

STIJFHEIDSMATRIX VAN ASYMMETRISCHE PROFIELEN

Eindrapport Bachelor Eindwerk



Naam	J.R. van Noort
Studienummer	1274082
Begeleiders	dr. ir. P.C.J. Hoogenboom ir. R. Abspoel
Datum	21-10-2009

VOORWOORD

Dit rapport is geschreven als het eindwerk van de Bachelor Civiele Techniek aan de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen van de Technische Universiteit in Delft. Dit eindrapport gaat over de nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix van asymmetrische doorsneden. Ik wil hierbij graag dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. R. Abspoel bedanken voor hun begeleiding bij dit eindwerk.

Rest mij de lezer van dit verslag veel leesplezier toe te wensen.

Delft, 21 oktober 2009

Jeffrey van Noort

SAMENVATTING

De stijfheidsmatrix van een ligger geeft het verband tussen de vervormingen van de ligger en de krachten die op deze ligger aangrijpen. Deze stijfheidsmatrix kan met behulp van *vergeet-mij-nietjes* of een differentiaalvergelijking analytisch bepaald worden, waarbij een aantal verwaarlozingen worden toegepast. De verwachting is dat voor symmetrische staalprofielen deze verwaarlozingen terecht zijn, maar geldt dit ook voor asymmetrische profielen?

De stijfheidsmatrix van een ligger kan ook bepaald worden met behulp van de eindige-elementenmethode met volume-elementen. Dit is een nauwkeurige methode en geeft wellicht een stijfheidsmatrix die afwijkt van de analytisch bepaalde matrix. De vraag is nu of dit genoeg aanleiding geeft om aan te nemen dat de analytische methode niet nauwkeurig genoeg is voor asymmetrische profielen.

Na het beschouwen van een stalen U-profiel in het softwarepakket ANSYS is door middel van de eindige-elementenmethode een numeriek bepaalde stijfheidsmatrix verkregen. Deze blijkt grote afwijkingen te hebben ten opzichte van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Hoewel extensie slechts een afwijking van 5% heeft treedt er ook buiging op wat voor onverwachte termen in de numerieke stijfheidsmatrix zorgt. Dwarskrachtvervorming heeft afwijkingen tot 40%, bij buigvervorming treden afwijkingen tot 60% op en bij wringvervorming zijn afwijkingen groter dan 100% waargenomen.

Voor deze afwijkingen zijn een aantal mogelijke verklaringen te bedenken:

1) afschuifvervorming, 2) te weinig elementen, 3) krachtsinleiding te grof, 4) dwarscontractie van het materiaal, 5) verhinderde welving van de liggeruiteinden.

Deze verklaringen zijn getoetst en hieruit bleek dat voornamelijk de manier van inleiden van de krachten en de verhinderde welving van de liggeruiteinden een grote invloed hebben op de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix.

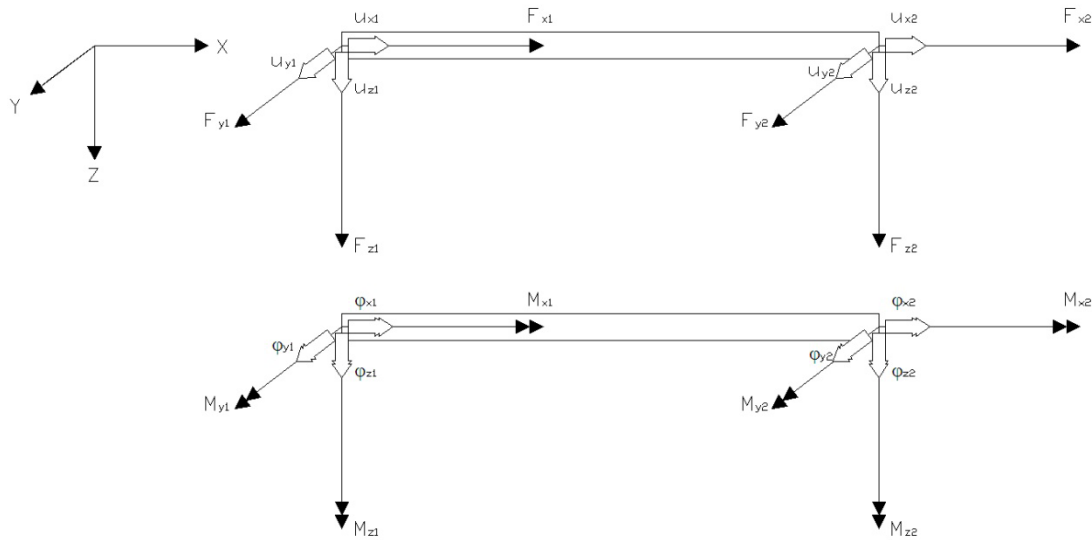
Echter, er kan op basis van de huidige gegevens nog geen conclusie worden getrokken over de nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Wel kan er worden geconcludeerd dat het driedimensionale gedrag van de beschouwde ligger erg ingewikkeld is en dit doet vermoeden dat de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix onvolledig is. Om hier een definitieve uitspraak over te kunnen doen zal vervolgonderzoek noodzakelijk zijn.

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord	2
Samenvatting.....	3
Inhoudsopgave	5
1. Inleiding.....	6
1.1. Traditionele methode	7
1.2. Eindige-elementenmethode.....	8
2. Onderzoeksformulering.....	9
2.1. Doelstelling.....	9
2.2. Aannamen	9
2.3. Werkwijze.....	10
3. Stalen U-profiel	12
3.1. Het model.....	12
3.2. Opgelegde verplaatsingen.....	15
3.3. Resultaten.....	17
3.4. Vergelijking	19
3.5. Verklaring van de afwijkingen.....	22
3.5.1. Afschuifvervorming.....	23
3.5.2. Hogere orde elementen	26
3.5.3. Grotere liggerlengte	28
3.5.4. Hogere E-modulus versterkte delen.....	29
4. Conclusie	31
4.1. Aanbevelingen	32
5. Bronnen	33
6. Bijlagen.....	34
6.1. Opdracht.....	34
6.2. Maplesheet matrixberekening.....	35

1. INLEIDING

De stijfheidsmatrix (K) (Matrix 1.1) van een ligger (Figuur 1.1) geeft het verband tussen de vervormingen (u, φ) van de ligger en de krachten (F, M) die op deze ligger aangrijpen.



Figuur 1.1 – Ligger met krachten en momenten in alle richtingen¹

Matrix 1.1 – Stijfheidsmatrix van een ligger die symmetrisch is over de diagonaal¹

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & -e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{l^3} & e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI_y}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & -e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & \frac{GI_w}{l} + e_z^2 12\frac{EI_z}{l^3} + e_y^2 12\frac{EI_y}{l^3} & -e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & -e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & -\frac{GI_w}{l} - e_z^2 12\frac{EI_z}{l^3} - e_y^2 12\frac{EI_y}{l^3} & -e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & -e_z 6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & -e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & 4\frac{EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & 2\frac{EI_z}{l} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & -e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 4\frac{EI_z}{l} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 2\frac{EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & -e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -12\frac{EI_y}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & 6\frac{EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{l^3} & e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & 6\frac{EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & -\frac{GI_w}{l} - e_z^2 12\frac{EI_z}{l^3} - e_y^2 12\frac{EI_y}{l^3} & e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & -e_z 12\frac{EI_z}{l^3} & e_y 12\frac{EI_y}{l^3} & \frac{GI_w}{l} + e_z^2 12\frac{EI_z}{l^3} + e_y^2 12\frac{EI_y}{l^3} & e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & e_z 6\frac{EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & -e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & 2\frac{EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & e_y 6\frac{EI_y}{l^2} & 4\frac{EI_z}{l} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & -e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 2\frac{EI_z}{l} & 0 & -6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & e_z 6\frac{EI_z}{l^2} & 0 & 4\frac{EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ \phi_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ \phi_{z2} \end{bmatrix}$$

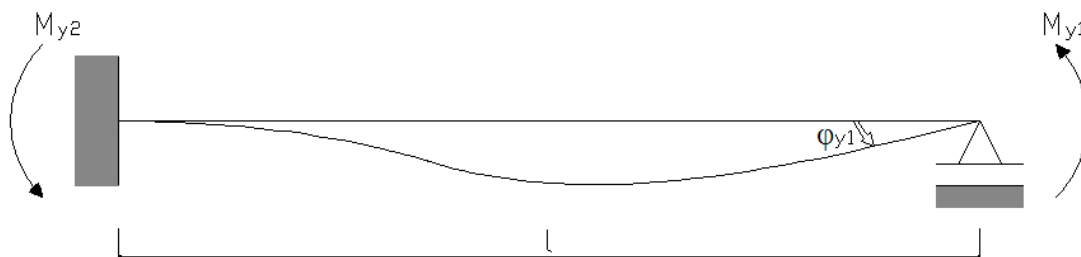
Deze stijfheidsmatrix kan met behulp van *vergeet-mij-nietjes* of een differentiaalvergelijking bepaald worden. Voor symmetrische staalprofielen, zoals I-

profielen, is de verwachting dat deze methoden best nauwkeurig zijn. Deze methoden worden echter ook toegepast voor asymmetrische profielen, zoals L-, Z- en U-profielen. Van deze laatste profielen is echter niet bekend of met analytische methoden de stijfheidsmatrix nauwkeurig wordt. Een andere om de stijfheidsmatrix van een ligger te bepalen is met behulp van de eindige-elementenmethode met volume-elementen. Dit is een nauwkeurige methode en geeft wellicht een stijfheidsmatrix die afwijkt van de analytisch bepaalde matrix. De vraag is nu of dit genoeg aanleiding geeft om aan te nemen dat de analytische methode niet nauwkeurig genoeg is voor asymmetrische profielen.

1.1. Traditionele methode

Door middel van de bekende relaties tussen normaalkracht en extensie en momenten en buiging in een ligger zijn er *vergeet-mij-nietjes* opgesteld waarmee de vervormingen in een ligger berekend kunnen worden wanneer de krachten bekend zijn en andersom.

Voordelen van deze methode is dat het weinig tijd kost om de berekeningen uit te voeren en dat er één standaard oplossing is die toepasbaar is op meerdere liggers waarin alleen een aantal geometrische grootheden als oppervlakte, traagheidsmomenten etc. aangepast dienen te worden. Deze berekeningen zijn gemakkelijk met de hand te doen. Zo is met behulp van Figuur 1.2 en vergelijkingen (1,1) en (1,2) de term $K_{5,5}$ uit de stijfheidsmatrix te bepalen.



Figuur 1.2 – *Vergeet-mij-nietje* waarmee een term uit de stijfheidsmatrix bepaald kan worden

$$\varphi_{y1} = \frac{l}{4EI_y} M_{y1} \quad (1.1)$$

$$M_{y1} = \frac{4EI_y}{l} \varphi_{y1} \quad (1.2)$$

1.2. Eindige-elementenmethode

Bij de eindige-elementenmethode wordt met behulp van een computer een model van een ligger in een aantal elementen opgedeeld. Deze elementen zijn aan elkaar gekoppeld door middel van knooppunten (*nodes*). Aan deze *nodes* kunnen vervormingen worden opgelegd wat resulteert in een oplegreactie. Het verband tussen de vervorming en de hierbij gevonden oplegreactie geeft de stijfheid van de ligger aan. Wanneer alle mogelijke vervormingen van een ligger beschouwd worden kan met alle gevonden oplegreacties een stijfheidsmatrix opgesteld worden.

Voordeel van deze methode is dat een zeer hoge nauwkeurigheid van berekenen haalbaar is, nadeel is wel dat voor deze methode het gebruik van een goede computer en een duur softwarepakket, zoals ANSYS of DIANA, nodig zijn.

2. ONDERZOEKSFORMULERING

2.1. Doelstelling

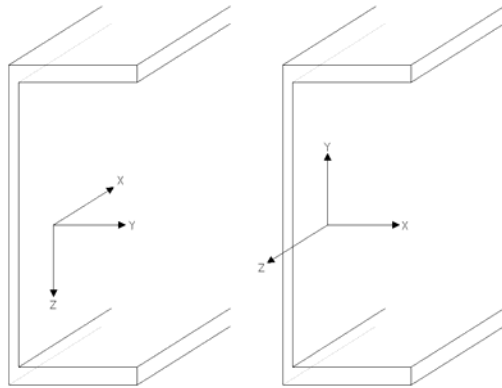
Het onderzoeken in hoeverre de stijfheidsmatrix van een ligger met een asymmetrische dwarsdoorsnede, bepaald met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* of een differentiaalvergelijking, afwijkt van een numeriek bepaalde stijfheidsmatrix en of deze afwijkingen acceptabel zijn.

2.2. Aannamen

Voor het onderzoek zijn een aantal grootheden vastgesteld. De E-modulus (E) en de dwarscontractiecoëfficiënt (ν) volgen uit de materiaaleigenschappen van staal. De lengte (l) is dusdanig gekozen dat het een slanke ligger betreft ($h_{\text{profiel}} \ll l_{\text{profiel}}$) en dus de afschuifvervorming verwaarloosbaar wordt geacht.

E $2,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
 ν 0,27 [-]
l 2,00 m

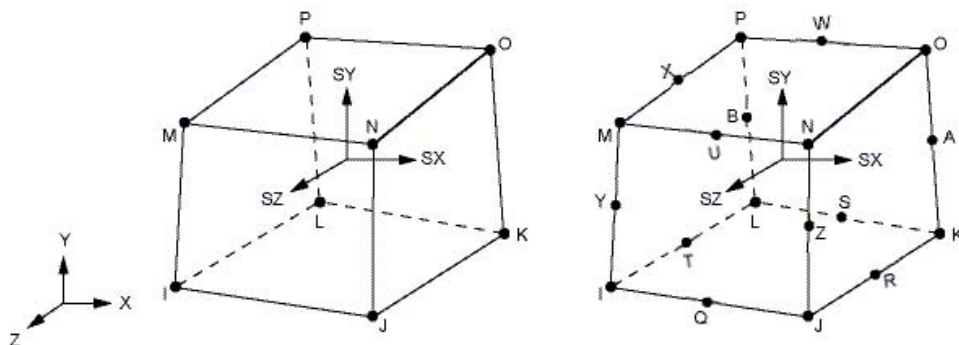
Verder is het assenstelsel in ANSYS anders dan het assenstelsel dat wordt gebruikt in de theorie, beide zijn te zien in Figuur 2.1. In de berekeningen zullen dus op een aantal plekken maatregelen moeten worden getroffen om er voor te zorgen dat alle tekens van de vervormingen en krachten kloppen met het assenstelsel van de theorie. Op die manier is het namelijk mogelijk om een duidelijke vergelijking tussen de twee stijfheidsmatrices te maken.



Figuur 2.1 – Assenstelsel uit de theorie (links) en het assenstelsel van ANSYS (rechts)

2.3. Werkwijze

Om de eindige-elementenmethode uit te voeren is gebruik gemaakt van het softwarepakket ANSYS. Hierin wordt een ligger gemodelleerd en opgedeeld in een aantal elementen. Er zijn verschillende types elementen beschikbaar, maar voor dit onderzoek zijn er twee elementtypes die van toepassing kunnen zijn; SOLID45 en SOLID95. Beide betreffen blokvormige elementen met drie vrijheidsgraden, namelijk transleren in de x-, y- en z-richting. Het verschil tussen deze twee is dat SOLID45 alleen knooppunten (*nodes*) op de hoekpunten van het element heeft en dat SOLID95 ook op het midden van iedere ribbe een *node* heeft zitten (zie Figuur 2.2). Het gebruik van SOLID95 zal een nauwkeurigere benadering geven dan wanneer SOLID45 wordt gebruikt, maar SOLID95 zorgt ook voor extra rekentijd.



Figuur 2.2 – Twee elementtypes: SOLID45 (links) en SOLID95 (rechts)

Door aan een (of meerdere) *nodes* een verplaatsing op te leggen zal deze gaan verplaatsen en het element waar de *node* aan vast zit en de elementen hier direct naast met zich meenemen. Uiteindelijk vervormt hiermee de gehele ligger.

Nu is het mogelijk om aan één zijde van de ligger één vervorming een waarde van 1 te geven door een aantal *nodes* aan die zijde van de ligger een verplaatsing van 1 in een bepaalde richting op te leggen en de verplaatsingen in de overige richtingen een waarde van 0 mm toe te kennen. Aan de andere zijde van de ligger worden de verplaatsingen van de *nodes* in alle richtingen gelijk gesteld aan 0 mm. ANSYS vind bij deze opgelegde vervorming de bijbehorende krachten. Hiermee kan een kolom in de stijfheidsmatrix, behorende bij de gekozen vervorming, worden bepaald aangezien de vervorming een waarde van 1 heeft en de oplegreacties die hieruit voortkomen dan gelijk zijn aan de corresponderende termen uit de stijfheidsmatrix.

Door deze methode voor alle mogelijke vervorming toe te passen is uiteindelijk iedere kolom uit de stijfheidsmatrix bekend. Deze kan dan vergeleken worden met de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix door de procentuele afwijking te bepalen. Deze afwijking geeft aan hoe nauwkeurig de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix is ten opzichte van de met ANSYS bepaalde stijfheidsmatrix.

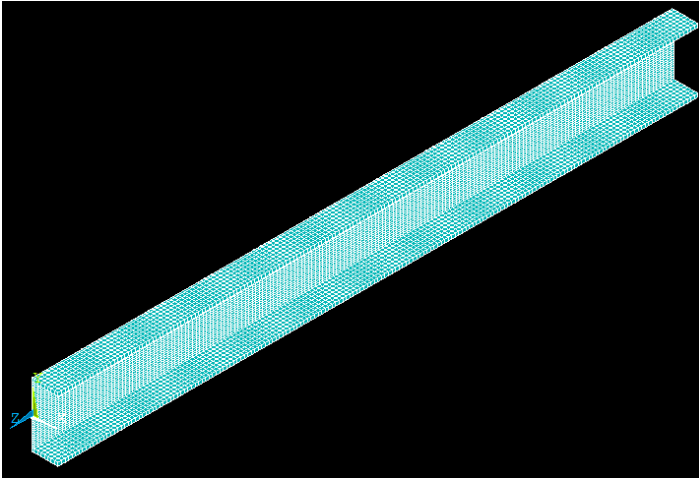
3. STALEN U-PROFIEL

Er is gekeken naar een stalen U-profiel met afmetingen zoals hieronder vermeld. Verder zijn ook het oppervlak van de doorsnede, de traagheidsmomenten (in beide richtingen en voor torsie), afstanden van het normaal- en dwarskrachtencentrum en de glijdingsmodulus gegeven. Deze waarden volgen uit de afmetingen van het profiel en de aangenomen grootheden uit paragraaf 2.2.

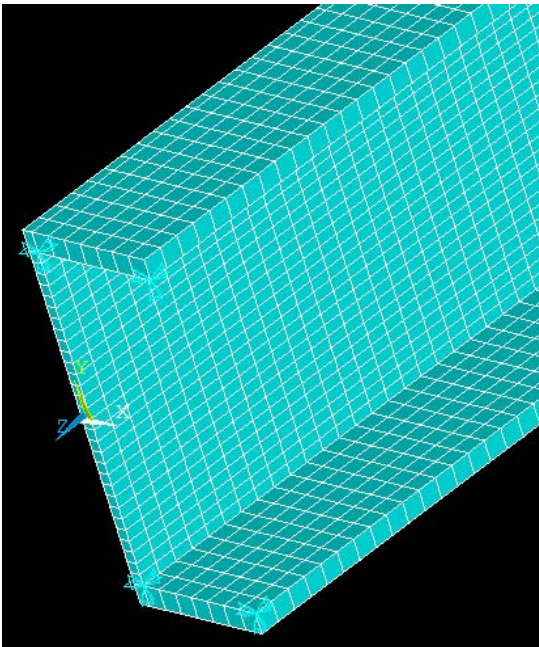
h	200 mm
t_w	6 mm
b	80 mm
t_f	11 mm
A	2828 mm ²
Δy_{DC}	-32,59 mm
Δz_{DC}	0 mm
Δy_{NC}	24,89 mm
Δz_{NC}	0 mm
I_y	21617747 mm ⁴
I_z	2087536 mm ⁴
I_t	85387 mm ⁴
G	78740 N/mm ²

3.1. Het model

Het U-profiel is in ANSYS gemodelleerd door de doorsnede op te bouwen uit een aantal oppervlaktes en deze over hun normaal uit te rekken tot een volume. Deze is daarna opgedeeld in volume-elementen van het type SOLID45 (zie Figuur 3.1). De grootte van de elementen is dusdanig gekozen dat er over de dikte van het lijf en de flensen van het profiel één element is (zie Figuur 3.2).

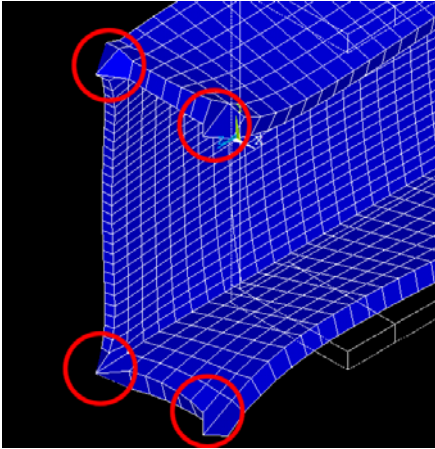


Figuur 3.1 – Het model van het U-profiel in ANSYS



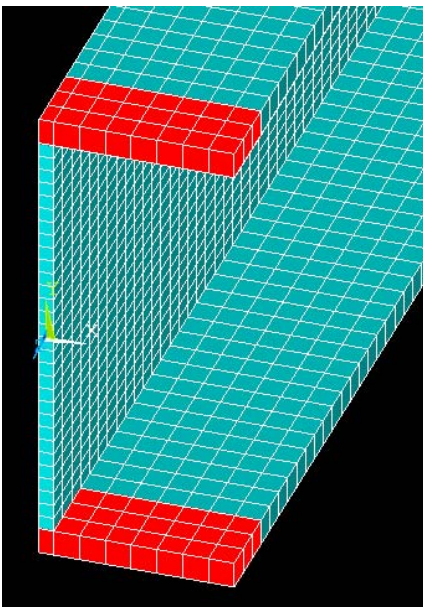
Figuur 3.2 – De kop van de ligger met de opgelegde verplaatsingen

Een probleem dat zich al voordeed bij de eerste berekeningen in ANSYS was dat de normaalkrachten bij belastinggeval $u_{x1}=1$ mm veel te klein bleken te zijn. Bij het bekijken van de vervormde ligger in ANSYS was duidelijk te zien dat de verplaatsing van de *nodes* op de hoeken van de doorsnede van het profiel niet goed door werden gegeven naar de elementen in de rest van de ligger. In plaats van dat het gehele oppervlak van de doorsnede mee werd getrokken ontstonden er op de plek van de opgelegde verplaatsingen kleine pieken die werden uitgetrokken. Een voorbeeld hiervan is te zien in Figuur 3.3.



Figuur 3.3 – De uitgetrokken elementen

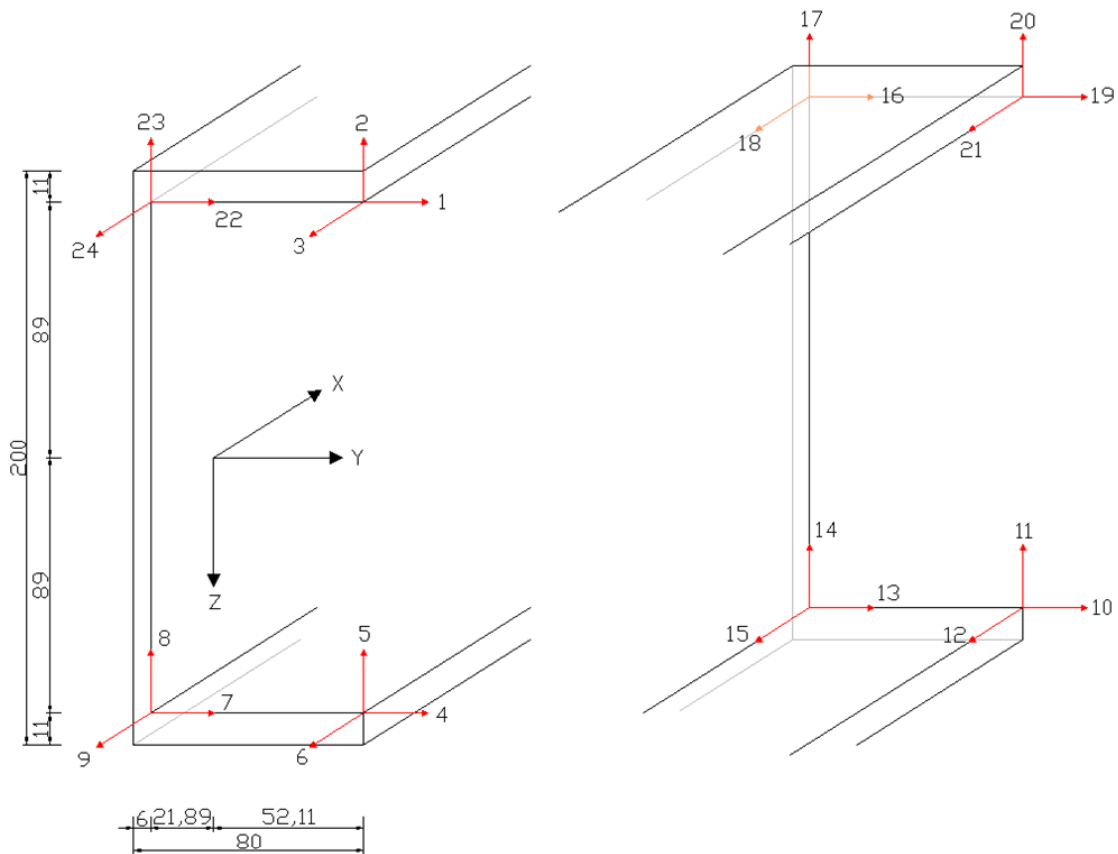
Om dit te voorkomen is er voor gekozen om aan beide kanten van de ligger de eerste drie rijen elementen van de flensen een tien maal hogere E-modulus dan de rest van de ligger te geven (zie Figuur 3.4). Op die manier zijn die delen een stuk stijver en worden de spanningen die de verplaatsingen van de *nodes* opwekken gelijkmatig verdeeld over het oppervlak van de doorsnede en wordt de gehele ligger vervormd.



Figuur 3.4 – De versterkte elementen zijn rood gekleurd

3.2. Opgelegde verplaatsingen

Om de ligger zo symmetrisch mogelijk te belasten is er voor gekozen om de *nodes* op de binnenste hoekpunten van het profiel te verplaatsen (zie Figuur 3.5). Hier staan ook alle vrijheidsgraden van de *nodes* (genummerd 1 tot en met 24) afgebeeld en is te zien wat de afstanden van deze ten opzichte van het normaalkrachten centrum van de doorsnede zijn.



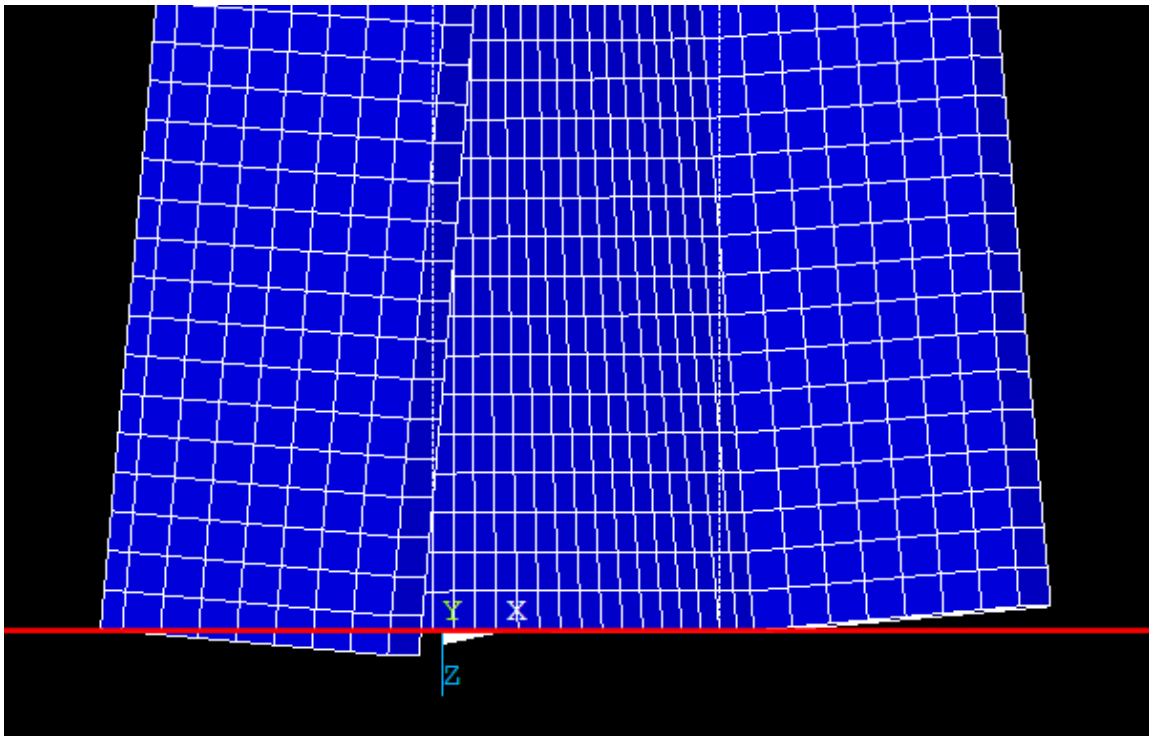
Figuur 3.5 – De *nodes* met de bijbehorende verplaatsingen en hun afstanden t.o.v. het normaalkrachten centrum

Om de vervormingen van de ligger, die nodig zijn om de stijfheidsmatrix te bepalen, op te leggen is er per vervorming bepaald hoe veel en in welke richting iedere node moet verplaatsen, een overzicht hiervan is te zien in Tabel 3.1.

Tabel 3.1 – Opgelegde verplaatsingen voor elke vrijheidsgraad van het staafelement

	$u_{x1}=1$	$u_{y1}=1$	$u_{z1}=1$	$\varphi_{x1}=1$	$\varphi_{y1}=1$	$\varphi_{z1}=1$	$u_{x2}=1$	$u_{y2}=1$	$u_{z2}=1$	$\varphi_{x2}=1$	$\varphi_{y2}=1$	$\varphi_{z2}=1$
u_1	0	1	0	vrij	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	-1	vrij	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	-1	0	0	vrij	89	52,0161	0	0	0	0	0	0
u_4	0	1	0	vrij	0	0	0	0	0	0	0	0
u_5	0	0	-1	vrij	0	0	0	0	0	0	0	0
u_6	-1	0	0	vrij	-89	52,0161	0	0	0	0	0	0
u_7	0	1	0	-89	0	0	0	0	0	0	0	0
u_8	0	0	-1	21,8939	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	-1	0	0	0	-89	-21,8939	0	0	0	0	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	vrij	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	vrij	0	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	vrij	-89	52,0161
u_{13}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-89	0	0
u_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	21,8939	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-89	-21,8939
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	89	0	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	21,894	0	0
u_{18}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	89	-21,8939
u_{19}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	vrij	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	vrij	0	0
u_{21}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	vrij	89	52,0161
u_{22}	0	1	0	89	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{23}	0	0	-1	21,894	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{24}	-1	0	0	0	89	-21,8939	0	0	0	0	0	0

Zoals te zien in deze tabel zijn bij het opleggen van torsie een tweetal *nodes* volledig vrij gelaten. Dit heeft te maken met het optreden van welving van liggeruiteinden, wat te zien is in het bovenaanzicht van de ligger in Figuur 3.6. De rode lijn geeft aan hoe de flensen voor de vervorming stonden, er is duidelijk te zien dat de bovenflens een stuk naar buiten is verplaatst en de onderflens naar binnen. Wanneer dit verhinderd zou worden door de *nodes* vast te zetten in de x-richting zouden er op die plaatsen enorme normaalkrachten optreden. Dit levert een niet correcte stijfheidsmatrix op. Wanneer alle *nodes* in de x-richting vrij worden gelaten, en welving dus volledig kan optreden, zullen er bij deze *nodes* geen normaalkrachten gevonden worden door ANSYS. Ook dit zorgt voor een niet correcte stijfheidsmatrix. Derhalve is er voor gekozen om welving deels toe te staan door de *nodes* aan de trogzijde van de ligger aan één van de liggeruiteinden vrij te laten.



Figuur 3.6 – Welving van het liggeruiteinde bij opgelegde torsie (bovenaanzicht)

3.3. Resultaten

ANSYS geeft na het opleggen van de verplaatsingen voor iedere *node* de oplegreacties in alle richtingen. Deze zijn per vervorming van de voorzijde van de ligger (u_{x1} tot en met

ϕ_{z1}) verzameld in Tabel 3.2 . De nummers van de oplegreacties corresponderen met de nummers uit Figuur 3.5. Vanuit deze oplegreacties zijn de oplegreacties die bij de vervormingen van de achterzijde van de ligger horen (u_{x2} tot en met ϕ_{z2}) verkregen door gebruik te maken van de symmetrie van de ligger . .

Tabel 3.2 – Oplegreacties

	$u_{x1}=1$	$u_{y1}=1$	$u_{z1}=1$	$\phi_{x1}=1$	$\phi_{y1}=1$	$\phi_{z1}=1$	$u_{x2}=1$	$u_{y2}=1$	$u_{z2}=1$	$\phi_{x2}=1$	$\phi_{y2}=1$	$\phi_{z2}=1$
F ₁	-12055	553	-2980	0	4.01E+06	6.94E+05	12055	-553	2980	-1.32E+05	1.95E+06	4.12E+05
F ₂	238	-1	246	0	-2.87E+05	10648	-238	1	-246	-13882	-2.05E+05	-7318
F ₃	-37722	-3500	-8762	0	1.23E+07	4.67E+06	37722	3500	8762	4.65E+05	5.18E+06	2.32E+06
F ₄	-12055	553	2980	0	-4.01E+06	6.94E+05	12055	-553	-2980	1.32E+05	-1.95E+06	4.12E+05
F ₅	-238	1	246	0	-2.87E+05	-10648	238	-1	-246	-13882	-2.05E+05	7318
F ₆	-37722	-3500	8762	0	-1.23E+07	4.67E+06	37722	3500	-8762	-4.65E+05	-5.18E+06	2.32E+06
F ₇	12055	-294	-2328	-38258	3.40E+06	-4.35E+05	-12055	294	2328	-1.06E+05	1.26E+06	-1.54E+05
F ₈	17	-844	-2496	-58891	2.54E+06	1.18E+06	-17	844	2496	72772	2.46E+06	5.08E+05
F ₉	-96635	3500	16520	3.64E+05	-2.32E+07	-4.83E+06	96635	-3500	-16520	-4.94E+05	-9.88E+06	-2.16E+06
F ₁₀	-12055	-553	-2980	1.32E+05	1.95E+06	-4.12E+05	12055	553	2980	0	4.01E+06	-6.94E+05
F ₁₁	-238	-1	-246	-13882	2.05E+05	-7318	238	1	246	0	2.87E+05	10648
F ₁₂	37722	-3500	8762	4.65E+05	-5.18E+06	2.32E+06	-37722	3500	-8762	0	-1.23E+07	4.67E+06
F ₁₃	12055	294	2328	-1.06E+05	-1.26E+06	1.54E+05	-12055	-294	-2328	-38258	-3.40E+06	4.35E+05
F ₁₄	17	844	2496	72772	-2.46E+06	-5.08E+05	-17	-844	-2496	-58891	-2.54E+06	-1.18E+06
F ₁₅	96635	3500	16520	4.94E+05	-9.88E+06	-2.16E+06	-96635	-3500	-16520	-3.64E+05	-2.32E+07	-4.83E+06
F ₁₆	12055	294	-2328	1.06E+05	1.26E+06	1.54E+05	-12055	-294	2328	38258	3.40E+06	4.35E+05
F ₁₇	-17	-844	2496	72772	-2.46E+06	5.08E+05	17	844	-2496	-58891	-2.54E+06	1.18E+06
F ₁₈	96635	3500	-16520	-4.94E+05	9.88E+06	-2.16E+06	-96635	-3500	16520	3.64E+05	2.32E+07	-4.83E+06
F ₁₉	-12055	-553	2980	-1.32E+05	-1.95E+06	-4.12E+05	12055	553	-2980	0	-4.01E+06	-6.94E+05
F ₂₀	238	1	-246	-13882	2.05E+05	7318	-238	-1	246	0	2.87E+05	-10648
F ₂₁	37722	-3500	-8762	-4.65E+05	5.18E+06	2.32E+06	-37722	3500	8762	0	1.23E+07	4.67E+06
F ₂₂	12055	-294	2328	38258	-3.40E+06	-4.35E+05	-12055	294	-2328	1.06E+05	-1.26E+06	-1.54E+05
F ₂₃	-17	844	-2496	-58891	2.54E+06	-1.18E+06	17	-844	2496	72772	2.46E+06	-5.08E+05
F ₂₄	-96635	3500	-16520	-3.64E+05	2.32E+07	-4.83E+06	96635	-3500	16520	4.94E+05	9.88E+06	-2.16E+06

Om van deze matrix met krachten tot een stijfheidsmatrix te komen dienen deze te worden vermenigvuldigd met een matrix waarin de waarden van Tabel 3.3 staan, deze is gelijk aan de inverse van Tabel 3.1. Deze berekening is gedaan met behulp van een MAPLE-sheet welke te vinden is in bijlage 6.2.

Tabel 3.3 – Waarden voor het berekenen van de knooppunten van de ligger

	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅	F ₁₆	F ₁₇	F ₁₈	F ₁₉	F ₂₀	F ₂₁	F ₂₂	F ₂₃	F ₂₄
F _{x1}	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
F _{y1}	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F _{z1}	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
M _{x1}	0	0	0	0	0	0	-89	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89	22	0
M _{y1}	0	0	89	0	0	-89	0	0	-89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
M _{z1}	0	0	52	0	0	52	0	0	-22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-22
F _{x2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
F _{y2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
F _{z2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
M _{x2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-89	22	0	89	22	0	0	0	0	0	0	0
M _{y2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-89	0	0	-89	0	0	89	0	0	89	0	0	0
M _{z2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	52	0	0	-22	0	0	-22	0	0	52	0	0	0

Uit deze berekening volgt een 12 bij 12 stijfheidsmatrix (Matrix 3.1).

Matrix 3.1 – Stijfheidsmatrix van de ligger bepaald met behulp van ANSYS

268714	0	0	0	0	320000	-268714	0	0	0	0	-320000
0	518	0	0	0	518000	0	-518	0	0	0	516000
0	-2	4992	117782	-4506000	0	0	0	-4500	-117780	-4510000	0
0	-104	-225880	4218720	250188000	0	0	0	251464	17696	252380000	0
0	0	-4500196	-64792000	6319000000	0	0	0	4500196	-170702000	2680680000	0
328852	518000	0	0	0	698200000	-328852	-518000	0	0	0	336320000
-268714	0	0	0	0	-320000	268714	0	0	0	0	320000
0	-518	0	0	0	-516000	0	518	0	0	0	-518000
0	-2	-4992	-117780	4510000	0	0	0	4500	117782	4506000	0
0	-104	225880	17696	-252380000	0	0	0	-251464	4218720	-251488000	0
0	0	-4500196	-170702000	2680680000	0	0	0	4500196	64792000	6319000000	0
-328852	518000	0	0	0	336320000	328852	-518000	0	0	0	698200000

3.4. Vergelijking

De analytische stijfheidsmatrix (Matrix 3.2) is te bepalen aan de hand van Matrix 1.1 en met behulp van de grootheden uit paragraaf 2.2 en 3.1. Bij het vergelijken met de ANSYS matrix (Matrix 3.1) vallen meteen een aantal dingen op. De termen waar erg grote verschillen optreden zijn in Matrix 3.3 gekleurd aangegeven.

Matrix 3.2 – Analytisch bepaalde stijfheidsmatrix

282800	0	0	0	0	0	-282800	0	0	0	0	0
0	626,2609	0	0	0	626260,856	0	-626,26086	0	0	0	626260,86
0	0	6485,324	-211373,523	-6485324	0	0	0	-6485,324	211373,523	-6485324	0
0	0	-211373,5	10250890,9	211373523	0	0	0	211373,5	-10250891	211373523	0
0	0	-6485324	211373523	8647098667	0	0	0	6485324	-211373523	4323549333	0
0	626260,9	0	0	0	835014474	0	-626260,86	0	0	0	417507237
-282800	0	0	0	0	0	282800	0	0	0	0	0
0	-626,2609	0	0	0	-626260,86	0	626,26086	0	0	0	-626260,9
0	0	-6485,324	211373,523	6485324	0	0	0	6485,324	-211373,52	6485324	0
0	0	211373,5	-10250890,9	-211373523	0	0	0	-211373,5	10250890,9	-211373523	0
0	0	-6485324	211373523	4323549333	0	0	0	6485324	-211373523	8647098667	0
0	626260,9	0	0	0	417507237	0	-626260,86	0	0	0	835014474

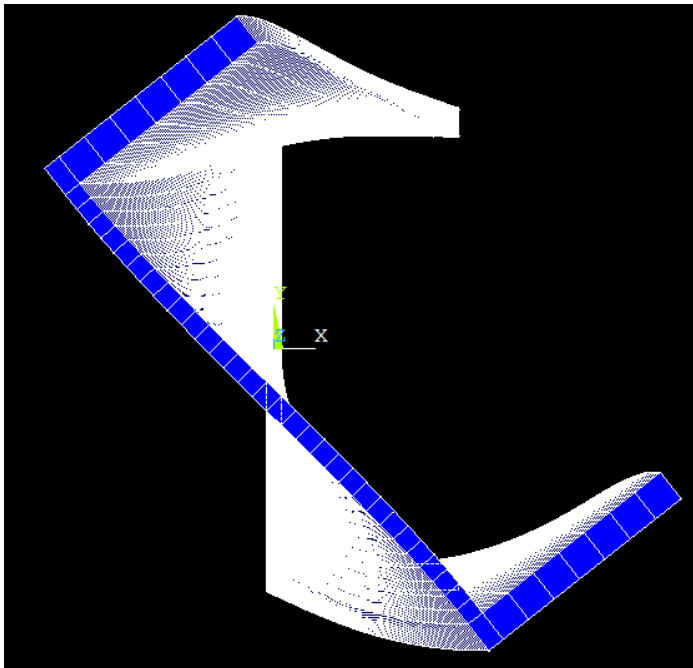
Matrix 3.3 – Opvallende afwijkingen in de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix

268714	0	0	0	0	320000	-268714	0	0	0	0	-320000
0	518	0	0	0	518000	0	-518	0	0	0	516000
0	-2	4992	117782	-4506000	0	0	0	-4500	-117780	-4510000	0
0	-104	-225880	4218720	250188000	0	0	0	251464	17696	252380000	0
0	0	-4500196	-64792000	6319000000	0	0	0	4500196	-170702000	2680680000	0
328852	518000	0	0	0	698200000	-328852	-518000	0	0	0	336320000
-268714	0	0	0	0	-320000	268714	0	0	0	0	320000
0	-518	0	0	0	-516000	0	518	0	0	0	-518000
0	-2	-4992	-117780	4510000	0	0	0	4500	117782	4506000	0
0	-104	225880	17696	-252380000	0	0	0	-251464	4218720	-251488000	0
0	0	-4500196	-170702000	2680680000	0	0	0	4500196	64792000	6319000000	0
-328852	518000	0	0	0	336320000	328852	-518000	0	0	0	698200000

De twee groen gekleurde termen zouden volgens de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix gelijk moeten zijn aan 0. In de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix blijkt dit niet zo te zijn, nu is het echter zo dat de orde van grootte van deze twee termen dusdanig klein is ten opzicht van de overige termen in de matrix dat dit verwaarloosbaar wordt geacht. De oorzaak van deze verschillen is waarschijnlijk de afronding van ANSYS.

Daarnaast zijn er bij extensie en rotatie om de z-as een aantal termen in de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix rood gekleurd die niet gelijk zijn aan 0, terwijl dit wel zou moeten zijn volgens de analytische matrix. Dit betekent dat er in het geval van extensie naast een normaalkracht er volgens ANSYS ook een moment om de z-as aanwezig zou moeten zijn en dat er bij rotatie om de z-as naast een moment en dwarskracht ook een normaalkracht is. Een verklaring hiervoor is niet gevonden, maar het is wel interessant om te zien dat de stijfheidsmatrix zijn symmetrie over de diagonaal blijft behouden.

Wat ook opvalt is dat de waarden bij torsie (blauw gekleurd in de matrix) erg veel verschillen, niet alleen de tekens komen niet overeen, ook de grootte van de waarden wijken erg af. Nu is het zo dat voor het opleggen van torsie al een andere manier dan bij de overige vervormingen moest gebruikt worden. Hier kan een deel van de afwijking aan te wijten zijn. Daarnaast wordt nog steeds een deel van de welving verhinderd aangezien het lijf van het profiel zich niet kan verplaatsen in de x-richting. Verder is bij een vooraanzicht van de vervormde ligger (Figuur 3.7) te zien dat het lijf een beetje een S-vorm aanneemt en de flensen een klein beetje krom gaan staan, ook hier kunnen de gevonden krachten door afwijken.



Figuur 3.7 – Vervormde ligger met opgelegde torsie

Door nu het verschil van de waarden van de stijfheidsmatrices te delen door de waarden uit de waarden uit de numeriek bepaalde stijfheidsmatrix ontstaat er een matrix waarin de procentuele afwijking van alle waarden af is te lezen (Matrix 3.4). Om de leesbaarheid te bevorderen zijn alle afwijkingen van 0% licht gemaakt. Wanneer de afwijkingen bij torsie (blauw) en bij extensie en rotatie om de z-as (rood) buiten beschouwing worden gehouden is te zien dat de grootste afwijking 61,29% (groen) is. De overige afwijkingen zijn ook vrij groot, alleen voor de normaalkracht lijken de waarden aardig overeen te komen met een procentuele afwijking van 5,24%.

Matrix 3.4 – Procentuele afwijking numeriek bepaalde matrix t.o.v. de analytisch bepaalde matrix

5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%	5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%
0,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	20,90%	0,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	21,37%
0,00%	-100,00%	29,91%	-279,46%	43,93%	0,00%	0,00%	0,00%	44,12%	-279,46%	43,80%	0,00%
0,00%	-100,00%	-6,42%	142,99%	-15,51%	0,00%	0,00%	0,00%	-15,94%	-58027,73%	-16,25%	0,00%
0,00%	0,00%	44,11%	-426,23%	36,84%	0,00%	0,00%	0,00%	44,11%	23,83%	61,29%	0,00%
-100,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	19,60%	-100,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	24,14%
5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%	5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%
0,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	21,37%	0,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	20,90%
0,00%	-100,00%	29,91%	-279,46%	43,80%	0,00%	0,00%	0,00%	44,12%	-279,46%	43,93%	0,00%
0,00%	-100,00%	-6,42%	-58027,73%	-16,25%	0,00%	0,00%	0,00%	-15,94%	142,99%	-15,95%	0,00%
0,00%	0,00%	44,11%	-223,83%	61,29%	0,00%	0,00%	0,00%	44,11%	-426,23%	36,84%	0,00%
-100,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	24,14%	-100,00%	20,90%	0,00%	0,00%	0,00%	19,60%

3.5. Verklaring van de afwijkingen

Om te kijken hoe de grootste afwijkingen in de stijfheidsmatrix van ANSYS eventueel verminderd kunnen zijn er een aantal mogelijke oplossingen beschouwd. Ten eerste is de gehele matrix vergeleken met een analytisch bepaalde matrix waarin ook rekening is gehouden met afschuifvervorming. Daarnaast zijn twee termen van de diagonaal van de stijfheidsmatrix opnieuw met ANSYS bepaald. Het betreft de termen $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$, respectievelijk de dwarskracht in de y-richting bij een verplaatsing in de y-richting en de dwarskracht in de z-richting bij een verplaatsing in de z-richting. Deze worden een keer met een hogere orde elementen, een keer met een grotere liggerlengte en een keer met een hogere E-modulus van de versterkte delen van de flensen berekend.

3.5.1. Afschuifvervorming

Er is vanuit gegaan dat de afschuifvervorming verwaarloosbaar is (zie 2.2), maar aangezien er toch grote verschillen zijn tussen de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix en de stijfheidsmatrix die uit ANSYS is gekomen is het interessant om te kijken of de afschuifvervorming wel echt verwaarloosbaar is. Deze matrix is hieronder te zien.

Matrix 3.5 – Stijfheidsmatrix van een ligger waarbij rekening is gehouden met afschuifvervorming²

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_y}{l} & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{\lambda_y}{l} & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & \frac{1}{2} \lambda_y \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & -\frac{1}{2} \lambda_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_z}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\frac{1}{2} \lambda_z & 0 \\ 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \mu & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\mu & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_z & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & p_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \lambda_z & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & -q_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & p_y & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -q_y \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_y}{l} & 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & \frac{\lambda_y}{l} & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_z}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & \frac{1}{2} \lambda_z & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \frac{1}{2} \lambda_z & 0 \\ 0 & \frac{e_z \lambda_y}{l} & -\frac{e_y \lambda_z}{l} & -\mu & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -\frac{e_z \lambda_y}{l} & \frac{e_y \lambda_z}{l} & \mu & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & \frac{1}{2} e_z \lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_z & -\frac{1}{2} e_y \lambda_z & -q_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \lambda_z & \frac{1}{2} e_y \lambda_z & p_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \lambda_y & 0 & -\frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & -q_y & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_y & 0 & \frac{1}{2} e_z \lambda_y & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ \phi_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ F_{z2} \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ \phi_{z2} \end{bmatrix}$$

Met behulp van vergelijkingen (4.1) tot en met (4.7) kunnen de waarden van deze stijfheidsmatrix worden berekend.

$$\frac{1}{\lambda_y} = \frac{l^2}{12EI_z} + \frac{1}{k_y GA} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\lambda_z} = \frac{l^2}{12EI_y} + \frac{1}{k_z GA} \tag{3.2}$$

$$\mu = \frac{GI_w + \lambda_z e_y^2 \lambda_y e_z^2}{l} \tag{3.3}$$

$$p_y = \frac{EI_z}{l} + \frac{1}{4} \lambda_y l \tag{3.4}$$

$$p_z = \frac{EI_y}{l} + \frac{1}{4} \lambda_z l \quad (3.5)$$

$$q_y = \frac{EI_z}{l} - \frac{1}{4} \lambda_y l \quad (3.6)$$

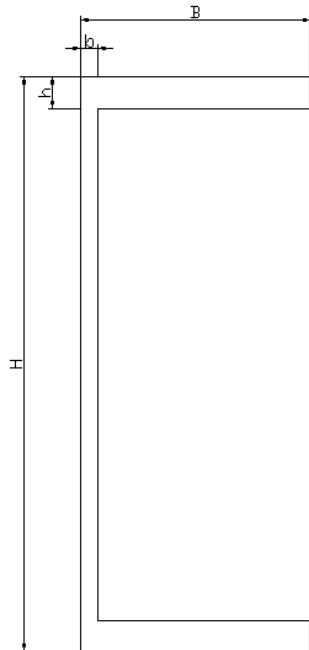
$$q_z = \frac{EI_y}{l} - \frac{1}{4} \lambda_z l \quad (3.7)$$

Alle waarden zijn al bekend behalve de vormfactor k. Deze factor reduceert het oppervlak van de doorsnede (A) tot het oppervlak van de doorsnede wat de afschuifkracht in de y- of z-richting opneemt. De vormfactor kan bepaald worden met behulp van vergelijking (4.8). De nog onbekende factoren c en d kunnen met behulp van vergelijking (4.9) en (4.10) en Figuur 3.8 worden berekend. Hier blijkt uit dat de vormfactor voor de y- en de z-richting van elkaar in grootte verschillen.

$$k_{y,z} = \frac{3 \cdot (7cd^5 + 8c^2d^5 - 30cd^3 + 15cd - 8c + 8)}{20 \cdot (1-c)(1-cd)^{-1}(1-cd^3)^2} \quad (3.8)$$

$$k_y \begin{cases} c = \frac{h}{H} \\ d = \frac{b}{B} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$k_z \begin{cases} c = \frac{b}{B} \\ d = \frac{h}{H} \end{cases} \quad (3.10)$$



Figuur 3.8 – De waarden van h, H, b en B kunnen zo uit het profiel van ligger worden afgelezen

Dit levert uiteindelijk onderstaande stijfheidsmatrix op.

Matrix 3.6 – Analytisch bepaalde stijfheidsmatrix met afschuifvervorming

282800	0	0	0	0	0	-282800	0	0	0	0	0
0	624,164	0	0	0	624163,99	0	-624,164	0	0	0	624163,99
0	0	6332,031	-206377,32	-6332031,3	0	0	0	-6332,031	206377,32	-6332031,3	0
0	0	-206377,3	10088051,6	206377317	0	0	0	206377,3	-10088052	206377317	0
0	0	-6332031	206377317	8493805990	0	0	0	6332031	-206377317	4170256657	0
0	624164	0	0	0	832917605	0	-624164	0	0	0	415410367
-282800	0	0	0	0	0	282800	0	0	0	0	0
0	-624,164	0	0	0	-624163,99	0	624,16399	0	0	0	-624164
0	0	-6332,031	206377,317	6332031,32	0	0	0	6332,031	-206377,32	6332031,32	0
0	0	206377,3	-10088052	-206377317	0	0	0	-206377,3	10088052	-206377317	0
0	0	-6332031	206377317	4170256657	0	0	0	6332031	-206377317	8493805990	0
0	624164	0	0	0	415410367	0	-624164	0	0	0	832917605

Van deze stijfheidsmatrix is ook een matrix gemaakt met daarin de procentuele afwijking van de stijfheidsmatrix die is bepaald met behulp van ANSYS. Hieruit blijkt dat de procentuele afwijking ongeveer gelijk is aan die bij de stijfheidsmatrix waar niet rekening

is gehouden met afschuifvervorming. Het verschil tussen deze twee betreft over het algemeen slechts 1% of minder, het is dus terecht geweest om de afschuifvervorming te verwaarlozen.

Matrix 3.7 – Procentuele afwijking numeriek bepaalde matrix t.o.v. de analytisch bepaalde matrix met afschuifvervorming

5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%	5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%
0,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	20,49%	0,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	20,96%
0,00%	-100,00%	26,84%	-275,22%	40,52%	0,00%	0,00%	0,00%	40,71%	-275,22%	40,40%	0,00%
0,00%	-100,00%	-8,63%	139,13%	-17,51%	0,00%	0,00%	0,00%	-17,93%	-57107,52%	-18,23%	0,00%
0,00%	0,00%	40,71%	-418,52%	34,42%	0,00%	0,00%	0,00%	40,71%	20,90%	55,57%	0,00%
-100,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	19,29%	-100,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	23,52%
5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%	5,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	-100,00%
0,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	20,96%	0,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	20,49%
0,00%	-100,00%	26,84%	-275,22%	40,40%	0,00%	0,00%	0,00%	40,71%	-275,22%	40,52%	0,00%
0,00%	-100,00%	-8,63%	-57107,52%	-18,23%	0,00%	0,00%	0,00%	-17,93%	139,13%	-17,94%	0,00%
0,00%	0,00%	40,71%	-220,90%	55,57%	0,00%	0,00%	0,00%	40,71%	-418,52%	34,42%	0,00%
-100,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	23,52%	-100,00%	20,49%	0,00%	0,00%	0,00%	19,29%

3.5.2. Hogere orde elementen

Er is ook gekeken naar een hogere orde elementen. Bij de eerdere berekeningen is er steeds gebruik gemaakt van het elementtype SOLID45, maar om te kijken of een hogere orde element een aanzienlijk verschil maakt in de waarden die uit de berekeningen komen zijn twee belastingsgevallen ($u_{y1}=1$ en $u_{z1}=1$) ook uitgewerkt met SOLID95 elementen. De krachten die hieruit zijn gekomen zijn te zien in de tabel hieronder.

Tabel 3.4 – Oplegreacties bij SOLID95 elementen

	$u_{y1}=1$	$u_{z1}=1$
F ₁	828,33	2908,7
F ₂	-2,0909	-242,29
F ₃	3449,1	8319,8
F ₄	828,33	-2908,7
F ₅	2,0909	-242,29
F ₆	3449,1	-8319,8
F ₇	-573,09	2289,4
F ₈	796,75	2423,3
F ₉	-3449,1	-16185
F ₁₀	-828,33	2908,7
F ₁₁	-2,0909	242,29
F ₁₂	3449,1	-8319,8
F ₁₃	573,09	-2289,4
F ₁₄	-796,75	-2423,3
F ₁₅	-3449,1	-16185
F ₁₆	573,09	2289,4
F ₁₇	796,75	-2423,3
F ₁₈	-3449,1	16185
F ₁₉	-828,33	-2908,7
F ₂₀	2,0909	242,29
F ₂₁	3449,1	8319,8
F ₂₂	-573,09	-2289,4
F ₂₃	-796,75	2423,3
F ₂₄	-3449,1	16185

Dit levert de waarden voor $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ en de procentuele afwijking ten opzichte van de analytisch bepaalde waarden (zie Tabel 3.5).

Tabel 3.5 – Waarden $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ en procentuele afwijkingen

	Analytisch	SOLID45	SOLID95	Procentuele afwijking SOLID45	Procentuele afwijking SOLID95
$K_{2,2}$	626,26	518	510,48	20,90%	22,68%
$K_{3,3}$	6485,32	4992	4362,02	29,91%	48,68%

Hieruit blijkt dat de afwijkingen iets groter worden, dit komt omdat bij het gebruik van hogere orde elementen de stijfheid van de ligger iets kleiner wordt, maar de waarden die gevonden worden zijn wel preciezer dan bij een lagere orde element.

3.5.3. Grotere liggerlengte

In plaats van de liggerlengte van 2 meter is er voor gekozen om nu een ligger van 4 meter lang te gaan bekijken. Naast het feit dat het ANSYS model aan moet worden gepast moeten ook de analytische waarden van $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ opnieuw worden berekend, deze zijn immers afhankelijk van de liggerlengte. De oplegreacties die vanuit ANSYS zijn bepaald staan in de tabel hieronder.

Tabel 3.6 – Oplegreacties bij een liggerlengte van 4 meter

	$u_{y1}=1$	$u_{z1}=1$
F ₁	137,03	957,25
F ₂	9,9271	-40,066
F ₃	938,82	2698,7
F ₄	137,03	-957,25
F ₅	-9,9271	-106
F ₆	938,82	-2698,7
F ₇	-102,29	860,32
F ₈	304,81	379,4
F ₉	-938,82	-4926,7
F ₁₀	-137,03	957,25
F ₁₁	9,9271	40,066
F ₁₂	938,82	-2698,7
F ₁₃	102,29	-860,32
F ₁₄	-304,81	-379,4
F ₁₅	-938,82	-4926,7
F ₁₆	102,29	860,32
F ₁₇	304,81	-379,4
F ₁₈	-938,82	4926,7
F ₁₉	-137,03	-957,25
F ₂₀	-9,9271	40,066
F ₂₁	938,82	2698,7
F ₂₂	-102,29	-860,32
F ₂₃	-304,81	379,4
F ₂₄	-938,82	4926,7

Deze oplegreacties leveren opnieuw de termen $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$. Deze zijn met de nieuwe analytische waarden en de procentuele afwijkingen te vinden in Tabel 3.7.

Tabel 3.7 – Waarden $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ en procentuele afwijkingen

	Analytisch l=2 m	Analytisch l=4 m	Numeriek l=2 m	Numeriek l=4 m	Procentuele afwijking l=2 m	Procentuele afwijking l=4 m
$K_{2,2}$	626,26	78,28	518	69,48	20,90%	12,67%
$K_{3,3}$	6485,32	810,67	4992	612,734	29,91%	32,30%

Hieruit blijkt dat bij een grotere liggerlengte de term $K_{2,2}$ een stuk dichterbij de analytisch bepaalde term ligt. Voor de waarde van $K_{3,3}$ geldt dit echter niet, deze wijkt zelfs iets meer af dan wanneer er een liggerlengte van 2 meter gebruikt is.

3.5.4. Hogere E-modulus versterkte delen

Er is voor de versterkte delen van de flensen een E-modulus gekozen die 10 maal groter is dan de E-modulus van de rest van de ligger om er voor te zorgen dat de verplaatsingen goed worden overgedragen naar het gehele oppervlak van de doorsnede. De vraag is nu of er niet een hogere waarde voor de E-modulus gekozen moet worden, aangezien er nog steeds kleine pieken kunnen ontstaan op de kop van de ligger die niet afleesbaar zijn met het blote oog. Als dit namelijk het geval is zijn de oplegreacties die gevonden worden niet nauwkeurig genoeg. Om te kijken of een nog hogere E-modulus voor de versterkte delen een beter resultaat leveren is er een nieuwe ligger gemodelleerd waarbij de versterkte delen van de flensen een E-modulus hebben die 100 maal groter is dan die van de rest van de ligger. De oplegreacties die bij dit model zijn gevonden staan in de tabel hieronder.

Tabel 3.8 – Resultaten met E-modulus van $2 \cdot 10^7$ N/mm²

	$u_{y1}=1$	$u_{z1}=1$
F ₁	580,43	3483,4
F ₂	26,325	-225,17
F ₃	3789	9785,9
F ₄	580,43	-3483,4
F ₅	-26,325	-225,17
F ₆	3789	-9785,9
F ₇	-300,05	2724,2
F ₈	1136,6	2697,3
F ₉	-3789	-17990
F ₁₀	-580,43	3483,4
F ₁₁	26,325	225,17
F ₁₂	3789	-9785,9
F ₁₃	300,05	-2724,2
F ₁₄	-1136,6	-2697,3
F ₁₅	-3789	-17990
F ₁₆	300,05	2724,2
F ₁₇	1136,6	-2697,3
F ₁₈	-3789	17990
F ₁₉	-580,43	-3483,4
F ₂₀	-26,325	225,17
F ₂₁	3789	9785,9
F ₂₂	-300,05	-2724,2
F ₂₃	-1136,6	2697,3
F ₂₄	-3789	17990

Ook uit deze oplegreacties kunnen de termen $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ worden bepaald. Deze zijn met de bijbehorende procentuele afwijkingen te vinden in de tabel hieronder.

Tabel 3.9 – Waarden $K_{2,2}$ en $K_{3,3}$ en procentuele afwijkingen

	Analytisch	$E=2 \cdot 10^6$	$E=2 \cdot 10^7$	Procentuele afwijking $E=2 \cdot 10^6$	Procentuele afwijking $E=2 \cdot 10^7$
$K_{2,2}$	626,26	518	510,48	20,90%	11,68%
$K_{3,3}$	6485,32	4992	4362,02	29,91%	31,17%

Dit levert een soortgelijk resultaat als bij een grotere liggerlengte; de term $K_{2,2}$ ligt een stuk dichterbij de analytisch bepaald term, maar de waarde van $K_{3,3}$ wijkt juist iets meer af.

4. CONCLUSIE

De met ANSYS gevonden stijfheidsmatrix heeft grote afwijkingen ten opzichte van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Bij extensie is de afwijking slechts 5%. Echter, tegelijkertijd treedt ook buiging op waardoor onverwachte termen in de numerieke stijfheidsmatrix ontstaan. Bij dwarskrachtvervorming zijn er afwijkingen tot 40% waargenomen. Bij buigvervorming zijn er afwijkingen tot 60% gevonden. Bij wringvervorming zijn afwijkingen groter dan 100% gevonden.

Voor de afwijkingen zijn een aantal mogelijke verklaringen te bedenken:

1) afschuifvervorming, 2) te weinig elementen, 3) krachtsinleiding te grof, 4) dwarscontractie van het materiaal, 5) verhinderde welving van de liggeruiteinden.

Verklaring 1 is getoetst door de analytische stijfheidsmatrix aan te vullen met termen die afschuifvervorming beschrijven. De invloed is ongeveer 1% voor de beschouwde ligger. Dit kan de waargenomen grote afwijkingen niet verklaren.

Verklaring 2 is getoetst door het model uit te rekenen met 20-knoopselementen in plaats van 8-knoopselementen. Waargenomen is dat tenminste een term van de numerieke stijfheidsmatrix ongeveer 20% kleiner werd. Hierdoor werd de afwijking met de analytische stijfheidsmatrix groter. Het elementennet is derhalve niet voldoende fijn maar dit verklaart de waargenomen grote afwijkingen niet.

Verklaring 3 is getoetst door de liggerlengte te verdubbelen en afzonderlijk de stijfheid van de liggeruiteinden met een factor 10 te vergroten. Door elk van deze veranderingen werd het verschil tussen de analytische en numerieke stijfheidsmatrix ongeveer 10% kleiner. Dit is waargenomen voor tenminste één van de termen in de stijfheidsmatrix. Dit laat zien dat de manier waarop de belasting is ingeleid in de liggeruiteinden een belangrijke invloed heeft op de numerieke stijfheidsmatrix.

Verklaring 4 is getoetst voor extensie en blijkt geen waarneembare invloed te hebben. (Niet opgenomen in dit rapport.) Verklaring 5 is heel belangrijk gebleken voor wringstijfheid van de ligger. In dit onderzoek is geprobeerd om welving van de uiteinden vrij te laten optreden. Echter, na vele pogingen is dit nog niet helemaal gerealiseerd.

De gevonden afwijkingen zijn veel groter dan kon worden verwacht. Hieruit kan worden geconcludeerd dat het numerieke model verbeterd moet worden. Op basis van de huidige resultaten kan nog geen uitspraak worden gedaan over de nauwkeurigheid van de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix. Echter, het waargenomen driedimensionale gedrag van het beschouwde U-profiel blijkt bijzonder ingewikkeld te zijn. Hierdoor is het vermoeden dat de analytisch bepaalde stijfheidsmatrix onvolledig zou kunnen zijn alleen maar toegenomen. Geconcludeerd kan worden dat vervolgonderzoek dringend noodzakelijk is.

4.1. Aanbevelingen

Om een beter resultaat te krijgen zullen de berekeningen voor alle vervormingen opnieuw uitgevoerd moeten worden, waarbij een fijner elementennet en/of SOLID95 elementen gebruikt worden, er een langere liggerlengte wordt toegepast en de versterkte delen van de liggeruiteinden een E-modulus van $2 \cdot 10^7$ N/mm² of hoger hebben. Er moet ook onderzocht worden wat de beste manier is om torsie op te leggen, zodat hier ook bruikbare oplegreacties uit zullen komen.

5. BRONNEN

¹ Hoogenboom, P.C.J. (2008), *Aantekeningen over wringing*, Bladzijde 60

² Kok, A.W.M. (2000), *Numerical Mechanics - The Displacement method*, Bladzijde 46

6. BIJLAGEN

6.1. Opdracht

BSc – eindwerk

Structural
Engineering

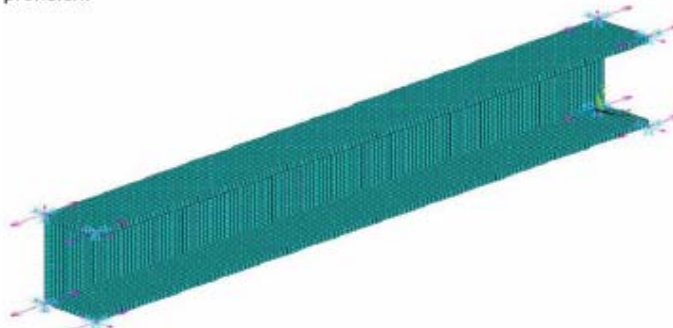
Stijfheidsmatrix van asymmetrische profielen

Toelichting De stijfheidsmatrix van een ligger ziet er als volgt uit.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Deze kan worden afgeleid met de juiste differentiaalvergelijking of met vergeet-mij-nietjes. Echter, hoe nauwkeurig is deze afleiding eigenlijk? Zijn de toegepaste vereenvoudigen inderdaad acceptabel?

In dit project zal de stijfheidsmatrix van een ligger bepaald worden met de eindige-elementenmethode en volume-elementen. Dit is een veel nauwkeurigere aanpak dan met de differentiaalvergelijking. Met name zal worden gekeken naar zijdelingse vervorming, torsie vervorming en de invloed van de inklemmingen. Voornamelijk zullen dunwandige asymmetrische doorsneden worden onderzocht zoals L-profielen en Z-profielen.



Figuur: Elementenmodel van een U-profiel Bron: Bachelor eindwerk L. Voormeeren

Opdracht

Bereken de stijfheidsmatrix van een aantal slanke profielen met ANSYS gebruikmakend van volume-elementen. Gebruik hiertoe eenheidsverplaatsingen of -rotaties van de liggeruiteinden. Elke berekening levert een kolom van een stijfheidsmatrix op. De uiteindelijke stijfheidsmatrices zullen de afmeting 12 x 12 hebben. Vergelijk de resultaten met die uit vakliteratuur. Verklaar eventuele verschillen.

Secaties

Constructiemechanica en Staalconstructies

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom kamer 6.48 tel. 015 278 8081
p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl

ir. Abspoel

6.2. Maplesheet matrixberekening

```
>restart;
> P:=matrix([[ -12055, 553, -2980, 0, 4.01E+06, 6.94E+05, 12055, -553,
              2980, -1.32E+05, 1.95E+06, 4.12E+05],
[238, 1, 246, 0, -2.87E+05, 10648, -238, -1, -246, -13882, -
2.05E+05, -7318],
[-37722, 3500, -8762, 0, 1.23E+07, 4.67E+06, 37722, -3500, 8762,
4.65E+05, 5.18E+06, 2.32E+06],
[-12055, 553, 2980, 0, -4.01E+06, 6.94E+05, 12055, -553, -2980,
1.32E+05, -1.95E+06, 4.12E+05],
[-238, 1, -246, 0, -2.87E+05, -10648, 238, 1, -246, -13882, -
2.05E+05, 7318],
[-37722, 3500, 8762, 0, -1.23E+07, 4.67E+06, 37722, -3500, -8762,
-4.65E+05, -5.18E+06, 2.32E+06],
[12055, -294, -2328, -38258, 3.40E+06, -4.35E+05, -12055, 294, 2328, -
1.06E+05, 1.26E+06, -1.54E+05],
[17, 844, -2496, -58891, 2.54E+06, 1.18E+06, -17, -844, 2496, 72772,
2.46E+06, 5.08E+05],
[-96635, -3500, 16520, 3.64E+05, -2.32E+07, -4.83E+06, 96635, 3500,
-16520, -4.94E+05, -9.88E+06, -2.16E+06],
[-12055, -553, -2980, 1.32E+05, 1.95E+06, -4.12E+05, 12055, 553,
2980, 0, 4.01E+06, -6.94E+05],
[-238, 1, -246, -13882, 2.05E+05, -7318, 238, -1, 246, 0,
2.87E+05, 10648],
[37722, 3500, 8762, 4.65E+05, -5.18E+06, 2.32E+06, -37722, -3500, -8762,
0, -1.23E+07, 4.67E+06],
[12055, 294, 2328, -1.06E+05, -1.26E+06, 1.54E+05, -12055, -294, -2328,
-38258, -3.40E+06, 4.35E+05],
[17, -844, 2496, 72772, -2.46E+06, -5.08E+05, -17, 844, -2496, -58891,
-2.54E+06, -1.18E+06],
[96635, -3500, 16520, 4.94E+05, -9.88E+06, -2.16E+06, -96635, 3500, -16520,
-3.64E+05, -2.32E+07, -4.83E+06],
[12055, 294, -2328, 1.06E+05, 1.26E+06, 1.54E+05, -12055, -294, 2328,
38258, 3.40E+06, 4.35E+05],
[-17, 844, 2496, 72772, -2.46E+06, 5.08E+05, 17, -844, -2496, -58891,
-2.54E+06, 1.18E+06],
[96635, -3500, -16520, -4.94E+05, 9.88E+06, -2.16E+06, -96635, 3500, 16520,
3.64E+05, 2.32E+07, -4.83E+06],
[-12055, -553, 2980, -1.32E+05, -1.95E+06, -4.12E+05, 12055, 553,
-2980, 0, -4.01E+06, -6.94E+05],
[238, 1, 246, -13882, 2.05E+05, 7318, -238, 1, 246, 0,
2.87E+05, -10648],
[37722, 3500, -8762, -4.65E+05, 5.18E+06, 2.32E+06, -37722, -3500, 8762,
0, 1.23E+07, 4.67E+06],
[12055, -294, 2328, 38258, -3.40E+06, -4.35E+05, -12055, 294, -2328,
1.06E+05, -1.26E+06, -1.54E+05],
```

```
[-17, -844, -2496, -58891, 2.54E+06, -1.18E+06, 17, 844, 2496, 72772,
 2.46E+06, -5.08E+05],
[-96635, -3500, -16520, -3.64E+05, 2.32E+07, -4.83E+06, 96635, 3500,
 16520, 4.94E+05, 9.88E+06, -2.16E+06]]);
```

$P :=$

```
[-12055, 553, -2980, 0, 0.401 107, 694000., 12055, -553, 2980, -132000., 0.195 107,
 412000.]
[238, 1, 246, 0, -287000., 10648, -238, -1, -246, -13882, -205000., -7318]
[-37722, 3500, -8762, 0, 0.123 108, 0.467 107, 37722, -3500, 8762, 465000.,
 0.518 107, 0.232 107]
[-12055, 553, 2980, 0, -0.401 107, 694000., 12055, -553, -2980, 132000.,
 -0.195 107, 412000.]
[-238, 1, -246, 0, -287000., -10648, 238, 1, -246, -13882, -205000., 7318]
[-37722, 3500, 8762, 0, -0.123 108, 0.467 107, 37722, -3500, -8762, -465000.,
 -0.518 107, 0.232 107]
[12055, -294, -2328, -38258, 0.340 107, -435000., -12055, 294, 2328, -106000.,
 0.126 107, -154000.]
[17, 844, -2496, -58891, 0.254 107, 0.118 107, -17, -844, 2496, 72772, 0.246 107,
 508000.]
[-96635, -3500, 16520, 364000., -0.232 108, -0.483 107, 96635, 3500, -16520,
 -494000., -0.988 107, -0.216 107]
[-12055, -553, -2980, 132000., 0.195 107, -412000., 12055, 553, 2980, 0, 0.401 107,
 -694000.]
[-238, 1, -246, -13882, 205000., -7318, 238, -1, 246, 0, 287000., 10648]
[37722, 3500, 8762, 465000., -0.518 107, 0.232 107, -37722, -3500, -8762, 0,
 -0.123 108, 0.467 107]
[12055, 294, 2328, -106000., -0.126 107, 154000., -12055, -294, -2328, -38258,
 -0.340 107, 435000.]
[17, -844, 2496, 72772, -0.246 107, -508000., -17, 844, -2496, -58891, -0.254 107,
 -0.118 107]
[96635, -3500, 16520, 494000., -0.988 107, -0.216 107, -96635, 3500, -16520,
 -364000., -0.232 108, -0.483 107]
[12055, 294, -2328, 106000., 0.126 107, 154000., -12055, -294, 2328, 38258,
 0.340 107, 435000.]
[-17, 844, 2496, 72772, -0.246 107, 508000., 17, -844, -2496, -58891, -0.254 107,
 0.118 107]
[96635, -3500, -16520, -494000., 0.988 107, -0.216 107, -96635, 3500, 16520,
```

```

364000., 0.232 108, -0.483 107]
[-12055, -553, 2980, -132000., -0.195 107, -412000., 12055, 553, -2980, 0,
-0.401 107, -694000.]
[238, 1, 246, -13882, 205000., 7318, -238, 1, 246, 0, 287000., -10648]
[37722, 3500, -8762, -465000., 0.518 107, 0.232 107, -37722, -3500, 8762, 0,
0.123 108, 0.467 107]
[12055, -294, 2328, 38258, -0.340 107, -435000., -12055, 294, -2328, 106000.,
-0.126 107, -154000.]
[-17, -844, -2496, -58891, 0.254 107, -0.118 107, 17, 844, 2496, 72772, 0.246 107,
-508000.]
[-96635, -3500, -16520, -364000., 0.232 108, -0.483 107, 96635, 3500, 16520,
494000., 0.988 107, -0.216 107]

```

```

> M:=matrix([
[0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1],
[1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0],
[0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0],
[89,-52,0,-89,-52,0,-89,22,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,89,22,0],
[0,0,89,0,0,-89,0,0,-89,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,89],
[0,0,52,0,0,52,0,0,-22,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-22],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,-1,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,-89,-52,0,-89,22,0,89,22,0,89,-52,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,-89,0,0,-89,0,0,89,0,0,89,0,0,89,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,52,0,0,-22,0,0,-22,0,0,52,0,0,0]
]);

```

```

M := [
0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1
1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0
89, -52, 0, -89, -52, 0, -89, 22, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 89, 22, 0
0, 0, 89, 0, 0, -89, 0, 0, -89, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 89
0, 0, 52, 0, 0, 52, 0, 0, -22, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -22
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -89, -52, 0, -89, 22, 0, 89, 22, 0, 89, -52, 0, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -89, 0, 0, -89, 0, 0, 89, 0, 0, 89, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 52, 0, 0, -22, 0, 0, -22, 0, 0, 52, 0, 0, 0]

```

```

> evalm(M&*P);

```

[268714, 0, 0, 0, 0, 0, 320000., -268714, 0, 0, 0, 0, 0, -320000.]
[0, 518, 0, 0, 0, 0, 518000., 0, -518, 0, 0, 0, 0, 516000.]
[0, -2, 4992, 117782., -0.450610⁷, 0, 0, 0, -4500, -117780., -0.451010⁷, 0.]
[0, -104, -225880, 0.421872010⁷, 0.25018810⁹, 0, 0, 0, 251464, 17696.,
0.25238010⁹, 0.]
[0, 0, -4500196, -0.6479210⁸, 0.6319010¹⁰, 0, 0, 0, 4500196, 0.17070210⁹,
0.26806810¹⁰, 0.]
[328852, 518000, 0, 0, 0, 0, 0.6982010⁹, -328852, -518000, 0, 0, 0, 0, 0.3363210⁹]
[-268714, 0, 0, 0, 0, 0, -320000., 268714, 0, 0, 0, 0, 0, 320000.]
[0, -518, 0, 0, 0, 0, -516000., 0, 518, 0, 0, 0, 0, -518000.]
[0, -2, -4992, -117780., 0.451010⁷, 0, 0, 0, 4500, 117782., 0.450610⁷, 0.]
[0, -104, 225880, 17696., -0.25238010⁹, 0, 0, 0, -251464, 0.421872010⁷,
-0.25018810⁹, 0.]
[0, 0, -4500196, -0.17070210⁹, 0.26806810¹⁰, 0, 0, 0, 4500196, 0.6479210⁸,
0.6319010¹⁰, 0.]
[-328852, 518000, 0, 0, 0, 0, 0.3363210⁹, 328852, -518000, 0, 0, 0, 0, 0.6982010⁹]