

VERVORMING VAN GEDEELTELIJK ONTGRAVEN HEIPALEN

Bachelor Thesis van

JEROEN P. H. VAN LEEUWEN

Onder begeleiding van

**P.C.J. HOOGENBOOM
J.W. WELLEMAN**

*Subfaculteit Civiele Techniek
Technische Universiteit Delft*

December 2007

Inleiding

Het komt regelmatig voor dat er een bouwkuip moet worden gegraven naast een bestaande paalfundering. Om de grond tegen te houden worden damwanden aangebracht tussen de heipalen. Doordat de horizontale gronddruk wordt afgedragen op de heipalen ontstaat er een eerste-orde horizontale uitbuiging. De normale methode om de totale uitbuiging te berekenen is het vermenigvuldigen van de eerste-orde uitbuiging met de vergrotingsfactor $n/(n-1)$. Het is echter niet duidelijk of deze aanpak voldoende nauwkeurig is.

In het hierop volgende rapport wordt getracht te bepalen of deze methode nauwkeurig is en, zo ja, onder welke voorwaarden. Er is daarbij geprobeerd het een en ander in zo duidelijk mogelijke bewoordingen uit te leggen, maar desondanks zullen degenen onder u die geen basiskennis hebben van wiskundige analyse grote moeite hebben met bepaalde hoofdstukken. Voor u ligt een verslag waar veel tijd en toewijding in zit en ik hoop hoe dan ook dat dit verslag het een en ander verduidelijkt voor de lezer. Boven alles wil ik Pierre Hoogenboom en Hans Welleman bedanken voor de douwtjes in de goede richting.

Inhoudsopgave

1	Probleemomschrijving	1
	1.1 Probleemstelling	1
	1.2 Doelstelling	1
	1.3 Werkvolgorde	1
2	Mechanicamodel	2
	2.1 Modelweergave	2
	2.2 Verklaring van grootheden	2
	2.3 Oplegcondities	3
3	Differentiaalvergelijking	4
	3.1 Afleiding	4
	3.2 Dimensieloze parameters	5
	3.3 Oplossingen	6
	3.4 Fysische betekenis	9
	3.5 Randvoorwaarden	12
4	Resultaten	14
	4.1 Invoer in Maple	14
	4.2 Parametersets	15
	4.3 Maximale uitbuiging	15
	4.4 Knikkracht	17
5	Conclusies	18
	5.1 Formule Martens	18
	5.2 Nauwkeurigheid vergrotingsfactor	20
	5.3 Slotconclusie	20
6	Aanbevelingen	21
	6.1 Knikkracht	21
	6.2 Nauwkeurigheid	21
	6.3 Numerieke methoden	21
A	Verificatie der oplossingen	22
B	Maple-output	27
C	Resultaten	39
D	Kniklengtebepaling	45
	Literatuurverwijzing	51
	Zelfevaluatie	52

1

Probleemomschrijving

1.1 Probleemstelling

Bij gedeeltelijk ontgraven heipalen waarbij op het ontgraven gedeelte een horizontale belasting aangrijpt, is niet duidelijk of de totale uitbuiging nauwkeurig genoeg berekend kan worden door de eerste-orde uitbuiging, de uitbuiging die teweeg wordt gebracht door de horizontale belasting, te vermenigvuldigen met de vergrotingsfactor $n/(n-1)$. In het vervolg van dit document wordt deze wijze van berekenen aangeduid als de vergrotingsfactor¹.

1.2 Doelstelling

Met behulp van een analytisch model wordt onderzocht of de vergrotingsfactor conservatieve en nauwkeurige resultaten oplevert. Als dit het geval is wordt gekeken onder welke voorwaarden dit geldt. Hierbij worden de voorwaarden beschreven met dimensieloze parameters.

1.3 Werkvolgorde

Bij het onderzoek is de volgende werkvolgorde in acht genomen:

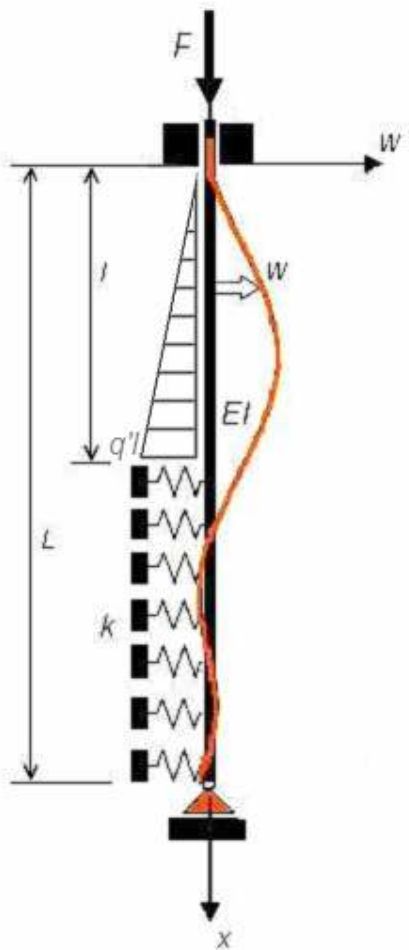
1. Er wordt een mechanicamodel gemaakt van een gedeeltelijk ontgraven heipaal.
2. Op basis van de hypothesen van Bernoulli en Hooke wordt een differentiaalvergelijking afgeleid uit het mechanicamodel.
3. De onder punt 2 afgeleide differentiaalvergelijking wordt beschreven met dimensieloze parameters en variabelen.
4. De oplossingen van de differentiaalvergelijking worden bepaald en geverifieerd.
5. De fysische betekenis van de oplossingen wordt nagegaan.
6. Rand- en overgangsvoorwaarden voor het probleem worden geformuleerd.
7. Er wordt een model van de eerste Vervorming van gedeeltelijk ontgraven heipalen-orde uitbuiging en een model van de tweede-orde uitbuiging in Maple ingevoerd.
8. Voor verschillende waarden van de dimensieloze parameters wordt een onderzoek gedaan naar de knikkracht en de maximale uitbuiging.
9. Het relatieve verschil van de gevonden vergrotingsfactor met $n/(n-1)$ wordt berekend.
10. De formule Martens wordt geëvalueerd.
11. Er worden een slotconclusie en aanbevelingen gedaan.

2

Mechanicamodel

2.1 Modelweergave

Afbeelding 1 geeft het mechanicamodel weer. Hierbij wordt de heipaal voorgesteld als een verticale ligger. De oorsprong van het x, w -assenstelsel bevindt zich in het hart van het profiel ten hoogte van de paalkop; de x -as valt samen met het hart van de onvervormde heipaal en de w -as staat daar loodrecht op.



Afbeelding 2.1: Mechanicamodel van heipaal

2.2 Verklaring van grootheden

In de modelweergave komen verschillende grootheden voor die elk een verklaring behoeven. De twee variabelen in het model zijn x en w en worden berekend in meters. Hierbij staat x

voor de positie langs de paalas ten opzichte van de paalkop en w voor de uitbuiging loodrecht op de onvervormde as.

De twee geometrische parameters zijn l en L en worden gegeven in meters, waar l voor de ontgraven lengte staat en L voor de totale lengte.

De drukkracht over de normaalas wordt gegeven door de parameter F in Newton en de afgeleide van de horizontale belasting over de lengte van de paalas door de parameter q' in Newton/meter¹/meter.

De beddingconstante van de grond wordt gegeven door de parameter k en wordt gemodelleerd als een lineaire veerconstante met de eenheid Newton/meter².

2.3 Oplegcondities

De paalkop is stijf verbonden met het plaatsvaste funderingsframe en is als inklemming te beschouwen. Dit houdt in dat er ter plekke van de paalkop geen zijdelingse uitbuiging is. Doordat de heipaal stijf verbonden is met het funderingsframe is er geen rotatie.

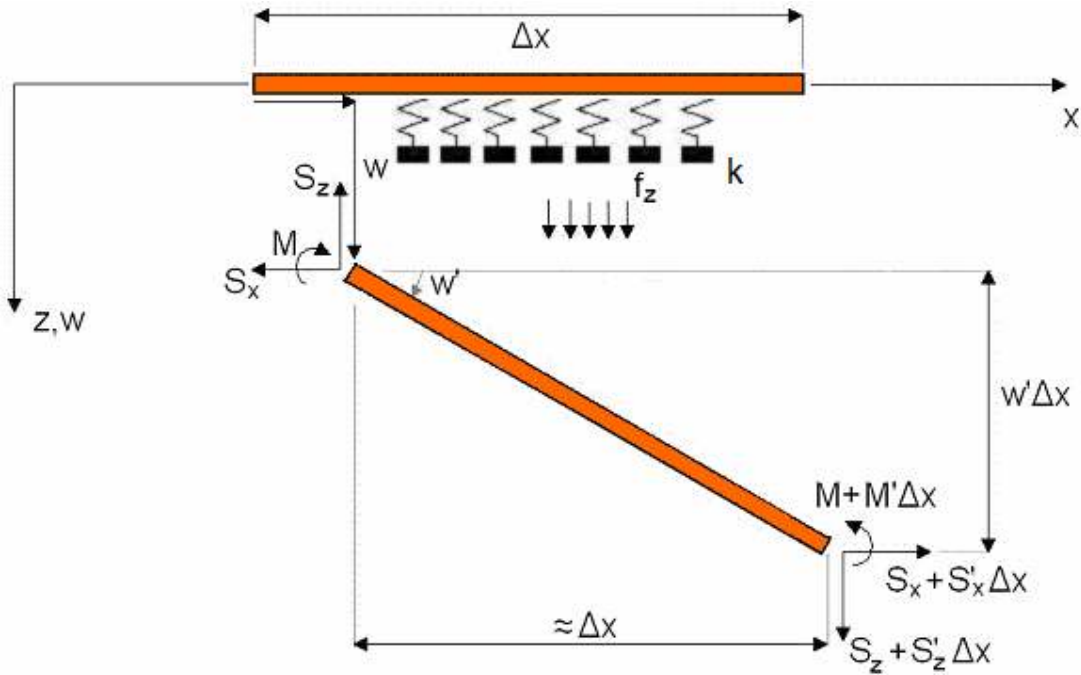
De paalvoet staat echter “vrij” in de grond en is als roloplegging te beschouwen. Dit houdt in dat de paalvoet plaats- en rotatievrij is (zijdelings), en dat de dwarskracht en het buigende moment theoretisch nul zouden moeten bedragen.

3

Differentiaalvergelijking

3.1 Afleiding

Door middel van een evenwichtsbeschouwing van een infinitesimaal klein deel van de ligger is het mogelijk een differentiaalvergelijking af te leiden die het mechanisch model uit voorgaand hoofdstuk mathematisch omschrijft. Hierbij worden de wet van Hooke² en de hypothese van Bernoulli³ in acht genomen.



Afbeelding 3.1: Evenwichtsbeschouwing infinitesimaal klein liggerdeel

In bovenstaande afbeelding wordt de normaalkracht ontbonden in een verticale component S_z en een horizontale component S_x .

$$\sum S_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta F = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sum S_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_z + q\Delta x &= -S_z - \Delta S_z + kw\Delta x \\ \frac{dS_z}{dx} &= kw - q \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M + F \frac{dw}{dx} \Delta x + (S_z + \frac{dS_z}{dx} \Delta x) \Delta x &= M + \Delta M \\ M + F \frac{dw}{dx} \Delta x + S_z \Delta x + \frac{dS_z}{dx} \Delta x^2 &= M + \Delta M \end{aligned}$$

De vierde term in het linkerlid van de vergelijking kan worden verwaarloosd; er wordt immers een infinitesimaal klein deeltje Δx beschouwd, waarbij Δx^2 verwaarloosbaar klein is. Dit reduceert de vergelijking tot:

$$\begin{aligned} M + F \frac{dw}{dx} \Delta x + S_z \Delta x &= M + \Delta M \\ -\frac{dM}{dx} + F \frac{dw}{dx} + S_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nog eenmaal differentiëren naar x en vergelijking (3.2) substitueren voor de derde term geeft:

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + kw - q = 0 \quad (3.4)$$

De wet van Hooke in combinatie met de hypothese van Bernoulli stelt:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.5)$$

Door (3.5) te substitueren in (3.4) verkrijgen we de uiteindelijke differentiaalvergelijking:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = q(x) = q'x \quad (3.6)$$

De uitdrukkingen voor $\varphi(x)$, $M(x)$ en $S_z(x)$ luiden als volgt:

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} \quad (3.7)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.8)$$

$$S_z(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} + F \frac{dw}{dx} \quad (3.9)$$

3.2 Dimensieloze parameters

De volgende stap is het opstellen van de differentiaalvergelijking met dimensieloze parameters en variabelen. Dit is van belang voor de efficiëntie van het onderzoek en het inzichtelijk presenteren van de resultaten. De procedure is als volgt: eerst worden alle termen van (3.6) gedeeld door EI :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{F}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{k}{EI} w = \frac{q'}{EI} x \quad (3.10)$$

De volgende stap is het vervangen van de variabele x door de variabele ξ . De variabele ξ is daarbij gelijk aan x/L . De volgende hulpvergelijking komt daarbij van pas:

$$\frac{d^n w}{dx^n} = \frac{1}{L^n} \quad (3.11)$$

Implementatie van (3.11) in (3.10) levert het volgende resultaat:

$$\frac{1}{L^4} \frac{d^4 w}{d\xi^4} + \frac{F}{EIL^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{k}{EI} w = \frac{q' L}{EI} \xi \quad (3.12)$$

Vermenigvuldiging met L^4 levert uiteindelijk de uitdrukking met dimensieloze parameters:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \frac{FL^2}{EI} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{kL^4}{EI} w = \frac{q' L^5}{EI} \xi \quad (3.13)$$

Deze uitdrukking kan weer worden geschreven als:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta w = \gamma \xi \quad (3.14)$$

waar:

$$\alpha = \frac{FL^2}{2EI}; \quad \beta = \frac{kL^4}{EI}; \quad \gamma = \frac{q' L^5}{EI} \quad (3.15)$$

Hier dient de kanttekening te worden geplaatst dat γ niet dimensieloos is en de eenheid m heeft.

Met het oog op de te formuleren randvoorwaarden is het noodzakelijk de ontgravingsdiepte l ook in termen van $1/L$ uit te drukken:

$$\lambda = \frac{l}{L} \quad (3.16)$$

3.3 Oplossingen

Met de verkregen differentiaalvergelijking (3.14) is er een mathematische omschrijving van het probleem voorhanden. Er dienen nu vier oplossingen van de differentiaalvergelijking te worden bepaald. De heipaal heeft immers een ontgraven gedeelte waarbij β gelijk aan nul is (er is geen grond om weerstand te bieden) en een ingegraven gedeelte waarbij γ gelijk aan nul is (er rust op dit gedeelte geen zijdelingse belasting). In beide gevallen moet ook de oplossing worden bepaald voor $\alpha = 0$, wat overeenkomt met het ontbreken van de normaaldrukkracht F .

$\beta = 0$; $\alpha = 0$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = \gamma \xi \quad (3.17)$$

Viermaal integreren levert de oplossing:

$$w = \frac{\gamma}{120} \xi^5 + \frac{C_1}{6} \xi^3 + \frac{C_2}{2} \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \quad (3.18)$$

$\gamma = 0; \alpha = 0$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta w = 0 \quad (3.19)$$

De volgende hulpparameter wordt geïntroduceerd:

$$4\eta^4 = \beta \quad (3.20)$$

Invullen van $w = e^{r\xi}$ en (3.20) in (3.19) geeft:

$$\begin{aligned} r^4 + 4\eta^4 &= 0 \\ r_{1,2,3,4} &= \eta \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{-1} = \eta (\pm 1 \pm i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hiermee wordt een eerste uitdrukking gevonden voor w :

$$w = A e^{\{\eta(1+i)\xi\}} + B e^{\{\eta(1-i)\xi\}} + C e^{\{\eta(-1+i)\xi\}} + D e^{\{\eta(-1-i)\xi\}} \quad (3.22)$$

Met behulp van formule van Euler⁴ en herschikking van de termen wordt gevonden:

$$w = e^{\eta\xi} \{D_1 \cos(\eta\xi) + D_2 \sin(\eta\xi)\} + e^{-\eta\xi} \{D_3 \cos(\eta\xi) + D_4 \sin(\eta\xi)\} \quad (3.23)$$

$\beta = 0$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \gamma \xi \quad (3.24)$$

Deze verschijningsvorm van de differentiaalvergelijking heeft een particuliere en homogene oplossing. Als er eerst naar de particuliere oplossing wordt gekeken ligt het voor de hand te kijken naar een oplossing met de vorm:

$$w_p = \chi \xi^3 \quad (3.25)$$

Implementatie van (3.25) in (3.24) geeft

$$12\alpha\chi\xi = \gamma\xi \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{\gamma}{12\alpha} \quad (3.26)$$

Implementatie van (3.26) in (3.25) geeft de particuliere oplossing van (3.24):

$$w_p = \frac{\gamma}{12\alpha} \xi^3 \quad (3.27)$$

Nu wordt er gekeken naar de homogene oplossing. De uitdrukking $w = e^{r\xi}$ wordt in (3.24) ingevuld:

$$\begin{aligned} r^4 + 2\alpha r^2 = 0 &\Rightarrow \\ r_{1,2}^2 = 0 & \quad r_{3,4}^2 + 2\alpha = 0 \\ r_1 = 0 \quad r_2 = 0 & \quad r_3 = -\sqrt{2\alpha} i \quad r_4 = \sqrt{2\alpha} i \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hiermee en met behulp van de formule van Euler wordt deze uitdrukking van de homogene oplossing gevonden:

$$w_h = C_1 + C_2\xi + C_3\cos(\sqrt{2\alpha}\xi) + C_4\sin(\sqrt{2\alpha}\xi) \quad (3.29)$$

Dit maakt de totale oplossing voor (3.24):

$$w = C_1 + C_2\xi + \frac{\gamma}{12\alpha}\xi^3 + C_3\cos(\sqrt{2\alpha}\xi) + C_4\sin(\sqrt{2\alpha}\xi) \quad (3.30)$$

$\gamma = 0$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta w = 0 \quad (3.31)$$

Invullen van $w = e^{r\xi}$ in (3.31) geeft:

$$r^4 + 2\alpha r^2 + \beta = 0 \quad (3.32)$$

$$\rho^2 + 2\alpha\rho + \beta = 0 \quad \text{met } \rho = r^2 \quad (3.33)$$

Vergelijking (3.33) oplossen met de abc-formule geeft:

$$\rho_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta} \quad (3.34)$$

Vervolgens levert worteltrekken van ρ op:

$$r_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \quad (3.35)$$

Als $\beta < \alpha^2$ kan gesteld worden:

$$r_{1,2,3,4} = \pm i\sqrt{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \quad (3.36)$$

Met behulp van de formule van Euler en (3.36) is voor $\beta < \alpha^2$ de uitdrukking voor w :

$$\begin{aligned} w = & D_1\cos\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}\xi\} + D_2\sin\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}\xi\} + \\ & D_3\cos\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}\xi\} + D_4\sin\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}\xi\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dit is een oplossing die wiskundig gezien hout snijdt, maar fysisch onmogelijk is! In § 3.4 wordt hierop teruggekomen.

Als $\beta > \alpha^2$ kan gesteld worden:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\alpha \pm i\sqrt{\beta - \alpha^2}} \quad (3.38)$$

Deze uitdrukking kan verder uitgewerkt worden met de volgende standaardformules:

$$\sqrt{x \pm iy} = \sqrt{\frac{z+x}{2}} \pm i \frac{y}{\sqrt{2(z+x)}} \quad (3.39)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.40)$$

Dit levert op:

$$z = \sqrt{\alpha^2 + \beta - \alpha^2} = \sqrt{\beta} \quad (3.41)$$

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}} \pm i \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} \quad (3.42)$$

Voor het gemak worden nu de hulpparameters μ en ν ingevoerd:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}}; \quad \nu = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} \quad (3.43)$$

De uitdrukking voor w wordt nu:

$$w = Ae^{\{(\mu+i\nu)\xi\}} + Be^{\{(\mu-i\nu)\xi\}} + Ce^{\{(-\mu+i\nu)\xi\}} + De^{\{(-\mu-i\nu)\xi\}} \quad (3.44)$$

Met behulp van formule van Euler en herschikking van de termen wordt nu voor $\beta > \alpha^2$ gevonden:

$$w = e^{\mu\xi} \{D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)\} + e^{-\mu\xi} \{D_3 \cos(\nu\xi) + D_4 \sin(\nu\xi)\} \quad (3.45)$$

Voor de geïnteresseerde én kritische lezer zal in Bijlage A door substitutie van de oplossingen (3.18), (3.23), (3.30), (3.37) en (3.45) in de differentiaalvergelijking (3.14) de wiskundige plausibiliteit worden aangetoond van de beschouwing in deze paragraaf.

3.4 Fysische betekenis

In de voorgaande paragraaf zijn verschillende oplossingen verkregen voor de differentiaalvergelijking (3.14). Hierbij is niet gekeken naar de fysische betekenis ervan. Ter inleiding daarvan wordt een halfoneindig lange heipaal beschouwd, dat wil zeggen een heipaal waarvan de paalkop zich aan de oppervlakte bevindt en de paalvoet op oneindig grote diepte. Stel dat er

een horizontale puntlast wordt aangebracht op de paalkop. Door deze kracht zal er een uitwijking ontstaan ter hoogte van de paalkop. De vervorming laat zich door (3.23) omschrijven:

$$w = e^{\eta\xi} \{D_1 \cos(\eta\xi) + D_2 \sin(\eta\xi)\} + e^{-\eta\xi} \{D_3 \cos(\eta\xi) + D_4 \sin(\eta\xi)\} \quad (3.23)$$

De eerste term met $e^{\eta\xi}$ als factor impliceert echter dat de vervorming een aangroeiend karakter zou hebben in positieve ξ -richting. Omdat dit niet mogelijk is zou vergelijking (3.23) gereduceerd moeten worden tot:

$$w = e^{-\eta\xi} \{D_1 \cos(\eta\xi) + D_2 \sin(\eta\xi)\} \quad (3.46)$$

Deze reductie geldt ook voor het in dit document beschouwde model, er wordt immers van uit gegaan dat de paalvoet geen dwarskracht of moment kan overdragen op de ondergrond.

De voor (3.23) geldende redenering is ook van toepassing op (3.45). Deze vergelijking wordt dus gereduceerd tot:

$$w = e^{-\mu\xi} \{D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)\} \quad (3.47)$$

Deze vergelijking heeft het karakter van een gedempte golf⁵ en zou ook zo geformuleerd kunnen worden. Door de aanwezigheid van een faseconstante in deze vergelijking zorgt dit echter voor grote problemen voor het oplossen van de matrixvergelijking die in § 4.1 aan bod komt.

In de vorige paragraaf werd vermeld dat (3.37) fysisch onmogelijk zou zijn. Even ter herinnering:

$$w = D_1 \cos\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_2 \sin\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_3 \cos\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_4 \sin\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} \quad (3.37)$$

Zoals duidelijk te zien is dempt de oplossing niet uit, zoals wel te verwachten valt. Door de kniklast van de halfoneindig lange heipaal te bepalen, wordt aangetoond dat er helemaal geen fysisch mogelijke oplossingen zijn voor $\beta < \alpha^2$. Voor de ongeknikte halfoneindig lange heipaal moeten langs de gehele lengte de volgende voorwaarden gelden:

$$w(\xi) = e^{-\mu\xi} \{D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)\} = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{en: } \frac{dw(\xi)}{d\xi} = -\mu e^{-\mu\xi} \{D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)\} - \nu e^{-\mu\xi} \{D_1 \sin(\nu\xi) - D_2 \cos(\nu\xi)\} = 0 \quad (3.49)$$

Dit resulteert in de volgende matrixvergelijking:

$$\begin{pmatrix} \cos(\nu\xi) & \sin(\nu\xi) \\ -\mu \cos(\nu\xi) - \nu \sin(\nu\xi) & -\mu \sin(\nu\xi) + \nu \cos(\nu\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Een oplossing die niet gelijk is aan nul (waaruit de kniklast is af te leiden!) bestaat alleen maar als de determinant nul is:

$$-\mu \cos(\nu\xi)\sin(\nu\xi) + \nu \cos^2(\nu\xi) - \mu \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) + \nu \sin^2(\nu\xi) = \nu(\sin^2(\nu\xi) + \cos^2(\nu\xi)) = \nu$$

Er moet dus gelden:

$$\nu = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} = 0 \quad (3.51)$$

Dit is echter niet mogelijk, als de teller immers gelijk aan nul is geldt dat ook voor de noemer. Er moet dus een extra voorwaarde worden geformuleerd, zodat er een matrix ontstaat waarvan wel de nulstelling van de determinant kan worden opgelost. Dit kan door de tweede afgeleide van w naar ξ gelijk aan nul te stellen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = e^{-\mu\xi} \{ \mu^2(D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)) + \\ 2\mu\nu(D_1 \sin(\nu\xi) - D_2 \cos(\nu\xi)) - \nu^2(D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)) \} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

De voorwaarden (3.49) en (3.52) leveren de volgende matrixvergelijking:

$$\begin{pmatrix} -\mu \cos(\nu\xi) - \nu \sin(\nu\xi) & -\mu \sin(\nu\xi) + \nu \cos(\nu\xi) \\ \mu^2 \cos(\nu\xi) + 2\mu\nu \sin(\nu\xi) - \nu^2 \cos(\nu\xi) & \mu^2 \sin(\nu\xi) - 2\mu\nu \cos(\nu\xi) - \nu^2 \sin(\nu\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Uitwerking van de determinant levert:

$$\begin{aligned} \{-\mu^3 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) + 2\mu^2 \nu \cos^2(\nu\xi) + \mu \nu^2 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) - \mu^2 \nu \sin^2(\nu\xi) + \\ 2\mu \nu^2 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) + \nu^3 \sin^2(\nu\xi)\} - \{-\mu^3 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) - 2\mu^2 \nu \sin^2(\nu\xi) + \\ \mu \nu^2 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) + \mu^2 \nu \cos^2(\nu\xi) + 2\mu \nu^2 \sin(\nu\xi)\cos(\nu\xi) - \nu^3 \cos^2(\nu\xi)\} = \\ 2\mu^2 \nu - \mu^2 \nu + \nu^3 = \mu^2 \nu + \nu^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Oplossen levert:

$$\begin{aligned} \mu^2 \nu + \nu^3 &= 0 \\ \mu^2 &= -\nu^2 \\ \frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2} &= -\frac{\beta - \alpha^2}{2(\sqrt{\beta} - \alpha)} \\ \beta - 2\alpha\sqrt{\beta} + \alpha^2 &= -\beta + \alpha^2 \\ \beta &= \alpha\sqrt{\beta} \\ \alpha_k &= \sqrt{\beta} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Hiermee is een uitdrukking gevonden voor de knikkraft in de vorm van parameters waaruit de eerder gestelde conclusie blijkt: er is geen fysische oplossing van (3.14) voor $\beta < \alpha^2$ en (3.37) is dus fysisch onmogelijk.

3.5 Randvoorwaarden

Met de in § 3.3 en § 3.4 bepaalde oplossingen is de principevorm van uitbuiging verkregen van de heipaal. Voor het ontbreken van een normaaldrukkracht geldt voor:

$$0 < \xi < \lambda: w_1 = \frac{\gamma}{120} \xi^5 + \frac{C_1}{6} \xi^3 + \frac{C_2}{2} \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \quad (3.56)$$

$$\lambda < \xi < 1: w_2 = e^{-\eta \xi} \{D_1 \cos(\eta \xi) + D_2 \sin(\eta \xi)\} \quad (3.57)$$

$$\text{met: } 4\eta^4 = \beta$$

Bij aanwezigheid van een normaaldrukkracht geldt voor:

$$0 < \xi < \lambda: w_1 = C_1 + C_2 \xi + \frac{\gamma}{12\alpha} \xi^3 + C_3 \cos(\sqrt{2\alpha} \xi) + C_4 \sin(\sqrt{2\alpha} \xi) \quad (3.58)$$

$$\lambda < \xi < 1 \text{ en } \beta > \alpha^2: w_2 = e^{-\mu \xi} \{D_1 \cos(\nu \xi) + D_2 \sin(\nu \xi)\} \quad (3.59)$$

$$\text{met: } \mu = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}}; \quad \nu = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{\beta} - \alpha)}$$

Zoals duidelijk naar voren komt zijn er voor beide stelsels van oplossingen acht integratieconstanten die opgelost dienen te worden. Uit het mechanisch model kunnen vier randvoorwaarden, twee voor de paalkop en twee voor paalvoet, en vier overgangsvoorwaarden worden bepaald. Voor de paalkop ($\xi = 0$) geldt dat deze stijf is verbonden met een plaatsvast funderingsframe:

$$w_1(0) = 0 \quad (3.60)$$

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_1(0)}{d\xi} = 0 \quad (3.61)$$

Voor de ontgravingsdiepte ($\xi = \lambda$) gelden de volgende overgangsvoorwaarden:

$$w_1(\lambda) = w_2(\lambda) \quad \Rightarrow \quad w_1(\lambda) - w_2(\lambda) = 0 \quad (3.62)$$

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_1(\lambda)}{d\xi} - \frac{dw_2(\lambda)}{d\xi} = 0 \quad (3.63)$$

$$M_1(\lambda) = M_2(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 w_1(\lambda)}{d\xi^2} - \frac{d^2 w_2(\lambda)}{d\xi^2} = 0 \quad (3.64)$$

$$S_{z1}(\lambda) = S_{z2}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 w_1(\lambda)}{d\xi^3} - \frac{d^3 w_2(\lambda)}{d\xi^3} - \alpha \left\{ \frac{dw_1(\lambda)}{d\xi} - \frac{dw_2(\lambda)}{d\xi} \right\} = 0 \quad (3.65)$$

Bij de laatste voorwaarde is gebruik gemaakt van het feit dat, volgend uit (3.9):

$$S_z(\xi) \frac{L^3}{EI} = \frac{d^3 w}{d\xi^3} - \alpha \frac{dw}{d\xi} \quad (3.66)$$

Voor de paalvoet ($\xi = 1$) gelden geen randvoorwaarden.

Met deze zes rand- en overgangsvoorwaarden is het met Maple mogelijk de integratieconstanten in ieder geval numeriek op te lossen. Dit wordt behandeld in het volgende hoofdstuk.

4

Resultaten

4.1 Invoer in Maple

De vergelijkingen en randvoorwaarden die in het vorige hoofdstuk zijn bepaald worden in Maple ingevoerd. In de volgende paragraaf wordt uiteengezet hoe dit is gedaan. De input-regels met de rode letters zijn van het eerste-orde model ($\alpha = 0$) en die met de blauwe letters zijn van het tweede-orde model:

Ten eerste worden de parameters ingevoerd:

```
> restart; lambda:=0.5; gamma_:=1000000; beta:=10000000;
eta:=evalf((beta/4)^(1/4));
> restart; lambda:=0.5; gamma_:=1000000; alpha:=0.9*71.5495;
beta:=10000000; kappa:=evalf(sqrt(2*alpha));
mu:=evalf(sqrt((sqrt(beta)-alpha)/2)); nu:=evalf((sqrt(beta-
alpha^2)/sqrt(2*(sqrt(beta)-alpha))));
```

Vervolgens wordt de oplossing $w_1(\xi)$ voor het ontgraven deel gedefinieerd volgens (3.54) en (3.56) en de daarvan afgeleide grootheden $\varphi_1(\xi)$, $M_1(\xi)$ en $S_{z,l}(\xi)$, waarbij gebruik is gemaakt van de vergelijkingen (3.6), (3.7) en (3.8):

```
> w1:=gamma_/120*x^5+C1/6*x^3+C2/2*x^2+C3*x+C4;
phi1:=diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x);
S1divEI:=diff(M1divEI,x);
> w1:=C1+C2*x+gamma_/(12*alpha)*x^3+C3*cos(kappa*x)+C4*sin
(kappa *x); phi1:=diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x);
S1divEI:=diff(M1divEI,x)-2*alpha*phi1;
```

Hetzelfde gebeurt voor het ingegraven gedeelte volgens (3.55) en (3.57):

```
> w2:=exp(-eta*x)*(D1*cos(eta*x)+D2*sin(eta*x));
phi2:=diff(w2,x); M2divEI:=diff(phi2,x); S2divEI:=
diff(M2divEI,x);
> w2:=exp(-mu*x)*(D1*cos(nu*x)+D2*sin(nu*x)); phi2:=diff(w2,x);
M2divEI:=diff(phi2,x); S2divEI:=diff(M2divEI,x)-2*alpha*phi2;
```

Vervolgens worden de randvoorwaarden voor de paalkop ingevoerd (vanaf hier zijn de invoerregels van beide modellen gelijk):

```
> x:=(0):eq1:=w1=0;eq2:=phi1=0;
```

En de overgangsvoorwaarden:

```
> x:=(lambda):eq3:=w1-w2=0;eq4:=phi1-phi2=0;eq5:=M1divEI-
M2divEI=0;eq6:=S1divEI-S2divEI=0;
```

Nu wordt er een matrixvergelijking opgesteld van het voorgaande:

```
> with(LinearAlgebra): sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6]:
var:=[C1,C2,C3,C4,D1,D2]: (A,b):=GenerateMatrix(sys,var);
```

Waarvan de oplossing wordt toegekend aan de hulpset R:

```
> R:= LinearSolve (A,b) ;
```

Vervolgens worden de oplossingen weer opnieuw gedefinieerd aan de hand van de geconcretiseerde integratieconstanten (die per model verschillen):

```
> w1:=gamma_/120*xi^5+R[1]/6*xi^3+R[2]/2*xi^2+R[3]*xi+R[4] ;
> w2:=exp(-eta*xi)*(R[5]*cos(eta*xi)+R[6]*sin(eta*xi)) ;
> w1:=R[1]+R[2]*xi+gamma_/(12*alpha)*xi^3+R[3]*cos(kappa*xi)+
R[4]*sin(kappa*xi) ;
> w2:=exp(-nu*xi)*(R[5]*cos(nu*xi)+R[6]*sin(nu*xi)) ;
```

Deze twee oplossingen worden samengevoegd, zodat er een grafiek kan worden gemaakt:

```
> w:=piecewise(0<=xi and xi<=lambda,w1,lambda<xi and xi<=1,w2) ;
> plot(w,xi=0..1) ;
```

Nu wordt met behulp van de methode van Newton-Raphson⁶ de maximale uitbuiging bepaald:

```
> a:=0; b:=lambda; phi:=diff(w1,xi) ;
> for i from 1 by 1 to 32 do xi:=(a+b)/2 ; if phi<0 then b:=xi
else a:= xi end if end do:
> xi;w1;
```

Met dit simulatiemodel kan voor verschillende parametersets de maximale uitbuiging worden bepaald, wat in de volgende paragraaf aan bod komt. In bijlage B zijn uitdraaien te vinden van de hierboven beschreven simulatiemodellen.

4.2 Parametersets

Nu er twee simulatiemodellen voorhanden zijn kunnen voor verschillende parametersets resultaten gegenereerd worden. Deze parametersets hebben de volgende vorm:

$$\{\lambda, \beta, \gamma\}$$

Waarbij aan de verschillende grootheden in de set de volgende waarden worden toegekend:

$$\begin{aligned}\lambda &= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \\ \beta &= 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 \\ \gamma &= 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6\end{aligned}$$

Bij het toekennen van deze waarden is tot op zekere hoogte gekeken naar realistische parameterwaarden, in zoverre dat de parametersets de in werkelijkheid voorkomende situaties dekken. Er komen dus ook hoogst onwaarschijnlijke combinaties voor, maar dat doet er niet toe voor het onderzoek.

4.3 Maximale uitbuiging

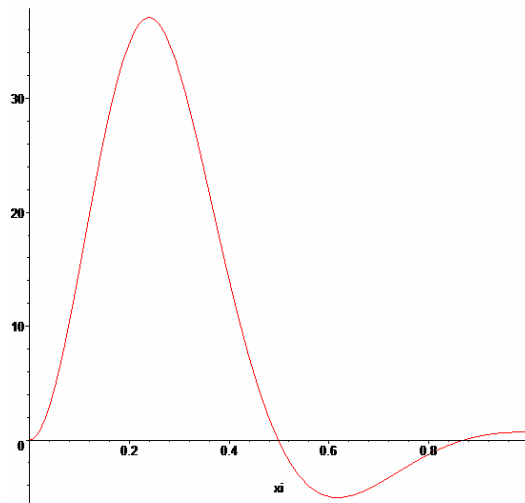
Voor elke parameterset wordt met het tweede-orde model door iteratie de knikkracht α_k bepaald (zie de derde uitdraai in bijlage B). Vervolgens wordt met het eerste-orde model de maximale eerste-orde uitbuiging berekend en achtereenvolgens wordt met het tweede-orde model voor tussenliggende waarden van α de maximale uitbuiging bepaald. Dit levert het volgende resultaat voor $\lambda = 0.3$ en $\beta = 10000$:

γ	α_i		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
10	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	0.00021	0.00022	0.00025	0.00028	0.00032	0.00037	0.00045	0.00058	0.00084	0.00161
100	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	0.00205	0.00224	0.00248	0.00278	0.00317	0.00371	0.00451	0.00583	0.00842	0.0161
1000	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	0.02052	0.02243	0.02478	0.02777	0.03169	0.03711	0.04511	0.05825	0.08416	0.16097
10000	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	0.2052	0.22427	0.24781	0.27767	0.31693	0.37108	0.45111	0.58251	0.84162	1.6097
100000	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	2.05198	2.24273	2.47813	2.77673	3.16927	3.71083	4.51107	5.82505	8.41618	16.097
1000000	85.9646	$\alpha =$	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	20.5198	22.4273	24.7813	27.7673	31.6927	37.1083	45.1107	58.2505	84.1618	160.97
A = $w_1/w_0 =$			1	1.09296	1.20768	1.3532	1.5445	1.80842	2.1984	2.83875	4.1015	7.84462
B = $n/(n-1) =$			1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
C = $(B-A)/B =$			0	0.01633	0.03385	0.05276	0.0733	0.09579	0.12064	0.14837	0.1797	0.21554

Tabel 4.2: $\lambda = 0.3$ en $\beta = 10000$

Wat direct opvalt, en wat ook volledig te verwachten is, is het lineaire verband tussen de maximale uitbuiging en de zijdelings belastingsparameter γ . Voor alle parametersets blijkt dit het geval en er kan dus gesteld worden dat de knikkraft en nauwkeurigheid van de methode $n/(n-1)$ onafhankelijk zijn van de parameter γ .

De nauwkeurigheid van de methode $n/(n-1)$ wordt bepaald door eerst de tweede-orde uitbuiging te delen door de eerste-orde uitbuiging dat A als resultaat heeft, en vervolgens de nauwkeurigheid te bepalen door het relatieve verschil C tussen A en $n/(n-1)$ ($=B$) ten opzichte van $n/(n-1)$ te bepalen.



Afbeelding 4.1: De uitbuiging behorende bij $\alpha_{50\%}$ uit tabel 1

Duidelijk is het uitdempende karakter te zien van de uitbuigingsvorm vanaf $\xi = 0.3$. In bijlage C zijn alle spreadsheets van de maximale uitbuiging voor alle parametersets te vinden, waarbij om beknopt te blijven γ op 1000000 is gesteld en niet meer wordt gevarieerd.

4.4 Knikkracht

Voor verschillende parametersets is er geen knikkracht vastgesteld die kleiner is dan $\sqrt{\beta}$. Dit betekent dat voor verschillende parameterwaarden de beddingconstante van de grond maatgevend is voor de grootte van de knikkracht. In de volgende tabel, waarin de knikkracht wordt gegeven voor verschillende parameterwaarden, zullen die waarden waarbij de beddingconstante maatgevend is, vetgedrukt worden.

		$\beta =$					
		100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\lambda =$	0.1	10	31.62278	100	316.2278	813.7147	1221.194
	0.2	10	31.62278	100	227.01	322.0939	387.5198
	0.3	10	31.62278	85.9646	132.1561	164.8348	186.4179
	0.4	10	31.62278	62.3416	84.4121	99.4576	109.1309
	0.5	10	31.62278	45.9336	58.2356	66.3999	71.5495

Tabel 4.2: Knikkracht α_k voor verschillende waarden van λ en β .

5

Conclusies

5.1 Formule Martens

Jasper Martens heeft in zijn thesis⁷ de volgende formule voor de bepaling van de kniklengte afgeleid voor een rollende inklemming:

$$l_{\text{buc}} = l + 1.6 \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} \quad (5.1)$$

Deze formule kan ook worden uitgedrukt in de dimensieloze parameters β en λ :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{buc}} &= \frac{l_{\text{buc}}}{L} = \frac{l}{L} + 1.6 \sqrt[4]{\frac{EI}{kL^4}} \\ \lambda_{\text{buc}} &= \lambda + 1.6 \sqrt[4]{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Het is interessant om te kijken of de resultaten die in het voorgaande hoofdstuk zijn gevonden overeenstemmen met de formule Martens. Daarom wordt de knikkracht berekend voor de parametersets uit § 4.2 aan de hand van (5.2). Daarvoor moet eerst de formule voor de knikkracht worden uitgedrukt in dimensieloze parameters:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_{\text{buc}}^2} \quad (5.4)$$

Bovenstaande formule wordt, met het feit dat Martens voor een vaste inklemming stelt dat λ_{buc} de helft is van de bovengenoemde waarde, als volgt omgezet:

$$\alpha_k = \frac{2\pi^2}{\lambda_{\text{buc}}^2} \quad (5.5)$$

Volgens Martens verkrijgen we de volgende tabel met knikkrachten:

		$\beta =$					
		100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\lambda =$	0.1					870.3628	1196.313
	0.2				234.7523	314.3257	378.2144
	0.3			93.28549	129.7947	160.5886	182.972
	0.4			62.94391	82.22097	97.21969	107.5287
	0.5			45.31499	56.71045	65.11229	70.68347

Tabel 5.1: Knikkrachten volgens Martens

Hierbij zijn de waarden van α_k die groter uitvielen dan $\sqrt{\beta}$ weggelaten. Van de waarden in tabel 5.1 wordt vervolgens het relatieve verschil in procenten berekend met de knikkracht uit tabel 4.2:

		$\beta =$					
		100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\lambda =$	0.1					6.961665	-2.03743
	0.2				3.410539	-2.41177	-2.40128
	0.3			8.516163	-1.7868	-2.57603	-1.84847
	0.4			0.966138	-2.59576	-2.25012	-1.46814
	0.5			-1.34675	-2.61893	-1.93918	-1.21039

Tabel 5.2: Relatieve verschil van knikkracht Martens met knikkracht Maplemodel in procenten

Alle waarden uit tabel 5.2 liggen in het toepasbaarheidsbereik van Martens en voldoen aan de voorwaarde die Martens voor dat bereik stelt (afwijking geschatte knikkracht mag niet groter zijn dan 10%). Andersom kan er voor de door het Maple-model gevonden knikkrachten gekeken wat de factor f is in de formule:

$$l_{\text{buc}} = l + f \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} \quad (5.7)$$

Enige substitutie van termen en vergelijkingen ombouwen levert:

$$f = \frac{\left\{ \sqrt{\frac{2\pi^2}{\alpha_k}} - \lambda \right\}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\beta}}} \quad (5.8)$$

Als dit wordt toegepast op de waarden van tabel 4.2 verkrijgen we:

		$\beta =$					
		100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\lambda =$	0.1					1.762978	1.526035
	0.2				1.687196	1.503856	1.444819
	0.3			1.79187	1.537765	1.456268	1.428495
	0.4			1.626987	1.486171	1.438777	1.422482
	0.5			1.555407	1.461707	1.430354	1.419606

Tabel 5.3: f -waarden volgens Maplemodel

Al met al kan worden gesteld dat Martens een heel degelijke formule heeft geformuleerd, als naar de resultaten in tabel 5.2 wordt gekeken. Voor het iteratief bepalen van α_k met het rekenmodel uit § 4.1 is met de formule van Martens een handige predictor voorhanden.

5.2 Nauwkeurigheid vergrotingsfactor

In deze paragraaf wordt gekeken naar de nauwkeurigheid van de methode $n/(n-1)$. Daartoe wordt gekeken naar de C-waarde (zie tabel 4.1) voor $\alpha_{70\%}$ van de onderzochte parametersets waarvoor geldt $\beta < \alpha^2$. Er is hier gekozen voor 70% van de knikkracht omdat deze waarde in de praktijk zelden wordt overschreden. Dit levert de volgende tabel:

		$\beta =$					
		100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\lambda =$	0.1					0.14136	0.05643
	0.2				0.11371	0.04793	0.02389
	0.3			0.14837	0.06081	0.02861	0.01756
	0.4			0.09113	0.0409	0.02146	0.01556
	0.5			0.06517	0.03086	0.01823	0.01474

Tabel 5.4: Nauwkeurigheid methode $n/(n-1)$ voor $\alpha_{70\%}$

De belangrijkste conclusie is dat de methode $n/(n-1)$ in alle in dit rapport onderzocht gevallen conservatief is (zie ook bijlage C). Wat duidelijk opvalt is dat naarmate β en λ toenemen de methode $n/(n-1)$ nauwkeuriger wordt. Vooral bij $\lambda = 0.1$ zit de vergrotingsfactor er redelijk ver naast. Om de verschillende nauwkeurigheidsbereiken inzichtelijker te maken worden de waarden waar de vergrotingsfactor er meer dan 10% naast zit zijn rood gekleurd, meer dan 5% oranje, meer dan 2% goud en minder dan 2% geel.

Er is hier gekozen om met kleuren de verschillende nauwkeurigheidsbereiken weer te geven. Lineaire interpolatie is immers hier geen eenvoudige zaak, door de logaritmische schaal van β en, als er met $\log\beta$ en λ als variabelen wordt gewerkt, door de grote verschillen tussen de uitkomsten bij de keuze naar welke variabele eerst wordt geïnterpoleerd.

Een nadeel voor het gebruik van deze tabel is dat de gebruiker de echte knikkracht moet kennen en dat hier (nog) geen eenduidige formule voor is.

5.3 Slotconclusie

Mits de werkelijke knikkracht gebruikt wordt voor het bepalen van de vergrotingsfactor levert dit in elk onderzocht geval conservatieve resultaten op voor de maximale uitbuiging. Voor die waarden waarvoor Martens een onderschatting geeft van de knikkracht (tabel 5.2) geeft de vergrotingsfactor ook een overschatting voor de maximale uitbuiging. Naarmate de bedding-constante en ontgraven lengte groter worden, wordt de vergrotingsfactor nauwkeuriger.

6

Aanbevelingen

6.1 Knikkracht

Martens heeft met zijn bepaling van de knikkracht geen slecht werk gedaan. Misschien is het mogelijk in de toekomst een nog nauwkeurigere uitdrukking te krijgen voor de knikkracht voor gedeeltelijk ontgraven heipalen. Een eventuele mogelijkheid is de kniklengte te onderzoeken van verschillende gevallen en vervolgens de knikkracht te bepalen met de Eulerse knikformule (5.4). In bijlage D is een opzet gegeven van een Maple-model waarmee de kniklengte kan worden bepaald. Misschien is het mogelijk een analytische of empirische formule te destilleren voor de kniklengte en daarmee een knikkracht te bepalen en die vervolgens te vergelijken met de werkelijke knikkracht.

6.2 Nauwkeurigheid

Stel dat er een nauwkeurigere uitdrukking voor de knikkracht wordt gevonden. Dan is het wellicht zinnig om voor verschillende waarden voor α/α_k grafieken met iso-nauwkeurigheidslijnen te maken in een $\lambda, {}^{10}\log\beta$ assenstelsel. Zo kan relatief snel de vergrotingsfactor worden bepaald zonder een rekenmodel in Maple uit te voeren.

6.3 Numerieke methoden

In werkelijkheid vertoont grond niet-lineair elastisch gedrag⁸. Dit kan met een numeriek model omschreven worden. Grond heeft de neiging stijver te worden naarmate het meer ingedrukt wordt. Bij een grote eerste-orde uitbuiging zal grond dus stijver gedrag vertonen en zal de knikkracht groter zijn en zullen tweede-orde uitbuigingen kleiner zijn. Een dergelijk model zal nog veel beter in staat zijn het werkelijke vervormgedrag van de ligger te voorspellen dan het in dit rapport beschreven analytische model en is het dus zeker waard nader uitgewerkt te worden.

A

Verificatie der oplossingen

In deze bijlage wordt veelvuldig gebruikt gemaakt van Maple om de afgeleiden te bepalen van de gevonden oplossingen. Deze bepaalde afgeleiden worden vervolgens gesubstitueerd in behorende differentiaalvergelijkingen. Vervolgens zal dan algebraïsch worden aangetoond dat de gevonden oplossingen kloppen.

$\beta = 0; \alpha = 0:$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = \gamma \xi \quad (3.16)$$

$$w = \frac{\gamma}{120} \xi^5 + \frac{C_1}{6} \xi^3 + \frac{C_2}{2} \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \quad (3.17)$$

Maple geeft:

```
> w:= gamma/120*xi^5+C1/6*xi^3+C2/2*xi^2+C3*xi+C4;
```

$$w := \frac{\gamma \xi^5}{120} + \frac{C1 \xi^3}{6} + \frac{C2 \xi^2}{2} + C3 \xi + C4$$

```
> diff(w,xi$4);
```

$$\gamma \xi$$

De output van Maple staat (3.17) als geldige oplossing voor w in (3.16).

$\gamma = 0; \alpha = 0:$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \beta w = 0 \quad (3.18)$$

$$w = e^{\eta \xi} \{D_1 \cos(\eta \xi) + D_2 \sin(\eta \xi)\} + e^{-\eta \xi} \{D_3 \cos(\eta \xi) + D_4 \sin(\eta \xi)\} \quad (3.22)$$

$$\text{met: } 4\eta^4 = \beta \quad (3.19)$$

Maple geeft:

```
> w:=exp(eta*xi)*(D1*cos(eta*xi)+D2*sin(eta*xi))+exp(-eta*xi)*(D3*cos(eta*xi)+D4*sin(eta*xi));
```

$$w := e^{(\eta \xi)} (D1 \cos(\eta \xi) + D2 \sin(\eta \xi)) + e^{(-\eta \xi)} (D3 \cos(\eta \xi) + D4 \sin(\eta \xi))$$

```
> diff(w,xi$4)+4*eta^4*w;
```

```
>
```

$$\begin{aligned}
 & \eta^4 e^{(\eta \xi)} (D1 \cos(\eta \xi) + D2 \sin(\eta \xi)) + 4 \eta^3 e^{(\eta \xi)} (-D1 \sin(\eta \xi) \eta + D2 \cos(\eta \xi) \eta) \\
 & + 6 \eta^2 e^{(\eta \xi)} (-D1 \cos(\eta \xi) \eta^2 - D2 \sin(\eta \xi) \eta^2) \\
 & + 4 \eta e^{(\eta \xi)} (D1 \sin(\eta \xi) \eta^3 - D2 \cos(\eta \xi) \eta^3) \\
 & + e^{(\eta \xi)} (D1 \cos(\eta \xi) \eta^4 + D2 \sin(\eta \xi) \eta^4) + \eta^4 e^{(-\eta \xi)} (D3 \cos(\eta \xi) + D4 \sin(\eta \xi)) \\
 & - 4 \eta^3 e^{(-\eta \xi)} (-D3 \sin(\eta \xi) \eta + D4 \cos(\eta \xi) \eta) \\
 & + 6 \eta^2 e^{(-\eta \xi)} (-D3 \cos(\eta \xi) \eta^2 - D4 \sin(\eta \xi) \eta^2) \\
 & - 4 \eta e^{(-\eta \xi)} (D3 \sin(\eta \xi) \eta^3 - D4 \cos(\eta \xi) \eta^3) \\
 & + e^{(-\eta \xi)} (D3 \cos(\eta \xi) \eta^4 + D4 \sin(\eta \xi) \eta^4) \\
 & + 4 \eta^4 (e^{(\eta \xi)} (D1 \cos(\eta \xi) + D2 \sin(\eta \xi)) + e^{(-\eta \xi)} (D3 \cos(\eta \xi) + D4 \sin(\eta \xi)))
 \end{aligned}$$

Gebruikmakend van:

$$\begin{aligned}
 A &= D_1 e^{(\eta \xi)} \cos(\eta \xi) & E &= D_3 e^{(-\eta \xi)} \cos(\eta \xi) \\
 B &= D_2 e^{(\eta \xi)} \sin(\eta \xi) & F &= D_4 e^{(-\eta \xi)} \sin(\eta \xi) \\
 C &= D_1 e^{(\eta \xi)} \sin(\eta \xi) & G &= D_3 e^{(-\eta \xi)} \sin(\eta \xi) \\
 D &= D_2 e^{(\eta \xi)} \cos(\eta \xi) & H &= D_4 e^{(-\eta \xi)} \cos(\eta \xi)
 \end{aligned}$$

wordt de laatste output van Maple:

$$\begin{aligned}
 & \eta^4(A+B) + 4\eta^4(C+D) + 6\eta^4(A+B) + 4\eta^4(C+D) + \eta^4(A+B) + \\
 & \eta^4(E+F) - 4\eta^4(G+H) + 6\eta^4(E+F) - 4\eta^4(G+H) + \eta^4(E+F) + \\
 & 4\eta^4(A+B) + 4\eta^4(C+D) = \\
 & \eta^4 \{ (1 - 6 + 1 + 4)(A+B+E+F) + (4 - 4)(-C+D-G+H) \} = 0
 \end{aligned}$$

Hiermee is bepaald dat (3.22) een geldige oplossing is voor (3.18).

$\beta = 0$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \gamma \xi \quad (3.23)$$

$$w = C_1 + C_2 \xi + \frac{\gamma}{12\alpha} \xi^3 + C_3 \cos(\sqrt{2\alpha} \xi) + C_4 \sin(\sqrt{2\alpha} \xi) \quad (3.28)$$

Maple geeft:

>

**w:=C1+C2*xi+gamma/(12*alpha)*xi^3+C3*cos(sqrt(2*alpha)*xi)+C4*
sin(sqrt(2*alpha)*xi);**

$$w := C1 + C2 \xi + \frac{\gamma \xi^3}{12 \alpha} + C3 \cos(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi) + C4 \sin(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi)$$

> **diff(w,xi\$4)+2*alpha*diff(w,xi\$2);**

$$\begin{aligned}
 & 4 C3 \cos(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi) \alpha^2 + 4 C4 \sin(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi) \alpha^2 \\
 & + 2 \alpha \left(\frac{\gamma \xi}{2 \alpha} - 2 C3 \cos(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi) \alpha - 2 C4 \sin(\sqrt{2} \sqrt{\alpha} \xi) \alpha \right)
 \end{aligned}$$

De laatste output geeft na uitwerken en wegstrepen als uitkomst $\gamma\xi$. Hiermee is bepaald dat (3.28) een geldige oplossing is van (3.23).

$\gamma = 0; \beta < \alpha^2$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta w = 0 \quad (3.29)$$

$$w = D_1 \cos\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_2 \sin\{\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_3 \cos\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} + D_4 \sin\{\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \xi\} \quad (3.35)$$

Er wordt gebruik gemaakt van de volgende hulpparameters:

$$\tau = \sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \quad \text{en} \quad \upsilon = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}$$

Maple geeft:

```
>
w:=D1*cos(tau*xi)+D2*sin(tau*xi)+D3*cos(upsilon*xi)+D4*sin(upsilon*xi);
```

$$w := D1 \cos(\tau \xi) + D2 \sin(\tau \xi) + D3 \cos(\upsilon \xi) + D4 \sin(\upsilon \xi)$$

```
> diff(w,xi$4)+2*a*diff(w,xi$2)+b*w;
```

$$D1 \cos(\tau \xi) \tau^4 + D2 \sin(\tau \xi) \tau^4 + D3 \cos(\upsilon \xi) \upsilon^4 + D4 \sin(\upsilon \xi) \upsilon^4 + 2\alpha (-D1 \cos(\tau \xi) \tau^2 - D2 \sin(\tau \xi) \tau^2 - D3 \cos(\upsilon \xi) \upsilon^2 - D4 \sin(\upsilon \xi) \upsilon^2) + b (D1 \cos(\tau \xi) + D2 \sin(\tau \xi) + D3 \cos(\upsilon \xi) + D4 \sin(\upsilon \xi))$$

Gebruikmakend van:

$$\begin{aligned} A &= D1 \cos(\tau \xi) & C &= D3 \cos(\upsilon \xi) \\ B &= D2 \sin(\tau \xi) & D &= D4 \sin(\upsilon \xi) \end{aligned}$$

wordt de laatste output van Maple:

$$\{\tau^4 - 2\alpha\tau^2 + \beta\}(A+B) + \{\upsilon^4 - 2\alpha\upsilon^2 + \beta\}(C+D) = 0$$

Er moet dus gelden:

$$\tau^4 - 2\alpha\tau^2 + \beta = 0 \quad (A.1)$$

$$\upsilon^4 - 2\alpha\upsilon^2 + \beta = 0 \quad (A.2)$$

Uitwerken van (A.1) levert op:

$$\begin{aligned} (\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}})^4 + 2\alpha(\sqrt{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}})^2 + \beta = \\ \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \alpha^2 - \beta - 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \beta = 0 \end{aligned}$$

Uitwerken van (A.2) levert op:

$$\begin{aligned} (\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}})^4 + 2\alpha(\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}})^2 + \beta = \\ \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \alpha^2 - \beta - 2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta} + \beta = 0 \end{aligned}$$

Hiermee is bepaald dat (3.35) een wiskundig geldige oplossing is voor (3.29).

$\gamma = 0; \beta > \alpha^2$:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta w = 0 \quad (3.29)$$

$$w = e^{\mu\xi} \{D_1 \cos(\nu\xi) + D_2 \sin(\nu\xi)\} + e^{-\mu\xi} \{D_3 \cos(\nu\xi) + D_4 \sin(\nu\xi)\} \quad (3.43)$$

$$\text{Met: } \mu = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}}; \quad \nu = \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} \quad (3.41)$$

Maple geeft:

```
> w:=exp(mu*xi)*(D1*cos(nu*xi)+D2*sin(nu*xi))+exp(-
mu*xi)*(D3*cos(nu*xi)+D4*sin(nu*xi));
```

$$w := e^{(\mu \xi)} (D1 \cos(\nu \xi) + D2 \sin(\nu \xi)) + e^{(-\mu \xi)} (D3 \cos(\nu \xi) + D4 \sin(\nu \xi))$$

```
> diff(w,xi$4)+2*alpha*diff(w,xi$2)+beta*w;
```

$$\begin{aligned} & \mu^4 e^{(\mu \xi)} (D1 \cos(\nu \xi) + D2 \sin(\nu \xi)) + 4 \mu^3 e^{(\mu \xi)} (-D1 \sin(\nu \xi) \nu + D2 \cos(\nu \xi) \nu) \\ & + 6 \mu^2 e^{(\mu \xi)} (-D1 \cos(\nu \xi) \nu^2 - D2 \sin(\nu \xi) \nu^2) \\ & + 4 \mu e^{(\mu \xi)} (D1 \sin(\nu \xi) \nu^3 - D2 \cos(\nu \xi) \nu^3) \\ & + e^{(\mu \xi)} (D1 \cos(\nu \xi) \nu^4 + D2 \sin(\nu \xi) \nu^4) + \mu^4 e^{(-\mu \xi)} (D3 \cos(\nu \xi) + D4 \sin(\nu \xi)) \\ & - 4 \mu^3 e^{(-\mu \xi)} (-D3 \sin(\nu \xi) \nu + D4 \cos(\nu \xi) \nu) \\ & + 6 \mu^2 e^{(-\mu \xi)} (-D3 \cos(\nu \xi) \nu^2 - D4 \sin(\nu \xi) \nu^2) \\ & - 4 \mu e^{(-\mu \xi)} (D3 \sin(\nu \xi) \nu^3 - D4 \cos(\nu \xi) \nu^3) \\ & + e^{(-\mu \xi)} (D3 \cos(\nu \xi) \nu^4 + D4 \sin(\nu \xi) \nu^4) + 2 \alpha (\\ & \mu^2 e^{(\mu \xi)} (D1 \cos(\nu \xi) + D2 \sin(\nu \xi)) + 2 \mu e^{(\mu \xi)} (-D1 \sin(\nu \xi) \nu + D2 \cos(\nu \xi) \nu) \\ & + e^{(\mu \xi)} (-D1 \cos(\nu \xi) \nu^2 - D2 \sin(\nu \xi) \nu^2) \\ & + \mu^2 e^{(-\mu \xi)} (D3 \cos(\nu \xi) + D4 \sin(\nu \xi)) \\ & - 2 \mu e^{(-\mu \xi)} (-D3 \sin(\nu \xi) \nu + D4 \cos(\nu \xi) \nu) \\ & + e^{(-\mu \xi)} (-D3 \cos(\nu \xi) \nu^2 - D4 \sin(\nu \xi) \nu^2)) \\ & + \beta (e^{(\mu \xi)} (D1 \cos(\nu \xi) + D2 \sin(\nu \xi)) + e^{(-\mu \xi)} (D3 \cos(\nu \xi) + D4 \sin(\nu \xi))) \end{aligned}$$

Gebruikmakend van:

$$\begin{aligned} A &= D_1 e^{(\mu\xi)} \cos(\nu\xi) \\ B &= D_2 e^{(\mu\xi)} \sin(\nu\xi) \\ C &= D_1 e^{(\mu\xi)} \sin(\nu\xi) \\ D &= D_2 e^{(\mu\xi)} \cos(\nu\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= D_3 e^{(-\mu\xi)} \cos(\nu\xi) \\ F &= D_4 e^{(-\mu\xi)} \sin(\nu\xi) \\ G &= D_3 e^{(-\mu\xi)} \sin(\nu\xi) \\ H &= D_4 e^{(-\mu\xi)} \cos(\nu\xi) \end{aligned}$$

wordt de laatste output van Maple:

$$\begin{aligned} & \mu^4 (A+B) - 4 \mu^3 \nu (C-D) - 6 \mu^2 \nu^2 (A+B) + 4 \mu \nu^3 (C-D) + \nu^4 (A+B) + \\ & \mu^4 (E+F) + 4 \mu^3 \nu (G-H) - 6 \mu^2 \nu^2 (E+F) - 4 \mu \nu^3 (G-H) + \nu^4 (E+F) + \\ & 2 \alpha \mu^2 (A+B) - 4 \alpha \mu \nu (C-D) + 2 \alpha \nu^2 (A+B) + \\ & 2 \alpha \mu^2 (A+B) - 4 \alpha \mu \nu (C-D) + 2 \alpha \nu^2 (A+B) + \beta (A+B+C+D) = \end{aligned}$$

$$\{\mu^4 - 6\mu^2 v^2 + v^4 + 2\alpha\mu^2 - 2\alpha v^2 + \beta\}(A+B+E+F) + \\ \{-4\mu^3 v + 4\mu v^3 - 4\alpha\mu v\}(C-D-G+H) = 0$$

Er moet dus gelden:

$$\mu^4 - 6\mu^2 v^2 + v^4 + 2\alpha\mu^2 - 2\alpha v^2 + \beta = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$-4\mu^3 v + 4\mu v^3 - 4\alpha\mu v = 0 \quad (\text{A.4})$$

Met behulp van:

$$\mu^4 = \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}} \right\}^4 = \frac{1}{4} (\beta - 2\alpha\sqrt{\beta} + \alpha^2)$$

$$\mu^2 v^2 = \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2}} \right\}^2 * \left\{ \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} \right\}^2 = \frac{1}{4} (\beta - \alpha^2)$$

$$v^4 = \left\{ \frac{\sqrt{\beta - \alpha^2}}{\sqrt{2(\sqrt{\beta} - \alpha)}} \right\}^4 = \frac{1}{4} \frac{\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^4}{\beta - 2\alpha\sqrt{\beta} + \alpha^2}$$

$$\alpha\mu^2 = \frac{1}{2} (\alpha\sqrt{\beta} - \alpha^2)$$

$$\alpha v^2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \alpha^3}{\sqrt{\beta} - \alpha}$$

kan A.3 verder worden uitgewerkt:

$$\frac{1}{4} \{\sqrt{\beta} - \alpha\}^2 - \frac{3}{2} (\beta - \alpha^2) + \frac{1}{4} \frac{\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^4}{\{\sqrt{\beta} - \alpha\}^2} +$$

$$(\alpha\sqrt{\beta} - \alpha^2) - \frac{\alpha\beta - \alpha^3}{\sqrt{\beta} - \alpha} + \beta = 0$$

Deze uitdrukking kan worden vermenigvuldigd met $\{\sqrt{\beta} - \alpha\}^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \{\sqrt{\beta} - \alpha\}^4 - \frac{3}{2} (\beta - \alpha^2) \{\sqrt{\beta} - \alpha\}^2 + \frac{1}{4} (\beta - \alpha^2)^2 + \alpha \{\sqrt{\beta} - \alpha\}^3 - \\ & \alpha(\beta - \alpha^2) \{\sqrt{\beta} - \alpha\} + \beta \{\sqrt{\beta} - \alpha\}^2 = \\ & \frac{1}{4} (\beta^2 - 4\alpha\beta\sqrt{\beta} + 6\alpha^2\beta - 4\alpha^3\sqrt{\beta} + \alpha^4) - \frac{3}{2} (\beta^2 - 2\alpha\beta\sqrt{\beta} + 2\alpha^3\sqrt{\beta} - \alpha^4) + \\ & \frac{1}{4} (\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^4) + (\alpha\beta\sqrt{\beta} - 3\alpha^2\beta + 3\alpha^3\sqrt{\beta} - \alpha^4) - \\ & (\alpha\beta\sqrt{\beta} - \alpha^2\beta - \alpha^3\sqrt{\beta} + \alpha^4) + (\beta^2 - 2\alpha\beta\sqrt{\beta} + \alpha^2\beta) = \\ & \beta^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + 1 \right) + \alpha\beta\sqrt{\beta} (-1 + 3 + 1 - 1 - 2) + \alpha^2\beta \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 1 + 1 \right) + \\ & \alpha^3\sqrt{\beta} (-1 - 3 + 3 + 1) + \alpha^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Verder uitwerken van A.4 geeft:

$$-4\mu^3\nu + 4\mu\nu^3 - 4\alpha\mu\nu = 0$$

$$-\mu^2 + \nu^2 - \alpha = 0$$

$$-\frac{\sqrt{\beta} - \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha^2}{2(\sqrt{\beta} - \alpha)} = \alpha$$

$$-(\sqrt{\beta} - \alpha)^2 + \beta - \alpha^2 = 2\alpha(\sqrt{\beta} - \alpha)$$

$$-\beta + 2\alpha\sqrt{\beta} - \alpha^2 + \beta - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{\beta} - 2\alpha^2$$

Hiermee is bepaald dat (3.43) een geldige oplossing is voor (3.29).

B

Maple-output

Een uitdraai van het eerste-orde model:

```
> restart; lambda:=0.5; gamma_:=1000000; beta:=10000000;
eta:=evalf((beta/4)^(1/4));
      λ := 0.5
      gamma_ := 1000000
      β := 10000000
      η := 39.76353645

> w1:=gamma_/120*x^5+C1/6*x^3+C2/2*x^2+C3*x+C4; phi1:=
diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x); S1divEI:=diff(M1divEI,x);
      w1 :=  $\frac{25000x^5}{3} + \frac{C1x^3}{6} + \frac{C2x^2}{2} + C3x + C4$ 
      φ1 :=  $\frac{125000x^4}{3} + \frac{C1x^2}{2} + C2x + C3$ 
      M1divEI :=  $\frac{500000}{3}x^3 + C1x + C2$ 
      S1divEI :=  $500000x^2 + C1$ 

> w2:=exp(-eta*x)*(D1*cos(eta*x)+D2*sin(eta*x)); phi2:=
diff(w2,x); M2divEI:=diff(phi2,x); S2divEI:=diff(M2divEI,x);
      w2 :=  $e^{(-39.76353645x)} (D1 \cos(39.76353645x) + D2 \sin(39.76353645x))$ 
      φ2 :=  $-39.76353645 e^{(-39.76353645x)} (D1 \cos(39.76353645x) + D2 \sin(39.76353645x)) +$ 
 $e^{(-39.76353645x)} (-39.76353645 D1 \sin(39.76353645x) + 39.76353645 D2 \cos(39.76353645x))$ 
      M2divEI :=
       $1581.138831 e^{(-39.76353645x)} (D1 \cos(39.76353645x) + D2 \sin(39.76353645x)) -$ 
 $79.52707290 e^{(-39.76353645x)}$ 
 $(-39.76353645 D1 \sin(39.76353645x) + 39.76353645 D2 \cos(39.76353645x)) +$ 
 $e^{(-39.76353645x)}$ 
 $(-1581.138831 D1 \cos(39.76353645x) - 1581.138831 D2 \sin(39.76353645x))$ 
```

$S2divEI :=$

$$\begin{aligned} & -62871.67154 e^{(-39.76353645x)} (D1 \cos(39.76353645x) + D2 \sin(39.76353645x)) + \\ & 4743.416493 e^{(-39.76353645x)} \\ & (-39.76353645 D1 \sin(39.76353645x) + 39.76353645 D2 \cos(39.76353645x)) - \\ & 119.2906094 e^{(-39.76353645x)} \\ & (-1581.138831 D1 \cos(39.76353645x) - 1581.138831 D2 \sin(39.76353645x)) + \\ & e^{(-39.76353645x)} \\ & (62871.67154 D1 \sin(39.76353645x) - 62871.67154 D2 \cos(39.76353645x)) \end{aligned}$$

> $x := (0) : eq1 := w1 = 0 ; eq2 := phi1 = 0 ;$

$$eq1 := C4 = 0$$

$$eq2 := C3 = 0$$

> $x := (lambda) : eq3 := w1 - w2 = 0 ; eq4 := phi1 - phi2 = 0 ; eq5 := M1divEI - M2divEI = 0 ; eq6 := S1divEI - S2divEI = 0 ;$

$$eq3 := 260.4166667 + 0.02083333333 C1 + 0.1250000000 C2 + 0.5 C3 + C4 - 0.1189893904 10^{-8} D1 - 0.1991432564 10^{-8} D2 = 0$$

$$eq4 := 2604.166667 + 0.1250000000 C1 + 0.5 C2 + C3 + 0.1265007910 10^{-6} D1 + 0.3187201173 10^{-7} D2 = 0$$

$$eq5 := 20833.33333 + 0.5 C1 + C2 - 0.6297462711 10^{-5} D1 + 0.3762774912 10^{-5} D2 = 0$$

$$eq6 := 125000.00 + C1 + 0.0001007881507 D1 - 0.0004000306255 D2 = 0$$

> $with(LinearAlgebra) : sys := [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6] :$
 $var := [C1, C2, C3, C4, D1, D2] : (A, b) := GenerateMatrix(sys, var) ;$

$$\begin{aligned} & A, b := \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02083333333 & 0.1250000000 & 0.5 & 1 & -0.1189893904 10^{-8} & -0.1991432564 10^{-8} \\ 0.1250000000 & 0.5 & 1 & 0 & 0.1265007910 10^{-6} & 0.3187201173 10^{-7} \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & -0.6297462711 10^{-5} & 0.3762774912 10^{-5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.0001007881507 & -0.0004000306255 \end{bmatrix} \\ & , \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -260.4166667 \\ -2604.166667 \\ -20833.33333 \\ -125000.00 \end{bmatrix} \end{aligned}$$


```
> R:=LinearSolve(A,b);
```

$$R := \begin{bmatrix} -41357.0384555932979 \\ 4827.43210851696495 \\ 0. \\ 0. \\ 0.10784350444269523610^{10} \\ 0.48080427612728256010^9 \end{bmatrix}$$

```
> w1:=gamma_/120*xi^5+R[1]/6*xi^3+R[2]/2*xi^2+R[3]*xi+R[4];
```

$$w1 := \frac{25000}{3} \xi^5 - 6892.839743 \xi^3 + 2413.716054 \xi^2$$

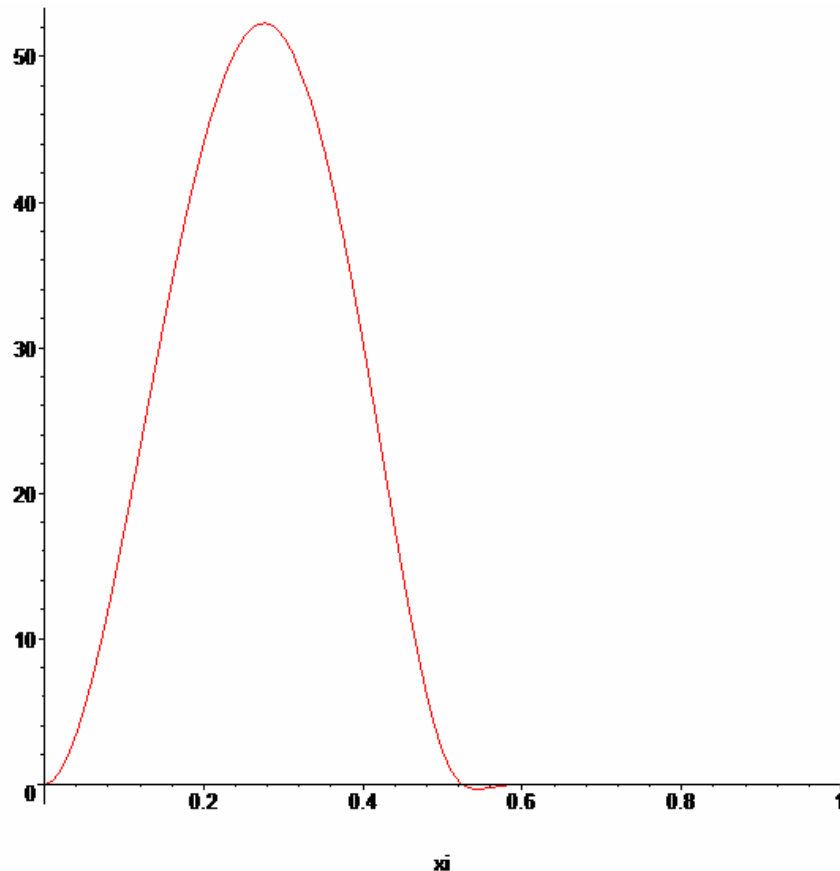
```
> w2:=exp(-eta*xi)*(R[5]*cos(eta*xi)+R[6]*sin(eta*xi));
```

$$w2 := e^{(-39.76353645\xi)} (0.10784350444269523610^{10} \cos(39.76353645 \xi) + 0.48080427612728256010^9 \sin(39.76353645 \xi))$$

```
> w:=piecewise(0<=xi and xi<=lambda,w1,lambda<xi and xi<=1,w2);
```

$$w := \begin{cases} \frac{25000}{3} \xi^5 - 6892.839743 \xi^3 + 2413.716054 \xi^2, & -\xi \leq 0 \text{ and } \xi - 0.5 \leq 0 \\ e^{(-39.76353645\xi)} (0.10784350444269523610^{10} \cos(39.76353645 \xi) + 0.48080427612728256010^9 \sin(39.76353645 \xi)), & -\xi < -0.5 \text{ and } \xi - 1 \leq 0 \end{cases}$$

```
> plot(w,xi=0..1);
```



```
> a:=0; b:=lambda; phi:=diff(w1,xi);
      a := 0
      b := 0.5

$$\phi := \frac{125000}{3} \xi^4 - 20678.51923 \xi^2 + 4827.432108 \xi$$

> for i from 1 by 1 to 32 do xi:=(a+b)/2 ; if phi<0 then b:=xi
else a:= xi end if end do:
> xi;w1;
      0.2756583905
      52.2947818
```

Nu volgt een uitdraai van het tweede-orde model met dezelfde parameters en $\alpha = 0.5\alpha_k$:

```
> restart; lambda:=0.5; gamma_:=1000000; alpha:=0.5*71.5495;
beta:=10000000; kappa:=evalf(sqrt(2*alpha)); mu:=evalf
(sqrt((sqrt(beta)-alpha)/2)); nu:=evalf((sqrt(beta-alpha^2)
/sqrt(2*(sqrt(beta)-alpha))));
      λ := 0.5
      gamma_ := 1000000
      α := 35.77475
      β := 10000000
      κ := 8.458693753
      μ := 39.53797485
      ν := 39.98782570
>
w1:=C1+C2*x+gamma_/(12*alpha)*x^3+C3*cos(kappa*x)+C4*sin(kappa
*x); phi1:=diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x); S1divEI:=diff
(M1divEI,x)-2*alpha*phi1;
      w1 := C1 + C2 x + 2329.389677 x^3 + C3 cos(8.458693753 x) + C4 sin(8.458693753 x)

$$\phi_1 := C_2 + 6988.169031 x^2 - 8.458693753 C_3 \sin(8.458693753 x) + 8.458693753 C_4 \cos(8.458693753 x)$$


$$M1divEI := 13976.33806 x - 71.54950001 C_3 \cos(8.458693753 x) - 71.54950001 C_4 \sin(8.458693753 x)$$


$$S1divEI := 13976.33806 + 1210.430617 C_3 \sin(8.458693753 x) - 1210.430617 C_4 \cos(8.458693753 x) - 71.54950 C_2 - 500000.0000 x^2$$

> w2:=exp(-mu*x)*(D1*cos(nu*x)+D2*sin(nu*x)); phi2:=diff(w2,x);
M2divEI:=diff(phi2,x); S2divEI:=diff(M2divEI,x)-2*alpha*phi2;
      w2 := e(-39.53797485x) (D1 cos(39.98782570x) + D2 sin(39.98782570x))
```

$$\phi_2 := -39.53797485 e^{(-39.53797485x)} (D1 \cos(39.98782570x) + D2 \sin(39.98782570x)) + e^{(-39.53797485x)} (-39.98782570 D1 \sin(39.98782570x) + 39.98782570 D2 \cos(39.98782570x))$$

$M2divEI :=$

$$1563.251455 e^{(-39.53797485x)} (D1 \cos(39.98782570x) + D2 \sin(39.98782570x)) - 79.07594970 e^{(-39.53797485x)} (-39.98782570 D1 \sin(39.98782570x) + 39.98782570 D2 \cos(39.98782570x)) + e^{(-39.53797485x)} (-1599.026204 D1 \cos(39.98782570x) - 1599.026204 D2 \sin(39.98782570x))$$

$S2divEI :=$

$$-58978.87438 e^{(-39.53797485x)} (D1 \cos(39.98782570x) + D2 \sin(39.98782570x)) + 4618.204865 e^{(-39.53797485x)} (-39.98782570 D1 \sin(39.98782570x) + 39.98782570 D2 \cos(39.98782570x)) - 118.6139246 e^{(-39.53797485x)} (-1599.026204 D1 \cos(39.98782570x) - 1599.026204 D2 \sin(39.98782570x)) + e^{(-39.53797485x)} (63941.58114 D1 \sin(39.98782570x) - 63941.58114 D2 \cos(39.98782570x))$$

> $x := (0) : eq1 := w1 = 0 ; eq2 := phi1 = 0 ;$

$$eq1 := C1 + 1. C3 = 0$$

$$eq2 := C2 + 8.458693753 C4 = 0$$

> $x := (\lambda) : eq3 := w1 - w2 = 0 ; eq4 := phi1 - phi2 = 0 ; eq5 := M1divEI - M2divEI = 0 ; eq6 := S1divEI - S2divEI = 0 ;$

$$eq3 := C1 + 0.5 C2 + 291.1737096 - 0.4644753658 C3 - 0.8855860402 C4 - 0.1074117191 10^{-8} D1 - 0.2364238199 10^{-8} D2 = 0$$

$$eq4 := C2 + 1747.042258 + 7.490901106 C3 - 3.928854875 C4 + 0.1370091635 10^{-6} D1 + 0.5052557941 10^{-7} D2 = 0$$

$$eq5 := 6988.169030 + 33.23298019 C3 + 63.36323839 C4 - 0.7437472923 10^{-5} D1 + 0.3481019462 10^{-5} D2 = 0$$

$$eq6 := -111023.6619 - 1071.940457 C3 + 562.2152036 C4 - 71.54950 C2 + 0.0001450612807 D1 - 0.0004386559111 D2 = 0$$

> $with(LinearAlgebra) : sys := [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6] :$
 $var := [C1, C2, C3, C4, D1, D2] : (A, b) := GenerateMatrix(sys, var) ;$

```

                                A, b :=

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 8.458693753, & 0, & 0 \\ 1, 0.5, -0.4644753658, -0.8855860402, -0.1074117191 \cdot 10^{-8}, -0.2364238199 \cdot 10^{-8} \\ 0, 1, 7.490901106, -3.928854875, 0.1370091635 \cdot 10^{-6}, 0.5052557941 \cdot 10^{-7} \\ 0, 0, 33.23298019, 63.36323839, -0.7437472923 \cdot 10^{-5}, 0.3481019462 \cdot 10^{-5} \\ 0, -71.54950, -1071.940457, 562.2152036, 0.0001450612807, -0.0004386559111 \end{bmatrix},$$


$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -291.1737096 \\ -1747.042258 \\ -6988.169030 \\ 111023.6619 \end{bmatrix}$$

> R:= LinearSolve (A,b) ;

$$R := \begin{bmatrix} 117.973238301238908 \\ -761.409930223802348 \\ -117.973238301238908 \\ 90.0150723572132563 \\ 0.15474307907774500810^{10} \\ 0.78648264092232799610^9 \end{bmatrix}$$

> w1:=R[1]+R[2]*xi+gamma_/(12*alpha)*xi^3+R[3]*cos(kappa*xi)+
R[4]*sin(kappa*xi) ;

$$w1 := 117.973238301238908 - 761.409930223802348\xi + 2329.389677\xi^3 \\ - 117.973238301238908\cos(8.458693753\xi) \\ + 90.0150723572132563\sin(8.458693753\xi)$$

> w2:=exp(-mu*xi)*(R[5]*cos(nu*xi)+R[6]*sin(nu*xi)) ;

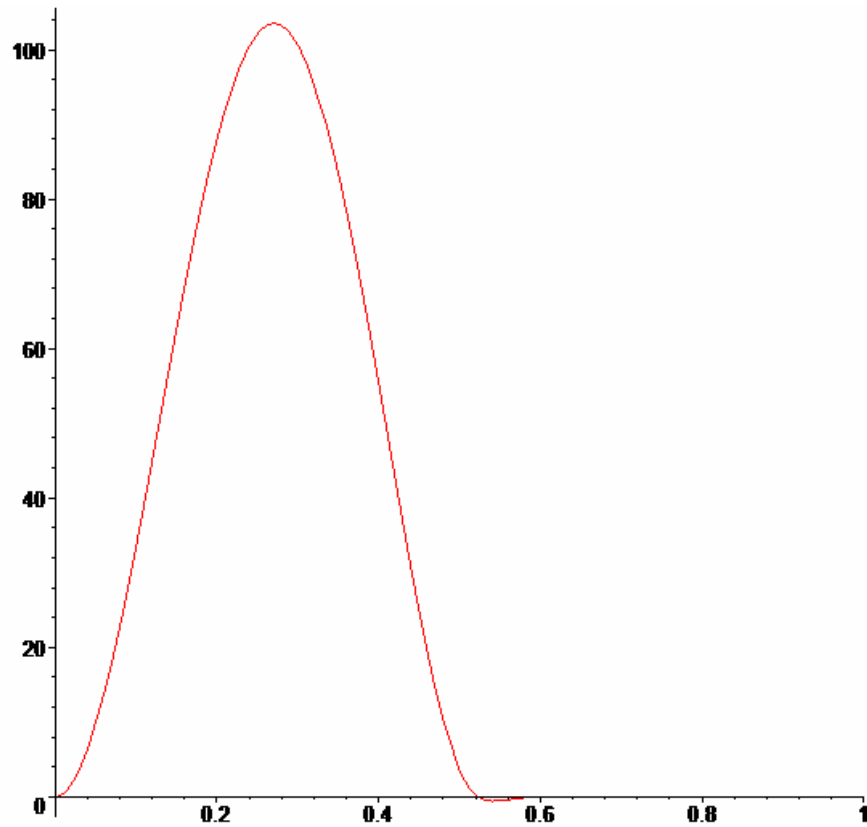
$$w2 := e^{(-39.53797485\xi)} (0.15474307907774500810^{10} \cos(39.98782570\xi) \\ + 0.78648264092232799610^9 \sin(39.98782570\xi))$$

> w:=piecewise(0<=xi and xi<=lambda,w1,lambda<xi and xi<=1,w2) ;

$$w := \{ 117.973238301238908 - 761.409930223802348\xi + 2329.389677\xi^3 \\ - 117.973238301238908\cos(8.458693753\xi) \\ + 90.0150723572132563\sin(8.458693753\xi), -\xi \leq 0 \text{ and } \xi - 0.5 \leq 0 \\ e^{(-39.53797485\xi)} (0.15474307907774500810^{10} \cos(39.98782570\xi) \\ + 0.78648264092232799610^9 \sin(39.98782570\xi)), -\xi < -0.5 \text{ and } \xi - 1 \leq 0$$

> plot(w,xi=0..1) ;

```



```

> a:=0; b:=lambda; phi:=diff(w1,xi);
    a:=0
    b:=0.5


$$\phi := -761.409930223802348 + 6988.169031 \xi^2 + 997.8994938 \sin(8.458693753 \xi) + 761.4099302 \cos(8.458693753 \xi)$$


> for i from 1 by 1 to 32 do xi:=(a+b)/2 ; if phi<0 then b:=xi
else a:= xi end if end do:
> xi;w1;
    0.2707153615
    103.4998371

```

En tot slot een uitdraai waarbij de maximale uitbuiging naar oneindig nadert, waarbij $\alpha = \alpha_k$ wordt ingevuld:

```

> restart; lambda:=0.5; gamma_:=1000000; alpha:=71.5495;
beta:=10000000; kappa:=evalf(sqrt(2*alpha)); mu:=evalf
(sqrt((sqrt(beta)-alpha)/2)); nu:=evalf((sqrt(beta-alpha^2)
/sqrt(2*(sqrt(beta)-alpha))));
    lambda:=0.5
    gamma_:=1000000

```

```

α := 71.5495
β := 10000000
κ := 11.96239942
μ := 39.31111904
ν := 40.21086397

> w1:=C1+C2*x+gamma_/(12*alpha)*x^3+C3*cos(kappa*x)+C4*sin
(kappa*x); phi1:=diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x); S1divEI:=
diff(M1divEI,x)-2*alpha*phi1;
w1 := C1 + C2 x + 1164.694838 x3 + C3 cos(11.96239942 x) + C4 sin(11.96239942 x)

φ1 := C2 + 3494.084514 x2 - 11.96239942 C3 sin(11.96239942 x)
+ 11.96239942 C4 cos(11.96239942 x)

M1divEI := 6988.169028 x - 143.0989999 C3 cos(11.96239942 x)
- 143.0989999 C4 sin(11.96239942 x)

S1divEI := 6988.169028 + 3423.614788 C3 sin(11.96239942 x)
- 3423.614788 C4 cos(11.96239942 x) - 143.0990 C2 - 499999.9998 x2

> w2:=exp(-mu*x)*(D3*cos(nu*x)+D4*sin(nu*x)); phi2:=diff(w2,x);
M2divEI:=diff(phi2,x); S2divEI:=diff(M2divEI,x)-2*alpha*phi2;
w2 := e(-39.31111904x) (D3 cos(40.21086397 x) + D4 sin(40.21086397 x))

φ2 := -39.31111904 e(-39.31111904x) (D3 cos(40.21086397 x) + D4 sin(40.21086397 x)) +
e(-39.31111904x)
(-40.21086397 D3 sin(40.21086397 x) + 40.21086397 D4 cos(40.21086397 x))

M2divEI :=
1545.364080 e(-39.31111904x) (D3 cos(40.21086397 x) + D4 sin(40.21086397 x)) -
78.62223808 e(-39.31111904x)
(-40.21086397 D3 sin(40.21086397 x) + 40.21086397 D4 cos(40.21086397 x)) +
e(-39.31111904x)
(-1616.913581 D3 cos(40.21086397 x) - 1616.913581 D4 sin(40.21086397 x))

S2divEI :=
-55124.60949 e(-39.31111904x) (D3 cos(40.21086397 x) + D4 sin(40.21086397 x)) +
4492.993240 e(-39.31111904x)
(-40.21086397 D3 sin(40.21086397 x) + 40.21086397 D4 cos(40.21086397 x)) -
117.9333571 e(-39.31111904x)
(-1616.913581 D3 cos(40.21086397 x) - 1616.913581 D4 sin(40.21086397 x)) +
e(-39.31111904x)
(65017.49206 D3 sin(40.21086397 x) - 65017.49206 D4 cos(40.21086397 x))

```

```

> x:=(0):eq1:=w1=0;eq2:=phi1=0;
      eq1 := C1 + 1. C3 = 0
      eq2 := C2 + 11.96239942 C4 = 0

> x:=(lambda):eq3:=w1-w2=0;eq4:=phi1-phi2=0;eq5:=M1divEI-
M2divEI=0;eq6:=S1divEI-S2divEI=0;
      eq3 := C1 + 0.5 C2 + 145.5868548 + 0.9547478222 C3 - 0.2974165363 C4
      - 0.9009427265 10-9 D3 - 0.2765653466 10-8 D4 = 0
      eq4 := C2 + 873.5211285 + 3.557815401 C3 + 11.42107479 C4 + 0.1466263821 10-6 D3
      + 0.7249324719 10-7 D4 = 0
      eq5 := 3494.084514 - 136.6234585 C3 + 42.56000890 C4 - 0.8679063262 10-5 D3
      + 0.3046182831 10-5 D4 = 0
      eq6 := -118011.8310 - 1018.239652 C3 - 3268.688763 C4 - 143.0990 C2
      + 0.0001977119569 D3 - 0.0004791151989 D4 = 0

> with(LinearAlgebra): sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6]:
var:=[C1,C2,C3,C4,D3,D4]: (A,b):=GenerateMatrix(sys,var);
      A, b :=
      [ 1,      0,      1.,      0,      0,      0 ]
      [ 0,      1,      0,      11.96239942,      0,      0 ]
      [ 1, 0.5, 0.9547478222, -0.2974165363, -0.9009427265 10-9, -0.2765653466 10-8 ]
      [ 0, 1, 3.557815401, 11.42107479, 0.1466263821 10-6, 0.7249324719 10-7 ]
      [ 0, 0, -136.6234585, 42.56000890, -0.8679063262 10-5, 0.3046182831 10-5 ]
      [ 0, -143.0990, -1018.239652, -3268.688763, 0.0001977119569, -0.0004791151989 ]
      [ 0 ]
      [ 0 ]
      [ -145.5868548 ]
      [ -873.5211285 ]
      [ -3494.084514 ]
      [ 118011.8310 ]

> R:= LinearSolve (A,b);
      R := [ 0.795752498486223818108 ]
      [ -320.863662508703840 ]
      [ -0.795752498486223818108 ]
      [ 26.8226842866256306 ]
      [ 0.1534219265092820251016 ]
      [ 0.8022287939095627501015 ]

> w1:=R[1]+R[2]*xi+gamma_/(12*alpha)*xi^3+R[3]*cos(kappa*xi)+
R[4]*sin(kappa*xi);

```

```

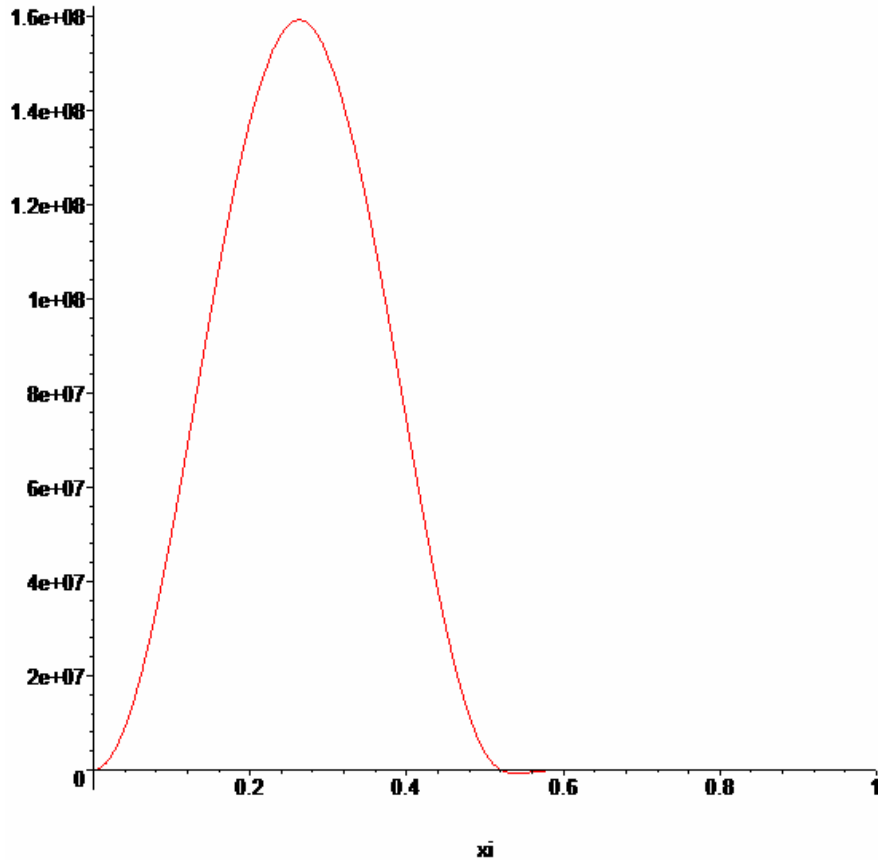
w1 := 0.795752498486223818108 - 320.863662508703840ξ + 1164.694838ξ3
      - 0.795752498486223818108 cos(11.96239942ξ)
      + 26.8226842866256306sin(11.96239942ξ)

> w2:=exp(-mu*xi)*(R[5]*cos(nu*xi)+R[6]*sin(nu*xi));
w2 := e(-39.31111904ξ) (0.1534219265092820251016 cos(40.21086397ξ)
      + 0.8022287939095627501015 sin(40.21086397ξ))

> w:=piecewise(0<=xi and xi<=lambda,w1,lambda<xi and xi<=1,w2);
w := { 0.795752498486223818108 - 320.863662508703840ξ + 1164.694838ξ3
      - 0.795752498486223818108 cos(11.96239942ξ)
      + 26.8226842866256306sin(11.96239942ξ), -ξ ≤ 0 and ξ - 0.5 ≤ 0
      e(-39.31111904ξ) (0.1534219265092820251016 cos(40.21086397ξ)
      + 0.8022287939095627501015 sin(40.21086397ξ)), -ξ < -0.5 and ξ - 1 ≤ 0

> plot(w,xi=0..1);

```



```

> a:=0; b:=lambda; phi:=diff(w1,xi);
a := 0
b := 0.5

φ := -320.863662508703840 + 3494.084514ξ2 + 0.9519109227109 sin(11.96239942ξ)
      + 320.8636630 cos(11.96239942ξ)

```



```
> for i from 1 by 1 to 32 do xi:=(a+b)/2 ; if phi<0 then b:=xi  
else a:= xi end if end do:  
> xi;wl;
```

0.2626222485

0.1591504365 10⁹

C

Resultaten

$\lambda =$		$0.1 \beta =$		100									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	10	$\alpha =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		$w =$	1.6279	1.71742	1.80582	1.89635	1.99136	2.09285	2.20273	2.32299	2.45581	2.60366	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.05499	1.1093	1.16491	1.22327	1.28561	1.35311	1.42698	1.50857	1.5994	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.05051	0.11256	0.18456	0.26604	0.35719	0.45876	0.5719	0.69829	0.84006	

$\lambda =$ $0.1 \beta =$ 1000												
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	31.6228	$\alpha =$	0	3.16228	6.32456	9.48683	12.6491	15.8114	18.9737	22.1359	25.2982	28.4605
		$w =$	0.8187	0.85145	0.88842	0.93067	0.97964	1.0374	1.10698	1.19302	1.30293	1.44924
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.04	1.08516	1.13676	1.19657	1.26713	1.35212	1.45721	1.59146	1.77017
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.064	0.13187	0.20427	0.28206	0.36644	0.45915	0.56284	0.68171	0.82298

$\lambda =$													$0.1 \beta =$													10000												
γ	α_k			$\alpha_{0\%}$			$\alpha_{10\%}$			$\alpha_{20\%}$			$\alpha_{30\%}$			$\alpha_{40\%}$			$\alpha_{50\%}$			$\alpha_{60\%}$			$\alpha_{70\%}$			$\alpha_{80\%}$			$\alpha_{90\%}$							
1000000	100			$\alpha =$			0			10			20			30			40			50			60			70			80			90				
				$w =$			0.39024			0.40881			0.42988			0.45412			0.48246			0.51632			0.55797			0.61144			0.68463			0.79653				
	A =			$w_1/w_0 =$			1			1.04759			1.1016			1.1637			1.23632			1.32308			1.42983			1.56683			1.7544			2.04114				
	B =			$n/(n-1) =$			1			1.11111			1.25			1.42857			1.66667			2			2.5			3.33333			5			10				
	C =			$(B-A)/B =$			0			0.05717			0.11872			0.18541			0.25821			0.33846			0.42807			0.52995			0.64912			0.79589				

$\lambda =$ 0.1 $\beta =$ 100000												
γ	α_k	$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	$\alpha =$	0	31.6228	63.2456	94.8683	126.491	158.114	189.737	221.359	252.982	284.605	
	$w =$	0.17536	0.18667	0.19986	0.21551	0.23448	0.25814	0.28878	0.33078	0.3939	0.50808	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.06446	1.13967	1.22893	1.33714	1.47203	1.64677	1.88624	2.2462	2.89731
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.04199	0.08826	0.13975	0.19772	0.26398	0.34129	0.43413	0.55076	0.71027

$\lambda =$		$0.1 \beta =$		1000000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	813.715	$\alpha =$	0	81.3715	162.743	244.114	325.486	406.857	488.229	569.6	650.972	732.343	
		$w =$	0.07873	0.08612	0.09524	0.10683	0.12207	0.14312	0.17425	0.22535	0.326	0.62353	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.09379	1.20965	1.35679	1.55042	1.81781	2.21312	2.86214	4.14045	7.9194	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.01559	0.03228	0.05025	0.06975	0.0911	0.11475	0.14136	0.17191	0.20806	

$\lambda =$		$0.1 \beta =$		$1E+07$									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	1221.19	$\alpha =$	0	122.119	244.239	366.358	488.478	610.597	732.716	854.836	976.955	1099.07	
		$w =$	0.04037	0.04452	0.0497	0.05635	0.0652	0.07757	0.09611	0.12698	0.18866	0.37363	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10282	1.23111	1.39578	1.615	1.92149	2.38067	3.14522	4.6732	9.25502	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00746	0.01511	0.02295	0.031	0.03925	0.04773	0.05643	0.06536	0.0745	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		100									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	10	$\alpha =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		$w =$	23.1583	24.6127	26.0502	27.5232	29.0698	30.7222	32.5112	34.4684	36.6282	39.0297	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.0628	1.12488	1.18848	1.25527	1.32662	1.40387	1.48838	1.58165	1.68534	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.04348	0.1001	0.16806	0.24684	0.33669	0.43845	0.55349	0.68367	0.83147	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		1000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	31.6228	$\alpha =$	0	3.16228	6.32456	9.48683	12.6491	15.8114	18.9737	22.1359	25.2982	28.4605	
		$w =$	10.7346	11.2646	11.868	12.5641	13.3791	14.3504	15.5332	17.0116	18.9206	21.4877	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.04937	1.10558	1.17043	1.24635	1.33684	1.44702	1.58475	1.76257	2.00172	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.05557	0.11553	0.1807	0.25219	0.33158	0.42119	0.52458	0.64749	0.79983	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		10000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	100	$\alpha =$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
		$w =$	4.74895	5.08529	5.48267	5.9612	6.55161	7.30362	8.30433	9.72336	11.9471	16.1073	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.07082	1.1545	1.25527	1.37959	1.53795	1.74867	2.04748	2.51574	3.39176	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.03626	0.0764	0.12131	0.17225	0.23103	0.30053	0.38576	0.49685	0.66082	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		100000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	227.01	$\alpha =$	0	22.701	45.402	68.103	90.804	113.505	136.206	158.907	181.608	204.309	
		$w =$	2.16534	2.37406	2.63291	2.96303	3.39956	4.00559	4.90702	6.39704	9.35392	18.1648	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.09639	1.21594	1.36839	1.56999	1.84987	2.26617	2.95429	4.31984	8.38888	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.01325	0.02725	0.04212	0.05801	0.07507	0.09353	0.11371	0.13603	0.16111	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		1000000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	322.094	$\alpha =$	0	32.2094	64.4188	96.6282	128.838	161.047	193.256	225.466	257.675	289.885	
		$w =$	1.15629	1.27649	1.42656	1.61927	1.87596	2.23499	2.77315	3.66957	5.46173	10.8372	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10395	1.23373	1.4004	1.62239	1.9329	2.39831	3.17357	4.72349	9.37236	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00644	0.01301	0.01972	0.02657	0.03355	0.04067	0.04793	0.0553	0.06276	

$\lambda =$		$0.2 \beta =$		$1E+07$									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	387.52	$\alpha =$	0	38.752	77.504	116.256	155.008	193.76	232.512	271.264	310.016	348.768	
		$w =$	0.7605	0.84222	0.94431	1.07554	1.25045	1.49527	1.86247	2.47445	3.69853	7.37133	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10745	1.2417	1.41424	1.64423	1.96616	2.44899	3.2537	4.86327	9.6927	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.0033	0.00664	0.01003	0.01346	0.01692	0.0204	0.02389	0.02735	0.03073	

$\lambda =$		$0.3 \beta =$		100									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	10	$\alpha =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		$w =$	105.373	112.799	120.132	127.644	135.53	143.954	153.072	163.043	174.039	186.253	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.07047	1.14006	1.21135	1.28618	1.36613	1.45266	1.54729	1.65165	1.76755	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.03658	0.08795	0.15206	0.22829	0.31693	0.41893	0.53581	0.66967	0.82324	

$\lambda =$		$0.3 \beta =$		1000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	31.6228	$\alpha =$	0	3.16228	6.32456	9.48683	12.6491	15.8114	18.9737	22.1359	25.2982	28.4605	
		$w =$	46.5386	49.3857	52.682	56.5581	61.1972	66.8661	73.9694	83.1501	95.4867	112.917	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.06118	1.13201	1.21529	1.31498	1.43679	1.58942	1.78669	2.05177	2.42632	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.04494	0.0944	0.14929	0.21102	0.28161	0.36423	0.46399	0.58965	0.75737	

$\lambda =$		$0.3 \beta =$		10000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	85.9646	$\alpha =$	0	8.59646	17.1929	25.7894	34.3858	42.9823	51.5788	60.1752	68.7717	77.3681	
		$w =$	20.5198	22.4273	24.7813	27.7673	31.6927	37.1083	45.1107	58.2505	84.1618	160.97	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.09296	1.20768	1.3532	1.5445	1.80842	2.1984	2.83875	4.1015	7.84462	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.01633	0.03385	0.05276	0.0733	0.09579	0.12064	0.14837	0.1797	0.21554	

$\lambda =$		$0.3 \beta =$		100000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	132.156	$\alpha =$	0	13.2156	26.4312	39.6468	52.8624	66.0781	79.2937	92.5093	105.725	118.94	
		$w =$	10.3406	11.398	12.7169	14.4093	16.6616	19.8095	24.5244	32.3727	48.0541	95.0678	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10225	1.2298	1.39347	1.61128	1.9157	2.37166	3.13064	4.64713	9.19365	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00797	0.01616	0.02457	0.03323	0.04215	0.05134	0.06081	0.07057	0.08064	

$\lambda =$		$0.3 \beta =$		1000000									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	164.835	$\alpha =$	0	16.4835	32.967	49.4504	65.9339	82.4174	98.9009	115.384	131.868	148.351	
		$w =$	6.4071	7.09092	7.94527	9.04322	10.5066	12.5548	15.6266	20.746	30.9851	61.7063	
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10673	1.24007	1.41144	1.63984	1.95952	2.43896	3.23797	4.83606	9.63092	
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00394	0.00794	0.01199	0.0161	0.02024	0.02442	0.02861	0.03279	0.03691	

$\lambda =$ $0.3 \beta =$ $1E+07$												
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	186.418	$\alpha =$	0	18.6418	37.2836	55.9254	74.5672	93.209	111.851	130.493	149.134	167.776
		$w =$	4.76522	5.28192	5.92755	6.75739	7.86357	9.41198	11.7344	15.6052	23.3476	46.579
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10843	1.24392	1.41806	1.6502	1.97514	2.46251	3.27481	4.89959	9.77478
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667		2	2.5	3.33333	5 10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00241	0.00486	0.00735	0.00988	0.01243	0.015	0.01756	0.02008	0.02252

$\lambda =$		$0.4 \beta =$		100									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	10	$\alpha =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		$w =$	305.149	328.98	352.516	376.64	401.991	429.104	458.486	490.653	526.162	565.632	
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.0781	1.15522	1.23428	1.31736	1.40621	1.5025	1.60791	1.72428	1.85362	
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
C =		$(B-A)/B =$	0	0.02971	0.07582	0.136	0.20959	0.29689	0.399	0.51763	0.65514	0.81464	

$\lambda =$ $0.4 \beta =$ 1000												
γ	α_k	$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	31.6228 $\alpha =$	0	3.16228	6.32456	9.48683	12.6491	15.8114	18.9737	22.1359	25.2982	28.4605	
	$w =$	131.802	142.022	154.169	168.926	187.309	210.907	242.362	286.415	352.443	461.808	
	A = $w_1/w_0 =$	1	1.07754	1.1697	1.28166	1.42114	1.60018	1.83883	2.17307	2.67403	3.5038	
	B = $n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C = $(B-A)/B =$	0	0.03021	0.06424	0.10283	0.14732	0.19991	0.26447	0.34808	0.46519	0.64962	

$\lambda =$ $0.4 \beta =$ 10000												
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	62.3416	$\alpha =$	0	6.23416	12.4683	18.7025	24.9366	31.1708	37.405	43.6391	49.8733	56.1074
		$w =$	59.9808	65.9003	73.2627	82.6812	95.1769	112.586	138.58	181.716	267.666	524.758
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.09869	1.22143	1.37846	1.58679	1.87704	2.3104	3.02957	4.46252	8.74876
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667		2	2.5	3.33333	5 10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.01118	0.02285	0.03508	0.04793	0.06148	0.07584	0.09113	0.1075	0.12512

$\lambda =$												
$0.4 \beta =$												
100000												
γ	α_k	$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	84.4121	$\alpha =$	0	8.44121	16.8824	25.3236	33.7648	42.2061	50.6473	59.0885	67.5297	75.9709
		$w =$	33.4183	36.9249	41.3043	46.9302	54.4261	64.914	80.6386	106.838	159.227	316.388
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10493	1.23598	1.40433	1.62863	1.94247	2.41301	3.19699	4.76467	9.46752
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00556	0.01122	0.01697	0.02282	0.02876	0.0348	0.0409	0.04707	0.05325

$\lambda =$		$0.4 \beta =$		1000000								
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	99.4576	$\alpha =$	0	9.94576	19.8915	29.8373	39.783	49.7288	59.6746	69.6203	79.5661	89.5118
		$w =$	22.8468	25.3102	28.3882	32.3442	37.6176	44.999	56.0701	74.5219	111.429	222.169
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.10782	1.24255	1.4157	1.64652	1.9696	2.45418	3.26181	4.87724	9.72431
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
C =		$(B-A)/B =$	0	0.00296	0.00596	0.00901	0.01209	0.0152	0.01833	0.02146	0.02455	0.02757

$\lambda =$ $0.4 \beta =$ $1E+07$												
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	109.131	$\alpha =$	0	10.9131	21.8262	32.7393	43.6524	54.5655	65.4785	76.3916	87.3047	98.2178
		$w =$	18.1947	20.1733	22.6457	25.8235	30.0595	35.989	44.8826	59.7055	89.3547	178.318
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.10875	1.24463	1.41929	1.6521	1.97799	2.46679	3.28148	4.91103	9.80053
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
C =		$(B-A)/B =$	0	0.00213	0.00429	0.0065	0.00874	0.011	0.01328	0.01556	0.01779	0.01995

$\lambda =$		$0.5 \beta =$		100									
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	10	$\alpha =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		$w =$	701.791	761.328	820.355	881.11	945.228	1014.1	1089.07	1171.52	1262.94	1365.03	
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.08483	1.16894	1.25552	1.34688	1.44502	1.55185	1.66932	1.7996	1.94507	
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
C =		$(B-A)/B =$	0	0.02365	0.06484	0.12114	0.19187	0.27749	0.37926	0.4992	0.64008	0.80549	

$\lambda =$ $0.5 \beta =$ 1000												
γ	α_k	$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	31.6228 $\alpha =$	0	3.16228	6.32456	9.48683	12.6491	15.8114	18.9737	22.1359	25.2982	28.4605	
	$w =$	300.64	330.751	367.76	414.85	477.216	564.132	694.034	909.582	1336.65	2577.74	
	A = $w_1/w_0 =$	1	1.10016	1.22326	1.37989	1.58733	1.87644	2.30852	3.02549	4.44602	8.57418	
	B = $n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
	C = $(B-A)/B =$	0	0.00986	0.02139	0.03408	0.0476	0.06178	0.07659	0.09235	0.1108	0.14258	

$\lambda =$ $0.5 \beta =$ 10000												
γ	α_k	$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$	
1000000	45.9336 $\alpha =$	0	4.59336	9.18672	13.7801	18.3734	22.9668	27.5602	32.1535	36.7469	41.3402	
	$w =$	142.287	156.746	174.78	197.919	228.709	271.735	336.162	443.381	657.555	1299.5	
A = $w_1/w_0 =$		1	1.10162	1.22837	1.39099	1.60738	1.90977	2.36257	3.11611	4.62134	9.13299	
B = $n/(n-1) =$		1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10	
C = $(B-A)/B =$		0	0.00854	0.01731	0.02631	0.03557	0.04512	0.05497	0.06517	0.07573	0.0867	

$\lambda =$		$0.5 \beta =$		100000								
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	58.2356	$\alpha =$	0	5.82356	11.6471	17.4707	23.2942	29.1178	34.9414	40.7649	46.5885	52.412
		$w =$	86.078	95.2361	106.677	121.38	140.976	168.401	209.53	278.073	415.16	826.46
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.10639	1.23931	1.41012	1.63777	1.95638	2.43419	3.23048	4.82306	9.6013
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
C =		$(B-A)/B =$	0	0.00425	0.00855	0.01292	0.01734	0.02181	0.02632	0.03086	0.03539	0.03987

$\lambda =$		$0.5 \beta =$		1000000								
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
1000000	66.3999	$\alpha =$	0	6.63999	13.28	19.92	26.56	33.2	39.8399	46.4799	53.1199	59.7599
		$w =$	62.9042	69.7183	78.2327	89.1764	103.764	124.184	154.812	205.859	307.963	614.33
A =		$w_1/w_0 =$	1	1.10833	1.24368	1.41766	1.64956	1.97418	2.46107	3.27257	4.89575	9.76613
B =		$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
C =		$(B-A)/B =$	0	0.00251	0.00505	0.00764	0.01026	0.01291	0.01557	0.01823	0.02085	0.02339

$\lambda =$	$0.5 \beta =$	$1E+07$										
γ	α_k		$\alpha_{0\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{20\%}$	$\alpha_{30\%}$	$\alpha_{40\%}$	$\alpha_{50\%}$	$\alpha_{60\%}$	$\alpha_{70\%}$	$\alpha_{80\%}$	$\alpha_{90\%}$
	71.5495	$\alpha =$	0	7.15495	14.3099	21.4649	28.6198	35.7748	42.9297	50.0847	57.2396	64.3946
1000000		$w =$	52.2948	57.9885	65.1031	74.2475	86.4371	103.5	129.092	171.747	257.065	513.066
	A =	$w_1/w_0 =$	1	1.10888	1.24493	1.41979	1.65288	1.97916	2.46855	3.2842	4.9157	9.81104
	B =	$n/(n-1) =$	1	1.11111	1.25	1.42857	1.66667	2	2.5	3.33333	5	10
	C =	$(B-A)/B =$	0	0.00201	0.00406	0.00615	0.00827	0.01042	0.01258	0.01474	0.01686	0.0189

D

Kniklengtebepaling

```
> restart; lambda:=0.3; gamma_:=10000; beta:=100000;
eta:=evalf((beta/4)^(1/4));
```

$$\lambda := 0.3$$

$$\gamma := 10000$$

$$\beta := 100000$$

$$\eta := 12.57433430$$

```
> w1:=gamma_/120*x^5+C1/6*x^3+C2/2*x^2+C3*x+C4;
phi1:=diff(w1,x); M1divEI:=diff(phi1,x);
S1divEI:=diff(M1divEI,x);
```

$$w1 := \frac{250 x^5}{3} + \frac{C1 x^3}{6} + \frac{C2 x^2}{2} + C3 x + C4$$

$$\phi1 := \frac{1250 x^4}{3} + \frac{C1 x^2}{2} + C2 x + C3$$

$$M1divEI := \frac{5000}{3} x^3 + C1 x + C2$$

$$S1divEI := 5000 x^2 + C1$$

```
> w2:=exp(-eta*x)*(D1*cos(eta*x)+D2*sin(eta*x));
phi2:=diff(w2,x); M2divEI:=diff(phi2,x);
S2divEI:=diff(M2divEI,x);
```

$$w2 := e^{(-12.57433430x)} (D1 \cos(12.57433430x) + D2 \sin(12.57433430x))$$

$$\phi2 := -12.57433430 e^{(-12.57433430x)} (D1 \cos(12.57433430x) + D2 \sin(12.57433430x)) + e^{(-12.57433430x)} (-12.57433430 D1 \sin(12.57433430x) + 12.57433430 D2 \cos(12.57433430x))$$

$$M2divEI :=$$

$$158.1138831 e^{(-12.57433430x)} (D1 \cos(12.57433430x) + D2 \sin(12.57433430x)) - 25.14866860 e^{(-12.57433430x)} (-12.57433430 D1 \sin(12.57433430x) + 12.57433430 D2 \cos(12.57433430x)) + e^{(-12.57433430x)} (-158.1138831 D1 \cos(12.57433430x) - 158.1138831 D2 \sin(12.57433430x))$$

$S2divEI :=$

$$\begin{aligned} & -1988.176824 e^{(-12.57433430x)} (D1 \cos(12.57433430x) + D2 \sin(12.57433430x)) + \\ & 474.3416493 e^{(-12.57433430x)} \\ & (-12.57433430 D1 \sin(12.57433430x) + 12.57433430 D2 \cos(12.57433430x)) - \\ & 37.72300290 e^{(-12.57433430x)} \\ & (-158.1138831 D1 \cos(12.57433430x) - 158.1138831 D2 \sin(12.57433430x)) + \\ & e^{(-12.57433430x)} \\ & (1988.176824 D1 \sin(12.57433430x) - 1988.176824 D2 \cos(12.57433430x)) \end{aligned}$$

> $x := (0) : eq1 := w1 = 0 ; eq2 := phi1 = 0 ;$

$$eq1 := C4 = 0$$

$$eq2 := C3 = 0$$

> $x := (\lambda) : eq3 := w1 - w2 = 0 ; eq4 := phi1 - phi2 = 0 ; eq5 := M1divEI - M2divEI = 0 ; eq6 := S1divEI - S2divEI = 0 ;$

$$eq3 := 0.2025000000 + 0.004500000000 C1 + 0.045000000000 C2 + 0.3 C3 + C4 + 0.01857431071 D1 + 0.01356294516 D2 = 0$$

$$eq4 := 3.375000000 + 0.045000000000 C1 + 0.3 C2 + C3 - 0.4041045988 D1 + 0.0630145858 D2 = 0$$

$$eq5 := 45.00000000 + 0.3 C1 + C2 + 4.288979850 D1 - 5.873712785 D2 = 0$$

$$eq6 := 450.00 + C1 + 19.92696164 D1 + 127.7890946 D2 = 0$$

> $with(LinearAlgebra) : sys := [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6] :$
 $var := [C1, C2, C3, C4, D1, D2] : (A, b) := GenerateMatrix(sys, var) ;$

$$A, b := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.004500000000 & 0.045000000000 & 0.3 & 1 & 0.01857431071 & 0.01356294516 \\ 0.045000000000 & 0.3 & 1 & 0 & -0.4041045988 & 0.0630145858 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0 & 4.288979850 & -5.873712785 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 19.92696164 & 127.7890946 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2025000000 \\ -3.375000000 \\ -45.00000000 \\ -450.00 \end{bmatrix}$$

> $R := LinearSolve(A, b) ;$

$$R := \begin{bmatrix} -210.454965095089392 \\ 17.8651483014325408 \\ -0.22204460492503130810^{-15} \\ 0.11102230246251565410^{-15} \\ -2.06327195538682862 \\ -1.55279520852814202 \end{bmatrix}$$

>

```
w1:=gamma_/120*xi^5+R[1]/6*xi^3+R[2]/2*xi^2+R[3]*xi+R[4];v1:=gamma_/120*psi^5+R[1]/6*psi^3+R[2]/2*psi^2+R[3]*psi+R[4];u1:=gamma_/120*omega^5+R[1]/6*omega^3+R[2]/2*omega^2+R[3]*omega+R[4];
```

$$w1 := \frac{250}{3} \xi^5 - 35.07582752 \xi^3 + 8.932574150 \xi^2 - 0.22204460492503130810^{-15} \xi + 0.11102230246251565410^{-15}$$

$$v1 := \frac{250}{3} \psi^5 - 35.07582752 \psi^3 + 8.932574150 \psi^2 - 0.22204460492503130810^{-15} \psi + 0.11102230246251565410^{-15}$$

$$u1 := \frac{250}{3} \omega^5 - 35.07582752 \omega^3 + 8.932574150 \omega^2 - 0.22204460492503130810^{-15} \omega + 0.11102230246251565410^{-15}$$

> w2:=exp(-

```
eta*xi)*(R[5]*cos(eta*xi)+R[6]*sin(eta*xi));v2:=exp(-eta*psi)*(R[5]*cos(eta*psi)+R[6]*sin(eta*psi));u2:=exp(-eta*omega)*(R[5]*cos(eta*omega)+R[6]*sin(eta*omega));
```

$$w2 := e^{(-12.57433430\xi)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430 \xi) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430 \xi))$$

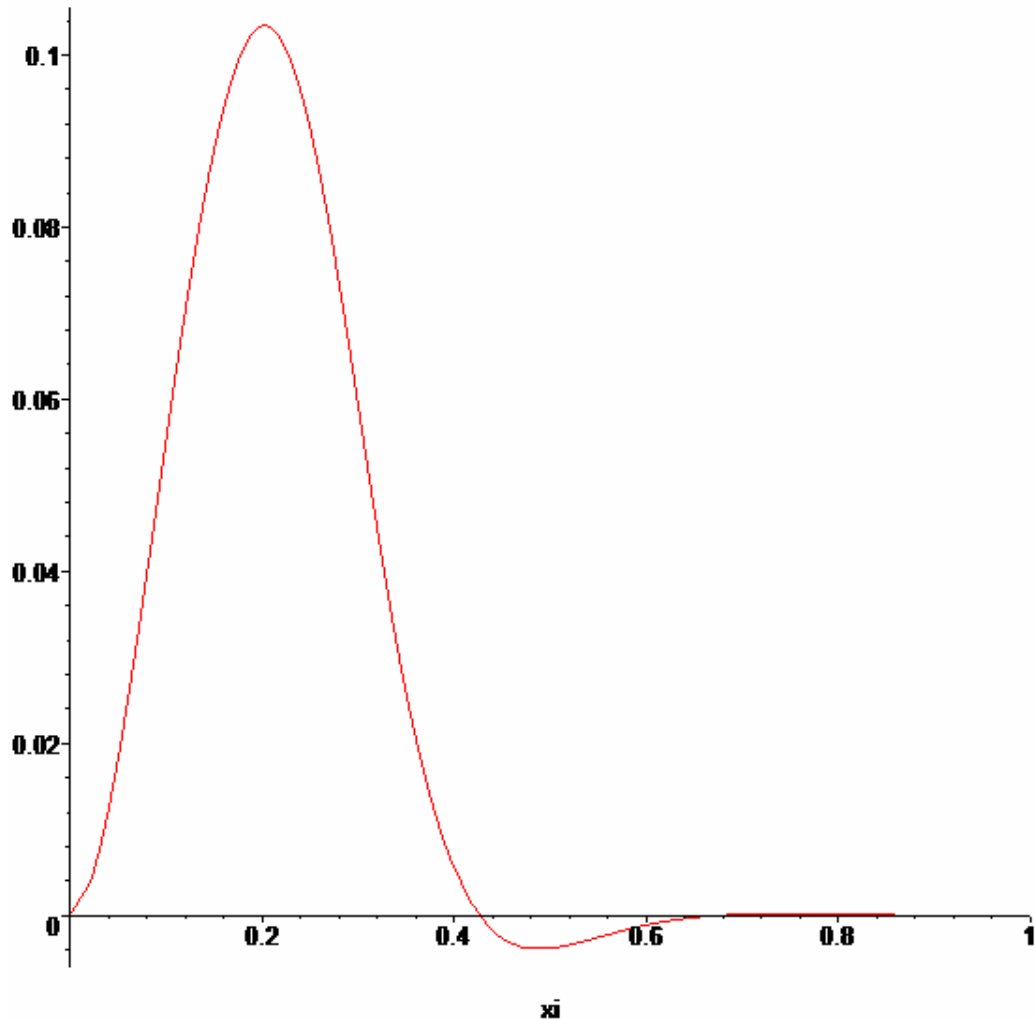
$$v2 := e^{(-12.57433430\psi)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430 \psi) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430 \psi))$$

$$u2 := e^{(-12.57433430\omega)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430 \omega) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430 \omega))$$

> w:=piecewise(0<=xi and xi<=lambda,w1,lambda<xi and xi<=1,w2);

$$w := \left\{ \begin{array}{l} \frac{250}{3} \xi^5 - 35.07582752 \xi^3 + 8.932574150 \xi^2 - 0.22204460492503130810^{-15} \xi + 0.11102230246251565410^{-15}, -\xi \leq 0 \text{ and } \xi - 0.3 \leq 0 \\ e^{(-12.57433430\xi)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430 \xi) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430 \xi)), -\xi < -0.3 \text{ and } \xi - 1 \leq 0 \end{array} \right.$$

> plot(w,xi=0..1);



```
> a:=0; b:=lambda; phi:=diff(w1,xi);
      a:=0
      b:=0.3
```

$$\phi := \frac{1250}{3} \xi^4 - 105.2274826 \xi^2 + 17.86514830 \xi - 0.22204460492503130810^{-15}$$

```
> for i from 1 by 1 to
  32 do xi:=(a+b)/2 ; if phi<0 then b:=xi else a:= xi end if
end do:
> xi;w1;
```

0.2028058961

0.1034059525

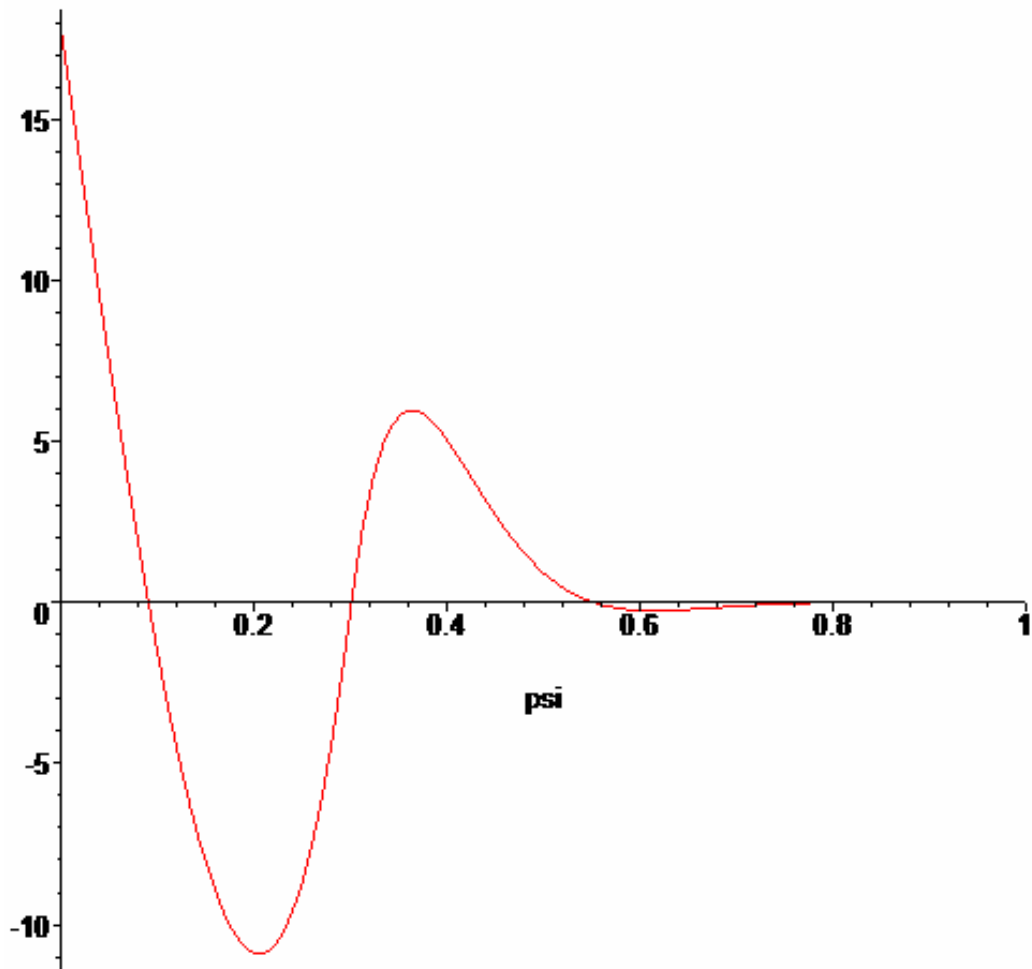
```
> M1:=diff(v1,psi$2); M2:=diff(v2,psi$2); M:=piecewise(0<=psi
and psi<=lambda,M1,lambda<psi and psi<=1,M2);
plot(M,psi=0..1);
```

$$M1 := \frac{5000}{3} \psi^3 - 210.4549652 \psi + 17.86514830$$

$$M2 := 158.1138831 e^{(-12.57433430\psi)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430\psi) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430\psi)) - 25.14866860 e^{(-12.57433430\psi)} (25.94427131 \sin(12.57433430\psi) - 19.52536606 \cos(12.57433430\psi)) + e^{(-12.57433430\psi)} (326.2319406 \cos(12.57433430\psi) + 245.5184802 \sin(12.57433430\psi))$$

$$M := \left\{ \frac{5000}{3} \psi^3 - 210.4549652 \psi + 17.86514830, -\psi \leq 0 \text{ and } \psi - 0.3 \leq 0 \right.$$

$$158.1138831 e^{(-12.57433430\psi)} (-2.06327195538682862 \cos(12.57433430\psi) - 1.55279520852814202 \sin(12.57433430\psi)) - 25.14866860 e^{(-12.57433430\psi)} (25.94427131 \sin(12.57433430\psi) - 19.52536606 \cos(12.57433430\psi)) + e^{(-12.57433430\psi)} (326.2319406 \cos(12.57433430\psi) + 245.5184802 \sin(12.57433430\psi)), \\ \left. -\psi < -0.3 \text{ and } \psi - 1 \leq 0 \right.$$



```
> c:=0; d:=0.5*lambd; e:=lambd; f:=1.1*lambd;
M2:=diff(u2,omega$2);
```

```

c := 0
d := 0.15
e := 0.3
f := 0.33

M2 := 158.1138831  $e^{(-12.57433430\omega)}$  ( -2.06327195538682862 cos( 12.57433430  $\omega$  )
      - 1.55279520852814202 sin( 12.57433430  $\omega$  ) ) - 25.14866860  $e^{(-12.57433430\omega)}$ 
      ( 25.94427131 sin( 12.57433430  $\omega$  ) - 19.52536606 cos( 12.57433430  $\omega$  ) ) +
       $e^{(-12.57433430\omega)}$ 
      ( 326.2319406 cos( 12.57433430  $\omega$  ) + 245.5184802 sin( 12.57433430  $\omega$  ) )

> for i from 1 by 1 to 32 do psi:=(c+d)/2; omega:=(e+f)/2 ; if
M1<0 then d:=psi else c:= psi end if; if M2<0 then e:=omega
else f:= omega end if  end do:
> l_buckle:=omega-psi;
      l_buckle := 0.2103281846

> alpha_buckle:=evalf(Pi^2/(2*l_buckle^2)) ;
      alpha_buckle := 111.5513429

```

Literatuurlijst

1. Hartsuijker, C., 2000, *Mechanica van Constructies 2b: Stabiliteit van het Evenwicht*, Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen, Mechanica en Constructies, Technische Universiteit Delft, p. 20.
2. Hartsuijker, C., 2001, *Toegepaste Mechanica: Spanningen, Vervormingen en Verplaatsingen*, Academic Service, Schoonhoven, p.11.
3. I.q. 2, p. 15.
4. Thomas, G.B. en Finney, R.L., 1998, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Amsterdam, p. 684.
5. Bouma, A.L., 2000, *Mechanica van Constructies: Elastostatica van Slanke Structuren*, Delft University Press, Delft, p. 132-133.
6. I.q. 4, p. 260.
7. Martens, J., 2004, *Kniklast van gedeeltelijk ontgraven heipalen*, Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen, Technische Universiteit Delft.
8. Verruijt, A., 1999, *Grondmechanica*, Delft University Press, Delft, p. 75-79.

Zelfevaluatie

Ik zal mijn zelfevaluatie beginnen met de vaardigheden die ik heb ontwikkeld en verbeterd. Ik heb ten eerste veel over Maple geleerd, vooral dat het mogelijk is eenvoudige loops te schrijven. Ook ben ik sneller en efficiënter gaan werken met MS Word en Excel gedurende het schrijven van het verslag.

Wat technische diepgang betreft, kan ik tevreden zijn over mezelf. Ik ben diep ingegaan op de wiskundige achtergrond van het model en ik heb daardoor heel veel inzicht verworven in het knikprobleem.

Het belangrijkste wat ik heb geleerd is, dat als er eenmaal een deel van het verslag is uitgewerkt in een tekstverwerker, dit bij mij als een geweldige stimulans werkt om verder te werken. Voor de rest is deze thesis een goede voorbereiding geweest op mijn nieuwe Masterstudie, Applied Mathematics.