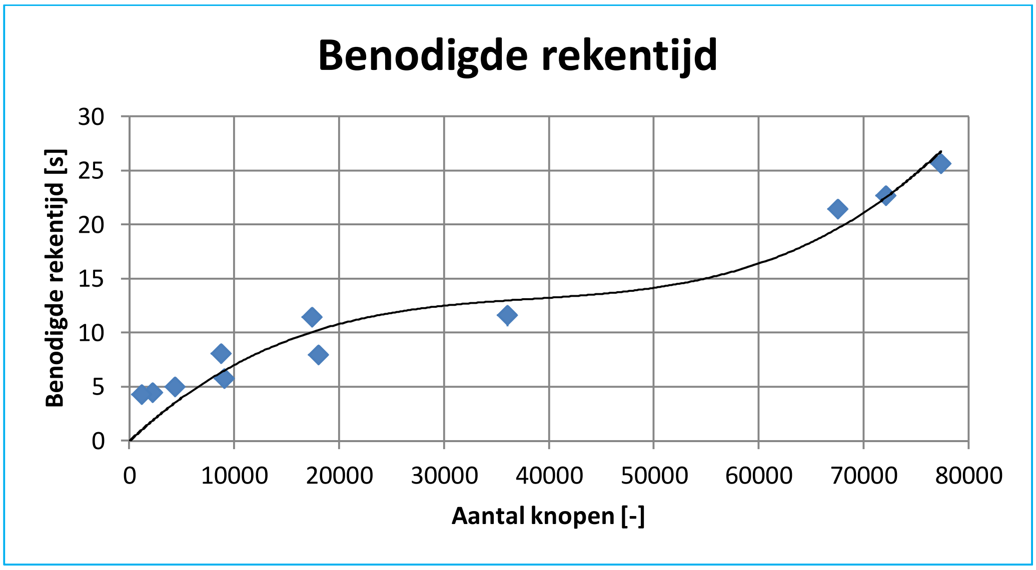


Figuur 4.9 Controle netverfijning knoop 5

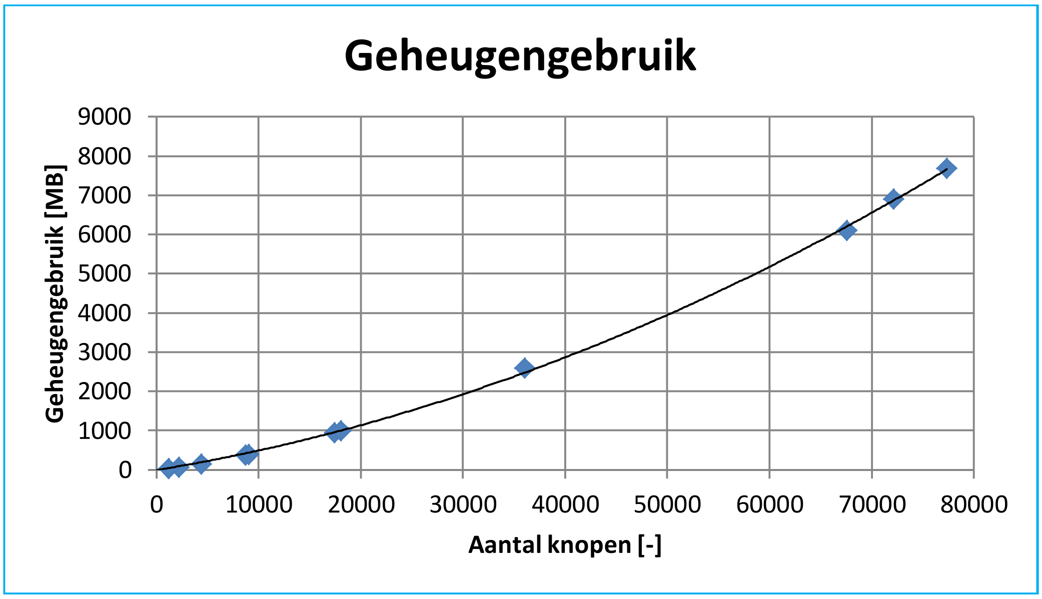
4.3 Rekentijd

Een fijner net vraagt een andere capaciteit van de computer. Figuur 4.10 en Figuur 4.11 illustreren wat op voorhand verwacht kan worden; namelijk dat een groter aantal knopen resulteert in een grotere benodigde rekentijd en geheugengebruik. Voor het geheugengebruik wordt er een tweede orde polynomiaal verband verwacht en voor de benodigde rekentijd is dit een polynoom van de derde orde. (Hoogenboom 2016/2017) De gevonden resultaten laten ook een daadwerkelijk verband zien. Er is voor gekozen om beide grafieken door de oorsprong van de grafiek te laten lopen; dit is gedaan omdat er niets te berekenen valt wanneer er geen knopen zijn.

Opvallend is het dat de rekentijd op zichzelf niet maatgevend is voor het verkrijgen van de uitkomsten in SCIA Engineer. De meeste tijd gaat tijdens het modelleren en aflezen zitten in de gebruiksinterface. Wanneer resultaten worden weergegeven zoals in Figuur 3.6 blijkt dat juist het produceren van de numerieke waarden na in- of uitzoomen, wanneer de berekening zelf nota bene reeds gedaan is, zorgt voor het grootste oponthoud. De berekening uitvoeren is slechts eenmalig; het beeld verschuiven naar een ander punt en in- en uitzoomen geschiedt daarentegen vele malen vaker en kan, zeker bij een fijn net, tot wel vijf keer zo lang duren.



Figuur 4.10 Benodigde rekentijd



Figuur 4.11 Geheugengebruik

4.4 Resultaten

De resultaten van de schaalconstructies met een dikte van 70 mm zijn weergegeven in Tabel 4.1 tot en met Tabel 4.4, terwijl Tabel 4.5 tot en met Tabel 4.8 de resultaten laten zien van de schaal van 7 mm. Alle getoonde resultaten zijn uitkomsten van een numerieke berekening van een wiskundig probleem. Afwijkingen met de werkelijke waarden kunnen hierdoor ontstaan en hiervan dient men zich bewust te zijn tijdens de verwerking ervan in de praktijk. (Babuska & Strouboulis, 2001)

4.4.1 Resultaten schaal 70 mm

Tabel 4.1 Resultaten 70 mm schaal knoop 4

Schaal 70 mm	K4, Knoop 4, midden gekromde rand aan het vrije uiteinde								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	41,56	-1,46	2,73	-13,45	-2,12	2,35	6,07	0,22	-1,20
20	40,38	-5,76	10,67	-13,45	0,00	2,34	5,92	2,35	-1,30
40	32,68	-2,21	16,66	-13,44	-0,01	2,34	6,00	1,49	-1,20
80	31,84	-1,75	37,37	-13,40	-0,01	2,31	5,42	1,57	-1,20
125	37,14	8,71	10,47	-13,52	0,00	2,28	5,65	2,06	-1,10

Tabel 4.2 Resultaten 70 mm schaal knoop 8

Schaal 70 mm	K8, knoop 8, midden lange rand aan de kant van de puntlast								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	-6,03	-1580,81	4,12	0,00	-1,59	3,85	2,41	-1,28	-30,10
20	-10,74	-1580,28	4,35	0,00	-1,59	3,85	1,11	0,43	-30,10
40	-19,32	-1578,86	3,80	0,00	-1,59	3,85	0,20	-0,61	-30,10
80	-26,02	-1572,70	-0,10	-0,02	-1,57	3,83	0,23	-0,45	-30,00
125	12,94	-1551,08	-1,50	-0,08	-1,44	3,88	0,11	-0,35	-30,20

Tabel 4.3 Resultaten 70 mm schaal knoop 6

Schaal 70 mm	K6, knoop 6, midden kromme rand bij de oplegging								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	67,90	333,09	-19,14	-0,42	-2,12	0,01	4,59	10,54	0,00
20	68,11	333,33	-19,07	-0,42	-2,12	0,01	4,10	11,86	0,00
40	68,47	334,58	-18,10	-0,43	-2,16	0,01	4,17	12,71	0,00
80	69,00	334,39	-17,39	-0,43	-2,18	0,02	4,12	12,92	0,00
125	70,52	332,86	-13,81	-0,45	-2,14	0,05	4,00	12,04	0,00

Tabel 4.4 Resultaten 70 mm schaal knoop 5

Schaal 70 mm	K5, knoop 5, hoekpunt bij de oplegging								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	-1396,37	-5250,80	-945,32	0,20	-0,15	-0,01	-110,47	-223,22	0,00
20	-1219,02	-4622,70	-819,82	0,10	-0,73	-0,06	-20,96	-7,80	0,00
40	-1066,13	-4098,73	-705,19	-0,03	-1,15	-0,08	-14,43	-35,60	0,00
80	-937,30	-3667,78	-594,69	-0,15	-1,20	-0,04	-0,44	-19,17	0,00
125	-693,14	-3330,13	-487,06	-0,08	-1,36	-0,01	-2,27	-8,14	0,00

4.4.2 Resultaten schaal 7 mm

Tabel 4.5 Resultaten 7 mm schaal knoop 4

Schaal 7 mm			K4, Knoop 4, midden gekromde rand aan het vrije uiteinde						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,90
2	0,14	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80
4	0,15	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80
8	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80
16	0,13	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80

Tabel 4.6 Resultaten 7 mm schaal knoop 8

Schaal 7 mm			K8, knoop 8, midden lange rand aan de kant van de puntlast						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0,00	-4,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,90
2	-0,01	-4,56	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,10
4	-0,02	-4,56	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,10
8	-0,03	-4,56	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,10
16	-0,06	-4,55	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,10

Tabel 4.7 Resultaten 7 mm schaal knoop 6

Schaal 7 mm			K6, knoop 6, midden kromme rand bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	-0,21	-1,05	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
2	-0,17	-0,84	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
4	-0,17	-0,84	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
8	-0,17	-0,84	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00
16	-0,17	-0,84	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00

Tabel 4.8 Resultaten 7 mm schaal knoop 5

Schaal 7 mm			K5, knoop 5, hoekpunt bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	-4,52	-19,75	-3,63	0,00	0,00	0,00	0,88	0,90	0,00
2	0,00	-13,79	-2,54	0,00	0,00	0,00	0,30	0,04	0,00
4	-2,78	-12,09	-2,21	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,00
8	-2,41	-10,61	-1,91	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
16	-2,08	-9,35	-1,63	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00

4.5 Afwijking ćexacteô waarden

Voor een verder verwerking van de resultaten is het belangrijk hoeveel de resultaten van een grof net afwijken van de ‘exacte’ waarden, i.e. de waarden verkregen met het meest fijne toegepaste net. Deze staan weergegeven in bijlage A. De uitwerking zelf is beschreven in hoofdstuk 5.

5. Orde van convergentie SCIA Engineer

In dit hoofdstuk zal worden bekeken wat de orde is van de fout aan de randen van schaalelementen. Het is van belang te weten dat er netverfijning is toegepast op de randen van de constructie. Wanneer deze netverfijning niet toegepast zou zijn en de gehele constructie verfijnd zou zijn tot de gewenste elementgrootte, vergt dit te veel capaciteit van de computer.

Oorspronkelijk is er gekozen om niet het aantal dat elementen dat feitelijk gebruikt is in SCIA Engineer te gebruiken, maar het aantal elementen dat je zou verkrijgen als ware de gehele constructie verfijnd zou zijn tot de gewenste elementgrootte. Deze keuze is gemaakt op basis van de veronderstelling dat de bekeken punten hiermee dezelfde kleine grootte hebben. Verder geldt dat lezers wellicht de indruk zouden kunnen krijgen dat er een minder fijn net is toegepast wanneer het werkelijk gebruikte aantal elementen wordt gebruikt.

In (Vicca, 2015) staat beschreven hoe de orde van de fout kan worden bepaald wanneer met het aantal toegepaste elementen wordt gerekend. Allereerst wordt er gesteld dat de exacte oplossing de som is van de berekende oplossing en de fout. Evenals in het werk van Vicca, wordt voor de berekeningen in dit eindwerk voor u_{exact} de waarde gebruikt die gevonden wordt bij de kleinst toegepaste elementgrootte.

$$\boxed{Exacte\ oplossing = berekende\ oplossing + fout}$$

O(h^α) wordt gebruikt om de orde van de fout uit te drukken waarin α in de regel een integer is. De fout valt dus ook te schrijven als K *h^α met K als constante. Het oppervlak van een elementje is gelijk aan h*h = h^2. De totale oppervlakte van de schaal kan dus ook worden geschreven als het aantal elementen, n, vermenigvuldigd met h^2.

$$\boxed{A = n * h^2 \leftrightarrow h = \left(\frac{A}{n}\right)^{0,5}}$$

In onderstaande afleiding wordt gebruik gemaakt van de letter ‘u’ om grootheden aan te duiden. Dit kan gaan om een verplaatsing, normaalkracht, dwarskracht of moment.

$$u_{exact} = u_{berekend} + fout$$

$$u_{exact} = u_{berekend} + K * h^\alpha$$

$$u_{exact} - u_{berekend} = K * h^\alpha$$

$$\log(u_{exact} - u_{berekend}) = \log(K * h^\alpha) = \log(K) + \alpha \log(h)$$

$$\log(u_{exact} - u_{berekend}) = \log(K) + \ \alpha \log\left(\frac{A}{n}\right)^{0,5}$$

$$\log(fout) = \log(K) + 0{,}5\ \alpha \log(A) - 0{,}5\ \alpha \log(n)$$

$$\boxed{\mathbf{\log(\mathit{fout}) = \ -0,5\ \alpha \log(\mathit{n}) + \log(\mathit{K}')}}$$

De laatste vergelijking kan worden opgevat als een lineair verband, y =a*x +b, waarin de waarde van a gelijk is aan -0,5α. De orde van de fout is dus gelijk aan twee maal de helling van de trendlijn.

Anders dan verondersteld werd is echter geconstateerd dat de wijze waarop het net gegenereerd wordt van invloed is op de resultaten. Dit houdt in dat voor dezelfde constructie verschillende resultaten worden gevonden bij een andere wijze van verfijning. Bijvoorbeeld worden voor een constructie met een net met elementgrootte aan de rand van 40 mm andere uitkomsten gevonden voor het geval dat deze verfijnd is door een net van 40 mm dat ligt over de hele constructie dan dezelfde constructie met een net dat alleen aan de randen verfijnd is. Vanwege deze constatering is gekozen om niet de omlijste formule toe te passen voor de bepaling van de fout maar dat een vergelijking wordt toegepast die onafhankelijk is van het aantal elementen.

$$\boxed{\log(u_{exact} - u_{berekend}) = \log(K * h^{\alpha}) = \log(K) + \alpha \log(h)}$$

Voor het gebruik van deze methode moet men zich er dus van bewust zijn dat deze werkwijze geldt voor constructies waarop netverfijning is toegepast aan de randen in plaats van dat de gehele constructie verfijnd is. Een andere manier van verfijnen leidt namelijk tot afwijkingen in de gevonden resultaten.

5.1 Orde van convergentie randen schaalelementen

De paragraaf staat in het teken van het bepalen van de orde van de fout. Per schaalconstructie wordt er per grootheid een plot gemaakt met log(fout) op de y-as en log(h) op de horizontale as, zodat de theorie gebruikt kan worden om de orde van de fout te bepalen. In de grafieken die gevonden kunnen worden in bijlage B zijn alleen de resultaten weergegeven waarvan de fout monotoon afneemt bij een kleinere elementgrootte. Tevens zijn de resultaten die niet veranderen bij verschillende netgroottes ook achterwege gelaten.

Om nu de orde van de fout te bepalen, dient men de helling van de trendlijn te nemen. In onderstaande tabellen wordt de orde van convergentie per grootheid per schaal getoond. In deze tabel is dus rekening gehouden met foutieve resultaten; desalniettemin zijn singulariteiten[3] wel meegenomen in de berekening. Het resultaat bestaat uit de gemiddelde orde van de fout, afgerond op een geheel getal.

Tabel 5.1 Orde van de fout schaal 70 mm

Schaal 70 mm	n_{xx}	n_{yy}	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	q_x	q_y	u_z
α	1,150	1,460	1,482	1,505	1,287	1,333	0,215	0,253	0,166
α afgerond	1	1	1	2	1	1	0	0	0

Tabel 5.2 Orde van de fout schaal 7 mm

Schaal 7 mm	n_{xx}	n_{yy}	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	q_x	q_y	u_z
α	0,269	0,064	0,314	-	-	-	0,182	0,028	0,000
α afgerond	0	0	0	-	-	-	0	0	0

5.2 Vergelijking tussen verschillende schaaldiktes

Hetgeen opvalt is dat de normaalkrachten allemaal van de orde α =1 zijn voor de schaal met een dikte van 70 mm, terwijl bij de momenten de waarde α = 2 wordt gevonden voor m_{xx}. Dwarskrachten lijken niet eenduidig te convergeren; de convergentie verloopt niet monotoon en valt voor randelementen dus lastig te beschrijven met de genoemde theorie die uitgaat van monotone convergentie. De verplaatsing convergeert evenals de dwarskracht ook niet monotoon of blijft constant zoals bij de oplegging het geval is.

[3] In een singulariteit komen spanningen voor die oneindig groot kunnen worden. Door een geconcentreerde kracht op een steeds kleiner elementje te plaatsen, neemt de spanning toe en kan hierbij oneindige waarden benaderen.

De constructie met een dikte van 7 mm vertoont voor geen enkele grootheid een fout in de orde $\alpha = 1$ of hoger. Ofwel verloopt de afname van de fout niet monotoon, ofwel blijven de waardes constant bij verschillende waarden van h. Wat betreft schaaldiktes kan er dus worden gesteld dat een dikkere schaal leidt tot een hogere waarde voor de orde van de fout en dus leidt tot een betere convergentie van de oplossing.

5.3 Vergelijking convergentie randen met veldelementen

In het werk van Vicca zijn schaalconstructies in de hoedanigheid van een koepel onderzocht. In dat verslag zijn veldelementen onderzocht om de orde van de fout ervan te bepalen. Dit is gedaan voor verplaatsing, moment, dwarskracht, ringkracht en membraankracht. De uitkomsten hiervan zijn weergegeven in Tabel 5.3.

Tabel 5.3 Orde van de fout voor verschillende uitvoeringen koepel met opening (Vicca, 2015)

		Verplaatsing Uz	Moment My	Dwarskracht Vy	Ringkracht Nx	Membraankracht Ny
Koepel, scharnieren onderaan	Dikte 5mm	2	6	2	2	2
	Dikte 10mm	2	5	2	2	2
	Dikte 40mm	2	3	2	3	3
Koepel, scharnieren onder- en bovenaan	Dikte 5mm	2	4	2	3	3
Koepel, scharnieren onderaan, lokale verfijning aan de randen	Dikte 5mm; Meting in onderrand	4	1	2	1	1

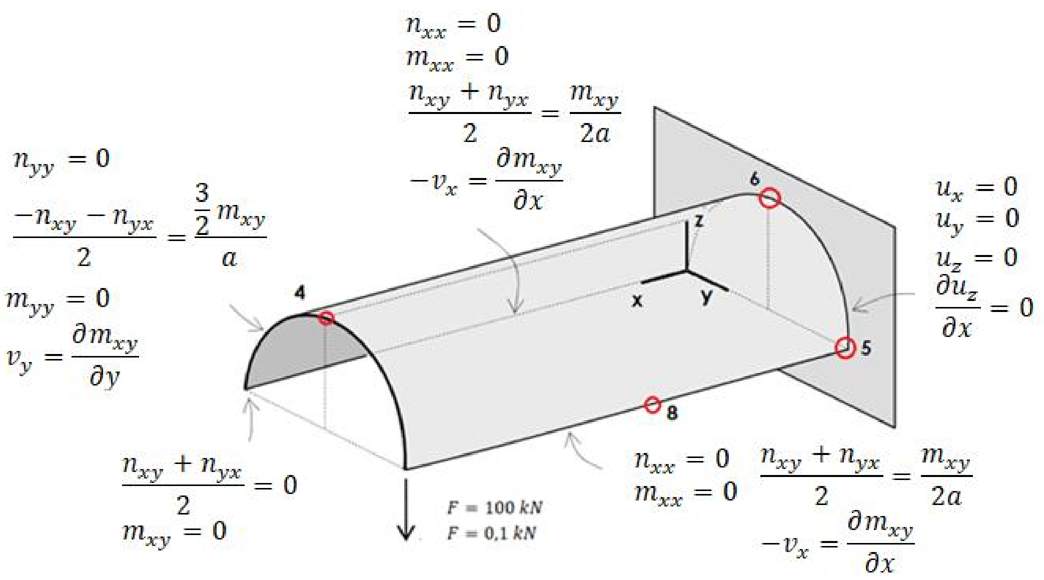
Voor de veldelementen valt meteen op dat de orde van de fout in het algemeen beduidend hoger ligt dan bij de randelementen. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat de veldelementen indirect worden beïnvloed door de randvoorwaarden in tegenstelling tot de randelementen, die direct gekoppeld zijn aan de randvoorwaarden. Op de locatie van de veldelementen hebben de verstoringen aan de rand reeds de kans gekregen om voldoende uit te dempen, omdat deze verder dan de invloedlengte verwijderd zijn van de verstoring. (Hoogenboom, 2016/2017) Dit zou kunnen leiden meer consistente en sterker convergerende resultaten. Ook zou het kunnen dat de convergentie op de randen achter blijft doordat er niet homogeen verfijnd wordt. De onnauwkeurigheid van de relatief grote veldelementen hebben hun doorwerking op de randelementen en 'beperken' als het ware de uitkomsten van randelementen.

6. Vergelijking resultaten SCIA Engineer met Koiter

Het zesde hoofdstuk wordt gebruikt om te bestuderen in hoeverre de resultaten die via de eindige-elementenmethode zijn verkregen overeenkomen met de resultaten die op grond van een analytische afleiding verwacht worden. Dit wordt gedaan voor zowel de schaal met een dikte van 70 mm als de schaal met een dikte van 7 mm.

6.1 Overzicht randvoorwaarden SCIA en Koiter

Ter herhaling is in Figuur 6.1 nogmaals weergegeven wat de randvoorwaarden zijn die voor de beide schaalconstructies gelden. Deze randvoorwaarden zijn gebaseerd op analytische vergelijkingen. Voor de knopen en grootheden van de schaal die in dit eindwerk onderzocht zijn in SCIA Engineer geldt er dus:



Figuur 6.1 Randvoorwaarden schaalconstructie

De gevonden waarden voor deze grootheden zijn in onderstaande tabel weergegeven. De linkse tabel geeft de resultaten van de schaal met dikte 70 mm, terwijl die van de schaal met dikte 7 mm in de rechtse tabel worden getoond. Om de waarde van de partiële afgeleide van m_{xy} te bepalen, is in SCIA Engineer het punt bekeken dat naast de onderzochte knoop ligt in de richting waarin gedifferentieerd wordt. Het verschil tussen deze twee punten wordt namelijk gedeeld door de elementgrootte; de elementgrootte is immers gelijk aan de afstand tussen de punten.

Tabel 6.1 Resultaten SCIA Engineer ter vergelijking van de randvoorwaarden

Schaalconstructie 70 mm		
Knoop 4	Knoop 8	Knoop 5 + 6
n_{yy} = -1,46	n_{xx} = -6,03	u_z = 0
-0,5(n_{xy} + n_{yx}) = -2,73	0,5(n_{xy} + n_{yx}) = 4,12	
$\frac{\frac{3}{2}m_{xy}}{a}$ = 1,76	$\frac{m_{xy}}{2a}$ = 0,963	
m_{yy} = -2,12	m_{xx} = 0,00	
$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ = 1,0	$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ = 1,0	
q_y = 0,22	-q_x = -2,41	

Schaalconstructie 7 mm		
Knoop 4	Knoop 8	Knoop 5+6
n_{yy} = 0,00	n_{xx} = 0,00	u_z = 0
-0,5(n_{xy} + n_{yx}) = 0,00	0,5(n_{xy} + n_{yx}) = 0,00	
$\frac{\frac{3}{2}m_{xy}}{a}$ = 0,00	$\frac{m_{xy}}{2a}$ = 0,00	
m_{yy} = 0,00	m_{xx} = 0,00	
$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ = 0,00	$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ = 0,00	
q_y = 0,00	q_x = 0,00	

Hetgeen opvalt bij het bekijken van de uitkomsten van SCIA Engineer is dat de dunne schaal, met een a/t- ratio van 2000/7 = 286, resultaten oplevert die beduidend meer in lijn liggen met wat er op grond van de theorie verwacht wordt; aan alle randvoorwaarden wordt namelijk voldaan bij de dunne uitvoering van de schaal.

Voor de dikke schaal daarentegen valt te zien dat voor knoop 4 n_{yy} en m_{yy} niet gelijk zijn aan 0, maar wel in de buurt komen van deze waarde. In het geval van m_{yy} zou het ook kunnen gaan om een foutief resultaat, aangezien bij grotere waarden voor h m_{yy} wel nagenoeg gelijk is aan 0 kNm/m. De laatste randvoorwaarde op dit punt houdt rekening met $0{,}5*(n_{xy} + n_{yx})$. Opmerkelijk is het dat hier zelfs een tekenverschil te constateren is. Een mogelijke verklaring hiervoor is de dwarskrachtvervorming niet wordt meegenomen binnen SCIA Engineer; op randen van een schaal is m_{xy} namelijk gekoppeld aan de dwarskracht. Aan de laatste randvoorwaarde bij knoop 4 wordt ook niet helemaal voldaan; hier zit een factor vier verschil in.

Knoop 8 voldoet louter aan de voorwaarde dat m_{xx} gelijk zou moeten zijn aan 0 kNm/m. Ondanks het feit dat n_{xx} bij een afnemende elementgrootte kleiner waardes oplevert, geldt dat n_{xx} bij h =10 mm fors hoger is dan 0 kN/m. Het meest opmerkelijke resultaat is q_x. Niet alleen komt de waarde niet overeen met de afgeleide van m_{xy}, maar er zit zelfs een tekenverschil in dit resultaat. Hiervoor is wederom de verwaarlozing van de dwarskrachtvervorming de meest waarschijnlijke oorzaak. De vierde conditie waaraan voldaan zou moeten worden is dat $0{,}5(n_{xy} + n_{yx})$ gelijk zou moeten zijn aan $m_{xy}/(2a)$. De resultaten die gevonden worden komen hier niet meer overeen. Er zit een factor vier verschil tussen deze waarden.

De randvoorwaarden ter plaatse van de oplegging worden overigens wel overeengekomen met SCIA Engineer voor beide schalen.

6.2 Algemene opmerkingen

Voor alle berekende grootheden kan een verklaring zijn dat de grove veldelementen zorgen voor onjuiste waarden aan de rand. Wanneer voor de veldelementen onjuiste resultaten gevonden worden omdat deze te grof zijn om nauwkeurig te worden beschreven, kan dit doorwerken op de resultaten aan de rand.

Een andere mogelijke reden voor de afwijkingen die gevonden worden is dat SICA Engineer rekent volgens ‘Kirchhoff’ in plaats van ‘Reissner-Mindlin’ welke meer gericht is op dikke schalen, zoals de schaal van 70 mm is.

Ten slotte is het niet ondenkbaar dat de toegepaste elementgrootte zorgt voor afwijkingen. De kleinste elementgrootte, i.e. 10 mm in het geval van de dikke schaal, is in dat geval nog steeds te grof om de randen van een schaalconstructie accuraat te beschrijven.

7. Vergelijking SCIA Engineer en Ansys

Net als SCIA Engineer is het computerprogramma *Ansys* software die de eindige-elementenmethode gebruikt om hiermee de krachtverdeling in constructies te analyseren. In werk van Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom is dezelfde schaalconstructie onderzocht met een dikte van 70 mm als in dit werk onderzocht is; Hoogenboom heeft echter gebruik gemaakt van Ansys terwijl in dit werk SCIA Engineer als gereedschap is gekozen. De resultaten die hierbij gevonden zijn worden getoond in Tabel 7.1 en Tabel 7.2. Het is van belang om in acht te nemen wat het toegepaste assenstelsel is dat gebruikt wordt bij het presenteren van de uitkomsten. De resultaten uit Ansys zijn in onderstaande tabellen al omgezet naar de notatie die gebruikt wordt in SCIA Engineer om het vergelijken te vergemakkelijken.

Tabel 7.1 Resultaten schaal 70 mm Ansys knoop 4

Knoop 4, midden gekromde rand vrij uiteinde								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy} + n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]
1	55,0	1,173	0,017	13,28	0,000	-0,049	104,4	-0,046
2	54,7	1,173	0,055	13,28	0,000	-0,103	102,0	-0,098
4	54,2	1,172	0,129	13,29	0,000	-0,208	97,3	-0,198
70	36,9	1,098	1,678	13,50	0,089	-1,832	27,8	-2,014

Tabel 7.2 Resultaten schaal 70 mm Ansys knoop 8

Knoop 8, midden lange rand aan de kant van de puntlast								
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0,5(n_{xy} + n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]
1	0,000	-1537	-0,100	0,000	0,610	-0,065	0,011	-178
2	0,000	-1537	-0,226	0,000	1,155	-0,153	0,026	-174
4	0,000	-1535	-0,475	0,000	1,236	-0,320	0,054	-167
70	0,012	-1451	-7,169	0,026	1,291	-2,823	0,477	-53

7.1 Randvoorwaarden

Voor knoop 4 kan er opgemerkt worden dat de waarden voor n_{yy} en m_{yy} die gelijk zouden moeten zijn aan 0 dichter in de buurt liggen van deze waarde dan in SCIA Engineer; m_{yy} komt zelfs helemaal overeen met de randvoorwaarde. Aan de tweede randvoorwaarde in knoop 4 volgens Figuur 6.1 wordt bijna voldaan; er zit weliswaar een factor twee verschil tussen beide waarden, maar de waarden zelf liggen al dicht bij 0 kN/m waardoor het absolute verschil beperkt is. De waarde voor ∂m_{xy} kan echter niet achterhaald worden, omdat deze niet is weergegeven in het werk van Dr. Ir. Hoogenboom. Wel moet men er zich van bewust zijn dat de kleinste elementen toegepast in SCIA Engineer een waarde hebben van 10 mm, terwijl in Ansys een grootte van 1 mm is toegepast; dit kan leiden tot een vertekend beeld van de vergelijking tussen beide programma's. Zo convergeert bijvoorbeeld de waarde voor n_{xy} namelijk sterk naar 0 kN/m in SCIA Engineer bij steeds kleinere elementen waar deze grootheid in Ansys bijna gelijk is aan 0 kN/m.

Knoop 8 die onderzocht is in Ansys voldoet in meer opzichten aan de randvoorwaarden dan knoop 4 in hetzelfde programma. In dit geval wijkt immers enkel $0,5(n_{xy} + n_{yx}) = m_{xy}/(4a)$ af en ondanks het feit dat er een verschil is tussen beide waarden, is het verschil gering. Ook hier geldt overigens dat men in het achterhoofd moet houden dat er kleinere elementen zijn toegepast in Ansys dan in SCIA Engineer en dat de waarde in SCIA Engineer voor n_{xx} ook richting 0 kN/m gaat.

Ten slotte kan als algemene opmerking nog gesteld worden dat de resultaten in Ansys meer monotoon convergeren naar een uiteindelijke waarde dan dat in SCIA Engineer gebeurt. Waar er in

SICA Engineer een schommeling zit in de convergentie, verloopt de convergentie in Ansys voor alle onderzochte grootheden monotoon.

7.2 Orde van de fout

Evenals met de resultaten die verkregen zijn via SCIA Engineer is het mogelijk om de resultaten te gebruiken om de orde van de fout te verkrijgen voor randelementen van schaalconstructies. Dit wordt gedaan op de manier die uitgaat van het aantal elementen zoals beschreven is in hoofdstuk 5. Het resultaat van de deze exercitie is gepresenteerd in Tabel 7.3. Aangezien in Ansys de schaalconstructie enkel is uitgevoerd met een dikte van 70 mm, wordt deze alleen vergeleken met de schaal van 70 mm die in SCIA Engineer gemodelleerd is.

Tabel 7.3 Orde van de fout schaalconstructie Ansys

Schaal Ansys	n_{xx}	n_{yy}	$0,5(n_{xy}+n_{yx})$	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	q_x	q_y
α	1,1346	1,4112	0,9841	1,08	0,053	0,936	0,9299	0,9592
α afgerond	1	1	1	1	0	1	1	1

De afgeronde waarden voor α die voortkomen uit Ansys komen voor de normaalkracht overeen met cijfers die gevonden zijn in SCIA Engineer. De fout bij de momenten in Ansys vertoont echter wel afwijkingen ten opzichte van de resultaten uit SCIA Engineer; zowel m_{xx} als m_{yy} hebben in SCIA Engineer een waarde voor α die één hoger is. Voor de dwarskracht valt daarentegen precies het tegenovergestelde te zien. Ansys heeft voor de dwarskracht juist een één hogere waarde voor α. De verplaatsingen zijn niet onderzocht in Ansys en hierover kunnen daarom geen conclusies worden getrokken.

7.3 Conclusie

Wanneer de programma's SCIA Engineer en Ansys met elkaar vergeleken worden voor het geval van deze schaalconstructie met een dikte van 70 mm, geldt dat Ansys al bij een grotere elementgrootte aan de randvoorwaarden voldoet. De orde van de fout is vergelijkbaar in beide programma's, i.e. voor de normaalkracht wordt er vergelijkbaar gescoord, terwijl SCIA Engineer beter presteert in het geval van momenten en Ansys voor de dwarskracht een hogere orde van de fout heeft. Ten slotte kan er opgemerkt worden dat in Ansys de fout monotoon afneemt in tegenstelling tot SCIA Engineer waar naast monotone afname ook niet-monotone afname voorkomt.

Kanttekeningen die gemaakt kunnen worden zijn er ook. Zo is in SCIA Kirchhoff gebruikt en is dwarskrachtvervorming genegeerd. Bovendien zijn de toegepaste elementgroottes in beide programma's ongelijk aan elkaar, waardoor de vergelijking licht beïnvloed kan zijn. Een laatste opmerking is dat in Ansys slechts twee punten in de constructie onderzocht zijn, terwijl in SCIA Engineer vier knopen zijn bekeken. In SCIA Engineer is er meer compensatie voor uitschieters aanwezig doordat er met een gemiddelde wordt gerekend om de waarde van α te bepalen.

8. Niet monotone convergentie

In de weergave van de resultaten in hoofdstuk 4 is op te merken dat niet alle resultaten monotoon convergeren naar hun uiteindelijke waarde. Geschikte voorbeelden van dergelijke gevallen zijn n_{yy} en v_x in de schaal van 70 mm ter plaatse van knoop 4. Doordat de fout op deze locatie niet op een monotone wijze afneemt, kan hiervoor geen gebruikt worden gemaakt van de genoemde theorie om de orde van de fout te bepalen zoals dat in andere gevallen wel gedaan is. In dit hoofdstuk zullen deze convergenties nader bekeken worden. Naast deze twee grootheden wordt ook m_{xy} in knoop 4 nader bekeken. Dit wordt gedaan om te kijken of er ook bij andere wijze van verfijning en andere elementgroottes de fout nog steeds monotoon afneemt.

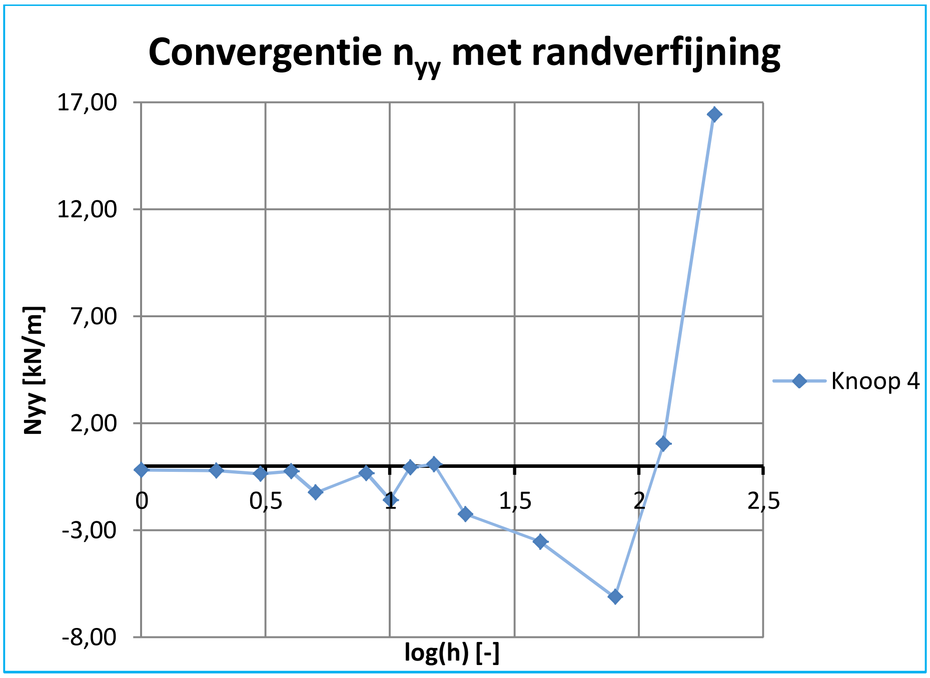
8.1 Randverfijning

Om te onderzoeken of de fluctuaties in de afname van de fout die eerder gevonden zijn bij verschillende elementgroottes voor n_{yy} en v_x 'toevalstreffers' zijn of dat er daadwerkelijk een niet-monotone convergentie optreedt, worden deze grootheden in deze paragraaf met meerdere verschillende elementgroottes middels randverfijning onderzocht. Door een verfijning toe te passen op slechts één rand, namelijk de rand waarop knoop 4 ligt, is het mogelijk om nog kleinere elementgroottes te onderzoeken dan tot nu toe gedaan is. Eerst worden alle resultaten getoond en later in deze paragraaf wordt de orde van de fout bepaald.

8.1.1 Resultaten

Van de verschillende grootheden is allereerst is n_{yy} onderzocht. Het resultaat hiervan is te zien in Tabel 8.1 en Figuur 8.1.

De elementgroottes die eerder zijn toegepast: 10 mm, 20 mm, 40 mm, 80 mm en 125 mm, hebben de trend van convergeren voor n_{yy} op een juiste manier beschreven in het geval dat er randverfijning wordt toegepast. Ook met aanvulling van de extra groottes neemt de fout namelijk niet monotoon af. Wel is te zien dat de randvoorwaarden die geldt voor knoop 4, n_{yy} = 0 kN/m, beter benaderd wordt naarmate de elementen kleiner worden. Nu is er zelfs een afwijking met de randvoorwaarde die kleiner is dan wanneer Ansys gebruikt wordt.

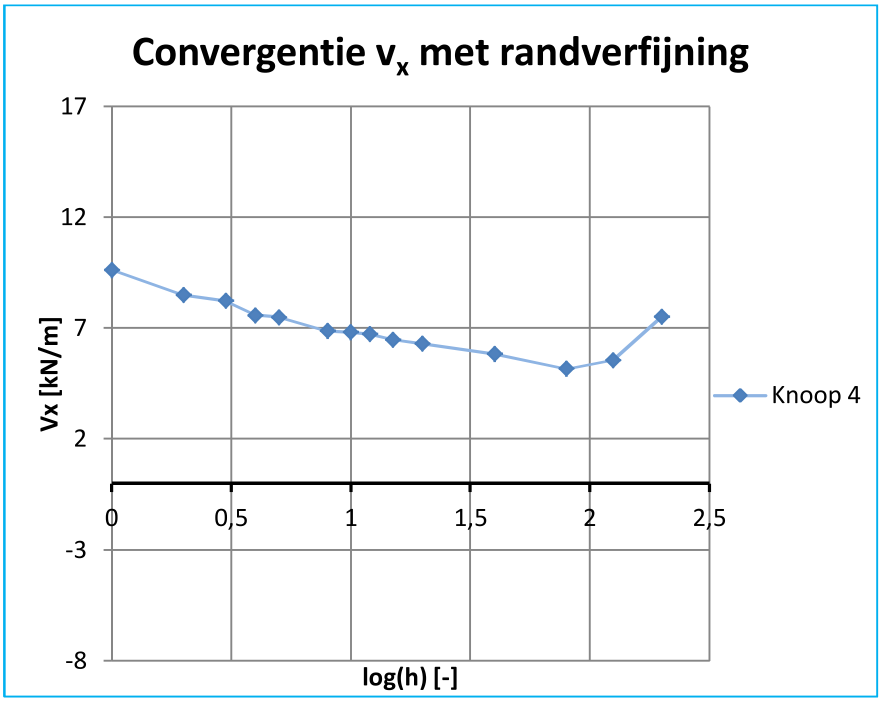


Figuur 8.1 Convergentie n_{yy} met randverfijning schaal 70 mm knoop 4

Tabel 8.1 Resultaten n_{yy} met randverfijning schaal 70 mm knoop 4

h [mm]	n_{yy} [kN/m]
1	-0,17
2	-0,20
3	-0,35
4	-0,24
5	-1,22
8	-0,31
10	-1,56
12	-0,06
15	0,09
20	-2,22
40	-3,51
80	-6,11
125	1,06
200	16,45

Naast n_{yy} is ook v_x nader bekeken door met meerdere elementgroottes één rand te verfijnen. Figuur 8.2 en Tabel 8.2 presenteren het resultaat van deze exercitie; dit alles is gedaan op knoop 4 van de schaal met dikte 70 mm.



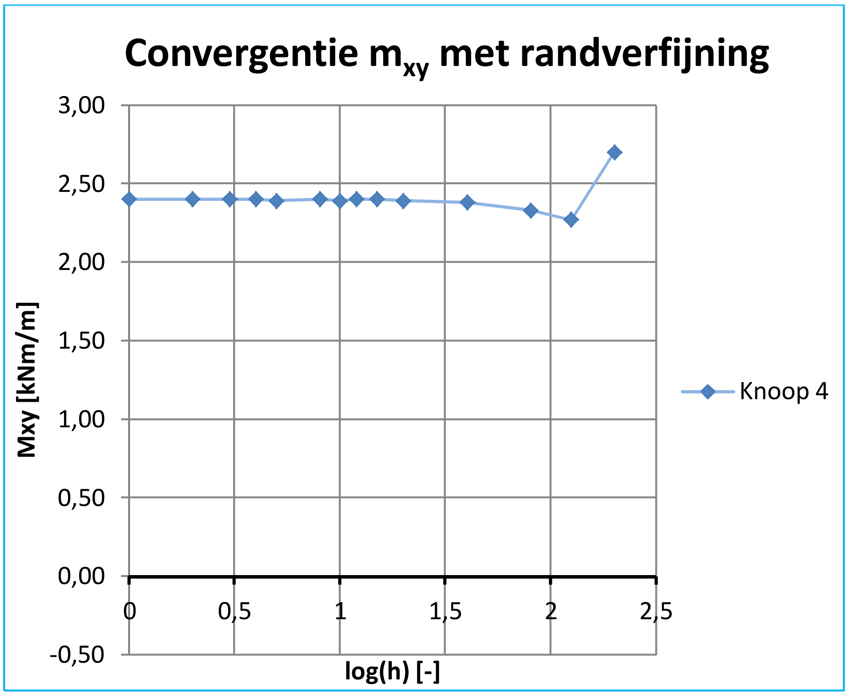
Figuur 8.2 Convergentie v_x met randverfijning schaal 70 mm knoop 4

Tabel 8.2 Resultaten vx met randverfijning schaal 70 mm knoop 4

h [mm]	v_x [kN/m]
1	9,63
2	8,49
3	8,22
4	7,57
5	7,49
8	6,87
10	6,81
12	6,72
15	6,48
20	6,29
40	5,83
80	5,16
125	5,56
200	7,52

In tegenstelling tot n_{yy} waar voor zowel verfijning van drie randen als verfijning van één rand een niet-monotone convergentie wordt gevonden, is dit bij v_x niet het geval. Vanaf een elementgrootte van 80 mm wordt in dit geval immers wel een fout gevonden die monotoon afneemt. Dit is een zeer opmerkelijk resultaat. De meest waarschijnlijke verklaring voor een fout die niet monotoon afneemt is namelijk dat er van het grove net in het midden van de constructie over wordt gegaan op een fijner net aan de randen; bij sommige elementgroottes past het bijbehorende elementennet passender op de constructie dan voor andere groottes, waardoor in enkele gevallen de configuratie van het net krampachtig verloopt en dit zijn doorwerking heeft op de resultaten. Bij verfijning op één rand kan er op meer homogene wijze worden toegewerkt naar de gewenste elementgrootte dan bij verfijning op drie randen. Eigenaardig blijft het dus wel dat bij n_{yy} de afname van de fout bij verfijning aan één rand niet monotoon verloopt.

Zoals gezegd wordt ook m_{xy} nader onderzocht. Dit wordt gedaan om te kijken of deze grootheid bij andere wijzen van netverfijning nog steeds een gedrag vertoont waarin de fout monotoon afneemt. Figuur 8.3 en tabel 8.3 tonen het resultaat voor de uitkomsten van m_{xy} met verfijning aan één rand.



Figuur 8.3 Convergentie m_{xy} met randverfijning

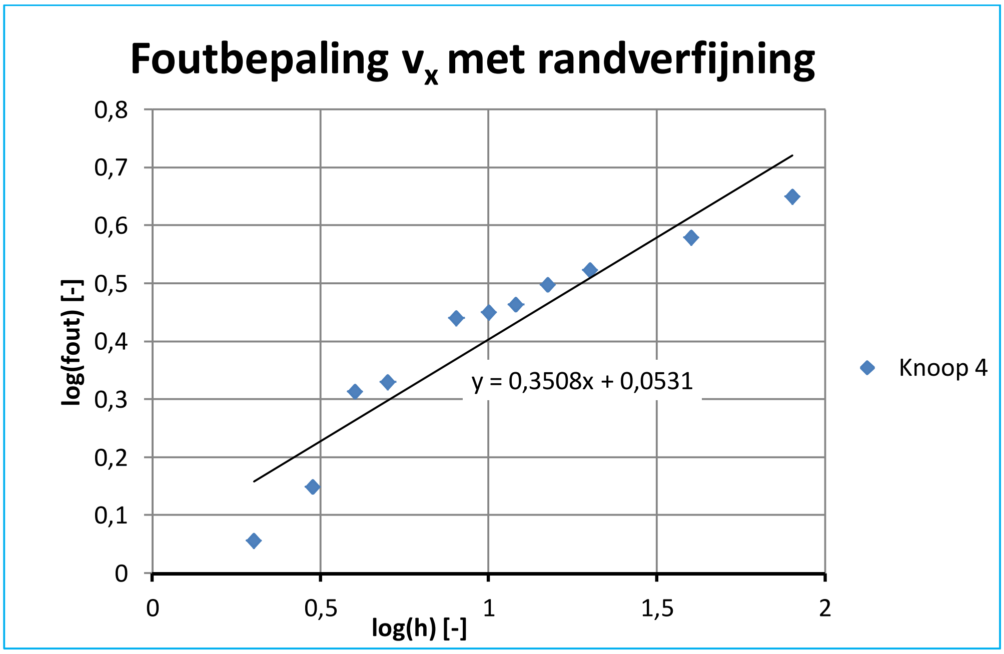
Tabel 8.3 Resultaten m_{xy} met randverfijning schaal 70 mm knoop 4

h [mm]	m_{xy} [kNm/m]
1	2,40
2	2,40
3	2,40
4	2,40
5	2,39
8	2,40
10	2,39
12	2,40
15	2,40
20	2,39
40	2,38
80	2,33
125	2,27
200	2,70

Voor m_{xy} valt het op dat er voor verschillende elementgroottes vergelijkbare resultaten worden gevonden. Strikt genomen kan men niet spreken van een fout die monotoon afneemt. Echter, het verschil tussen 2,39 kNm/m en 2,40 kNm/m is zo gering dat het eerder gaat om een afrondingsfout binnen een numerieke berekening door het veelvuldig optellen en vermenigvuldigen dan dat er een wezenlijk andere uitkomst gevonden wordt. Bij grotere elementgroottes kan er wel een convergentie in de resultaten worden geconstateerd. Alleen de waarde behorend bij h = 200 mm is een uitschieter op het eerste gezicht.

8.1.2 Foutbepaling

Met de resultaten afkomstig van randverfijning op één rand kan, net als eerder in dit werk gedaan is, de orde van de fout bepaald worden. Dit gebeurt voor deze wijze van verfijning op basis van de elementgrootte en dus niet op basis van het aantal elementen.

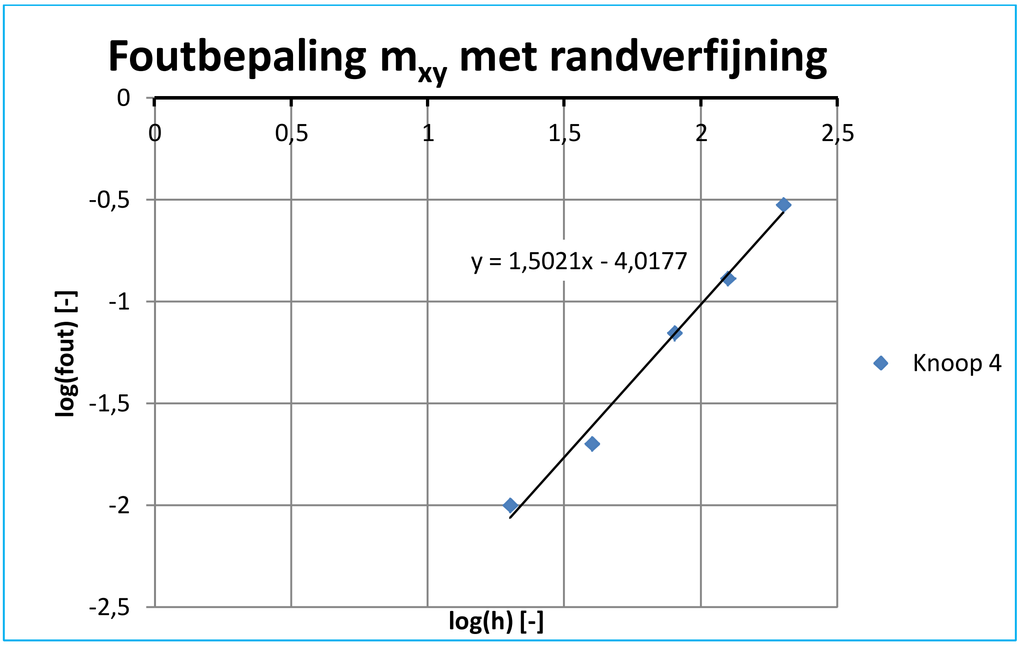


Figuur 8.4 Foutbepaling v_x met randverfijning

Aangezien van n_{yy} niet op basis van de theorie in dit eindwerk niet bepaald kan worden wat de orde van de fout is, is deze achterwege gelaten.

Met behulp van Figuur 8.4 kan bepaald worden wat de orde van de fout is voor v_x. In dit geval is α dus gelijk aan 0,3508. Deze waarde is enigszins hoger dan de waarde die gevonden wordt met verfijning van drie randen. Desalniettemin leveren de waardes afgerond op integers nog steeds hetzelfde resultaat.

Vervolgens is ook de fout bepaald van m_{xy} bij verfijning van één rand. Dit is gedaan Figuur 8.5. De helling van de trendlijn is gelijk aan 1,5021 en daarmee is α ook gelijk aan 1,5021. Afgerond op integers levert dit dus net een waarde van α =2 op. Deze waarde voor α is hoger dan de orde van fout die gevonden werd in het geval van verfijning op drie randen waarin α gelijk is aan 1.



Figuur 8.5 Foutbepaling m_{xy} met randverfijning

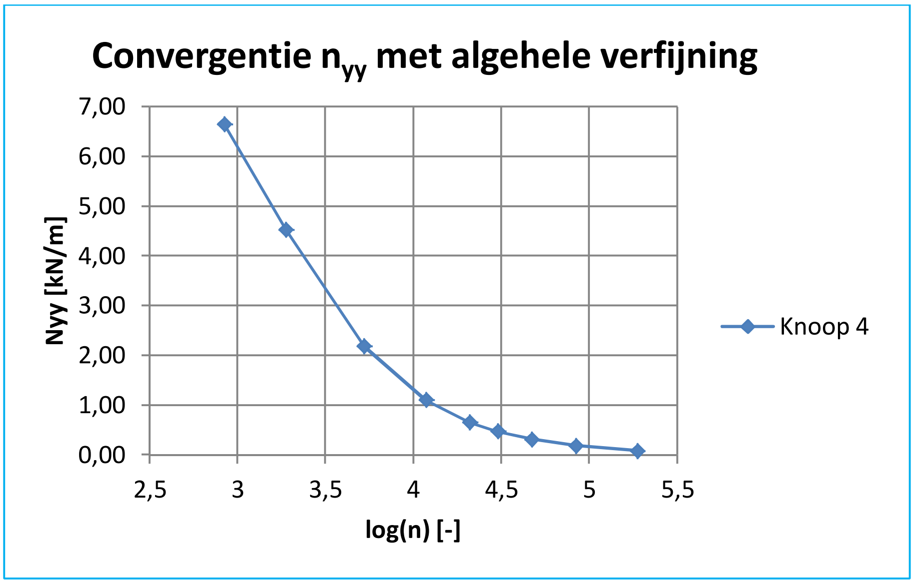
8.2 Algehele netverfijning

Interessant is het om te kijken hoe de convergentie verloopt indien de gehele constructie verfijnd wordt in plaats van dat er randverfijning wordt toegepast. Voor deze korte studie worden wederom n_{yy}, v_x en m_{xy} onderzocht in knoop 4 van de schaal met een dikte van 70 mm. Deze analyse wordt beperkt door het feit dat een kleinere elementgrootte dan 20 mm niet toepasbaar is. Desalniettemin kan de trend van convergeren ook bepaald worden wanneer met relatief grote elementen wordt gewerkt.

Evenals in de paragraaf waarin de verfijning op één rand onderzocht is, zullen in deze paragraaf eerst de resultaten worden getoond en van bijhorend commentaar worden voorzien. Daarna zal de orde van de fout bepaald worden.

8.2.1 Resultaten

Figuur 8.6 en tabel 8.4 geven weer wat de resultaten zijn van algehele netverfijning voor n_{yy} in knoop 4. Vervolgens zijn in Figuur 8.7 en Tabel 8.5 de uitkomsten van v_x getoond en ten slotte zijn de waarden voor m_{xy} gepresenteerd in Figuur 8.8 en Tabel 8.6.



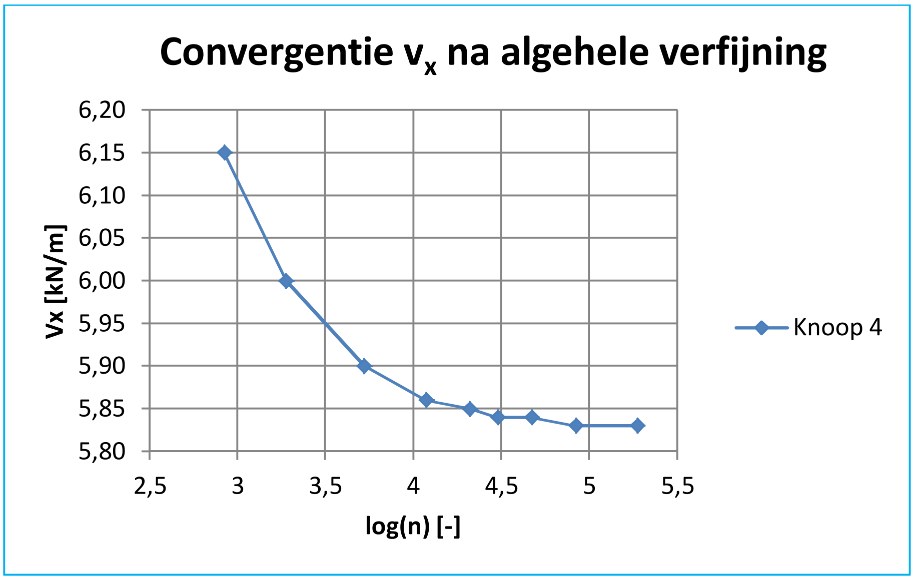
Figuur 8.6 Convergentie n_{yy} met algehele netverfijning schaal 70 mm knoop 4

Tabel 8.4 Resultaten n_{yy} met algehele netverfijning

h [mm]	n_{yy} [kN/m]
20	0,08
30	0,18
40	0,31
50	0,47
60	0,65
80	1,10
120	2,18
200	4,52
300	6,65

Het eerste dat opvalt is de monotone afname van de fout bij kleiner wordende elementen. Waar bij op de rand verfijnde constructies de fout niet monotoon afneemt, is dat bij algehele netverfijning wel het geval. Een verklaring kan gevonden worden in de opbouw van het elementennet. Indien de gehele constructie verfijnd is tot de gewenste elementgrootte, is er geen overgang met nodig in de vorm van het net om tot de gekozen grootte van de elementen te komen. Als h nu kleiner wordt, worden alle elementen van het elementennet kleiner, dus ook de veldelementen. Daardoor hoeft er bij een afnemende waarde van h niet 'gezocht' te worden naar een mogelijke configuratie van het net die de veldelementen met de randelementen verbindt. Het onregelmatige overgangspatroon is namelijk de meest aannemelijke oorzaak dat de fout niet monotoon afneemt bij kleinere waarden voor h.

Daarnaast kan men constateren dat de eindwaarde, die gelijk zou moeten zijn aan de randvoorwaarde n_{yy} = 0 kN/m, eerder bereikt wordt in het geval van algehele verfijning.

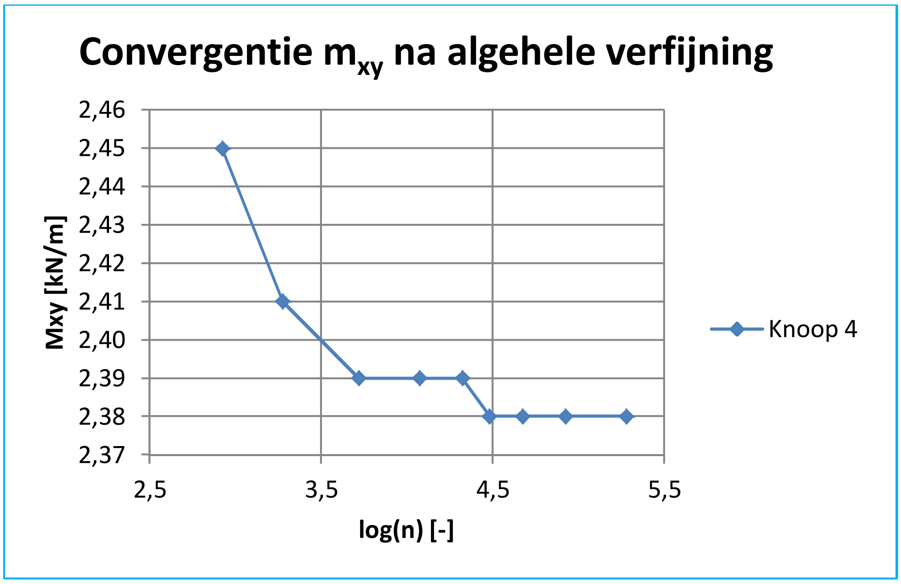


Figuur 8.7 Convergentie v_x met algehele netverfijning schaal 70 mm knoop 4

Tabel 8.5 Resultaten v_x met algehele netverfijning

h [mm]	v_x [kN/m]
20	5,83
30	5,83
40	5,84
50	5,84
60	5,85
80	5,86
120	5,90
200	6,00
300	6,15

Voor v_x is te zien dat deze grootheid monotoon convergeert naar de uiteindelijke waarde. De verfijning op één rand leidde bij h = 125 mm en h = 200 mm bij grotere elementen alsnog voor een niet-motonone convergentie. Bij algehele netverfijning zijn deze 'onvolkomenheden' niet meer aanwezig.



Figuur 8.8 Convergentie m_{xy} na algehele verfijning

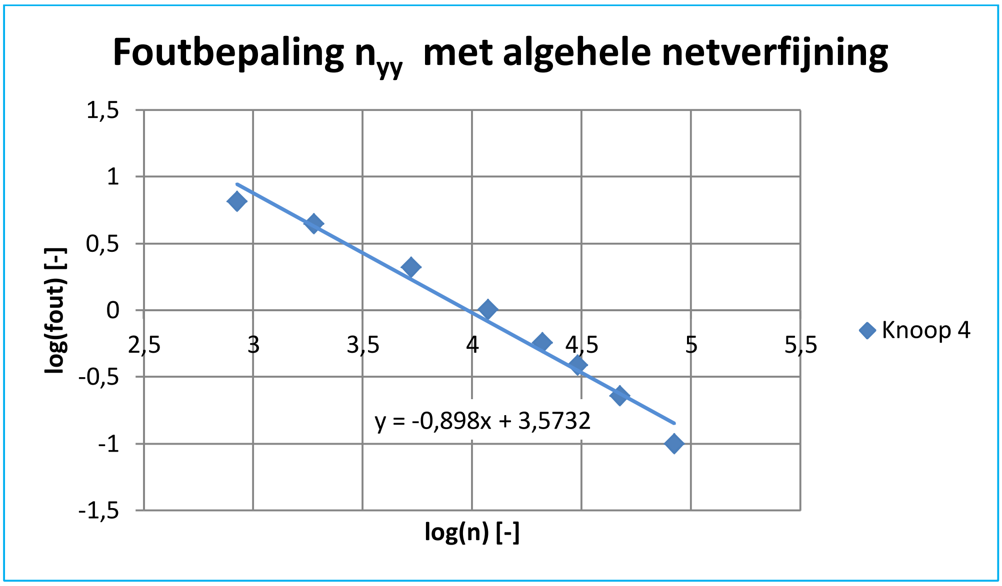
Tabel 8.6 Resultaten m_{xy} met algehele netverfijning

h [mm]	m_{xy} [kNm/m]
20	5,83
30	5,83
40	5,84
50	5,84
60	5,85
80	5,86
120	5,90
200	6,00
300	6,15

Er valt te constateren dat er weinig spreiding zit in de waarden voor m_{xy} bij verschillende waarden voor h. Desondanks geldt dat m_{xy} evenals n_{yy} en v_x monotoon convergeert naar de uiteindelijke waarde. Een verklaring hiervoor is gegeven in het commentaar op de resultaten van n_{yy} bij algehele verfijning op de vorige pagina.

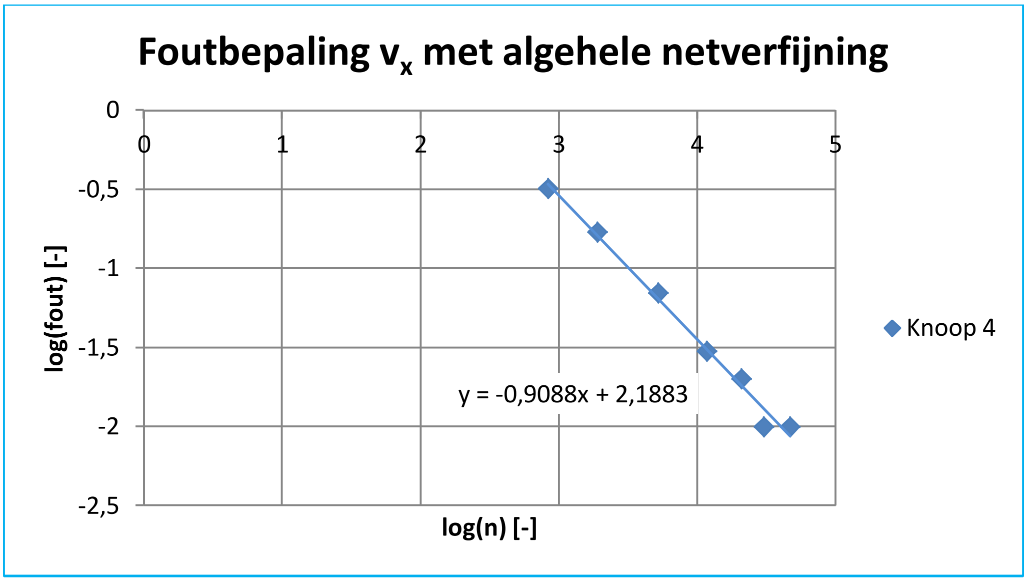
8.2.2 Foutbepaling

Ter afsluiting is ook de orde van de fout bepaald bij algehele netverfijning voor het geval van n_{yy}, v_x en m_{xy} in knoop 4 in de dikke schaal. Dit is gedaan op grond van de beschreven theorie die uitgaat van het aantal elementen dat toegepast is. Het resultaat van deze berekening is getoond in Figuur 8.9 tot en met Figuur 8.111.



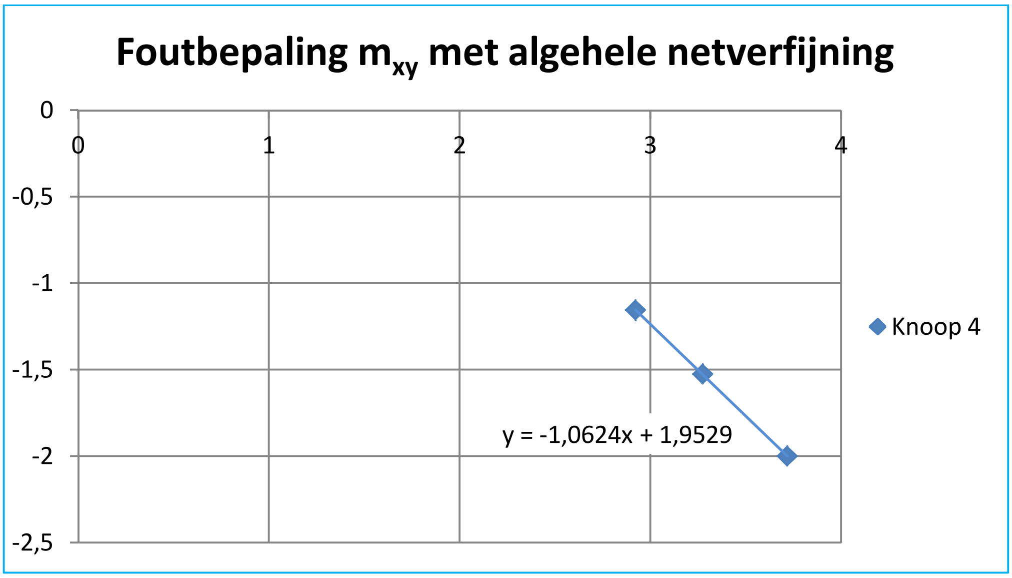
Figuur 8.9 Foutbepaling n_{yy} met algehele netverfijning

In dit geval is α gelijk aan 2*0,898 = 1,796; de orde van de fout is dus gelijk aan 2. Wanneer dit getal vergeleken wordt met α = 1 zoals die verkregen via Ansys, kan geconcludeerd worden dat SCIA Engineer beter presteert. In eerdere berekeningen die gebruik maken van randverfijning is voor n_{yy} in het geval van de dikke schaal een waarde van α = 1 gevonden. Hierbij dient opgemerkt te worden dat knoop 4 niet meegenomen is in dit resultaat vanwege de niet-monotone convergentie ervan.



Figuur 8.10 Foutbepaling v_x met algehele netverfijning

In eerdere berekening op basis van randverfijning komt α uit op een waarde van 0. In Ansys wordt voor v_x bij een schaal van 70 mm α = 1 gevonden. In SCIA Engineer is α echter gelijk aan 2 * 0,9088 = 1,8176 ≈ 2.



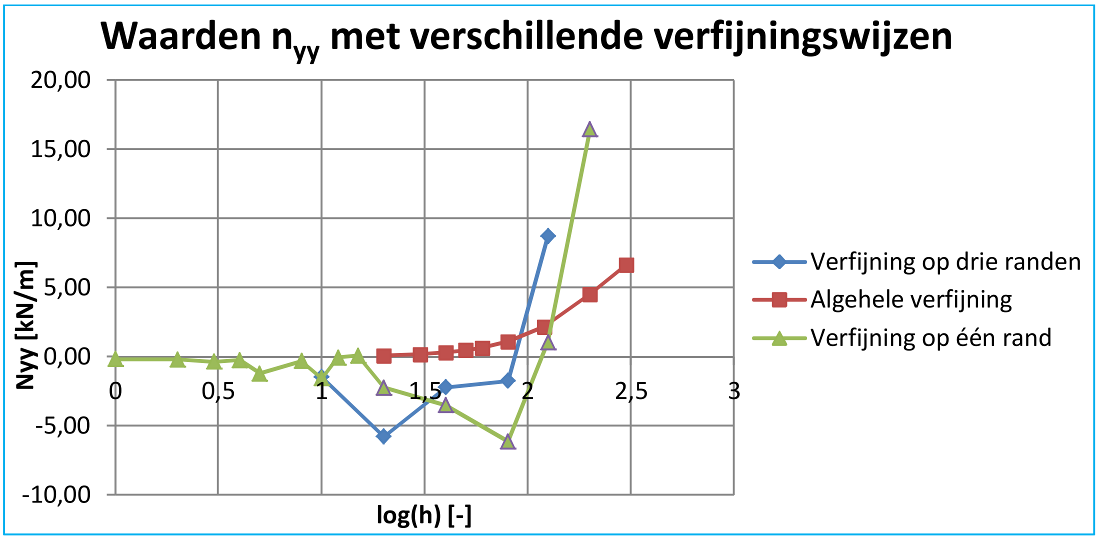
Figuur 8.11 Foutbepaling m_{xy} met algehele netverfijning

Ook voor m_{xy} is de orde van de fout gelijk aan 2 * 1,0624 = 2,1248 ≈ 2. Bij verfijning op één rand is α gelijk aan 3, terwijl in Ansys en in het geval van verfijning op drie randen een waarde van α = 1.

Op basis van deze korte studie lijkt dus te gelden dat de orde van de fout met algehele netverfijning in SCIA Engineer rond de twee ligt. Dit is hoger dan op voorhand werd vermoed door de uitkomsten in het werk van E.M.J. Vicca uit 2015. Ook ligt dit gemiddeld hoger dan de gevallen waarin randverfijning is toegepast. Een nadeel van de algehele netverfijning blijft wel dat de computercapaciteit een belangrijke rol speelt; de kleinst mogelijke elementgroottes zijn tot wel twintig keer groter dan bij randverfijning het geval is.

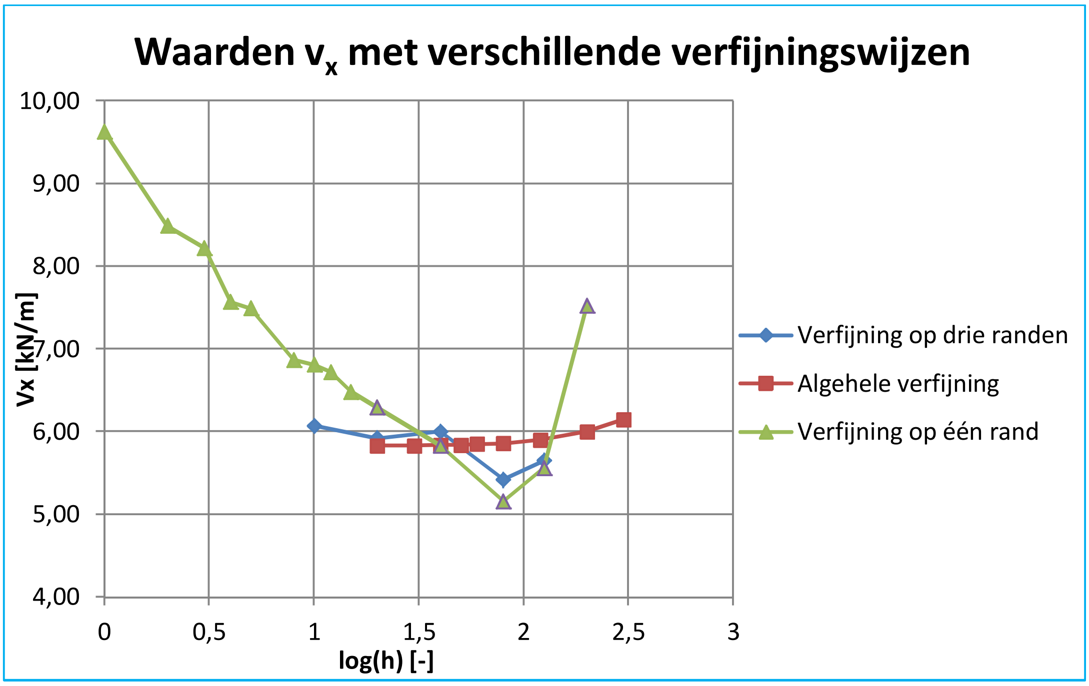
8.3 Vergelijking resultaten voor verschillende verfijningsmethoden

Deze paragraaf geeft de resultaten weer voor n_{yy}, v_x en m_{xy} in knoop 4 van de dikke schaal bij verschillende wijzen van verfijning. Door alle resultaten van één bepaalde grootheid weer te geven in één grafiek kunnen verschillen direct worden geconstateerd.



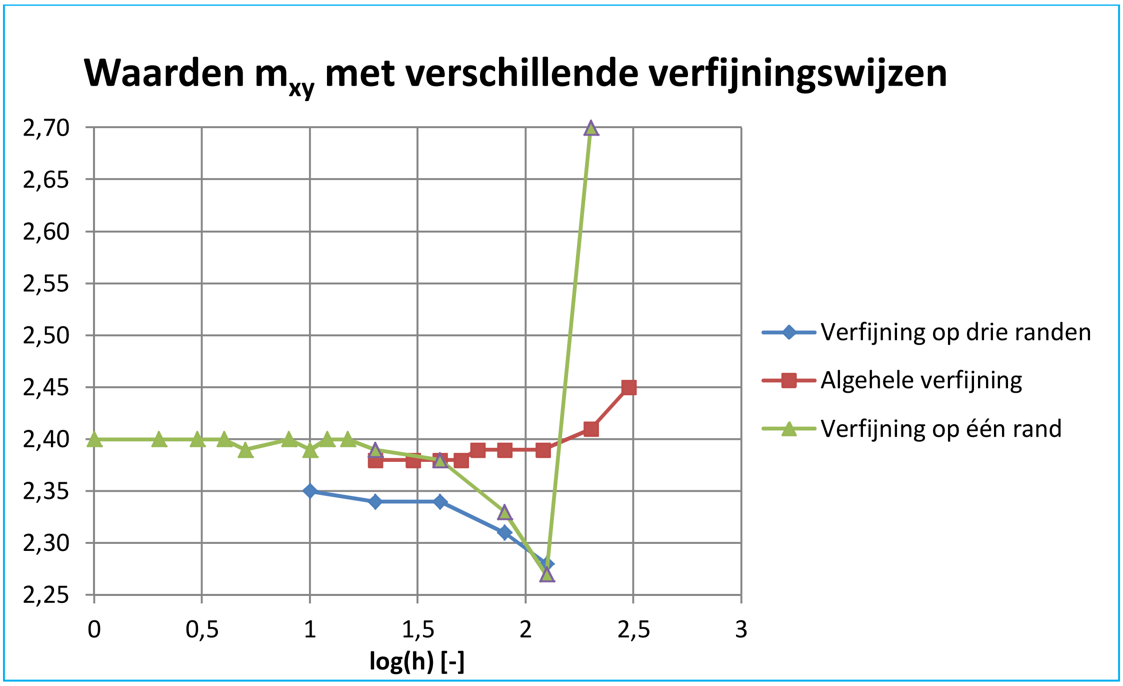
Figuur 8.12 Waarden n_{yy} met verschillende verfijningswijzen

n_{yy} is bij uitstek een grootheid waar de wijze van verfijning een grote invloed heeft op de resultaten. Niet alleen wordt er bij algehele netverfijning eerder de uiteindelijke waarde bereikt, maar ook wordt er monotone afname in de fout gevonden.



Figuur 8.13 Waarden v_x met verschillende verfijningswijzen

Bij v_x is het opvallend dat bij verfijning op drie randen er een fluctuatie zit in de afname van de fout, terwijl dat bij verfijning op één rand niet het geval is. Verder valt op dat bij de kleinste paar elementgroottes de waarde van v_x opeens omhoog schiet bij verfijning op één rand. Dit is zeer opmerkelijk en hierdoor kan er in dit stadium moeilijk een oorzaak worden aangegeven. Daartoe is aanvullend onderzoek benodigd.



Figuur 8.14 Waarden m_{xy} met verschillende verfijningswijzen

Op een kleine verstoring bij verfijning op één rand na, levert m_{xy} een rustige grafiek op. De waarden lijken in alle drie de gevallen te convergeren naar dezelfde eindwaarde, en dit alles geschiedt op een monotone wijze. Bij deze grootheid kan ook opgemerkt worden dat er sowieso een kleine spreiding zit in de resultaten voor verschillende elementgroottes en verfijningswijzen.

Kortom, verschillende verfijningswijzen leiden tot andere resultaten. In het algemeen komen deze verschillen voort uit een andere configuratie van het elemententnet, maar worden wel dezelfde eindwaardes genaderd. Dit is niet meer dan logisch aangezien er maar één krachtsverdeling is op het moment dat de onderzochte constructie in de praktijk zou worden gemaakt en belast. Geringe verschillen in de resultaten bij de verschillende verfijningswijzen naarmate de eindwaarde dichter benaderd wordt, kunnen toegeschreven worden aan de berekeningswijze van SCIA Engineer; getallen worden veelvoudig opgeteld en vermenigvuldigd en doordat er met numeriek waarden gewerkt wordt, kunnen afrondingen van getallen een rol spelen. Een uitzondering hierop is v_x bij verfijning op één rand. Hetgeen bij deze grootheid leidt tot de opmerkelijke trend waarbij de waarde van v_x toeneemt bij kleinere elementgroottes, dient nader onderzocht te worden in een vervolgonderzoek.

Al met al kan er gesteld worden dat de gebruiker voor praktische toepassingen van SCIA Engineer dus een keuze moet maken wat hij belangrijker vindt: ofwel een geheel verfijnd net dat sneller convergeert naar de eindwaarde, ofwel een constructie die alleen op de randen verfijnd is waar de convergentie lager is, maar waar de benodigde capaciteit ook beperkt blijft.

9. Conclusie

De nauwkeurigheid van de resultaten in schaalconstructies is afhankelijk van meerdere factoren. Uit dit onderzoek blijkt namelijk dat er per grootheid en per dikte van de schaal verschil zit in de orde van de fout. In het geval van randverfijning geldt voor de dikke schaal dat de waarde van α veelal gelijk is aan 1. Voor de dunne schaal wordt er in de meeste gevallen de waarde 0 gevonden voor de orde van de fout. Wel voldoet, bij verfijning aan de randen, de schaal van 7 mm beter aan de randvoorwaarden dan dat de dikkere schaal dat doet.

Wat betreft Ansys kan er geconcludeerd worden dat dit programma de randvoorwaarden beter beschrijft dan SCIA Engineer. Hierbij dient opgemerkt te worden dat in Ansys de gehele constructie verfijnd is, terwijl dit in SCIA Engineer niet het geval is. Daarnaast neemt de fout in alle onderzochte gevallen in Ansys monotoon af. Dit lijkt bij algehele netverfijning ook te gelden voor SCIA Engineer. Echter, in dit werk is voornamelijk gewerkt met constructies die aan de rand verfijnd zijn en voor die situaties neemt de fout niet altijd monotoon af.

Wanneer de link gelegd wordt met het werk van E.M.J. Vicca, valt te zien dat de veldelementen van schaalconstructies die gemodelleerd zijn in SCIA Engineer een hoge convergentie vertonen. Een α met een waarde van 2 of 3 is veelvoorkomend en zelfs uitschieters naar 5 of zelfs 6 (!) zijn mogelijk. Deze waarden zijn beduidend hoger dan de orde van de fout van randverfijnde constructies in SCIA Engineer. De enkele gevallen aan de randen die onderzocht zijn wanneer algehele netverfijning toegepast is vertonen daarentegen weer vergelijkbare waarden voor α.

Een andere conclusie die getrokken kan worden is dat het mogelijk blijkt om in SCIA Engineer numerieke waarden voor de verschillende grootheden weer te geven op knooppunten van het elementennet. Tevens blijkt dat juist de weergave van getalswaarden voor krachtsgrootheden en verplaatsingen zorgt voor de meeste vertraging bij het verwerken van de resultaten. Het feit dat de rekentijd en het benodigde werkgeheugen toeneemt bij een groter aantal knopen is dus minder bepalend voor de verwerking dan op voorhand werd verwacht.

Vervolgonderzoek op dit eindwerk zou kunnen bestaan uit het onderzoeken van de nauwkeurigheid van schaalconstructies in andere eindige-elementenprogramma's zoals Abaqus of Diana. Daarnaast kan er gekeken worden welke rol de dikte van de schaal speelt. In dit werk zijn twee a/t - ratio's onderzocht; wellicht kan er een trend worden ontdekt wanneer meerdere diktes worden onderzocht. Het meest interessante om nader te onderzoeken zijn wellicht de verschillen aan de rand tussen algehele verfijning en verfijning aan de rand, aangezien in dit werk hierbij opmerkelijke afwijkingen zijn geconstateerd. Tot slot kan bekeken worden of de gevonden resultaten enkel gelden voor de overkapping die in dit werk beschreven is of dat de resultaten gelden voor schaalconstructies in algemeenheid, onafhankelijk van de vorm dus.

Literatuur

Babuska, I., & Strouboulis, T. (2001). *The finite element methode and its reliability*. Oxford: Clarendon Press.

Hoogenboom, (2016/2017). Shell Analysis, Theory and Application handout 3. Delft.

Hoogenboom, (2016/2017). Shell Analysis, Theory and Application handout 4. Delft.

Hoogenboom, (2016/2017). Shell Analysis, Theory and Application Handout 9. Delft.

Metselaar, L. (2013). *Een ontwerpformule voor de laagste eigenfrequentie van gekromde panelen.* Delft.

SCIA. (sd). *Home page*. Opgeroepen op September 4, 2017, van SCIA.net: https://www.scia.net/en

SCIA. (sd). *Plastic Analysis Of Surface Members*. Opgeroepen op September 4, 2017, van resources.scia.net: http://resources.scia.net/en/factsheets/analysis/analyzer_plasticanalysisofsurfacemembers.htm

Vicca, E. (2015). *Werken met schaalelementen.* Delft.

Figurenlijst

Tabellenlijst

I. Bijlage A: Afwijking œexacteô waarde

A.1 Schaal 70 mm

Tabel I.1 Afwijking 'exacte' waarde schaal 70 mm knoop 4

Schaal 70 mm			K4, Knoop 4, midden gekromde rand aan het vrije uiteinde						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	0,5(n_{xy}+n_{yx}) [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1,18	4,3	7,94	0	2,12	0,01	0,15	2,13	0,1
40	8,88	0,75	13,93	0,01	2,11	0,01	0,07	1,27	0
80	9,72	0,29	34,64	0,05	2,11	0,04	0,65	1,35	0
125	4,42	10,17	7,74	0,07	2,12	0,07	0,42	1,84	0,1

Tabel I.2 Afwijking 'exacte' waarde schaal 70 mm knoop 8

Schaal 70 mm			K8, knoop 8, midden lange rand aan de kant van de puntlast						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	0,5(n_{xy}+n_{yx}) [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	4,71	0,53	0,23	0	0	0	1,3	1,71	0
40	13,29	1,95	0,32	0	0	0	2,21	0,67	0
80	19,99	8,11	4,22	0,02	0,02	0,02	2,18	0,83	0,1
125	18,97	29,73	5,62	0,08	0,15	0,03	2,3	0,93	0,1

Tabel I.3 Afwijking 'exacte' waarde schaal 70 mm knoop 6

Schaal 70 mm			K6, knoop 6, midden kromme rand bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	0,5(n_{xy}+n_{yx}) [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0,21	0,24	0,07	0	0	0	0,49	1,32	0
40	0,57	1,49	1,04	0,01	0,04	0	0,42	2,17	0
80	1,1	1,3	1,75	0,01	0,06	0,01	0,47	2,38	0
125	2,62	0,23	5,33	0,03	0,02	0,04	0,59	1,5	0

Tabel I.4 Afwijking 'exacte' waarde schaal 70 mm knoop 5

Schaal 70 mm			K5, knoop 5, hoekpunt bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	0,5(n_{xy}+n_{yx}) [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	177,35	628,1	125,5	0,1	0,58	0,05	89,51	215,42	0
40	330,24	1152,1	240,13	0,23	1	0,07	96,04	187,62	0
80	459,07	1583	350,63	0,35	1,05	0,03	110,03	204,05	0
125	703,23	1920,7	458,26	0,28	1,21	0	108,2	215,08	0

A.2 Schaal 7 mm

Tabel I.5 Afwijking 'exacte' waarde schaal 7 mm knoop 4

Schaal 7 mm			K4, Knoop 4, midden gekromde rand aan het vrije uiteinde						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0{,}5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,08	0	0,01	0	0	0	0	0	0,1
4	0,09	0	0,01	0	0	0	0	0	0,1
8	0,08	0	0	0	0	0	0	0	0,1
16	0,07	0	0,01	0	0	0	0	0	0,1

Tabel I.6 Afwijking 'exacte' waarde schaal 7 mm knoop 8

Schaal 7 mm			K8, knoop 8, midden lange rand aan de kant van de puntlast						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0{,}5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,01	0,44	0,01	0	0	0	0	0	0,2
4	0,02	0,44	0,02	0	0	0	0	0	0,2
8	0,03	0,44	0,02	0	0	0	0	0	0,2
16	0,06	0,43	0,02	0	0	0	0	0	0,2

Tabel I.7 Afwijking 'exacte' waarde schaal 7 mm knoop 6

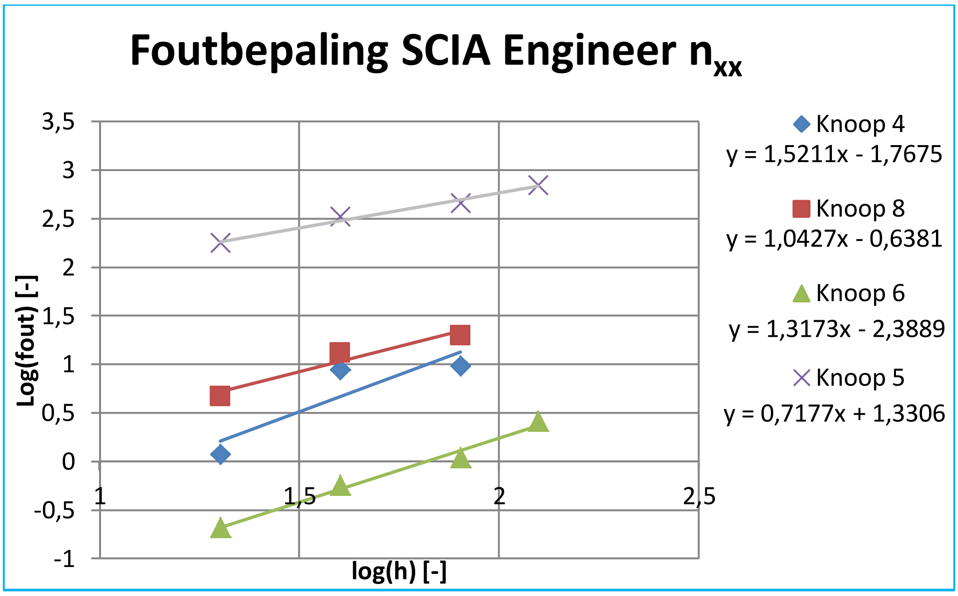
Schaal 7 mm			K6, knoop 6, midden kromme rand bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0{,}5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,04	0,21	0	0	0	0	0	0	0
4	0,04	0,21	0	0	0	0	0	0	0
8	0,04	0,21	0	0	0	0	0	0	0
16	0,04	0,21	0	0	0	0	0	0	0

Tabel I.8 Afwijking 'exacte' waarde schaal 7 mm knoop 5

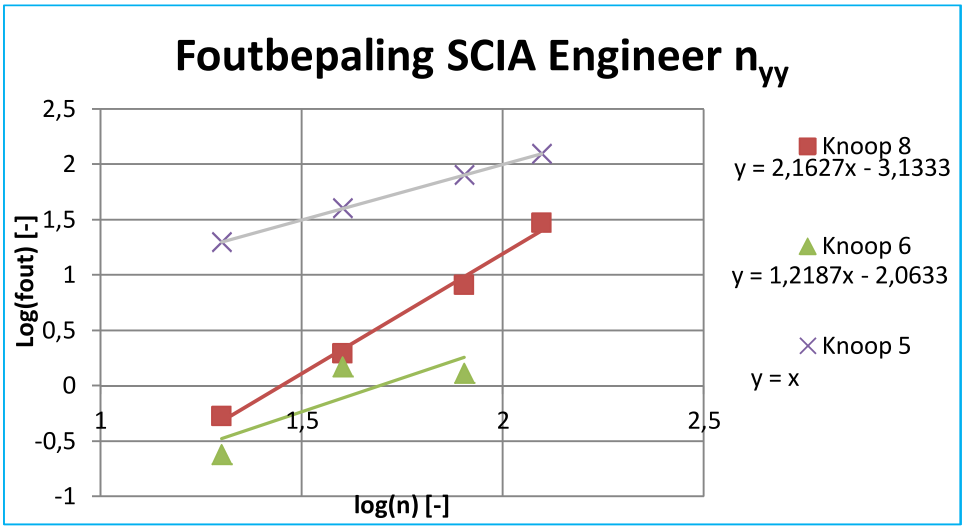
Schaal 7 mm			K5, knoop 5, hoekpunt bij de oplegging						
h [mm]	n_{xx} [kN/m]	n_{yy} [kN/m]	$0{,}5(n_{xy}+n_{yx})$ [kN/m]	m_{xx} [kNm/m]	m_{yy} [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	q_x [kN/m]	q_y [kN/m]	u_z [mm]
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4,52	5,96	1,09	0	0	0	0,58	0,86	0
4	1,74	7,66	1,42	0	0	0	0,86	0,88	0
8	2,11	9,14	1,72	0	0	0	0,87	0,9	0
16	2,44	10,4	2	0	0	0	0,88	0,91	0

II. Bijlage B: Foutbepaling schaalconstructie in SCIA Engineer

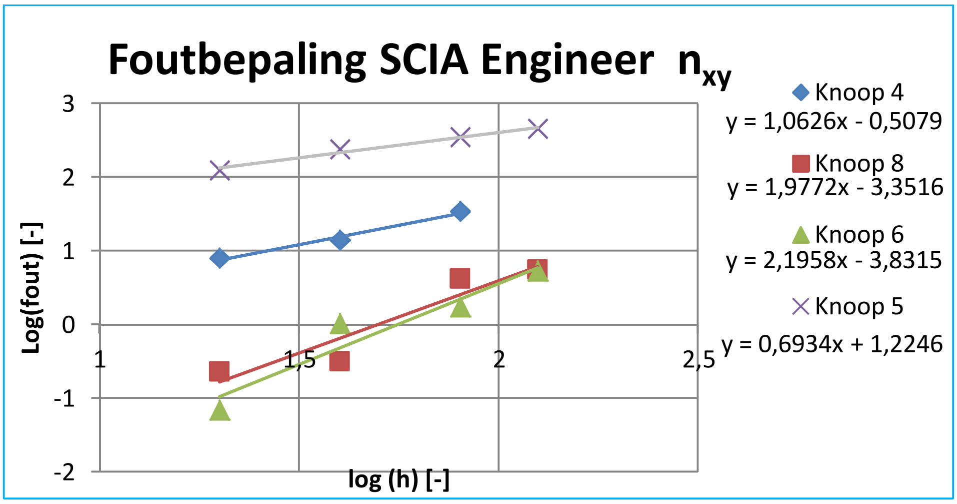
B.1 Schaal 70 mm



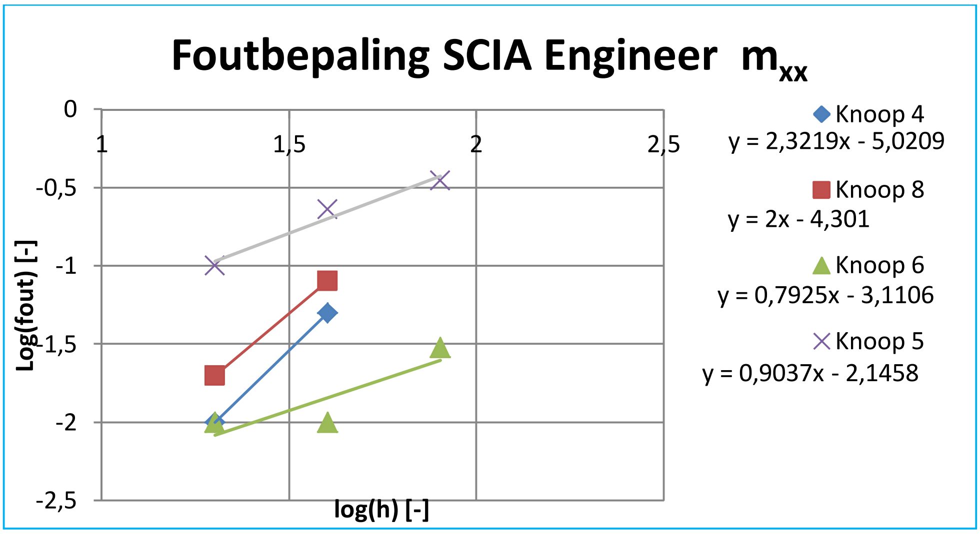
Figuur II.1 Fout n_{xx} schaal 70 mm



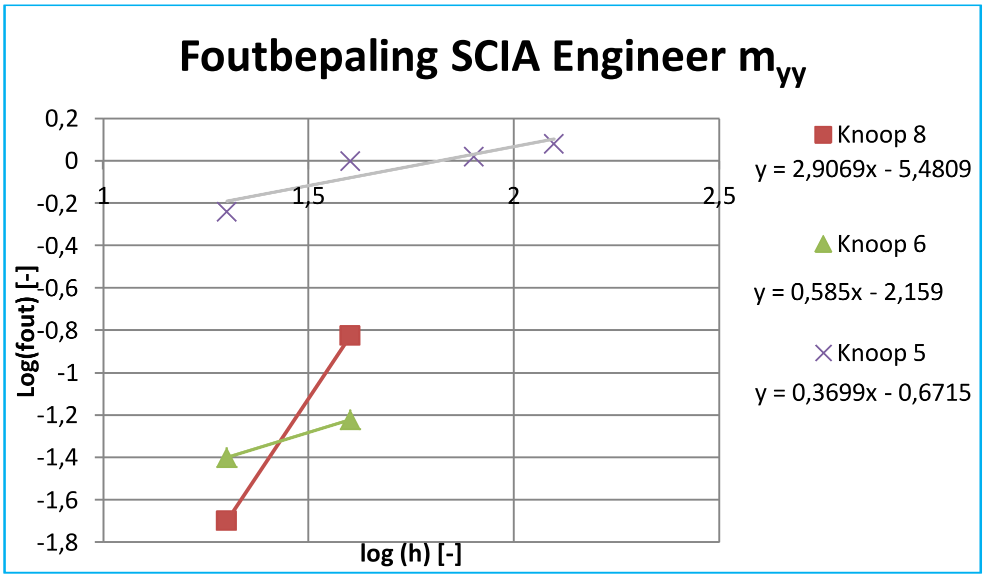
Figuur II.2 Fout n_{yy} schaal 70 mm



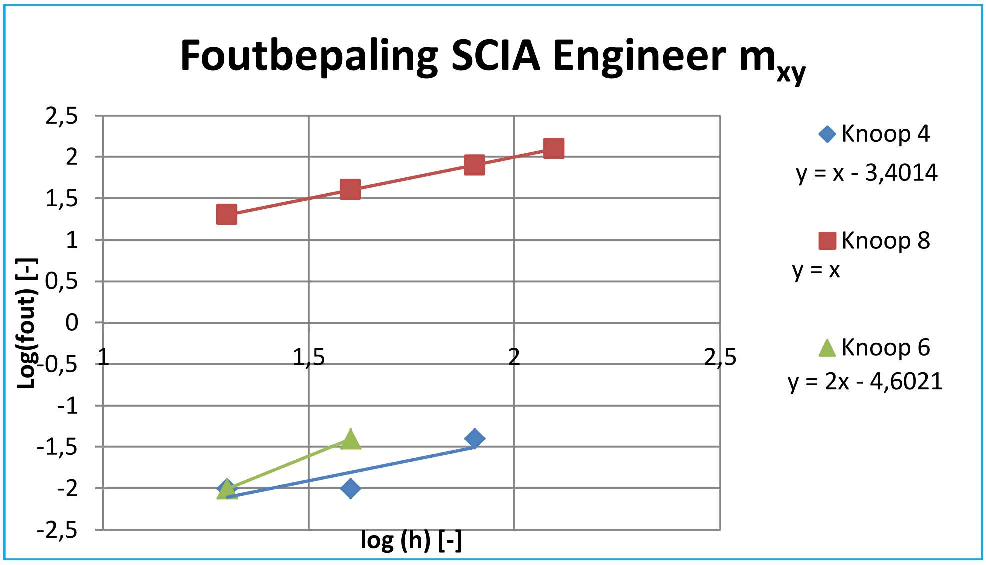
Figuur II.3 Fout n_{xy} schaal 70 mm



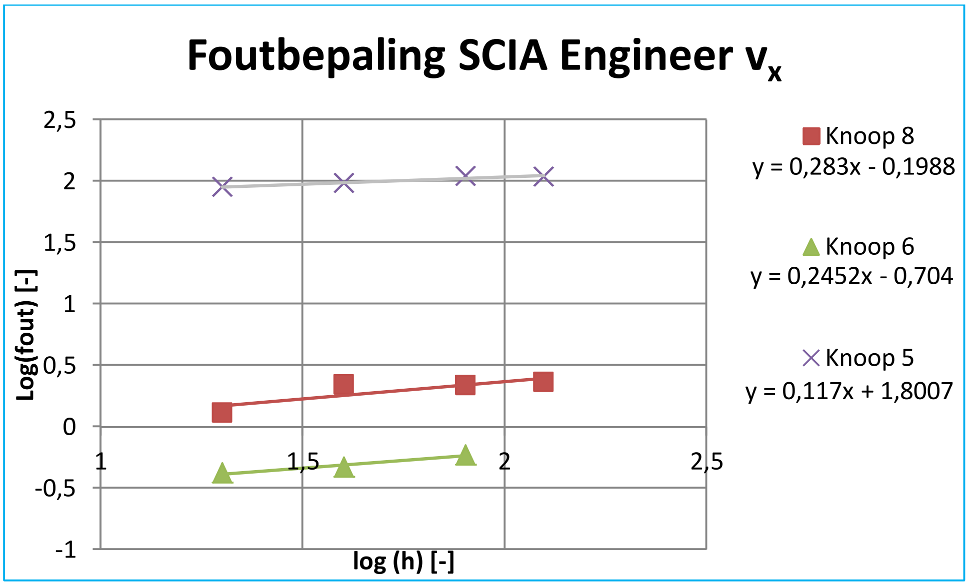
Figuur II.4 Fout m_{xx} schaal 70 mm



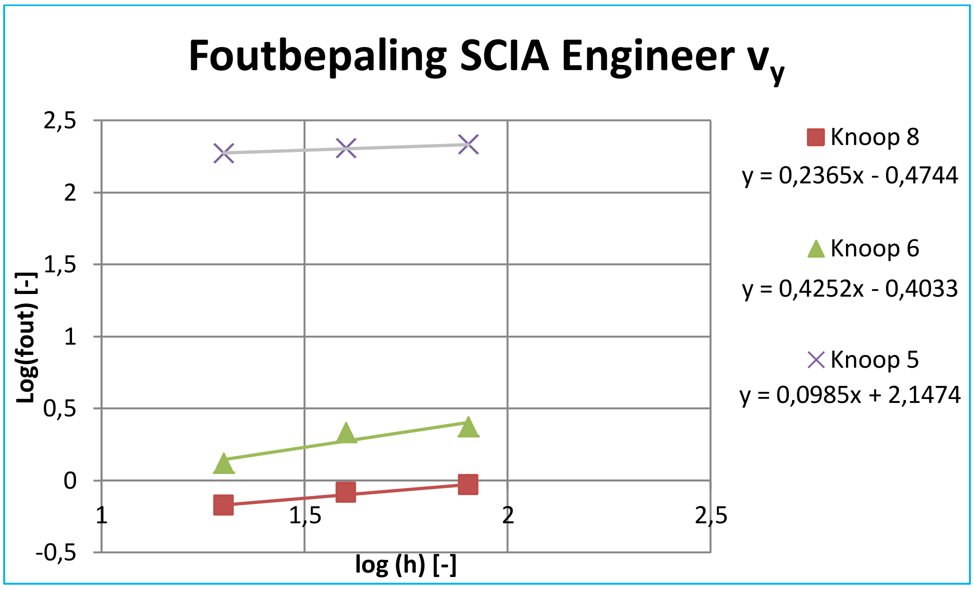
Figuur II.5 Fout m_{yy} schaal 70 mm



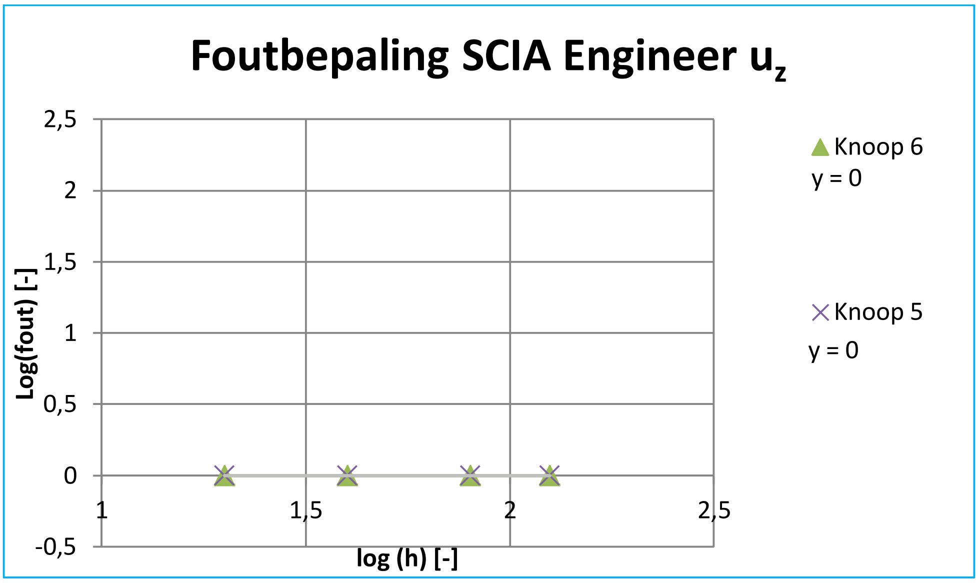
Figuur II.6 Fout m_{xy} schaal 70 mm



Figuur II.7 Fout v_x schaal 70 mm



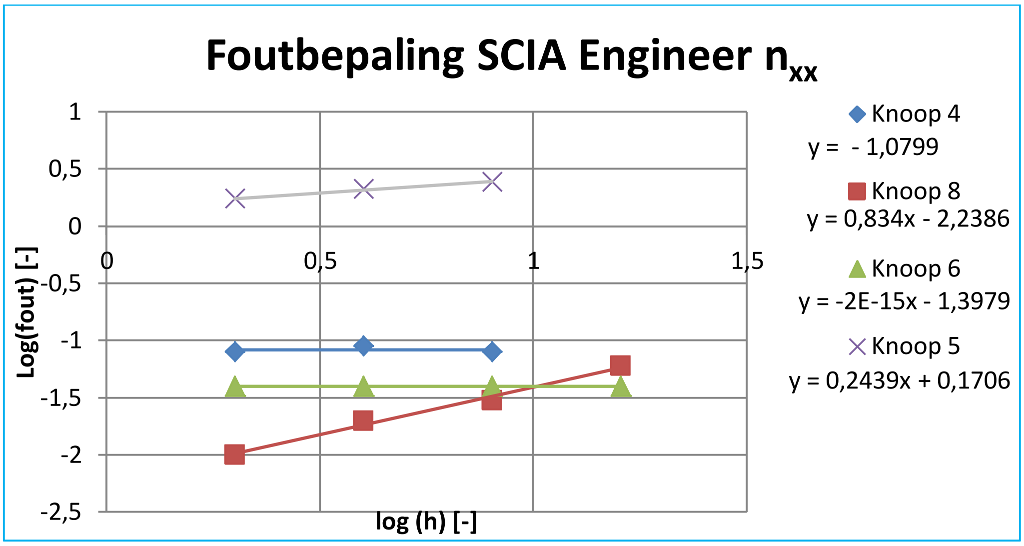
Figuur II.8 Fout v_y schaal 70 mm



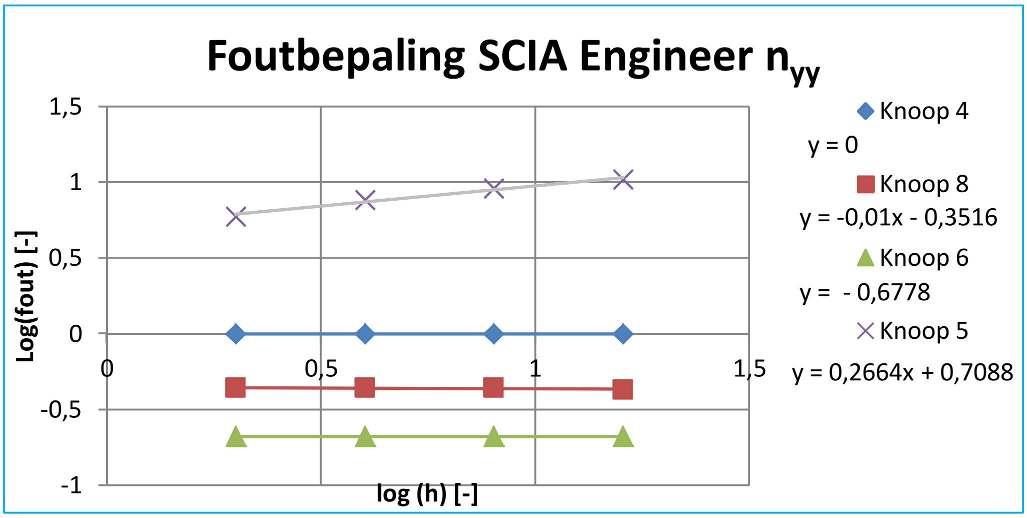
Figuur II.9 fout u_z schaal 7 mm

B.1 Schaal 7 mm

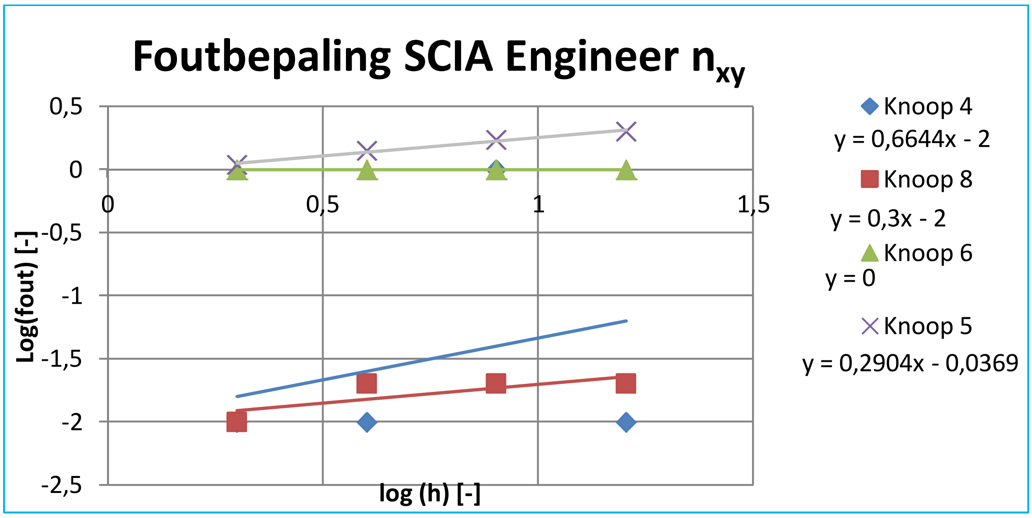
Hieronder volgen de grafieken met de fout voor de grootheden van de schaal met een dikte van 7 mm. De grafieken voor m_{xx}, m_{yy} en m_{xy} zijn weggelaten omdat deze niet interessant zijn voor verder onderzoek, aangezien al deze resultaten de waarde 0,00 kNm/m hebben bij alle toegepaste elementgroottes.



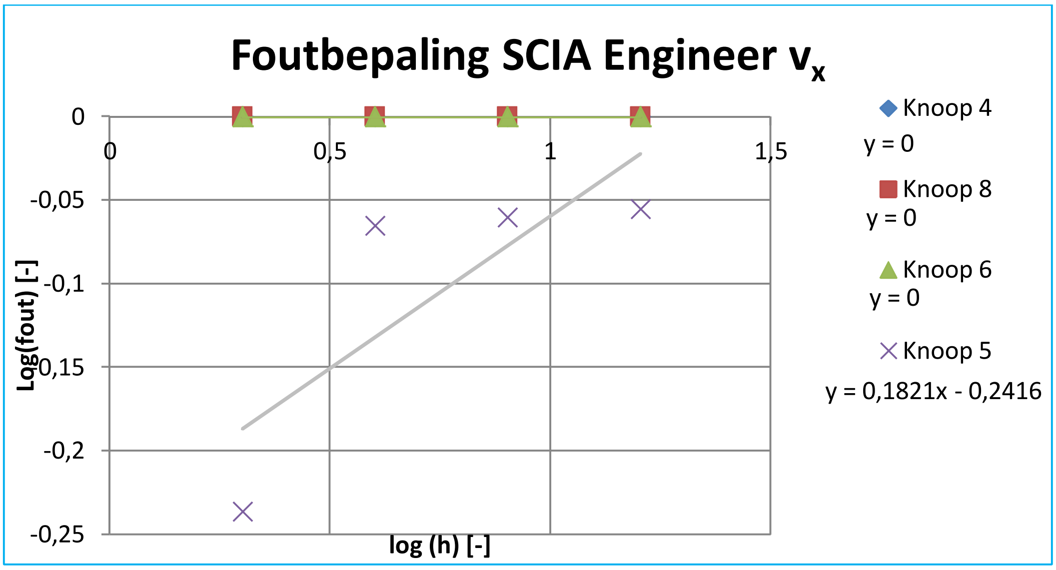
Figuur II.10 Fout n_{xx} schaal 7 mm



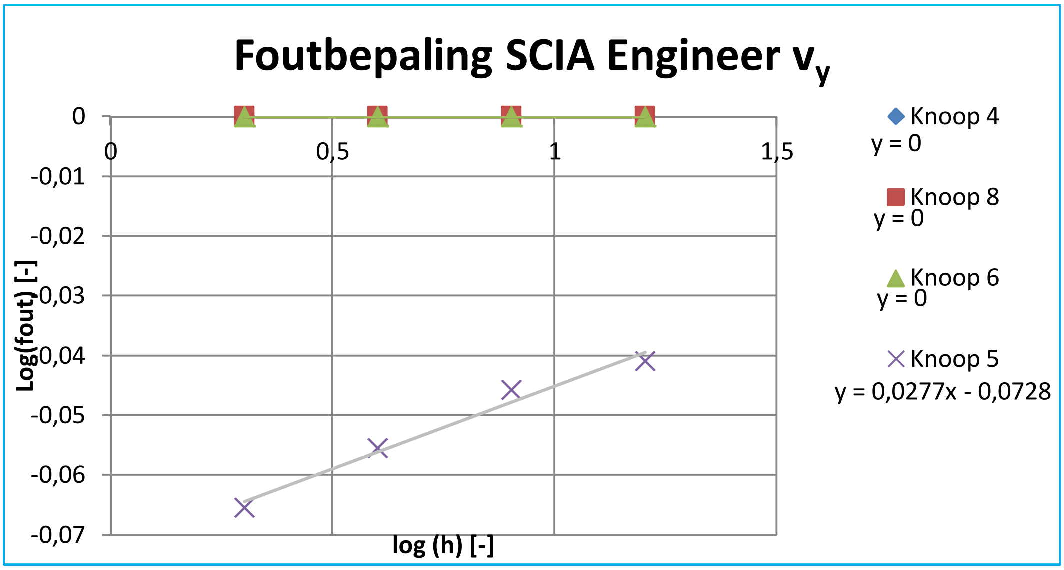
Figuur II.11 Fout n_{yy} schaal 7 mm



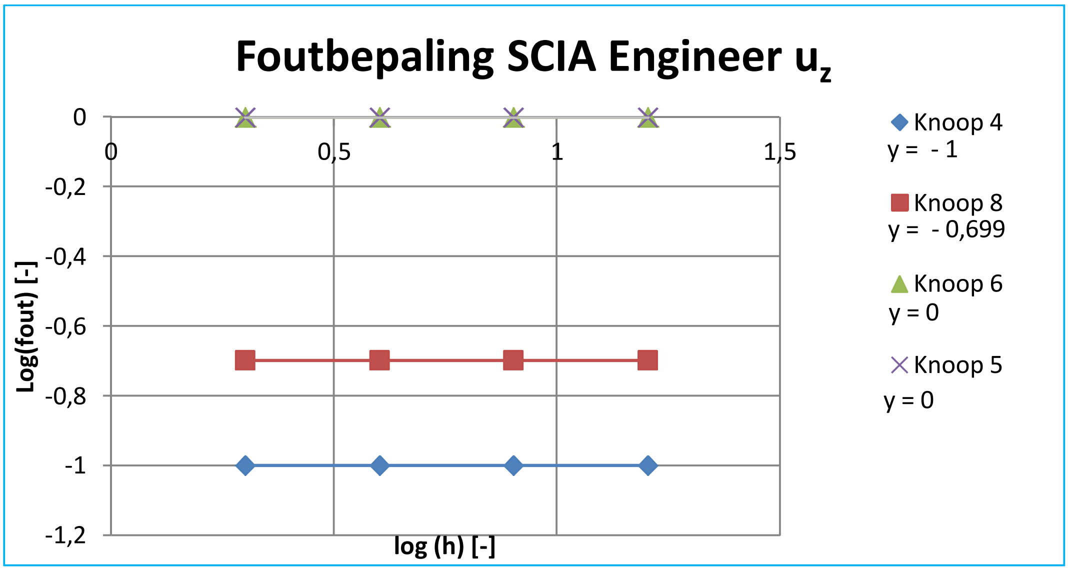
Figuur II.12 Fout n_{xy} schaal 7 mm



Figuur II.13 Fout v_x schaal 7 mm

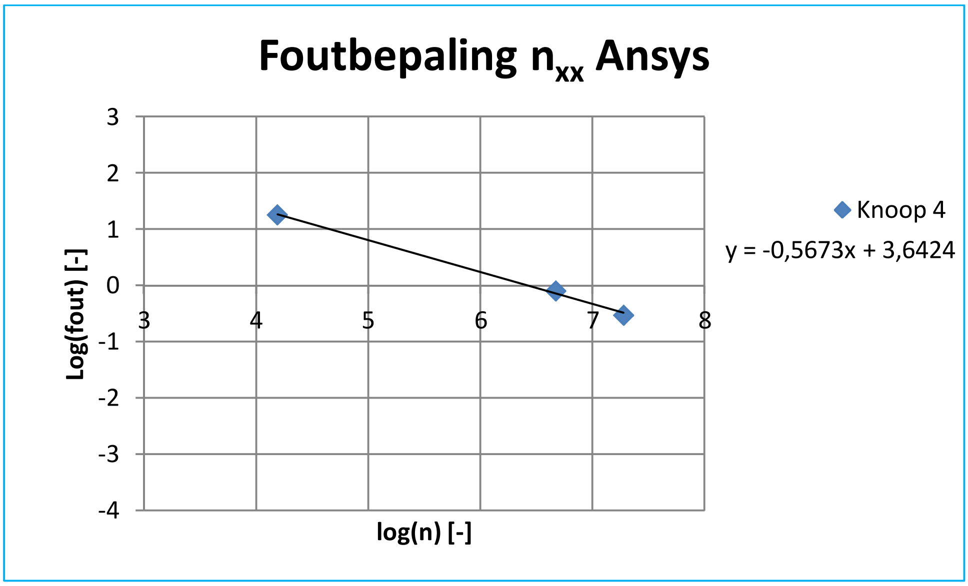


Figuur II.14 Fout v_y schaal 7 mm

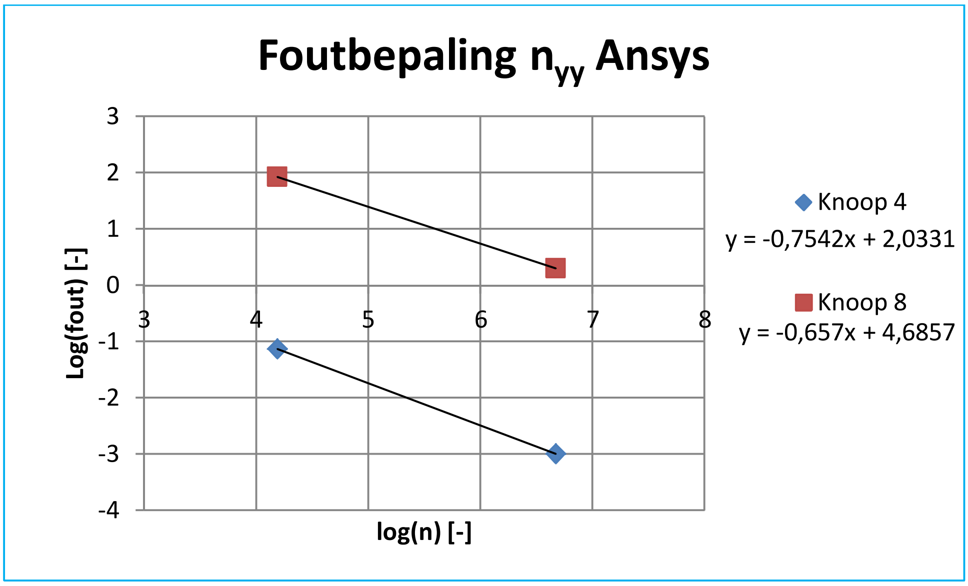


Figuur II.15 Fout u_z schaal 7 mm

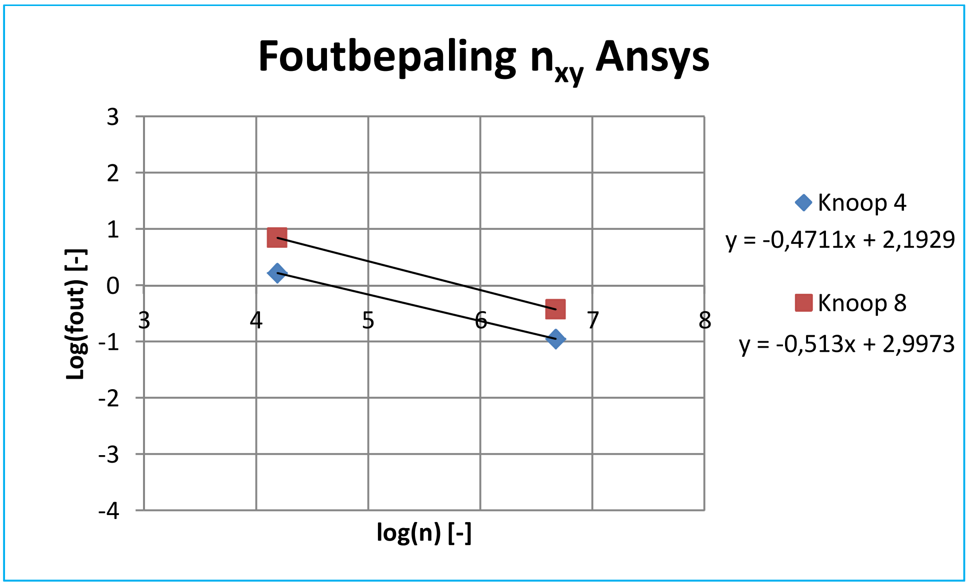
III. Bijlage C: Foutbepaling schaalconstructie in Ansys



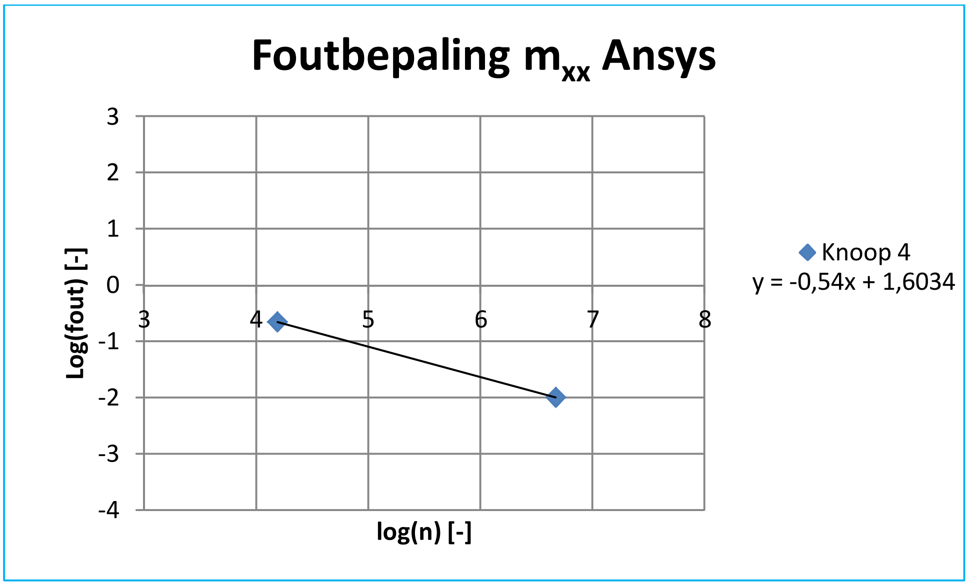
Figuur III.1 Fout n_{xx} in Ansys schaal 70 mm



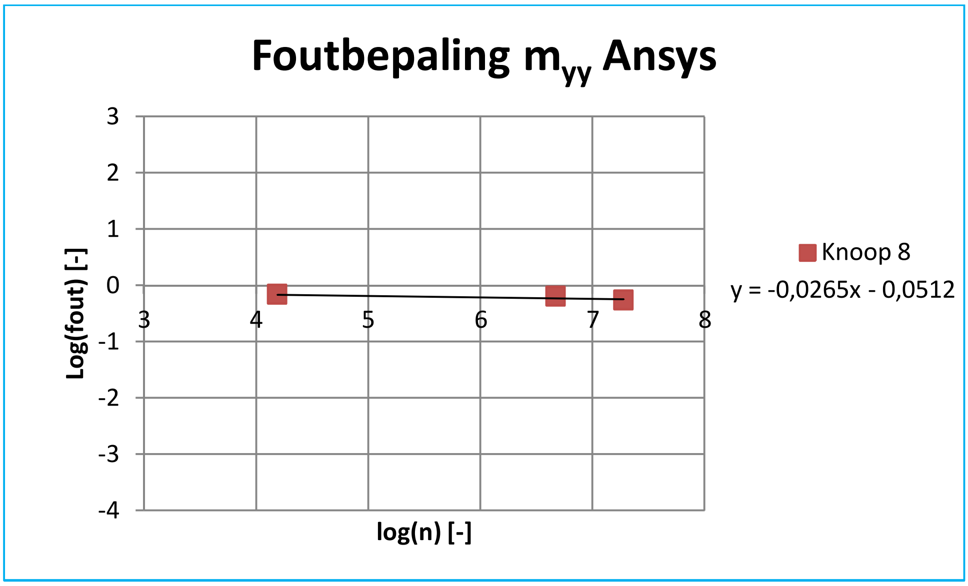
Figuur III.2 Fout n_{yy} in Ansys schaal 70 mm



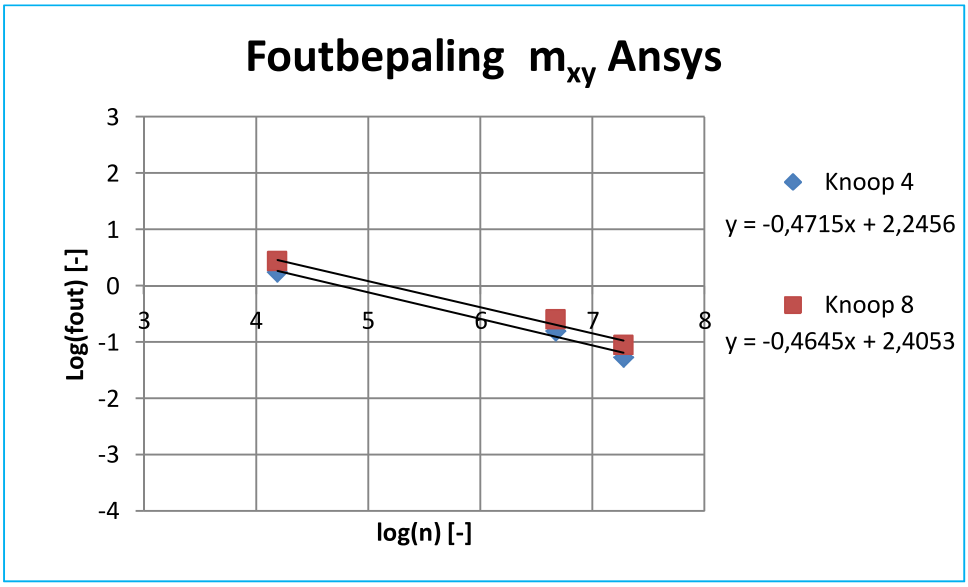
Figuur III.3 Fout n_{xy} in Ansys schaal 70 mm



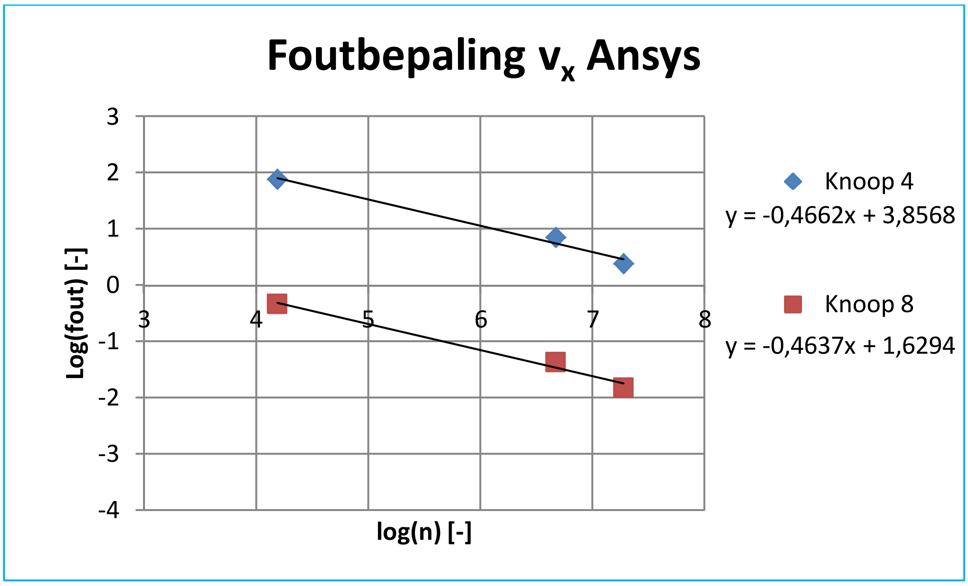
Figuur III.4 Fout m_{xx} in Ansys schaal 70 mm



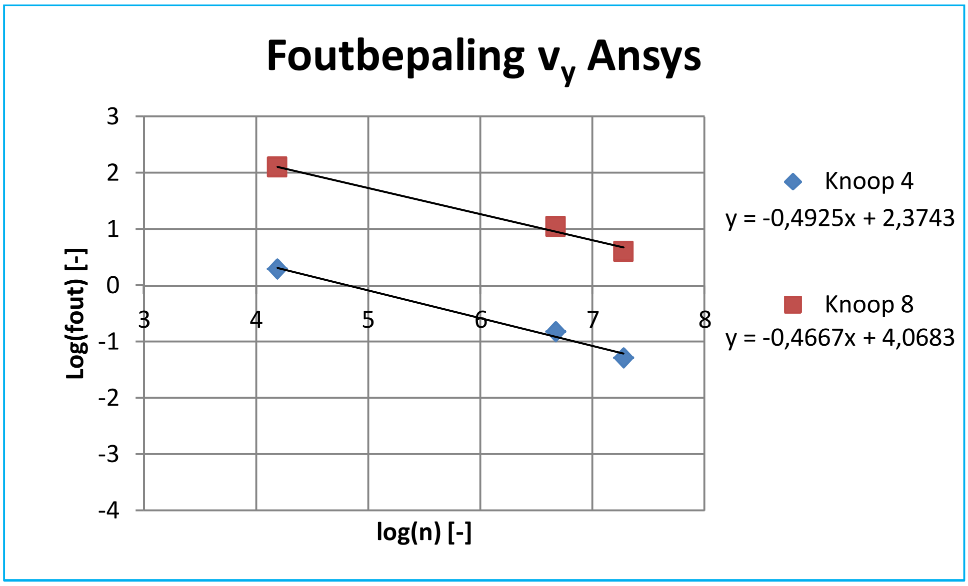
Figuur III.5 Fout m_{yy} in Ansys schaal 70 mm



Figuur III.6 Fout m_{xy} in Ansys schaal 70 mm



Figuur III.7 Fout v_x in Ansys schaal 70 mm



Figuur III.8 Fout v_y in Ansys schaal 70 mm