Spanningen in de rand van platen

CTB3000-16: Bachelor eindwerk civiele techniek

Begeleiders:
Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. T. R. van Woudenberg
Ir. C. Kasbergen

Julian van Elderen
4770951
Delft, 2022

Voorwoord

Voor u ligt een Bachelor thesis over de piekspanningen in de randen van platen. Deze thesis is geschreven in het kader van het afstuderen aan de Bacheloropleiding Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. In de periode van september 2022 tot en met oktober 2022 heb ik onderzoek gedaan naar Reissner's theorie over krachten in de randen van platen en heb ik meerdere testen uitgevoerd in een elementenprogramma genaamd Abaqus.

Deze thesis is bedoeld voor studenten die meer over dit onderwerp willen weten en andere geïnteresseerden. Er is geen extra voorkennis benodigd voor het lezen van de thesis; dit rapport is gebaseerd op literatuuronderzoek en eigen onderzoek.

Graag wil ik mijn begeleiders, Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom en Ir. T.R. van Woudenberg bedanken voor het klaarstaan in tijden van nood en hun expertise in het vak; zonder hen had ik deze thesis niet kunnen afronden. Ook wil ik Ir. C. Kasbergen bedanken, voor het beoordelen van het verslag.

Ik wens u veel leesplezier,

Julian van Elderen,
Delft, 2022

Samenvatting

In deze thesis worden de wringspanningen in de randen van platen behandeld. Deze spanningen kunnen berekend worden met de formule van Reissner. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{m_{xy}}{t^2}$$

Deze formule is niet exact en de coëfficiënt van $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ dateert uit 1945. In deze thesis is er onderzoek verricht naar deze coëfficiënt, met als onderzoeksvraag:

"Wat is de coëfficiënt om de piekspanning in randen van platen te berekenen?"

Met het gebruik van het elementenprogramma Abaqus/CAE zijn er vele testen gedaan op een plaat om deze piekspanning te berekenen. Deze platen verschillen vooral in het aantal elementen en knopen, maar er zijn ook testen gedaan op platen met andere soorteigenschappen. Uiteindelijk is er vastgesteld dat de nieuwe coëfficiënt met één decimaal nauwkeurigheid vastgesteld kan worden:

- Reissner's coëfficiënt: $\frac{3}{2}\sqrt{10} \approx 4{,}74 \ldots$
- Nieuwe coëfficiënt: $4{,}6 \ldots$

De nieuwe coëfficiënt is 3% lager dan Reissner's coëfficiënt. Omdat deze coëfficiënt kleiner is dan de originele coëfficiënt, zijn bestaande constructies veilig gebouwd en hoeven deze niet herzien te worden.

Het aantal gemodelleerde elementen over de dikte is doorslaggevend voor de nauwkeurigheid van het resultaat en het totaal aantal knopen in een model had een limiet van ongeveer 2,7 miljoen knopen. Modellen werden hiernaast beïnvloed door de elementvorm, elementgrootte, breedte/dikte verhouding en de Poisson factor. Mede door deze factoren is één decimaal achter de komma de hoogste nauwkeurigheid die berekend kan worden met de hedendaagse computerkracht.

Als laatst is er berekend wanneer er een extra decimaal nauwkeurigheid berekend kan worden. Via het programma Maple is een convergerende formule gemaakt, die de nauwkeurigste oplossing benadert. Hiermee kan er berekend worden, wanneer de fout tussen het oude en nieuwe resultaat met een tiende nauwkeuriger is, voor 8-knoopse elementen. Hiervoor waren 182 elementen over de dikte nodig en ongeveer één miljoen gigabyte, of 10000 terabyte, aan RAM geheugen. Realistisch gezien kan dit niet in de aankomende jaren bereikt worden, aangezien de sterkste PC op het moment 1 terabyte aan geheugen heeft.

Inhoudsopgave

1. Inleiding

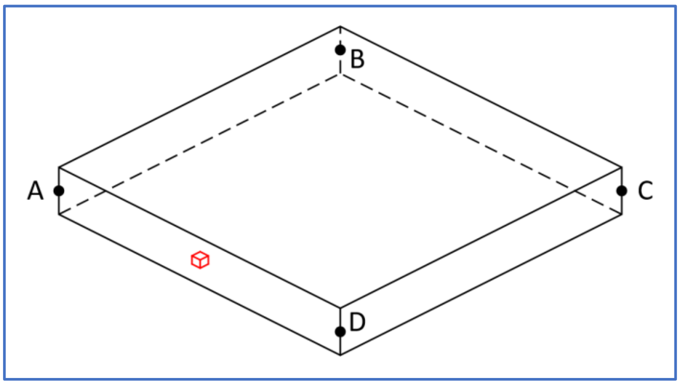
Platen zijn veelgebruikte constructie elementen, terug te zien in de vorm van vloeren, keerwanden, bruggen en meer. In de randen van deze platen treden vaak grote wringende momenten op en deze momenten en dwarskrachten worden hedendaags berekend via de eindige elementen methode. Deze methode kwam echter eind jaren '60 tot stand, daarvoor deden onder andere Erik Reissner onderzoek naar de spanningen in de randen van platen (1945). Hieruit volgde een formule met de plaatdikte en het wringend moment in de plaat. Deze formule is als volgt:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{m_{xy}}{t^2} \tag{1}$$

Waar:

- σ [N/mm^2] = schuifspanning in de rand van een plaat, op $t/2$;
- m_{xy} [N] = wringend moment in de plaat;
- t [mm] = dikte van de plaat;
- $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ [-] = coëfficiënt van Reissner.

De spanning die hier berekend wordt, is precies in het midden van de rand van een plaat, zoals te zien is in Figuur 1. De spanning wordt in het midden van de rand AD afgelezen, bij de rode kubus. Verder zijn er opleggingen in punten A, B en C en grijpt er een puntlast aan in punt D.
De formule is echter, wegens vele aannames van Reissner, niet exact; denk hierbij bijvoorbeeld aan 'vlakke doorsnedes blijven vlak'. Dat betekent dat in de jaren hierna een formule is gebruikt die, mogelijk, niet direct heeft geleid tot juiste antwoorden. Hoewel iedereen die de formule heeft gebruikt Reissner dankbaar is, is de tijd nog steeds voortgegaan en zo ook de zoektocht naar een nauwkeuriger coëfficiënt.



Figuur 1 - vereenvoudigde plaat

De volgende onderzoeksvraag is daardoor opgesteld:

"Wat is de coëfficiënt om de piekspanning in de randen van platen te berekenen?"

Naast het beantwoorden van deze hoofdvraag zal er een hypothese getoetst worden. Dit wordt gedaan om zo een weloverwogen oordeel te geven aan het eind van deze thesis. De hypothese is als volgt:

"De coëfficiënt die Reissner heeft benaderd, is juist"

Het academisch onderzoek wat zal plaatsvinden in deze thesis zal ervoor zorgen dat deze hypothese aangenomen of juist verworpen wordt. Daarnaast is het ook interessant om te weten, wanneer deze coëfficiënt nóg beter benaderd kan worden. Daar hoort dus ook de volgende vraag bij:

"Welke computercapaciteit is er nodig, om een extra decimaal voor de coëfficiënt te berekenen en wanneer is deze capaciteit beschikbaar op een normale gebruikerscomputer?"

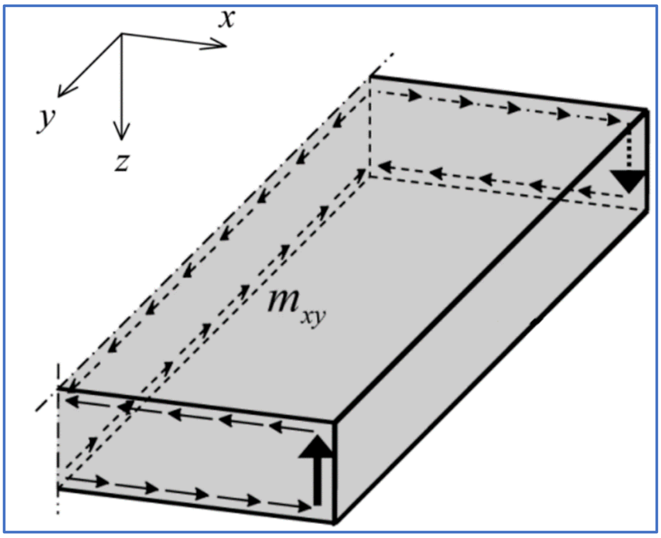
De thesis zal er als volgt uitzien: in hoofdstuk 2 wordt de theorie van piekspanningen in platen verder toegelicht. In hoofdstuk 3 wordt de elementenmethode en het modelleren zelf uitgelegd. In hoofdstuk 4 worden de resultaten van de gemaakte modellen behandeld. In hoofdstuk 5 wordt de interpretatie van de resultaten uitgelicht. Hier zal ook de computercapaciteit aan bod komen. Een conclusie in hoofdstuk 6 sluit deze thesis af. Verder is er een stappenplan voor het gebruik van Abaqus gemaakt, die in Bijlage A: het gebruik van Abaqus en de verwerking van de resultaten te vinden is. Bijlage B: voorbeelden van modellen bevat wat modellen met daarbij de doorbuiging.

2. Theorie van piekspanningen in platen

In dit hoofdstuk zal de theorie van de spanningen in platen kortbondig toegelicht worden, om zo een beter beeld te schetsen van de achtergrond en relevantie van deze thesis.

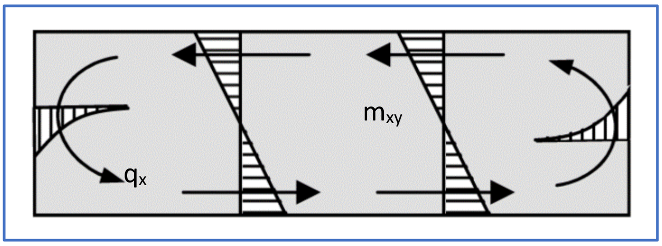
2.1 Achtergrond van de theorie

Reissner had een manier gevonden om spanningen in rechthoekige doorsnedes te berekenen, zonder de begrenzingen van zijn voorgangers (1945). Blaauwendraad (2010) en Hoogenboom (2022) hebben verder gewerkt aan deze theorie, om zo Reissner's vondsten met de tijd mee te laten gaan. Blaauwendraad heeft Reissner's theorie gebruikt, om zo de spanningen in de randen van platen af te leiden. Hoogenboom heeft vervolgens de formule omgeschreven naar formule 1.



Figuur 2 - wringend moment in een plaat m_{xy} (Blaauwendraad, 2010)

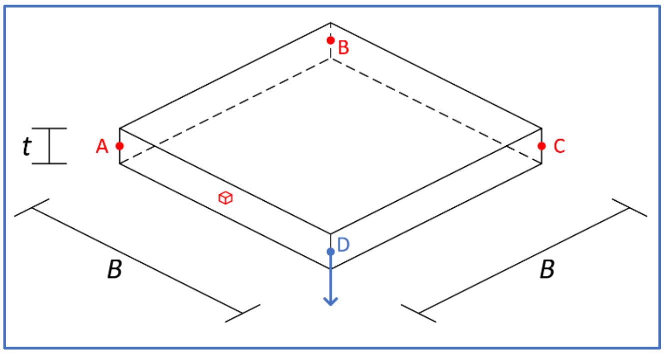
De variabele m_{xy} is dus het wringend moment in de plaat, zoals in Figuur 2 en in Figuur 3 te zien is. Volgens Reissner moet er een rechthoekige doorsnede (in dit geval een dunne plaat) op drie hoekpunten opgelegd worden, met daarbij een puntlast op de niet-opgelegde hoek van de plaat. Dit is te zien in Figuur 4. De plaat zal dus opgelegd worden in de punten A, B en C, zodat er in totaal 6 vrijheidsgraden verhinderd zijn. De spanning zal vervolgens bij de rode kubus afgelezen worden, in het midden van AD en op $t = \frac{1}{2}t$.



Figuur 3 - doorsnede van een plaat met torsiemomenten (Blaauwendraad, 2010)

Deze puntlast bevindt zich echter niet in formule 1, wat betekent dat deze omgeschreven moet worden. Via het totale moment in de doorsnede kan er een formule opgesteld worden. In Figuur 3 is te zien dat er twee krachten bijdragen aan dit moment; namelijk m_{xy} en q_x. Aangezien het wringend moment m_{xy} over de breedte constant is, is het gebruik van een integraal niet nodig. De volgende formule ontstaat:

$$M_{tot} = m_{xy} \cdot B + q_x \cdot B \tag{2}$$



Figuur 4 - schematische opstelling van de plaat

Hierbij is B de breedte van de plaat, zo ook te zien in Figuur 4. Uit Figuur 3 kan, mede visueel, opgemaakt worden, dat $q_x = m_{xy}$. Vervolgens kan formule 2 omgeschreven worden naar:

$$M_{tot} = 2 \cdot m_{xy} \cdot B \tag{3}$$

De basisformule van het opstellen van een moment is vrij simpel, namelijk kracht maal arm. Aangezien de kracht op een uiterst hoekpunt aangrijpt en het moment in het midden van de plaat bekend moet zijn, is de volgende formule van toepassing:

$$M_{tot} = F \cdot B$$
$$\frac{1}{2}F = m_{xy} \tag{4}$$

Formule 4 laat zien dat het wringend moment simpelweg de helft van de aangrijpende kracht F is. Wanneer dit ingevuld wordt in formule 1, wordt formule 5 verkregen:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{F/2}{t^2} \tag{5}$$

Waar:

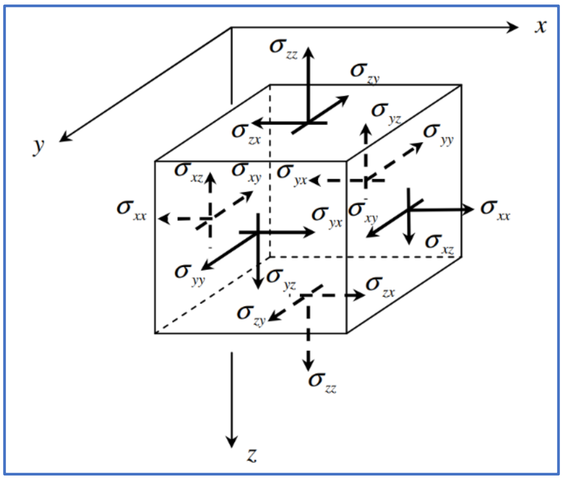
- σ [N/mm^2] = spanning in de zijkant een plaat op $t/2$;
- F [N] = puntlast op de niet opgelegde hoek;
- t [mm] = dikte van de plaat;
- $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ [-] = coëfficiënt van Reissner.

Met formule 5 is nu duidelijk hoe een spanning in de zijkant van een plaat berekend kan worden. Formule 5 is niet zo zeer interessant voor constructeurs, aangezien dit een specifiek geval is, speciaal gemaakt om mee te modelleren. Constructeurs zullen vaak met V werken, ofwel de geconcentreerde dwarskracht in kilonewton. V vervangt dan m_{xy} en dan zal de formule er als volgt uitzien:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{V}{t^2} \tag{6}$$

2.2 Relevante spanningen

Nu er een spanning berekend kan worden via een formule, is het handig om te weten welke spanning er precies berekend wordt. In Figuur 5 is een elementaire kubus weergeven met de standaard spanningen erop met daarbij de positieve richtingen. Met de voorgaande informatie is er af te leiden dat de te zoeken spanning $\boldsymbol{\sigma_{xz}}$ moet zijn, op de rechterzijde van de kubus in Figuur 5 dus.



Figuur 5 - spanningen op een elementaire kubus (Hartsuijker & Welleman, 2018)

2.3 Eerdere vondsten en resultaten

In het verleden zijn vergelijkbare onderzoeken uitgevoerd. De schrijvers hiervan kwamen allen op andere waarden uit. Ter referentie: Reissner's coëfficiënt was $\frac{3}{2}\sqrt{10} \approx 4{,}74$. De andere coëfficiënten zijn:

- 4,6 (Li, 2012)
- 4,48 (Zwennis, 2013)
- 4,396 (Kleijnen, 2022)

Er kan direct geconstateerd worden, dat alle drie de waarden kleiner zijn dan Reissner's originele coëfficiënt. Dat betekent dat constructies die berekend zijn met deze coëfficiënt veilig ontworpen zijn. Wanneer alle coëfficiënten groter zouden zijn, dan zou dit niet met zekerheid vastgesteld

kunnen worden; dit zou betekenen dat er, naar alle waarschijnlijkheid, met een te kleine coëfficiënt gerekend is, wat tot onveilige constructies kan leiden.
Een volgende constatering is dat alle coëfficiënten kleiner en preciezer worden ten opzichte van elkaar, naarmate de jaren verstrijken. Dit is een direct gevolg van het gebruik van een sterkere computer. Op deze computers kunnen modellen met meer elementen makkelijker en sneller gemodelleerd worden en alle berekeningen zijn doorgaans sneller.

3. Modelleren

Het modelleren zelf zal in het elementenprogramma Abaqus gebeuren. Abaqus gebruikt de zogenaamde eindige elementen methode om de ingevoerde modellen door te rekenen. Deze methode zal kort toegelicht worden, waarna de verschillende modellen die gebruikt worden beschreven worden.

3.1 Eindige elementen methode

De eindige elementen methode (of EEM) is een techniek die vaak gebruikt wordt om verschillende soorten constructies (of delen daarvan) door te rekenen op bijvoorbeeld, maar niet beperkt tot, verplaatsingen, spanningen en doorbuigingen. De term 'eindig' is voortgekomen uit het feit dat een model in meerdere telbare stukjes verdeeld wordt: de elementen (Zienkiewicz, Taylor & Zhu, 1967). Deze elementen, vaak klein in grootte, kunnen zeer goed gedefinieerd worden, met behulp van de elasticiteitsmodulus, de Poisson factor en de dichtheid. Dit is de discrete methode. De andere methode is de continue methode, waar een model in oneindig kleine stukjes onderverdeeld wordt en waar berekeningen met behulp van calculus opgelost kunnen worden. Het voordeel hiervan is, dat er altijd één oplossing is en dat deze exact is. Wanneer er dus een model gedefinieerd wordt met elke keer dezelfde randvoorwaarden, dan zouden alle modellen hetzelfde antwoord moeten krijgen. De discrete methode benadert dus de exacte oplossing, maar zal deze nooit bereiken.

Echter, hoe meer elementen er gebruikt worden, hoe beter de oplossing benaderd wordt. De EEM wordt gebruikt om onder andere het calculus gedeelte te vermijden, maar vooral omdat met genoeg elementen de exacte oplossing goed genoeg geschat kan worden.

Het stappenplan van het verkrijgen en verwerken van resultaten is beschreven in Bijlage A: het gebruik van Abaqus en de verwerking van de resultaten.

3.2 De modellen

Om de hoofdvraag zo goed mogelijk te beantwoorden, zijn er meerdere modellen gemaakt. Deze verschillen ten opzichte van elkaar een beetje; de voorspelling is dat er door deze variatie in eigenschappen en afmetingen resultaten goed met elkaar vergeleken kunnen worden en elkaar kunnen aanvullen. Een trend in de resultaten is tevens makkelijker te vinden, wanneer er meer testen gedaan worden. In Bijlage B: voorbeelden van modellen kunnen een paar modellen gevonden worden die gemaakt zijn, met daarbij een mesh.

3.2.1 Eigenschappen en afmetingen

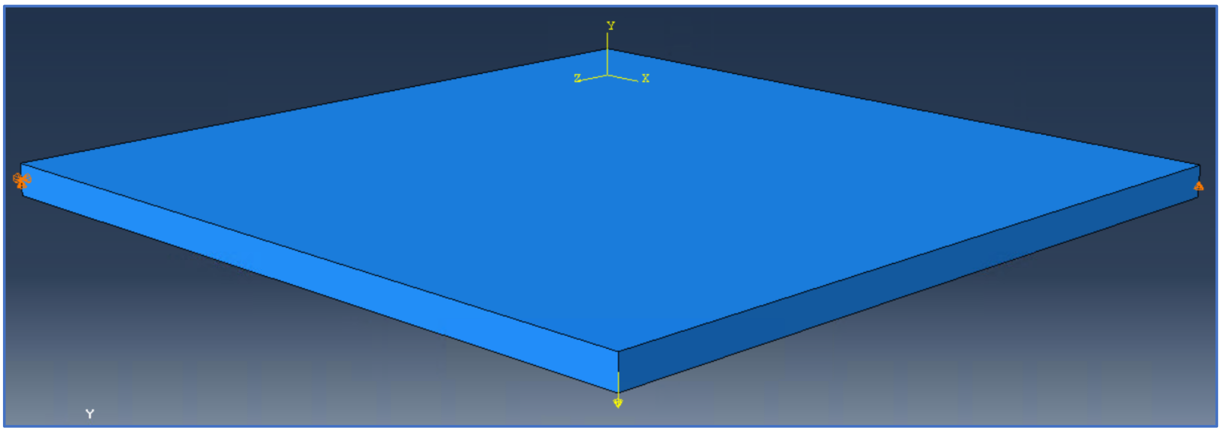
De modellen zullen gemaakt zijn van staal. Om staal te modelleren in Abaqus, vraagt het programma om drie hoofdeigenschappen. Abaqus houdt niet bij welke eenheden er gebruikt worden, dus alle eigenschappen en afmetingen zijn van tevoren omgerekend, zo ook de puntkracht die op de niet-opgelegde hoek van de plaat werkt. Deze zijn als volgt:

- Dichtheid [kg/m^3] = 7850;
- Elasticiteitsmodulus [kN/m^2] = 210000000;
- Poisson factor [-] = 0,3;
- Kracht [kN] = 50.

Er zal een plaat gemodelleerd worden met de volgende afmetingen, die vanaf nu de basisplaat genoemd wordt:

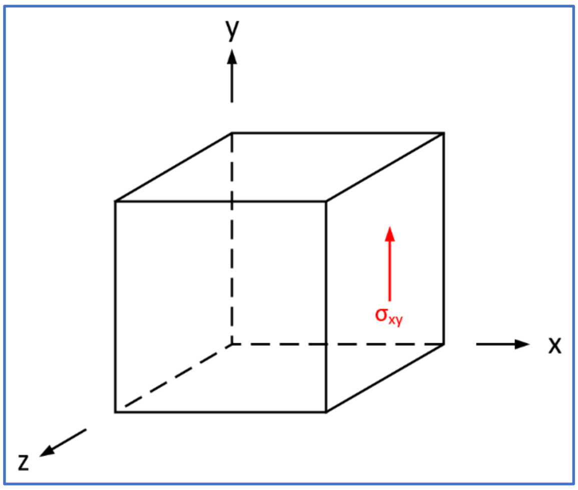
- Hoogte [m] = 0,1;
- Breedte [m] = 0,1;
- Dikte [m] = 0,004.

De plaat zal, zoals uitgelegd in het vorige hoofdstuk, op drie opleggingen steunen. In Figuur 6 is dit te zien in een screenshot uit het programma. Het assenstelsel is zodanig gedefinieerd, dat het nulpunt zich bevindt in de hoek die het verste van het aanzichtpunt afstaat: de hoek onder punt B. Abaqus werkt in de output met getallen in plaats van het gangbare X-Y-Z-assenstelsel. Dit kan echter eenvoudig ontcijferd worden: De x-as wordt as 1, de y-as as 2 en de z-as as 3.



Figuur 6 - screenshot uit Abaqus van de opstelling van de plaat

Er kan opgemerkt worden dat het assenstelsel niet overeenkomt met het assenstelsel van het elementaire kubusje van Figuur 5. Dat betekent dat niet de spanning $\boldsymbol{\sigma_{xz}}$ meer gezocht wordt. Het assenstelsel zal aangepast moeten worden aan die van Figuur 6. In Figuur 7 is het nieuwe assenstelsel voor de elementen weergeven. Alle niet-relevante spanningen zijn weggelaten ter verduidelijking. De spanning die nu gezocht wordt is spanning $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$, of zoals het in Abaqus weergegeven wordt; spanning $\boldsymbol{\sigma_{12}}$.



Figuur 7 - nieuwe assenstelsel elementen

Door het nieuwe assenstelsel zal de kracht F negatief in het programma Abaqus gezet moeten worden. Dat betekent ook dat deze negatief in formule 5 ingevuld moet worden. De uiteindelijke spanning die berekend wordt zal dus ook negatief zijn, aangezien er geen andere variabelen in de formule negatief kunnen zijn om een positief antwoord te krijgen.

3.2.2 Mesh en aanpak

Om modellen compleet te maken, moet er een zogenaamde ‘mesh’ aangemaakt worden. Een mesh is een verzamelnaam voor alle elementen in een model bij elkaar. De vuistregel is, dat hoe fijner de mesh is, hoe meer elementen er zich in de plaat bevinden, hoe nauwkeuriger het resultaat, maar ook hoe langer de simulatie duurt. Er zal dus een afweging gemaakt moeten worden tussen het behalen van een nauwkeurig resultaat en de rekentijd.

Er zijn drie verschillende hoofdgroepen gemaakt, die allen zullen bestaan uit meerdere testen. Deze zijn als volgt:

1. De eerste paar modellen zullen niet verschillen in afmetingen en eigenschappen. Het aantal elementen over de dikte $\boldsymbol{n}$ zal wel variëren en daarbij ook gelijk het totaal aantal elementen $\boldsymbol{N}$.

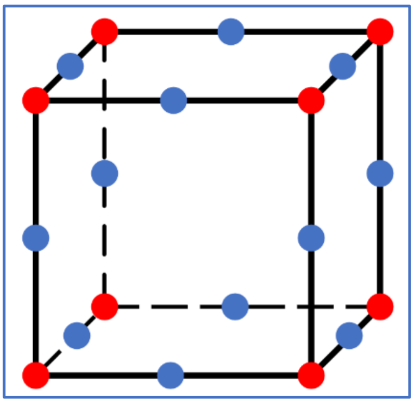
De voorspelling is, dat het resultaat nauwkeuriger wordt, naarmate $\boldsymbol{n}$ groter wordt. Met deze informatie zal het resultaat met genoeg testen, convergeren naar één spanning: de exacte oplossing.

2. Vervolgens zullen de drie hoofdeigenschappen van de plaat aangepast worden: de dichtheid, elasticiteitsmodulus en de Poisson factor.

Deze drie eigenschappen kunnen invloed hebben op het resultaat. Via deze manier kan dit argument bewezen, of juist ontkracht worden. Er zal elke keer maar één hoofdeigenschap veranderen, waar de rest van de eigenschappen, afmetingen en aantal elementen hetzelfde blijven.

3. Als laatste zullen de afmetingen van de plaat veranderen. Dat betreft niet alleen de dikte t, maar ook de breedte B.

De verschillende modellen zullen besproken worden aan de hand van tekst en een tabel. De elementen van de modellen zullen bestaan uit 'nodes', ofwel knopen. Het veranderen van het aantal knopen in een element, $\boldsymbol{k}$, kan ervoor zorgen dat de nauwkeurigheid verhoogd wordt. In deze thesis zullen twee soorten elemententypes voorkomen: degene met 8 knopen, en degene met 20 knopen. In Figuur 8 is dit verschil te zien. Bij het 8-knoopse model worden alleen de hoekpunten van een kubusvormig element gebruikt voor het doorrekenen; de rode knopen. Bij het 20-knoopse model wordt ook het midden van elke rand meegenomen, dit zijn de rode én de blauwe knopen. De meeste testen worden twee keer uitgevoerd, één keer met 8 knopen per element en één keer met 20 knopen per element, om zo een duidelijker beeld te schetsen van de nauwkeurigheid van een model en de invloed van $\boldsymbol{k}$ hierop. Het totaal aantal knopen in een model, $\boldsymbol{K}$, zal natuurlijkerwijs groter zijn bij $\boldsymbol{k} = 20$ dan bij $\boldsymbol{k} = 8$. De elementen zullen kubusvormig zijn.



Figuur 8 - knopen in een kubusvormig element

3.2.3 Modellen volgens aanpak 1

Bij aanpak 1 zal het aantal elementen $\boldsymbol{n}$ vermeerderen, naarmate er meer modellen gemaakt worden. Hoe meer elementen er over de dikte gemodelleerd worden, hoe hoger de nauwkeurigheid van het eindantwoord.
In de volgende tabel zijn de modellen weergegeven. De modellen zijn gebaseerd de al gedefinieerde basisplaat. De modelnamen zijn als volgt opgesteld, om deze later beter te herkennen:

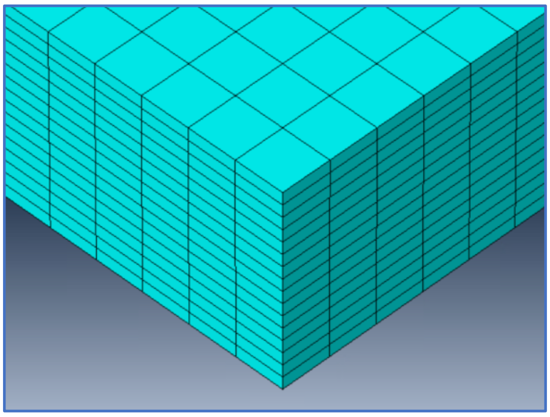
"A [aanpak nummer] – [elementen over dikte, $\boldsymbol{n}$] – [aantal knopen per element, $\boldsymbol{k}$]."

Tabel 1 op de volgende pagina geeft de modellen weer.

Tabel 1 - modellen volgens aanpak 1

Modelnaam	n	N	k	K
A1 – 2 – 8	2	5.000	8	7.803
A1 – 2 – 20	2	5.000	20	28.305
A1 – 4 – 8	4	40.000	8	51.005
A1 – 4 – 20	4	40.000	20	192.809
A1 – 6 – 8	6	122.694	8	145.152
A1 – 6 – 20	6	122.694	20	557.856
A1 – 8 – 8	8	320.000	8	363.609
A1 – 8 – 20	8	320.000	20	1.410.417
A1 – 10 – 8	10	625.000	8	693.011
A1 – 10 – 20	10	625.000	20	2.703.521
A1 – 12 – 8	12	1.330.668	8	1.450.228
A1 – 14 – 8	14	1.916.600	8	2.064.615
A1 – 16 – 8	16	2.560.000	8	2.733.617

De 8-knoopse modellen vanaf A1 – 16 – 8 en de 20-knoopse modellen vanaf A1 – 10 – 20 zijn helaas te groot om te simuleren, voor de computer met een beschikbaar RAM geheugen van 5,3 gigabyte. Om deze testen alsnog uit te voeren, is ervoor gekozen om de elementgrootte in de breedte aan te passen. Dit betekent dat het aantal elementen over de dikte nog steeds met dezelfde stapgrootte zal stijgen, maar dat de elementen zelf wat 'platter' zullen zijn. Dit is goed zichtbaar in Figuur 9 en in Figuur van B1 – Modellen met mesh. De aangepaste modellen staan in Tabel 2.



Figuur 9 - platte elementen in A1 – 16 – 8

Tabel 2 - modellen volgens aanpak 1, platte elementen

Modelnaam	n	N	k	K
A1 – 16 – 8	16	160.000	8	173.417
A1 – 18 – 8	18	180.000	8	193.819
A1 – 20 – 8	20	200.000	8	214.221
A1 – 10 – 20	10	100.000	20	436.421
A1 – 12 – 20	12	120.000	20	517.625
A1 – 14 – 20	14	140.000	20	598.829
A1 – 16 – 20	16	160.000	20	680.033
A1 – 18 – 20	18	180.000	20	761.237
A1 – 20 – 20	20	200.000	20	842.441

3.2.4 Modellen volgens aanpak 2

Om te checken of de dichtheid (ρ, in [kg/m^3]), de Poisson factor (ν, geen eenheid) en/of de elasticiteitsmodulus (E, in [kN/m^2]) effect hebben op het resultaat, zullen oude modellen van aanpak 1 hergebruikt worden, met één voorgenoemde eigenschap die zal verschillen. Op deze manier zal er direct zichtbaar zijn welke eigenschap welke invloed heeft. In deze paragraaf worden de 8-knoopse modellen gebruikt; dit om de rekentijd zo kort mogelijk te houden.

De modelnamen zijn als volgt opgesteld:

"A [aanpak nummer] – [elementen over dikte, $\boldsymbol{n}$] – [veranderde eigenschap #]"

De puur stalen plaat heeft een dichtheid van 7.850 [kN/m^3], een elasticiteitsmodulus van 210.000.000 [kN/m^2] en een Poisson factor van 0,3. De materialen waarmee de plaat vergeleken wordt zijn zodanig gekozen, dat deze eigenschappen krijgen die groter én kleiner zijn dan de voorgenoemde eigenschappen van een stalen plaat. De modellen staan vermeld in Tabel 3.

Tabel 3 - modellen volgens aanpak 2

Modelnaam	Veranderde eigenschap	Nieuwe waarde	Materiaal
A2 – 10 – $\rho 1$	Dichtheid	2.775 [kg/m^3]	Aluminium
A2 – 10 – $\rho 2$	Dichtheid	4.540 [kg/m^3]	Titanium
A2 – 10 – $\rho 3$	Dichtheid	8.900 [kg/m^3]	Koper
A2 – 10 – $E1$	Elasticiteitsmodulus	69.000.000 [kN/m^2]	Aluminium
A2 – 10 – $E2$	Elasticiteitsmodulus	124.000.000 [kN/m^2]	Koper
A2 – 10 – $E3$	Elasticiteitsmodulus	400.000.000 [kN/m^2]	Wolfraam
A2 – 10 – $\nu 1$	Poisson factor	0 [-]	Kurk / gescheurd beton
A2 – 10 – $\nu 2$	Poisson factor	0,495 [-]	Rubber

3.2.5 Modellen volgens aanpak 3

De modellen in aanpak 3 zullen verschillen van afmetingen. Er zal gekeken worden naar model A1 – 10 – 8; een 8-knoops model met 10 elementen over de dikte. In deze aanpak verandert de breedte van de plaat en daarbij ook de lengte. De afmetingen van de basisplaat waren:
B x B x t = 0,100 x 0,100 x 0,004 [m^3].

Daarnaast zal model A1 – 10 – 8 veranderen in de dikte. Omdat aanpak 3 uitgevoerd wordt na aanpak 1, kan er met behulp van de resultaten van aanpak 1 al een voorspelling gemaakt worden op de resultaten uit aanpak 3. De modellen staan beschreven in Tabel 4; waar de eerste vier modellen veranderen in de breedte en de laatste drie variëren in de dikte.
De modelnamen zijn als volgt opgesteld:

"A [aanpak nummer] – [elementen over dikte, $\boldsymbol{n}$] – [veranderde afmeting]"

Tabel 4 - modellen volgens aanpak 3

Modelnaam	Afmetingen [m^3]
A3 – 10 – 50	0,050 x 0,050 x 0,004
A3 – 10 – 75	0,075 x 0,075 x 0,004
A3 – 10 – 125	0,125 x 0,125 x 0,004
A3 – 10 – 150	0,150 x 0,150 x 0,004
A3 – 10 – 2mm	0,100 x 0,100 x 0,002
A3 – 10 – 6mm	0,100 x 0,100 x 0,006
A3 – 10 – 8mm	0,100 x 0,100 x 0,008

4. Resultaten

De modellen zijn in Abaqus doorgerekend, waarna de resultaten ervan in Excel en Python zijn verwerkt. Denk hierbij aan het filteren van knopen, die niet tot de zijkant van de plaat behoren.

4.1 Resultaten modellen aanpak 1

De modellen van deze aanpak zijn opnieuw gesorteerd, dit keer op het aantal knopen per element. Op deze manier is de trend van het gebruik van meer elementen in de dikte beter te herkennen. Aangezien de dikte en de kracht (resp. $t = 0.004\ [m]$ en $F = -50\ [kN]$) hetzelfde blijven, zal de spanning volgens Reissner's formule ook hetzelfde blijven:

$$\sigma = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{-50/2}{0.004^2} = -7.411.588\ [kN/m^2\ ]$$

Deze spanning zal vervolgens vergeleken worden met de gevonden spanning uit Abaqus. Wanneer deze twee spanningen door elkaar gedeeld worden, zal er een ratio ontstaan, die vanaf nu ratio AR zal heten. Deze ratio zal inzicht geven in hoeverre de modellen een bepaalde 'vaste' ratio benaderen. In Tabel 5 zijn deze resultaten weergeven.

Tabel 5 - Resultaten modellen aanpak 1

Modelnaam	Schuifspanning [kN/m^2]	Ratio AR [-]
A1 – 2 – 8	-3.171.260	2,337112
A1 – 4 – 8	-5.266.820	1,407223
A1 – 6 – 8	-5.776.510	1,283056
A1 – 8 – 8	-6.148.760	1,205379
A1 – 10 – 8	-6.345.210	1,168060
A1 – 12 – 8	-6.550.180	1,131509
A1 – 14 – 8	-6.613.800	1,120625
A1 – 16 – 8	**-5.295.820**	**1,399517**
A1 – 18 – 8	**-5.286.580**	**1,401963**
A1 – 20 – 8	**-5.275.900**	**1,404801**
A1 – 2 – 20	-3.203.520	2,313576
A1 – 4 – 20	-7.283.030	1,017652
A1 – 6 – 20	-7.231.420	1,024915
A1 – 8 – 20	-7.232.450	1,024769
A1 – 10 – 20	**-7.079.040**	**1,046876**
A1 – 12 – 20	**-7.068.370**	**1,048557**
A1 – 14 – 20	**-7.061.970**	**1,049507**
A1 – 16 – 20	**-7.057.840**	**1,050121**
A1 – 18 – 20	**-7.055.010**	**1,050543**
A1 – 20 – 20	**-7.052.990**	**1,050843**

Uit deze tabel wordt duidelijk, dat er resultaten zijn die niet thuishoren bij andere resultaten. Deze spanningen zijn **dikgedrukt** weergeven. Dit is geen toeval, aangezien er voor deze modellen een andere elementvorm is gebruikt, namelijk de platte elementen.

4.2 Resultaten volgens aanpak 2

De modellen van aanpak 2 zijn gesimuleerd in Abaqus, met de resultaten in Tabel 6. De spanning waarmee de modellen vergeleken worden, is van model A1 – 10 – 8: die is -6.345.210 [kN/m^2].

Tabel 6 - Resultaten modellen aanpak 2

Modelnaam	Spanning Abaqus [kN/m^2]	Absoluut verschil [kN/m^2]
A2 – 10 – $\rho 1$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $\rho 2$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $\rho 3$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $E1$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $E2$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $E3$	-6.345.210	0
A2 – 10 – $\nu 1$	-6.383.990	38.780
A2 – 10 – $\nu 2$	-6.325.560	19.650

Uit deze resultaten is op te maken dat de dichtheid en de elasticiteitsmodulus geen invloed hebben op de spanning. De Poisson factor heeft echter wel invloed. Om deze invloed beter te begrijpen, zullen er meerdere platen gemodelleerd worden, met elk een verschillende Poisson factor. Deze zullen met stapjes van 0.05 stijgen, vanaf een factor 0.00 tot en met 0.495, waar zojuist mee gesimuleerd is. Tabel 7 geeft de nieuwe modellen weer, met direct daarachter de spanningen die in Abaqus gevonden zijn.

Tabel 7 - Resultaten experiment Poisson factor

Modelnaam	Poisson factor [-]	Spanning [kN/m^2]
A2 – 10 – $\nu 1$	0,00	-6.383.990
A2 – 10 – 0,05	0,05	-6.376.620
A2 – 10 – 0,10	0,10	-6.369.650
A2 – 10 – 0,15	0,15	-6.363.060
A2 – 10 – 0,20	0,20	-6.356.800
A2 – 10 – 0,25	0,25	-6.350.860
A1 – 10 – 8	0,30	-6.345.210
A2 – 10 – 0,35	0,35	-6.339.820
A2 – 10 – 0,40	0,40	-6.334.690
A2 – 10 – 0,45	0,45	-6.329.790
A2 – 10 – $\nu 2$	0,495	-6.325.560

Deze tabel laat zien, dat de Poisson factor weldegelijk invloed heeft op de spanningen. Ter verduidelijking: de platen zijn gemodelleerd van kurk ($\nu = 0.0$) naar staal ($\nu = 0.3$) tot rubber ($\nu = 0.495$).

4.3 Resultaten modellen aanpak 3

Nu de resultaten van aanpak 1 bekend zijn, kunnen er enige voorspellingen gedaan worden over modellen van aanpak 3. Dit betreft de modellen die aangepast zijn in de dikte, aangezien de andere afmetingen niet gevonden kunnen worden in Reissner's formule. Deze nieuwe dikte zal ingevuld worden in de formule van Reissner, waarna deze uitkomst vermenigvuldigd zal worden met de ratio AR van model A1 – 10 – 8 uit Tabel 5. Daar komen de volgende waarden uit, afgerond naar het bovenste gehele getal:

Tabel 8 - verwachtingen modellen aanpak 3

Modelnaam	Verwachte spanning [kN/m^2]
A3 – 10 – 2mm	-25.380.848
A3 – 10 – 6mm	-2.820.094
A3 – 10 – 8mm	-1.586.303

Waar Tabel 8 de verwachtingen van aanpak 3 weergeeft, zal Tabel 9 de resultaten weergeven, met daarbij de verschillen met de verwachting.

Tabel 9 - resultaten aanpak 3, dikte variërend

Modelnaam	Spanning [kN/m^2]	Absoluut verschil met verwachting [kN/m^2]
A3 – 10 – 2mm	-17.077.000	8.303.848
A3 – 10 – 6mm	-2.994.930	174.836
A3 – 10 – 8mm	-1.306.800	546.097

Het verschil tussen de verwachtingen en de spanningen wordt aangepakt in het volgende hoofdstuk.

In Tabel 10 zijn de overige resultaten weergeven. De basisplaat is ook tussen deze resultaten neer gezet, zodat deze vergeleken kan worden met de andere resultaten.

Tabel 10 – resultaten aanpak 3, breedte variërend

Modelnaam	Afmetingen [m^3]	Elementen	Spanning [kN/m^2]
A3 – 10 – 50	0,050 x 0,050 x 0,004	156.250	-6.567.720
A3 – 10 – 75	0,075 x 0,075 x 0,004	349.690	-6.418.450
A1 – 10 – 8	0,100 x 0,100 x 0,004	625.000	-6.345.210
A3 – 10 – 125	0,125 x 0,125 x 0,004	979.690	-6.300.650
A3 – 10 – 150	0,150 x 0,150 x 0,004	1.406.250	-6.268.600

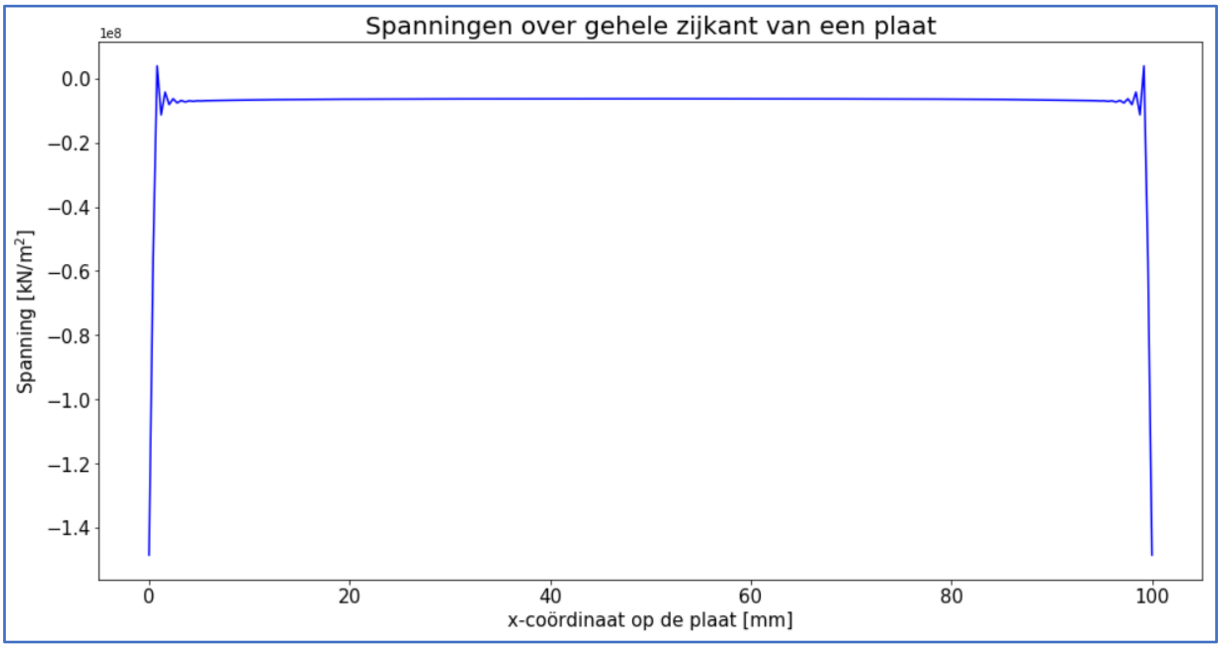
Er wordt direct duidelijk dat de breedte tóch invloed heeft op het resultaat, terwijl deze niet in Reissner's formule te vinden is.

5. Visualisatie en interpretatie

In dit hoofdstuk zal de interpretatie van de verkregen resultaten centraal staan. Dit zal gebeuren aan de hand van verschillende grafieken, waarin de observaties van weergegeven zullen worden.

5.1 Grafieken van de resultaten

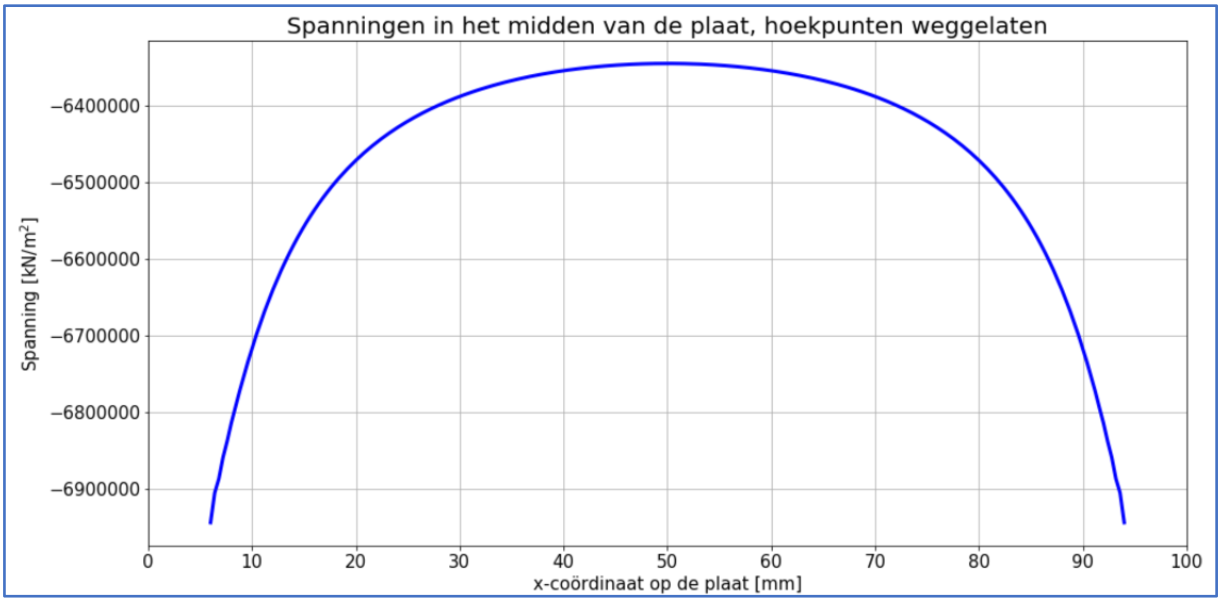
In Resultaten zijn enkel de spanningen in het midden van de rand van de plaat genoteerd. Echter is het ook interessant om te kijken naar de complete spanning in de rand van een plaat. Uit deze grafieken kan waardevolle informatie gehaald worden.
De grafiek is van het model A1 – 10 – 8; dit is dus een 8-knoops model, met 10 elementen over de dikte $t = 4\ [mm]$. De spanningen zijn in Figuur 10 weergeven. Op de x-as is de x-coördinaat van de plaat te vinden, met op de y-as de spanning in kN/m^2, maal 10^8.



Figuur 10 - spanningen over zijkant van een plaat

In Figuur 10 is er niet goed te zien wat er nou precies met de spanningen gebeurt in het midden. Dit komt doordat de spanningen bij de oplegging en het aangrijppunt van de kracht erg verschillen met de rest van de spanningen in de rand. De eerste en laatste paar spanningen zullen buiten de resultaten gehouden worden, om zo een betere grafiek te creëren, waarin de spanningen in het midden van de plaat beter zichtbaar zijn. Dit is ongeveer $5\ [mm]$ verwijderd van de uiterste hoekpunten van de plaat.

Figuur 11 laat zien dat er symmetrische spanningsboog ontstaat. Ook is er een extreme waarde te vinden, namelijk de top van de parabool. Deze top bevindt zich in het precieze midden van de rand van de plaat, op $x = 50\ [mm]$ en op $t = 2\ [mm]$. Hier zijn de spanningen van de hoekpunten het meest weggedempt en dit is dan ook direct de waarde die afgelezen wordt uit Abaqus. In Bijlage B2 – Doorbuiging en Von Mises spanningen, is deze spanningsboog ook goed te zien in de rand van de plaat, in de interface van Abaqus in Figuur B2.2. Daarnaast zijn ook de Von Mises spanningen in Figuur B2.1 te zien van dezelfde bijlage.

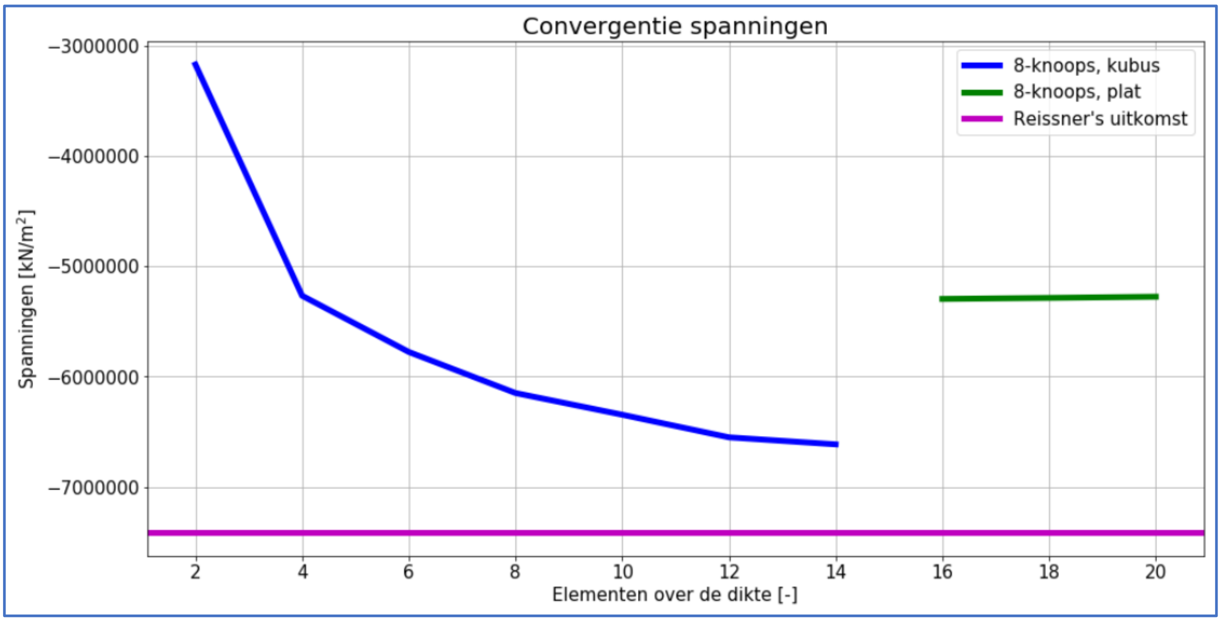


Figuur 11 - spanningsboog over de gehele rand van de plaat

5.2 Grafieken van de convergentie

5.2.1 8-knoopse modellen

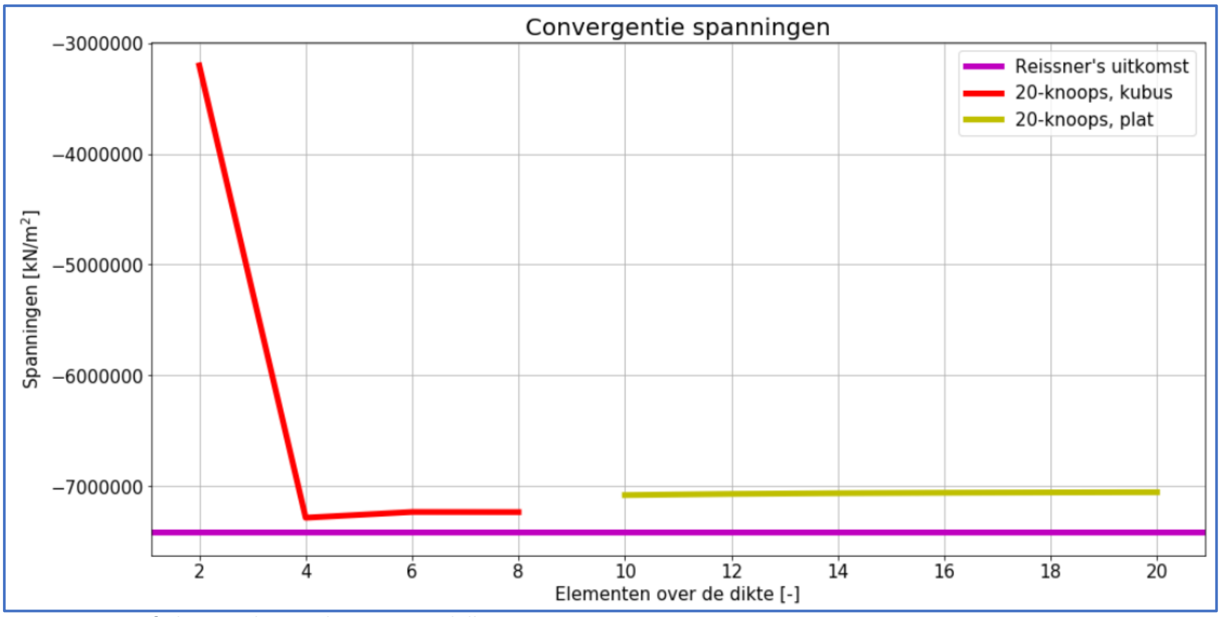
De resultaten uit Tabel 5 laten enige vorm van convergentie zien. Dit is visueel te zien in Figuur 12. Onderaan de figuur is een horizontale paarse lijn geplot, die de spanning aangeeft wanneer de variabelen in Reissner's formule zijn ingevuld: -7.411.588 [kN/m^2]. De kubusvormige elementen (blauw) benaderen deze oplossing, of in ieder geval een oplossing die dicht bij deze waarde ligt. De laatste drie testen zijn uitgevoerd met platte elementen en hier is op te merken, dat deze niet bij de rest van de resultaten horen. Aangezien er maar één exacte oplossing bestaat die met een continue methode uitgerekend kan worden, is bekend dat alle resultaten, ongeacht de elementvorm en grootte, dezelfde oplossing benaderen. Naar alle waarschijnlijkheid zijn er te weinig elementen over de dikte, om te zien dat de platte elementen ook de kubusvormige elementen benaderen.



Figuur 12 - grafiek aanpak 1, 8-knoopse modellen

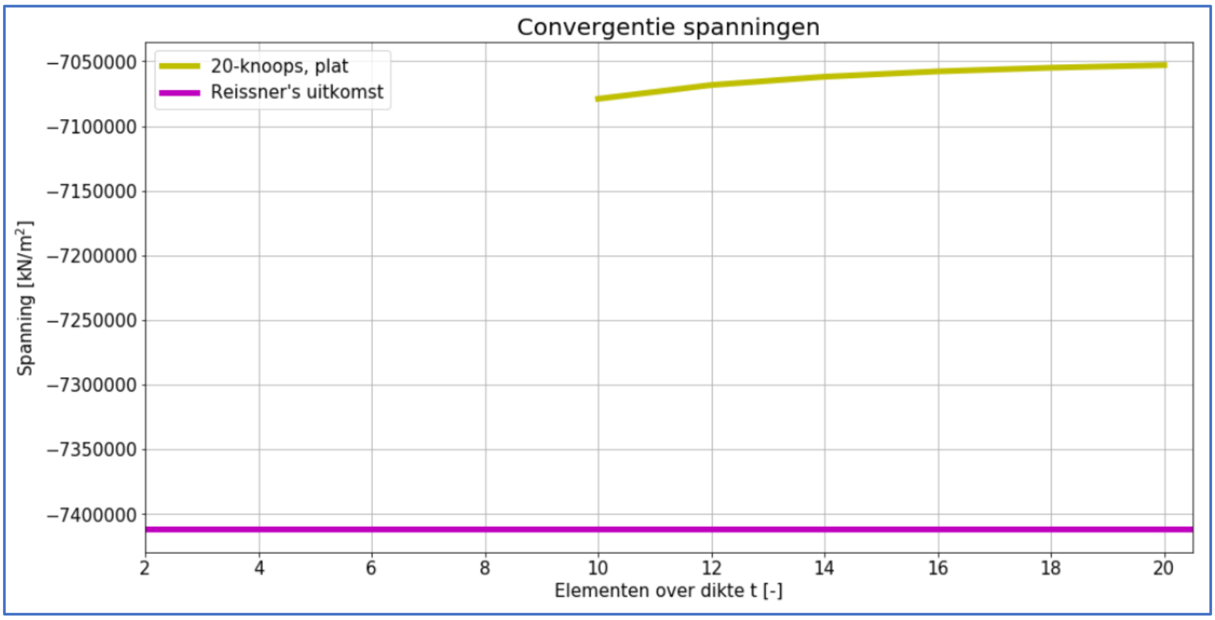
5.2.2 20-knoopse modellen

Eenzelfde conclusie kan niet direct getrokken worden voor de 20-knoopse elementen, wanneer er gekeken wordt naar Figuur 13. De kubusvormige elementen (rood) en de platte elementen (geel) lijken naar dezelfde waarde te convergeren, maar niet naar Reissner's oplossing (wederom in het paars).



Figuur 13 - grafiek aanpak 1, 20-knoopse modellen

Dit wordt bevestigd wanneer er ingezoomd wordt op alleen de platte elementen. Dit is in Figuur 14 weergeven. De spanningen lijken -7.050.000 [kN/m^2] te benaderen, echter zijn dit wel dezelfde platte elementen die gebruikt zijn bij de 8-knoopse elementen. Waar de kubusvormige elementen beide lijken naar de -7.000.000 [kN/m^2] te convergeren, is dit niet het geval bij de platte elementen. Deze twee resultaten liggen zo ver uit elkaar, dat er is besloten om deze spanningen niet mee te nemen in de conclusie. Wat er wél geconcludeerd kan worden, is dat de 20-knoopse elementen sneller convergeren naar een bepaalde waarde dan de 8-knoopse elementen, ongeacht de elementvorm. Dat betekent, dat het nauwkeurigste resultaat tot nu toe het laatste 20-knoopse resultaat is, die gebruikt maakt van kubusvormige elementen. Dat is bereikt met 8 elementen over de dikte en de numerieke waarde daarvan is -7.232.450 [kN/m^2].

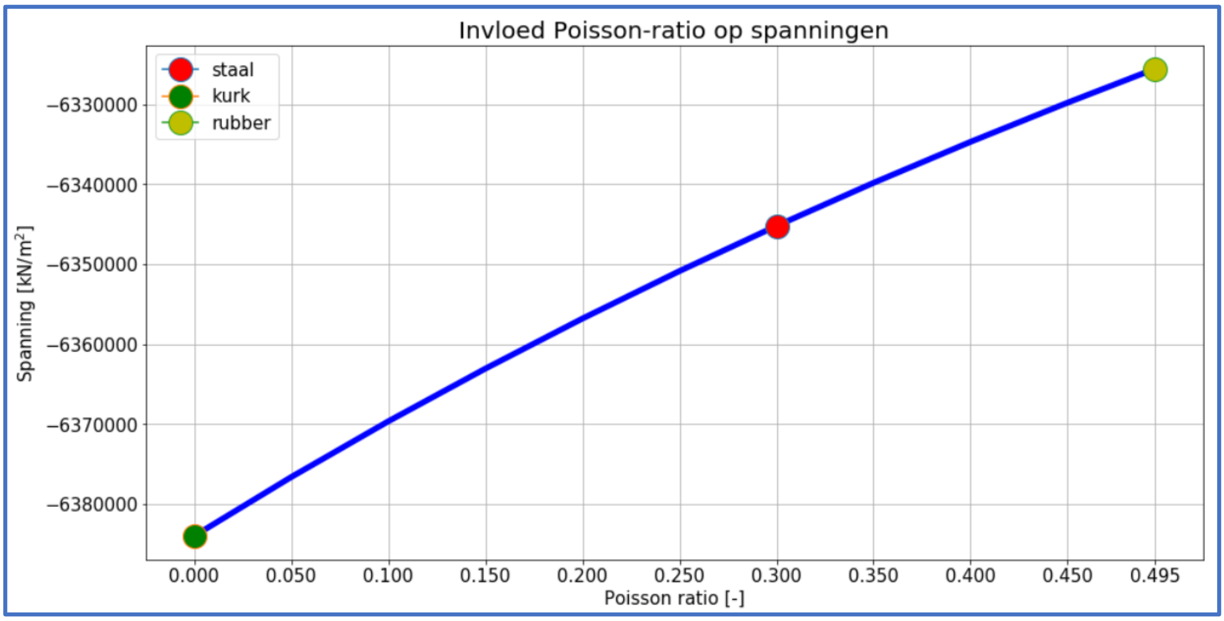


Figuur 14 - grafiek aanpak 1, 20-knoopse platte modellen

5.3 Interpretatie resultaten aanpakken 2 en 3

5.3.1 Interpretatie aanpak 2

De resultaten uit aanpak 2 zijn niet geheel verrassend; de elasticiteitsmodulus en de dichtheid van het materiaal hebben zoals verwacht geen invloed op het materiaal. De Poisson factor heeft echter wel invloed, hoewel deze niet in formule 5 voorkomt. Om dit visueel te begrijpen, is er ook hiervoor een grafiek gemaakt. Deze staat in Figuur 15. Te zien is dat naarmate de Poisson factor stijgt, hoe lager de spanningen komen te liggen, ofwel; hoe brosser het materiaal, hoe hoger de absolute spanningen in de rand van een plaat. Wat er ook uit Figuur 15 opgemaakt kan worden, is dat de Poisson factor invloed heeft vanaf het derde significante cijfer. Dit is te zien op de y-as van de grafiek.

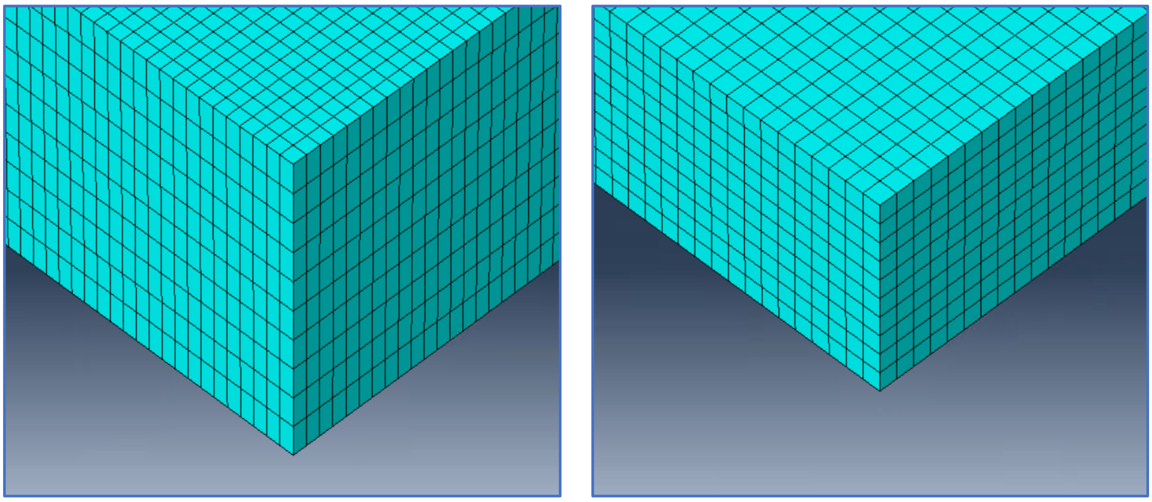


Figuur 15 - grafiek invloed Poisson factor

5.3.2 Interpretatie aanpak 3

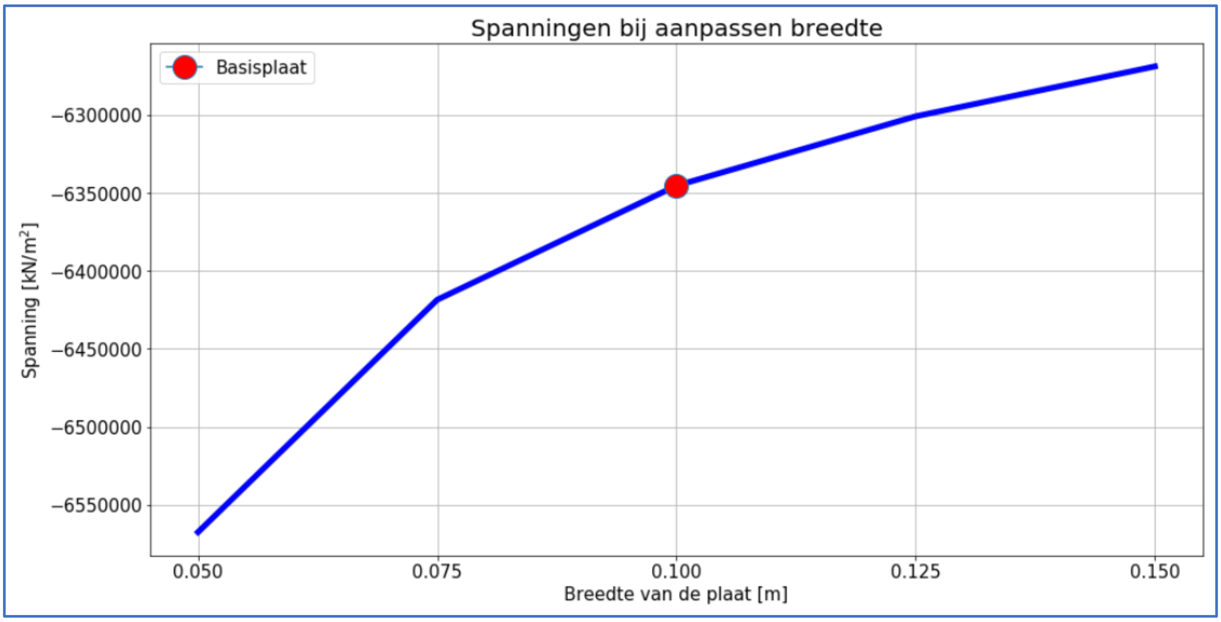
De resultaten uit Tabel 9 komen niet overeen met de voorspellingen uit Tabel 8. Naar alle waarschijnlijkheid heeft dit te maken met de grootte en vorm van de elementen. Aangezien het aantal elementen over de dikte hetzelfde blijft, maar de dikte varieert, zullen de elementen wél variëren in grootte en vorm. Het aantal elementen zal dus ook hetzelfde blijven met $\boldsymbol{N} = 625.000$. Dit is goed te zien in Figuur 16, waar het lijkt alsof de elementen van de $8\ [mm]$ plaat uitgerekt zijn ten opzichte van die van de $4\ [mm]$ plaat.

Wanneer ervoor gezorgd wordt dat de elementen even groot blijven, moeten er óf meer elementen over de dikte gemodelleerd worden, óf er moeten weer afmetingen aangepast worden. Het nieuwe model zal 1.250.000 elementen bevatten. Wanneer dit model doorgerekend wordt, komt er een nieuwe waarde uit van -1.751.620 [kN/m^2]. Dit ligt nu nog maar 165.317 [kN/m^2] van de geschatte waarde van -1.586.303 [kN/m^2] af; een factor 3,3x dichterbij dan de eerste schatting. Dit duidt aan dat de elementvorm een grote invloed heeft op het resultaat, een conclusie die ook deels getrokken is na het gebruik van de platte elementen in aanpak 1.



Figuur 16 - 10 elementen over t = 8 [mm] (links) en 10 elementen over t = 4 [mm] (rechts)

Naast de elementvorm en -grootte is ook de breedte/dikte verhouding van belang bij het modelleren. De resultaten van Tabel 10 zijn geplot in Figuur 17. Aangezien alle platen even dik zijn met $t = 4\ [mm]$, betekent dit dat de breedte/dikte verhouding verandert en dus invloed heeft op het resultaat. De laatste breedte/dikte verhouding is $\frac{150}{4} = 37{,}5 : 1$. In de grafiek is ook te zien dat de spanningen hier al beginnen uit te dempen, wat betekent dat er bij een bepaalde breedte/dikte verhouding de spanningen nagenoeg gelijk blijven.



Figuur 17 - grafiek invloed breedte op spanningen

5.4 Nauwkeurigheid coëfficiënt

Met het nauwkeurigste resultaat van de 20-knoopse kubusvormige elementen is het verschil met Reissner's coëfficiënt ongeveer 2,48 %, zie ook daarvoor de volgende vergelijking:

$$\frac{-7.411.588}{-7.232.450} = 1{,}0247686\ \ldots \tag{8}$$

De andere percentages liggen ook in de buurt van de 2,5 %, zie daarvoor Tabel 5. Dat betekent dat de coëfficiënt op 1 decimaal nauwkeurig berekend kan worden:

$$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{10}}{1{,}0247686\ \ldots} \approx 4{,}6\ \ldots \tag{9}$$

Dit getal kan nu gebruikt worden als vervanger van de coëfficiënt van Reissner. De derde decimaal nauwkeurigheid hangt namelijk af van de Poisson factor. De computer die gebruikt is kan nog niet genoeg nauwkeurige testen uitvoeren om een extra decimaal nauwkeurigheid te berekenen. Dan rest alleen nog maar de laatste onderzoeksvraag, betreffende wanneer er wél een extra decimaal nauwkeurigheid berekend kan worden.

5.5 Computerkracht benodigd

Aangezien de exacte oplossing niet bekend is en de simulaties, mede door het geringe aantal elementen over de dikte, nog niet te herleiden zijn tot een bepaalde benadering, kan er dus geen formule opgesteld worden voor een convergentie naar het eindantwoord. Echter kan er wel een formule voor de fout opgesteld worden.

Aangezien een fout niet per se berekend hoeft te worden ten opzichte van het exacte resultaat, is dit een excellente manier om de nauwkeurigheid met één decimaal te vergroten. Het resultaat wat benaderd zal worden, is de -7.232.450 [kN/m^2], van de 20-knoopse kubusvormige elementen. Dit zal gebeuren met behulp van Maple.
De convergerende formule zal er als volgt uitzien:

$$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \tag{10}$$

Waar:

- y [kN/m^2] = spanning in het midden van de rand van een plaat;
- x [-] = aantal elementen over de dikte;
- a, b, c [-] = coëfficiënten om de formule te fitten.

Coëfficiënt a is hier de te benaderen spanning. Coëfficiënten b en c kunnen berekend worden in Maple, wanneer er twee andere punten bekend zijn waar de grafiek doorheen moet gaan. De twee punten die hiervoor genomen zijn, zijn de laatste twee resultaten die verkregen zijn met de 8-knoopse kubusvormige elementen. Deze kwamen wederom van aanpak 1 en zijn:

- x_1 [-] = 12
- y_1 [kN/m^2] = -6.550.180
- x_2 [-] = 14
- y_2 [kN/m^2] = -6.613.800

```
> restart:
> y := y3 + a/x + b/(x^2):
> x := 12: eq1 := y = -6550180.:
> x := 14: eq2 := y = -6613800.:
> x := 'x':
> oplossing := solve({eq1, eq2}, {a, b}) : assign(oplossing);
> y3 := -7232450:
> y;
```

$$-7232450 + \frac{1.1504260 \times 10^{7}}{x} - \frac{3.9804240 \times 10^{7}}{x^{2}}$$

Figuur 18 - Maple formules, deel 1

Wanneer deze informatie in Maple ingevoerd wordt en het programma dit oplost, wordt de blauwe formule uit Figuur 18 verkregen.
Deze formule is vervolgens geplot, zoals te zien is in Figuur 19 (volgende pagina). De rode lijn onderaan is ook de waarde voor coëfficiënt a, die de grafiek benadert. Bovenin is de x-as te zien, het aantal elementen over de dikte, en deze is uitgebreid to $x = 120$. Vervolgens is formule 11 ingevuld in Maple en heeft het de volgende antwoorden gekregen:

$$solve(y - y3 = (y2 - y3)/10, x);$$
$$3{,}526846295; \mathbf{182{,}4306418} \tag{11}$$

Deze formule rekent dus uit, wanneer de afstand tussen de grafiek en de benaderde waarde tien keer zo klein is, ofwel wanneer deze met één significant cijfer nauwkeuriger is. De dikgedrukte waarde is die van x en dat betekent dat er ongeveer 182 elementen over de dikte benodigd zijn om dit te bereiken. Met deze afgeronde waarde is berekend hoeveel elementen er in totaal in het model zijn voor de basisplaat en hoeveel knopen er ongeveer in het model zitten. In Figuur 20 (volgende pagina) is dit berekend.

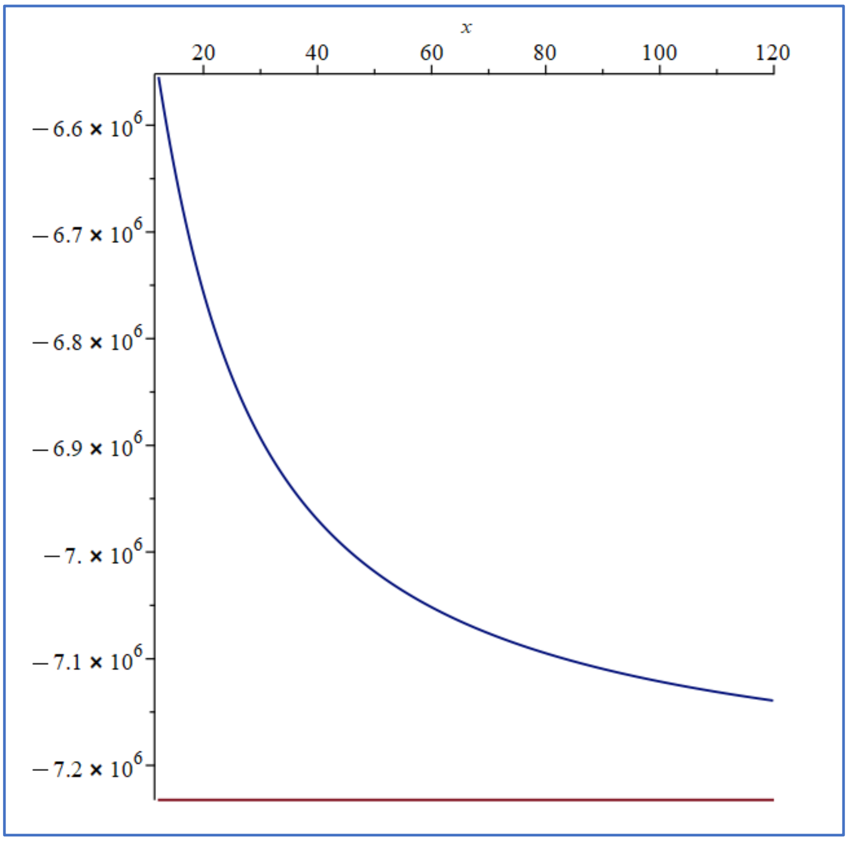
Vervolgens is formule 12 ingevuld om het aantal RAM geheugen te berekenen:

$$RAM_{benodigd} = 5{,}3 \cdot \frac{knopen^2}{2.703.521^2} \tag{12}$$

Waar:

- 5,3	[GB]	=	het aantal beschikbare RAM geheugen;
- knopen	[-]	=	het totaal aantal knopen in het nieuwe model;
- 2.703.521	[-]	=	het aantal knopen wat de computer nét niet aankon.

Het antwoord hieruit is ongeveer één miljoen gigabyte aan RAM geheugen, ofwel tienduizend terabyte. Op het moment heeft de PC met het meeste geheugen één terabyte aan RAM. Realistisch gezien is het in de aankomende paar jaar dus **niet** mogelijk om een extra decimaal nauwkeurigheid te berekenen.



Figuur 19 - grafiek convergentie, Maple

```
> N := 182:
> B := 0.100: t := 0.004:
> elementen := N * B/t * N * B/t * N;
                                        elementen := 3.767855000 × 10^9
> knopen := elementen * 1
                                        knopen := 3.767855000 × 10^9
> RAM_benodigd := 5.3 * (knopen^2)/(2703521^2);
                                        RAM_benodigd := 1.029448766 × 10^7
> #knopen bij n=182, 8-knoopse modellen, 5,3 GB RAM beschikbaar, fout 1 decimaal nauwkeuriger maken
```

Figuur 20 - berekening knopen en RAM geheugen, Maple

6. Conclusie en aanbevelingen

6.1 Conclusie

De hoofdvraag van het onderzoek is:

"Wat is de coëfficiënt om de piekspanning in de randen van platen te berekenen?"

Daarbij is de volgende uitspraak als onderzoekshypothese beschouwd:

"De coëfficiënt die Reissner heeft benaderd, is juist."

De hypothese wordt verworpen vanwege de volgende redenen:

1. In paragraaf 5.4 - Nauwkeurigheid coëfficiënt is berekend dat de coëfficiënt **4,6** is, gebruikmakende van het meest nauwkeurige resultaat, met 20 knopen per element en 8 elementen over de dikte. Deze waarde is niet hetzelfde is als Reissner's coëfficiënt van $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. De te gebruiken formule wordt dan:
$$\sigma = \mathbf{4,6} \cdot \frac{m_{xy}}{t^2} \tag{13}$$
2. De breedte/dikte verhouding heeft grote invloed op de spanningen; deze worden kleiner, naarmate de verhouding toeneemt. Hier tekent zich een trend af, die niet geëxtrapoleerd kan worden naar de spanning van Reissner, met daarbij de coëfficiënt van $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.
3. De Poisson factor heeft een kleine invloed op de spanningen. Reissner heeft deze invloed in zijn onderzoek niet onderkend.

Daarnaast is er onderzocht welke factoren er nog meer invloed hebben op het resultaat en in welke mate. Het aantal elementen over de dikte heeft het meeste invloed op het eindantwoord en er kan gezegd worden dat deze dus maatgevend is voor de nauwkeurigheid; hoe meer elementen, hoe nauwkeuriger het resultaat. De elementvorm en -grootte heeft ook invloed, maar dit hangt sterk af van het aantal elementen over de dikte, zoals te zien was bij de kubusvormige en platte elementen. Alle resultaten zouden uiteindelijk naar hetzelfde exacte eindantwoord moeten convergeren, maar dit is met (te) weinig elementen over de dikte niet altijd even goed te zien.

De laatste onderzoeksvraag luidt als volgt:

"Welke computercapaciteit is er nodig, om een extra decimaal voor de coëfficiënt te berekenen en wanneer is deze capaciteit beschikbaar op een normale gebruikerscomputer?"

Deze onderzoeksvraag is ook in zijn volledigheid beantwoord, in paragraaf Computerkracht benodigd. Er kan geconcludeerd worden, dat er in de aankomende jaren géén extra decimaal nauwkeurigheid berekend kan worden met het RAM geheugen. Het benodigde RAM geheugen is ruim tienduizend terabyte voor 8-knoopse elementen en het is onrealistisch dat dit bereikt wordt.

6.2 Aanbevelingen

Voor studenten en andere geïnteresseerden die dit verslag willen reproduceren wordt er aangeraden om zo snel mogelijk de volledige versie van Abaqus/CAE te verkrijgen bij de universiteit of de hogeschool of een andere instantie. De studentenversie is weliswaar gratis te downloaden, maar deze is helaas beperkt tot 1000 knopen. Daarnaast zijn modellen niet direct over te zetten van de studentenversie naar de volledige versie; deze moeten dus opnieuw gemaakt worden.

In deze thesis is er in Abaqus/CAE gewerkt met een blanco model, die continu aangepast kan worden op mesh-grootte, eigenschappen en afmetingen. Echter is er ook een andere manier om dit aan te pakken; Abaqus werkt namelijk met een Python code op de achtergrond. Er kan dus een code geschreven worden die in het programma geplakt kan worden, om Abaqus vervolgens alles zelf te laten doen, het gebruik van de interface is dus (bijna) niet nodig. Online is er een bibliotheek te vinden met alle relevante codes en daarnaast staan er vele video’s online die (bijna) elk probleem aanpakken en oplossen.

Als laatste wordt het gebruik van een sterke computer aangeraden. Te zien was, dat de 20-knoopse modellen sneller convergeren naar bepaalde waardes, dan de 8-knoopse modellen. Met een sterkere computer kan er een fijnere mesh gemaakt worden met meer elementen, waarbij de elementgrootte gelijk blijft. In deze thesis is dit beperkt gebleven tot maar 4 testen (van 2 tot en met 8 elementen over de dikte) en is er gewerkt met de laatste waarde van deze testen om het benodigde RAM-geheugen te berekenen. Met een sterkere computer kunnen er naar alle waarschijnlijkheid meer testen gedaan worden, waardoor er betere conclusies getrokken kunnen worden. Er kan bijvoorbeeld onderzocht worden in hoeverre de breedte/dikte verhouding de resultaten beïnvloed.

Referenties

Blaauwendraad, J. (2010). *Plates and FEM: Surprises and pitfalls.* Springer Publishing.

Hartsuijker, C. & Welleman, J.W. (2018, januari). *Spanningsleer en Bezwijkmodellen*. Civiele Techniek, Technische Universiteit Delft. Opgehaald van: https://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/CT3109/collegestof/elasticiteitsleer/files/CT4145Dictaat-versie8.pdf

Hoogenboom P.C.J. (2022). *Note on Shell Structures*, Delft University of Technology. Opgehaald van: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b17_handout_5_lockdown.pdf

Kleijnen, A. (2022). *Spanningen in de randen van dunne platen*. Bachelor eindproject Technische Universiteit Delft. Opgehaald van: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_kleijnen.pdf

Li, D. (2012). *Stresses in the edges of cold bent glass panes*. Bachelor thesis Delft University of Technology. Opgehaald van: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_li.pdf

Reissner, E. (1945). *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 12, 1945, A68–77.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. & Zhu, J.Z. (1967). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. McGraw-Hill Education. Opgehaald van: https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=59b6cf9a4048544b491736b3&assetKey=AS%3A537464466677760%401505152922372

Zwennis, R. (2013). *Spanningen in de rand van koud gevormde glasplaten*. Bachelor eindproject Technische Universiteit Delft. Opgehaald van: https://homepage.tudelft.nl/p3r3s/BSc_projects/eindrapport_zwennis.pdf

Bijlage A: het gebruik van Abaqus en de verwerking van de resultaten

In deze bijlage zal er kort uitgelegd worden hoe Abaqus gebruikt wordt. Vervolgens zal er toegelicht worden hoe Abaqus de resultaten presenteert, waarna de output verwerkt moet worden. De verwerking van deze output zal gebeuren in Excel. Daarna zal een korte Python code deze bijlage beëindigen. Dit zal allemaal gedemonstreerd worden aan de hand van een voorbeeld. Het stappenplan hieronder is vereenvoudigd opgeschreven.

A1 – Abaqus

Abaqus heeft meerdere versies voor hetzelfde elementenprogramma. Aangezien de studentenversie gelimiteerd is tot maar 1000 knopen, is de volledige versie, Abaqus/CAE, gebruikt voor dit onderzoek. Bij het maken van een project is er direct een “Model Database” gemaakt, bestaande uit het model zelf: “Models”; en de analyse van dit model: “Analysis”.

Models

1. Bij “Models” zal het model gemaakt worden. Deze zal bestaan uit één of meer onderdelen (“Parts”); dit zal dan ook als eerste gemaakt worden. Via het tekenen van lijntjes en bogen kan een omtrek gemaakt worden van het model. Met dimensies (ook voor de diepte) kan dit makkelijk aangepast worden.
2. Na het maken van een Part, moet het model een materiaal toegewezen krijgen. Onder “Materials” kunnen meerdere eigenschappen ingevuld worden. Voor deze thesis is er een dichtheid (onder “General”) ingevuld, samen met een elasticiteitsmodulus en het Poisson effect (beide onder “Mechanical, Elasticity”).
3. Om dit model makkelijk te reproduceren en aan te passen, zijn alle horizontale randen in een Set gezet, eveneens als alle verticale randen. Dit zal later duidelijker worden.
4. Hierna zal er een nieuwe rekenstap toegevoegd worden “Step”. De eerste stap “Initial” is al door het programma gemaakt, deze hoeft niet aangepast te worden. Onder de nieuwe stap kunnen de opleggingen en de krachten ingevuld worden, inclusief de positie hiervan.
5. Nu kan de mesh gemaakt worden. Hiervoor zullen er eerst punten op de randen gemaakt worden met een gelijke afstand tussen elk (“Seeds”). Hier komen de sets van de verticale- en horizontale randen van toepassing: deze kunnen beide nu gekozen worden, waarna de grootte van een element of het aantal hiervan gespecificeerd kan worden.
   - Op deze manier zijn de modellen uit deze thesis snel, maar correct, gemaakt. Het gebruik van een blanco model, waar alleen de mesh nog gemaakt moet worden, is een simpele manier om modellen te reproduceren, zonder te coderen.
6. Na het maken van de Seeds kan het programma opgedragen worden om een “Mesh” te maken: een 3D rooster (of grid) van elementen. Abaqus zal, op basis van de Seeds, zelf de mesh invullen. Hierna is het model af.

Analysis

1. Als het model gereed is voor een het gebruik van een EEM, kan de analyse tab geopend worden. Het enige wat hier gebeurt, is dat er een taak (“Job”) aangemaakt moet worden.
2. Bij het maken van een taak kunnen er verschillende dingen aangepast worden. Abaqus voert zelf al een volledige methode uit en vertelt dat het maximaal 90% van het werkgeheugen zal gebruiken. Dit kan naar behoeven aangepast worden.
   - Als er aan 100% werkgeheugen de computer de simulatie nog steeds niet aankan, dan zal er ‘geswapt’ worden tussen het RAM werkgeheugen en de SSD van de computer. Hierbij wordt er dus ruimte op bijvoorbeeld de C-schijf van een computer gebruikt bij het berekenen. Doorgaans duurt een simulatie dan (veel) langer; aangeraden wordt om een sterke computer te vinden, waarbij er niet of bijna niet geswapt hoeft te worden voor simulaties.

3. Bij de output van de resultaten is het model met mesh weer zichtbaar. Ter visualisatie kan er gekozen worden om de doorbuiging in het extreem te laten zien. Daarnaast wordt er doormiddel van een kleurenspectrum aangegeven hoe de spanningen verdeeld zijn.
   - Bij de modellen in deze thesis is de doorbuiging niet relevant.
4. In het output-scherm zal er een zogenaamde “Display group” gemaakt worden van knopen. Op deze manier kunnen er knopen uitgekozen worden, om vervolgens van deze knopen informatie op te vragen. In principe werkt dit hetzelfde als een set. Het handige van een display group is, dat dus alleen de middelste knopen gekozen kunnen worden, om zo het verwerken later in Excel wat makkelijker te maken (minder filteren).
5. Vervolgens zullen de S_{12} spanningen van al deze knopen, samen met hun coördinaten, opgeslagen worden in een bestand.

A2 – Excel

1. Het bestand zal geopend worden in Excel. Dit bestand is opgedeeld in twee delen.
   - Deel 1 bestaat uit de originele coördinaten van de gekozen knopen, eveneens de coördinaten van deze knopen. Daarnaast zijn ook de ‘vervormde’ coördinaten gegeven, de plek van de knopen nadat de plaat is belast.6
   - Deel 2 geeft de knopen los neer met haar aangrenzende knopen. Daarnaast is de spanning S_{12} vermeld per knoop.
2. De delen zullen beide apart behandeld worden. Bij Deel 1 zullen de vervormde coördinaten verwijderd worden, deze zijn niet benodigd voor deze thesis.
3. De knopen zullen hierna gesorteerd worden op Y- en op Z-coördinaat. Om voor de juiste resultaten te zorgen zullen alleen de knopen met Y-coördinaat 2 [mm] en met Z-coördinaat 100 [mm] behouden worden. Op deze manier zullen alleen de knopen in het midden van de rand van de plaat overblijven.
4. Deel 2 bestaat echter nog steeds uit knopen die zich niet op Y = 2 [mm], Z = 100 [mm] bevinden. Deze worden er uitgefilterd met een redelijk simpele Excel formule waarbij de knopen uit Deel 1 in een lijst gezet worden, waarna er gefilterd kan worden in Deel 2 op deze lijst. De formule is als volgt:

   =IF(COUNTIF([*bereik met lijst van knopen*]; [*te checken knoop*]); “Yes”; “No”)

   Met deze formule zal er achter elke cel een Yes of een No verschijnen. Er zal vervolgens gefilterd worden op “No”, waarna al deze knopen verwijderd worden uit deel 2.
5. Uit deze knopen is reeds uit het verslag bekend, dat de spanning precies in het midden van de plaat het kleinst is (top van de parabool). Er zal dus met de formule “=MAX([*overgebleven knopen*])” de kleinste spanning verschijnen. Er wordt MAX gebruikt, want de spanningen zijn allen negatief. Deze spanning zal apart genoteerd worden en zal gebruikt worden voor het verwerken van informatie.
6. Elke knoop heeft 4 aangrenzende knopen, op de hoekpunten na, en het bestand geeft dus 4 (verschillende) waarden per knoop: de grafieken zouden dus eigenlijk op trappetjes moeten lijken. Dit probleem kan opgelost worden in Python.

A3 – Python

Wanneer de kolom van de spanningen geëxtraheerd wordt naar python, wordt er een lijst gemaakt voor de coördinaten. In het voorbeeld van A1_10_8 zijn er 251 knopen in de rand, 249 daarvan hebben vier aangrenzende knopen, de andere twee knopen zijn de hoekpunten, met beide twee aangrenzende knopen. In totaal zijn er dus 1000 spanningen gegeven, die per stap van vier 0,4 [mm] van elkaar verwijderd zijn. Dat betekent dat de lijst als volgt gemaakt moet worden:

```
list = []
for i in range(249):
    for j in range(4):
        v = (100 - (100/250)) - (100/250)*i
        w = round(v, 1)
        list.append(w)
print(list)
[99.6, 99.6, 99.6, 99.6, 99.2, 99.2, 99.2, 99.2, … , 0.4, 0.4, 0.4, 
0.4]
```

De missende vier coördinaten van 100, 100, 0 en 0 worden handmatig toegevoegd aan de lijst.
De spanningen en de lijst zullen tegen elkaar geplot worden in Python met behulp van de volgende code, waar de bestandsnaam met data ‘A1_10_8 S12 values’ is:

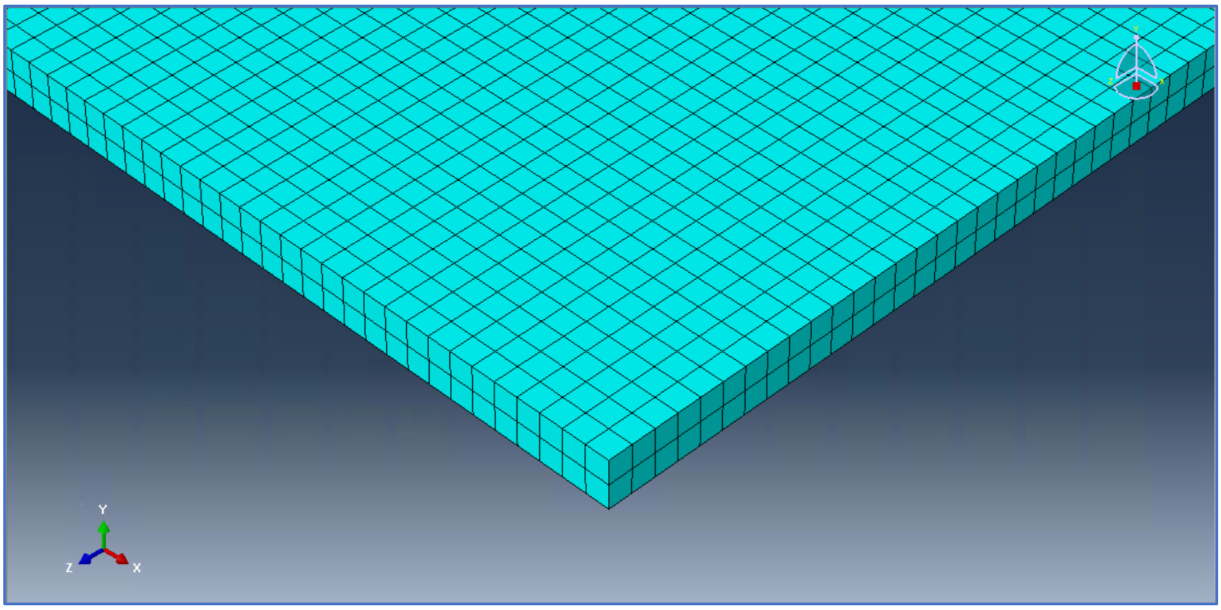
```
data = read_excel(r'Downloads\A1_10_8 S12 values.xlsx')
y = data[["S12 [kN/m$^{2}$]"]].values.tolist()
x = data[["x-coördinaat [mm]"]].values.tolist()
y_values = []
x_values = []

for li in y:
     y_values.append(li[0])

for li in x:
     x_values.append(li[0])

plt.figure(figsize=[16,8])
plt.plot(x_values, y_values, c='b')
plt.xlabel('x-coördinaat op de plaat [mm]', fontsize=15)
plt.ylabel('Spanning [kN/m$^{2}$]', fontsize=15)
plt.title('Spanningen over gehele zijkant van een plaat', 
fontsize=20)
plt.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=15)
```

Deze code vormt uiteindelijk de grafiek in Figuur 10.

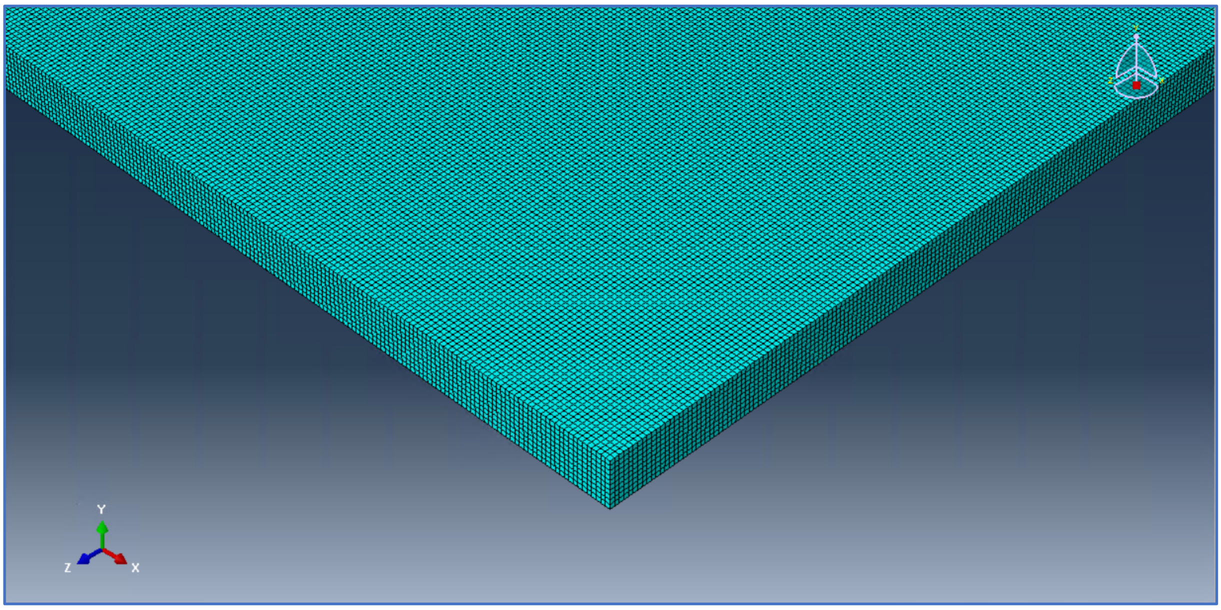
Bijlage B: voorbeelden van modellen

In bijlage B zullen wat modellen met mesh weergeven worden, om zo een beter beeld te krijgen van de vervorming van de platen en direct ook de interface van Abaqus.

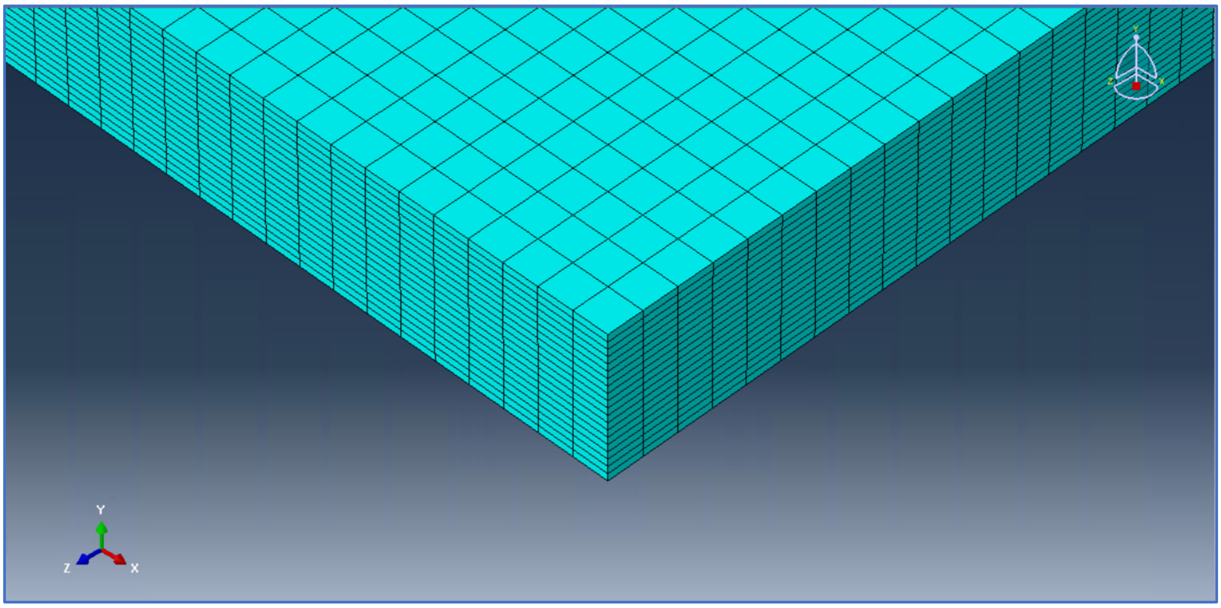
B1 – Modellen met mesh



Figuur B1.1 - model met $\boldsymbol{n} = 2,\ \boldsymbol{N} = 5000$

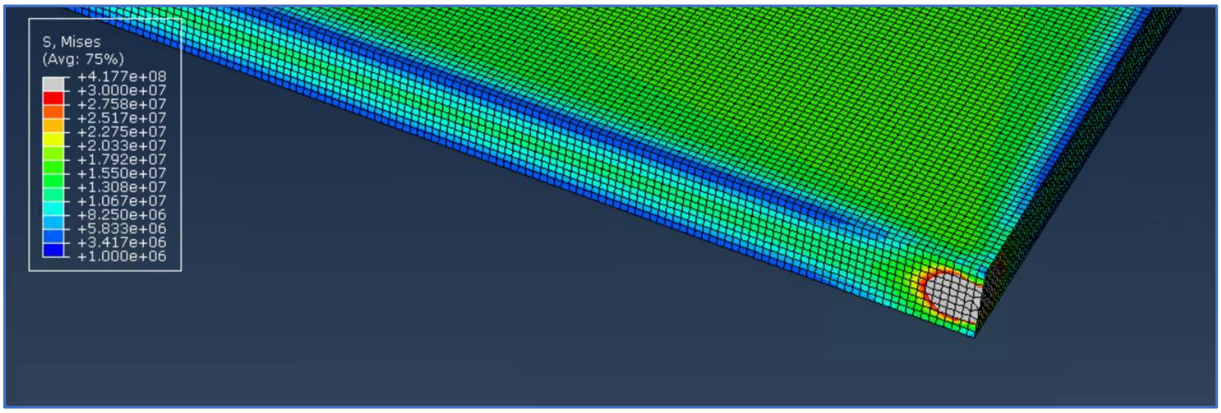


Figuur B1.2 - model met $\boldsymbol{n} = 10,\ \boldsymbol{N} = 625.000$

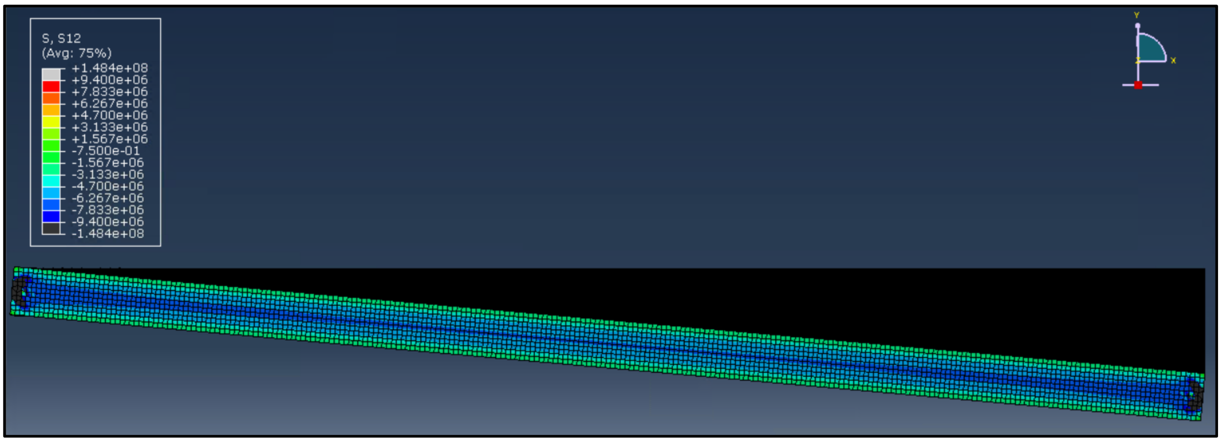


Figuur B1.3 - model met platte elementen, $\boldsymbol{n} = 20,\ \boldsymbol{N} = 200.000$

B2 – Doorbuiging en Von Mises spanningen



Figuur B2.1 - Von Mises spanningen bij een model met legenda



Figuur B2.2 - S12 spanningen in de rand van een doorgebogen plaat