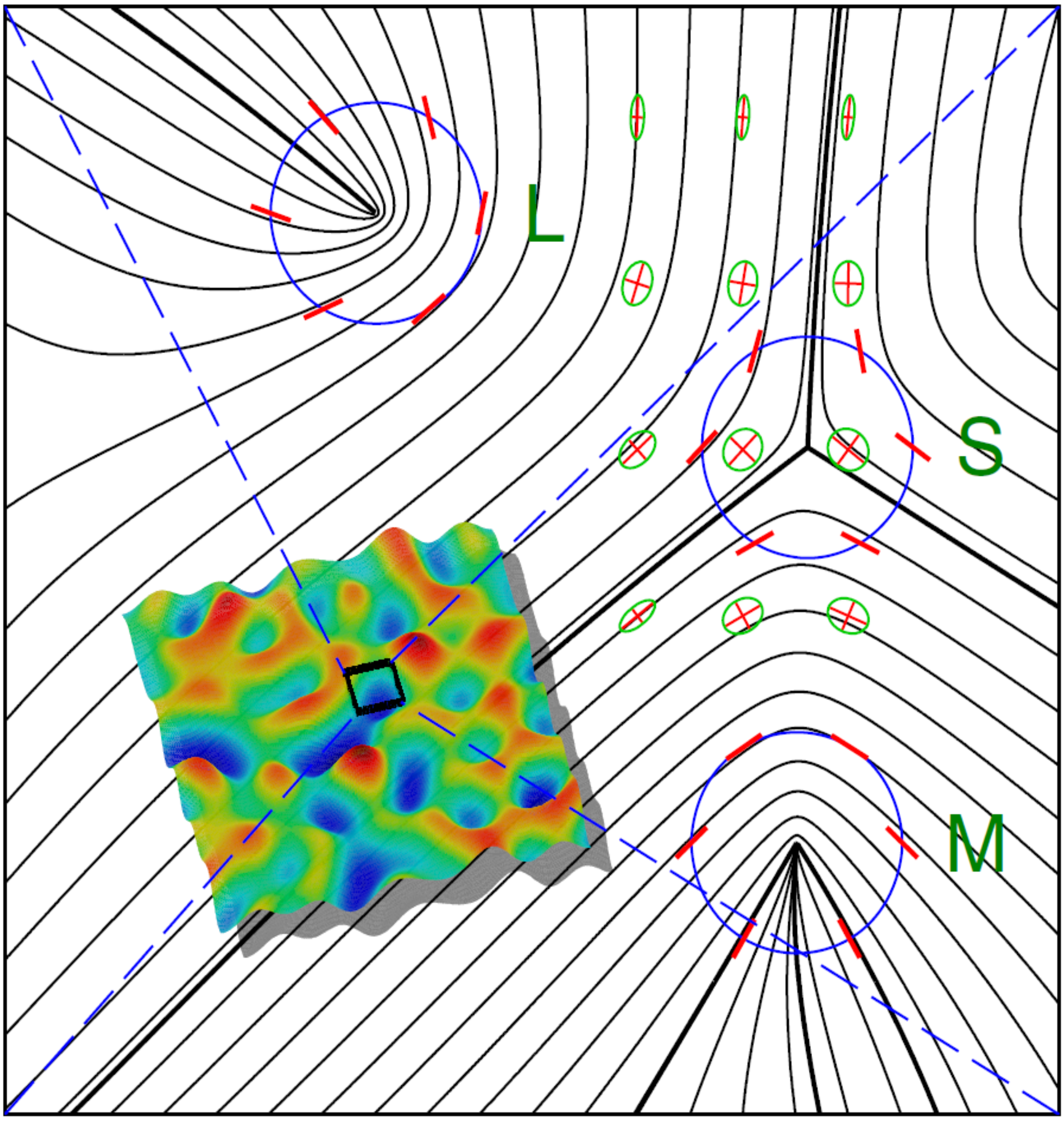
Invarianten van tensoren

De onafhankelijkheid van assenstelsels rondom umbilics

Wouter van Straalen

Bachelor Eindwerk CT3000



TU Delft Delft University of Technology

1^e begeleider Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
2^e begeleider Dr.ir. F.P. van der Meer
Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen

Invarianten van tensoren

De onafhankelijkheid van assenstelsels rondom umbilics

Bachelor Eindwerk

Voor de titel Bachelor of Science in Civiele Techniek
aan de Technische Universiteit Delft

Wouter van Straalen

12 juni 2013

Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen (CiTG) · Technische Universiteit Delft

Voorwoord

Dit rapport is het eindrapport van het Bachelor Eindwerk bij de sectie constructiemechanica van de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen van de Technische Universiteit Delft.

Graag zou ik mijn begeleiders, Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en Dr.ir F.P. van der Meer, willen bedanken voor hun hulp en medewerking bij het schrijven dit rapport. De feedback die, bijna wekelijks, op mijn rapport werd gegeven was heel nuttig en praktisch. Met name de inhoudelijke tips gaven nieuwe inzichten in de zoektocht naar de invarianten.

Het Delft Center for Systems and Control (DCSC) zou ik graag willen bedanken voor het beschikbaar stellen van de LaTeX-template van de TU Delft.

Ik wens de lezer veel plezier tijdens het doornemen van dit verslag.

Delft, University of Technology — Wouter van Straalen
12 juni 2013 — 4078594

Abstract

Door middel van krommingen van functies, normen van de gradiënten, discriminanten uit bestaande literatuur en trial-and-error zijn de invarianten van het 2D spanningstensor afgeleid, zoals weergegeven in vergelijking 1.

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \\
\delta_2 &= (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2 \\
\delta_3 &= a_1 \cdot a_3 - a_5^2 + a_2 \cdot a_4 - a_6^2 \\
\delta_4 &= \Big(a_1 a_4 + a_2 a_3 - 2a_5 a_6\Big)^2 - 4\Big(a_1 a_3 - a_5^2\Big)\Big(a_2 a_4 - a_6^2\Big) \\
\delta_5 &= \Big(a_{245} a_{316} - 9a_5 a_6\Big)^2 - 4\Big(3a_5 a_{245} + a_{316}^2\Big)\Big(3a_6 a_{316} + a_{245}^2\Big) \\
&\quad \text{met:} \qquad a_{245} = a_2 - a_4 + a_5 \qquad \text{en} \qquad a_{316} = a_3 - a_1 + a_6 \\
\delta_6 &= (a_3 - a_6)^2 + (a_2 - a_5)^2 \\
\delta_7 &= p_2^2(a_1^2 + a_2^2) + p_1^2(a_3^2 + a_4^2) + p_3^2(4a_5^2 + 4a_6^2) + p_1 p_2(2a_1 a_3 + 2a_2 a_4) \\
&\quad - p_2 p_3(4a_1 a_5 + 4a_2 a_6) - p_1 p_3(4a_3 a_5 + 4a_4 a_6)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Het vermoeden bestaat dat er slechts zes invarianten zijn, vanwege het feit dat er zes variabelen zijn. De uniekheid van bovenstaande invarianten is deels bewezen. Het is mogelijk dat één van de invarianten kan worden uitgedrukt in de andere invarianten en dus niet uniek is. Een andere optie is dat er meer dan zes invarianten zijn, wat nu wordt aangenomen.

Er is een onderscheid tussen twee belangrijke soorten umbilics, namelijk de gegeneraliseerde umbilics en de geometrische umbilics. De (vier) invarianten die horen bij een geometrische umbilic kunnen afgeleid worden uit de gegeneraliseerde umbilics door te stellen dat: $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$. Dit volgt uit de afleiding van de Airy spanningsfunctie, waarbij wordt verondersteld dat er geen body forces optreden en er dus moet worden voldaan aan de evenwichtsvoorwaarden.

De umbilics kunnen geclassificeerd worden aan de hand van invarianten, doordat de waarde ervan iets kan zeggen over het type umbilic, zie hoofdstuk 7. Dit verband is niet voor iedere invariant bekend en zou met simulaties gevonden kunnen worden.

Inhoudsopgave

Lijst met symbolen

Symbool	Betekenis
δ_i	De i^{de} invariant
a_i	Partiële afgeleide van een normaal/schuifspanning in het x, y-assenstelsel
b_i	Partiële afgeleide van een normaal/schuifspanning in het r, s-assenstelsel
H	De gemiddelde kromming
K	De Gaussiaanse kromming of Gauss-kromming
χ	De Airy spanningsfunctie
D_i	Discriminant met een bepaalde eigenschap
τ_i	De i^{de} invariant in het geval zonder body forces
A_i	Partiële afgeleide van een normaal/schuifspanning in het x, y, z-assenstelsel
B_i	Partiële afgeleide van een normaal/schuifspanning in het r, s, t-assenstelsel

Inleiding

Tegenwoordig kan men met behulp van complexe computermodellen vrij eenvoudig een contourplot gemaakt worden van de spanningen, in bijvoorbeeld een scheepsromp. Het voordeel hiervan is dat snel inzicht wordt verkregen in de grootte van de spanningen die optreden, waardoor men snel kan inzien welke onderdelen de grootste spanningen te verduren krijgen. Het nadeel is echter dat de contourplot veranderd op het moment dat je het assenstelsel anders definieert. Dit betekent dat je dus een compleet andere contourplot kunt krijgen, terwijl de belastingen op de constructie in werkelijkheid niet veranderen. Invarianten kunnen hierbij uitkomst bieden, omdat dit grootheden zijn die onafhankelijk zijn van het gekozen coördinatenstelsel.

De wiskundige definitie van een invariant, ofwel onveranderlijk, is een begrip om aan te geven dat iets niet verandert onder een reeks transformaties [1]. Daarom wordt ook wel gezegd dat iets 'onder' een bepaalde transformatie invariant is. De focus van dit bachelor eindwerk zal zich vooral richting op de invarianten bij rotatie van het assenstelsel.

In de wiskunde zijn er al twee standaard-invarianten bekend voor een 2x2 matrix. Deze invarianten gelden voor ieder punt in de constructie, maar er zijn bepaalde punten waar we graag wat meer willen weten, bijvoorbeeld ter plaatse van de krommingen in een scheepsboeg, zoals weergegeven in figuur 1. In deze punten geldt dat de spanningsituatie in iedere richting gelijk is. Er zijn dus meer dan twee hoofdrichtingen, die je normaal zou zien in een vlakke staalplaat. Deze speciale punten in de plaatconstructie heten *umbilics*, naar het Latijnse woord voor navel, umbilicus. Hoe deze punten precies gedefinieerd zijn, staat beschreven in hoofdstuk 1.

Probleemstelling

Umbilics zijn dus bijzondere punten in gekromde schaalconstructies. In de spanningstoestand rondom zo'n umbilic kunnen hele bijzondere patronen ontstaan. Men kan via eindige-elementenberekeningen de spanningen in dit gebied bepalen. Echter zijn deze spanningen afhankelijk van het gekozen assenstelsel en nu zoeken we formules van combinaties van factoren, die invariant zijn onder de rotatie van het assenstelsel. In de literatuur over dit onderwerp is reeds één invariant bekend, zie (2a). Hierbij zijn de factoren a_1 t/m a_6 respectievelijk de partiële afgeleiden van de spanningen σ_{xx}, σ_{yy} en σ_{xy}, zie vergelijking (2b). De afleiding van deze factoren staat beschreven in hoofdstuk 2.

$$\delta_1 = (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \tag{2a}$$

$$a_1 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \qquad a_3 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \qquad a_5 = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \tag{2b}$$

$$a_2 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \qquad a_4 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \qquad a_6 = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

In dit bacheloreindwerk zullen de overige varianten van het spanningsveld gevonden moeten worden, meer algemeen:

Wat zijn de unieke invarianten van het (2D) tensorveld rondom een umbilic?

In het geval van de spanningstensor zijn we dus opzoek naar alle invarianten van het spanningsveld rondom de umbilic. De invarianten gelden dus niet alleen voor spanningen, maar voor iedere fysische grootheid die beschreven kan worden met een tweede-orde tensor. Denk hierbij aan krommingen van schalen, normaalkrachten in schijven en momenten in plaatconstructies.

Doelstelling

Een wiskundige beschrijving van de invarianten van het tensorveld rondom een umbilic is belangrijk om een goede illustratie te kunnen geven van rekenresultaten van computermodellen. Het is belangrijk om daarbij onderscheid te kunnen maken tussen de diverse typen umbilics, waarbij de gevonden invarianten kunnen helpen met de classificatie. In hoofdstuk 2 zal de aanpak voor het vinden van de invarianten worden beschreven. De belangrijkste focus zal liggen op tweedimensionale tensorvelden, dat later uitgebreid kan worden naar een driedimensionaal probleem. De zoektocht naar de 2D invarianten staat beschreven in hoofdstuk 3 t/m 6. De interpretatie van de gevonden invarianten wordt in hoofdstuk 7 besproken. Tenslotte zal een opzet worden gemaakt voor de zoektocht naar de invarianten van het 3D-probleem in hoofdstuk 8.

Figuur 1: *Negatieve en positieve kromming in de boeg van een schip in Gdansk, Polen.* [F1]

Literatuuroverzicht

In de literatuur die over het onderwerp 'tensoren' én 'umbilics' gaan, was reeds één invariant bekend. De invariant, $\delta_1 = (a_1 - a_3)a_6 - (a_2 - a_4)a_5$, werd voor het eerst als invariant beschouwd door Delmarcelle [2]. Echter werd de invariant in een iets andere vorm geschreven dan de eerder vermelde invariant, zie vergelijking (3a).

$$\delta = ad - bc \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\partial x} \quad & b &= \frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\partial y} \\ c &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} & d &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \tag{3b}$$

De notatie is hier anders, omdat deze notatie beredeneerd is uit de twee voorwaarden die gelden in umbilics. Umbilics voldoen namelijk aan de volgende twee voorwaarden:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

De eerste voorwaarde geeft aan dat de normaalspanningen in het punt gelijk aan elkaar zijn. De tweede voorwaarde geeft aan dat de schuifspanningen in het punt nul zijn. Deze twee voorwaarden gelden dus alleen voor umbilics en niet voor andere punten in het 2D-vlak. Verder wordt er in het artikel niets gezegd over eventuele andere invarianten en daarom zijn nog enkele andere wetenschappelijke artikelen doorgenomen.

Berry en Hannay [3] hebben in hun artikel 'Umbilic points on Gaussian random surfaces' veel geschreven over de classificatie van umbilics. Echter was dit artikel een algemene beschrijving van umbilics en niet zozeer toegespitst op de spanningstensor. In het artikel worden drie discriminanten besproken, waarmee drie eigenschappen van de umbilics kunnen worden beschreven. Dit zijn de index-, lijn- en contoureigenschap. Meer hierover komt aanbod bij de interpretatie van de invarianten in hoofdstuk 7. De eerste invariant (δ_1) toont veel gelijkenis met de discriminant van de index-eigenschap, echter komen in de discriminant maar vier onbekenden voor en bij de invariant zes. De twee andere discriminanten zouden dus ook de eigenschap van invariantie in zich kunnen hebben, maar de relatie is niet één op één.

Veel wetenschappers zijn verder gegaan met de resultaten van Berry en Hannay. Er is geprobeerd om de algemene resultaten terug te koppelen aan specifieke vakgebieden. Thorndike et al. [4] hebben met artikel 'Structure of flow fields' gekeken hoe ze de umbilics konden classificeren in stroomvelden. Ook hier komen dezelfde drie discriminanten voor, alleen zijn deze aangepast voor gegeneraliseerde umbilics t.o.v. de discriminanten van Berry en Hannay. Dit verschil wordt in hoofdstuk 5 toegelicht.

Hutchinson et al. [5] hadden het in het artikel over de classificatie van isotrope punten in spanningsvelden ook over deze discriminanten. Zij hebben geprobeerd de resultaten van Berry en Hannay [3] en Thorndike et al. [4] te vertalen naar de spanningstensor. De Airy spanningsfunctie die hierin aan bod komt is nader uitgelicht in hoofdstuk 5.

Hoofdstuk 1

Theorie

1-1 Definities

In de wiskunde is het belangrijk om te weten waarover we het precies hebben als we een bepaalde term gebruiken. Vandaar dat er nu wat definities volgen van de termen die veel aan bod komen in dit bachelor eindwerk, zoals tensoren, invarianten en umbilics.

1-1-1 Tensor

Tensoren zijn generalisaties van scalars, vectoren en matrices [6]. Ook hogere orde matrices vallen onder de term 'tensor'. Het aantal indices van een variabele geeft de orde van de tensor aan. Een scalair heeft geen index en is een nulde-orde tensor. Een vector heeft precies één index en is een eerste-orde tensor. Zo ook voor de matrix, die twee indices heeft, geldt dus dat het een tweede-orde tensor is. Er is ook een derde-orde tensor, namelijk de driedimensionale matrix, oftewel een kubusmatrix. In principe kan een tensor iedere orde hebben, maar we beperken ons in dit verslag tot de tweede-orde tensor, zoals de matrix in figuur 1-1b. Het is daarom voor ons niet relevant om ons te verdiepen in hogere orde tensoren.

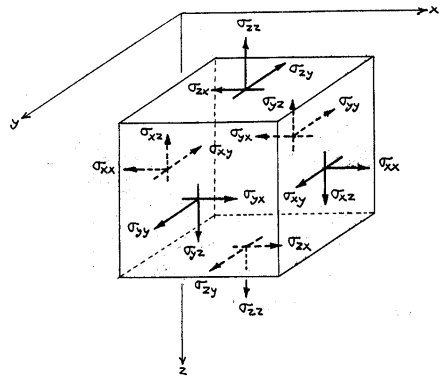
In tabel 1-1 is overzichtstabel gemaakt, waarin het voorgaande schematisch is weergegeven.

Type	Element	Aantal indices	Tensor-orde
Scalair	a	0	0
Vector	a_i	1	1
Matrix	a_{ij}	2	2
Kubusmatrix	a_{ijk}	3	3

Tabel 1-1: Schematische weergave van tensoren van de nulde t/m derde orde.

Spanningstensor

In het voorbeeld van de scheepsromp zijn we op zoek naar de hoofdspanningen rond een umbilic. Vanuit de constructiemechanica weten we hoe de spanningen op een blokje werken. De positieve spanningsrichtingen zijn weergegeven in figuur 1-1a en de matrix-notatie in figuur 1-1b. De hoofdrichtingen zijn zo gedefinieerd dat er geen schuifspanningen optreden, maar enkel normaalspanningen.



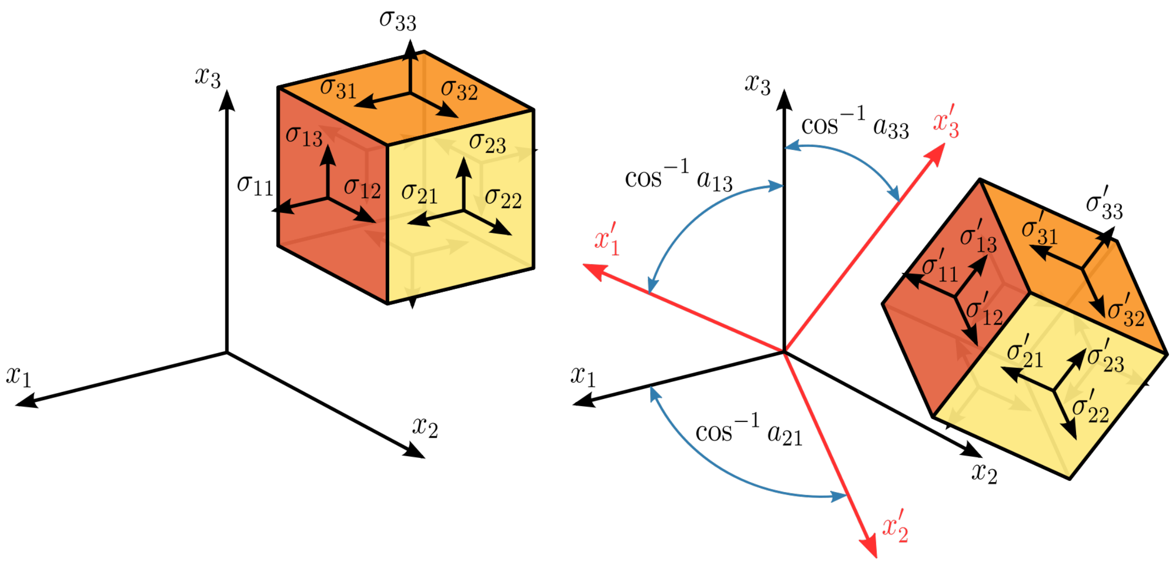
(a) Grafische weergave

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

(b) Matrixnotatie

Figuur 1-1: *Spanningtensor uit collegeslides CT2031.* [F2]

In figuur 1-2 zijn nogmaals de spanningen op een blokje weergegeven. De rotatie van het assenstelsel heeft tot gevolg dat de de spanningen een andere grootte en richting krijgen. In werkelijkheid is de spanningssituatie onveranderd gebleven.



Figuur 1-2: *Spanningtensor na rotatie van de assen.* [F3]

1-1-2 Invariant

Een *invariant* is een hoeveelheid die onveranderd blijft onder bepaalde transformatieklassen [7]. Invarianten zijn heel nuttig voor de indeling van wiskundige objecten, omdat ze intrinsieke eigenschappen van het bestudeerde object weergeven. Daarnaast is een mooie eigenschap van invarianten dat deze vrij eenvoudig zijn te berekenen, zeker in vergelijking met de eigenwaarden van een matrix. De belangrijkste eigenschap waaraan de gezochte invariant moet voldoen, is dat hij onafhankelijk is van een draaiing van het assenstelsel. In meer wiskundige termen betekent dat deze dus invariant dezelfde waarde heeft na het ondergaan van een willekeurige rotatie.

Voor symmetrische 2x2 tensoren zijn twee belangrijke invarianten bekend [8]. Deze invarianten zijn weergegeven in 1-1.

$$\begin{aligned} I_A &= tr(A) = A_{11} + A_{22} = A_1 + A_2 \\ II_A &= det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A_1A_2 \end{aligned} \tag{1-1}$$

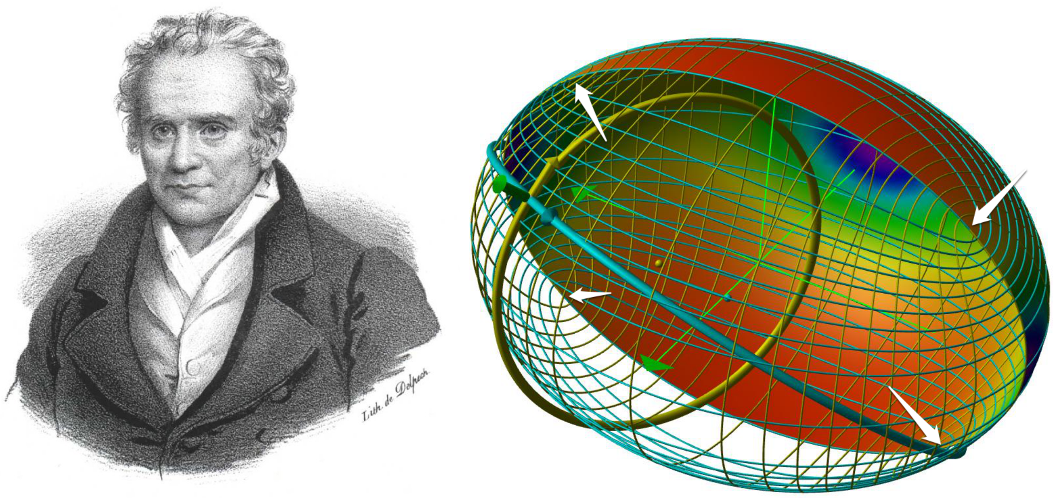
Hierbij zijn A_{ij} de elementen uit de tensor A, in ons geval met de spanningstensor zijn dat σ_{ij}. De variabelen A_i zijn de eigenwaarden van de tensor A. Later blijkt dat de eigenwaarden heel lastig zijn te berekenen, vanwege de linearisatie die in hoofdstuk 1-2 wordt besproken.

1-1-3 Umbilic

Bij *umbilics* is het belangrijk om onderscheid te maken tussen de geometrische umbilic en de umbilic van bijvoorbeeld een spanningstensor. *Geometrische umbilics* zijn punten op een oppervlak waarbij de kromming in iedere richting gelijk is, dus $\kappa_1 = \kappa_2$ [9]. Nu zijn er twee bijzondere vormen, waar ieder punt in de ruimte een umbilic is. De eerste is de cirkel, aangezien ieder punt zich op dezelfde afstand tot het middelpunt bevindt en de kromming dus ook in ieder punt gelijk is. De tweede bijzondere vorm is de vlakke plaat. In ieder punt van een vlakke plaat is er namelijk geen kromming wat dus volgens de definitie dus ook een umbilic is. In alle andere vormen zijn er een eindig aantal umbilics te vinden en de meeste hiervan zijn geïsoleerd, d.w.z. er bevinden zich zelden twee umbilics naast elkaar. De hoofdkrommingsrichtingen in een umbilic zijn niet gedefinieerd, doordat de kromming in iedere richting hetzelfde is. Daarom wordt gekeken in de buurt van de umbilic en wordt het verloop van de hoofdrichtingen nabij de umbilic als soepel aangenomen [10].

In dit bachelor eindwerk zijn we vooral geïnteresseerd in de umbilics die zich voordoen in het (2D) spanningsveld. Dit soort umbilics zijn niet afgeleid van een oppervlak en worden ook wel *gegeneraliseerde umbilics* genoemd. Door in ieder punt te bepalen hoe de hoofdspanningsrichtingen lopen, kunnen we een vierkantennet creëren door deze punten.

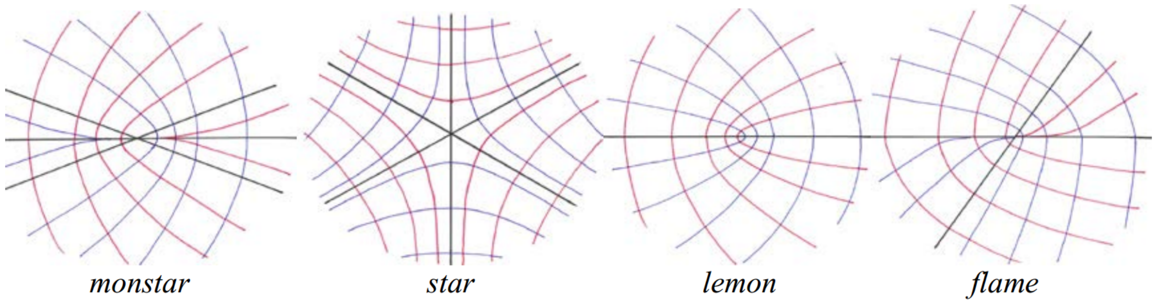
Geometrische umbilics zijn voor het eerst beschreven door de Franse wiskundige Monge (1746-1818), die samen met Gauss (1777-1855) als de grondlegger van de differentiale geometrie van krommingen en oppervlakken wordt beschouwd. Monge was de eerste die in 1796 de krommingslijnen van een ellipsoïde had berekend. Deze geometrische vorm bevat vier umbilics, zie figuur 1-3b. Deze umbilics bevinden zich waar de steeds kleiner wordende paraboollijnen samenkomen, aangegeven met witte pijlen.



(a) *Gaspard Monge (1746-1818)* [F4] **(b)** *Krommingslijnen van een ellipsoïde.* [F5]

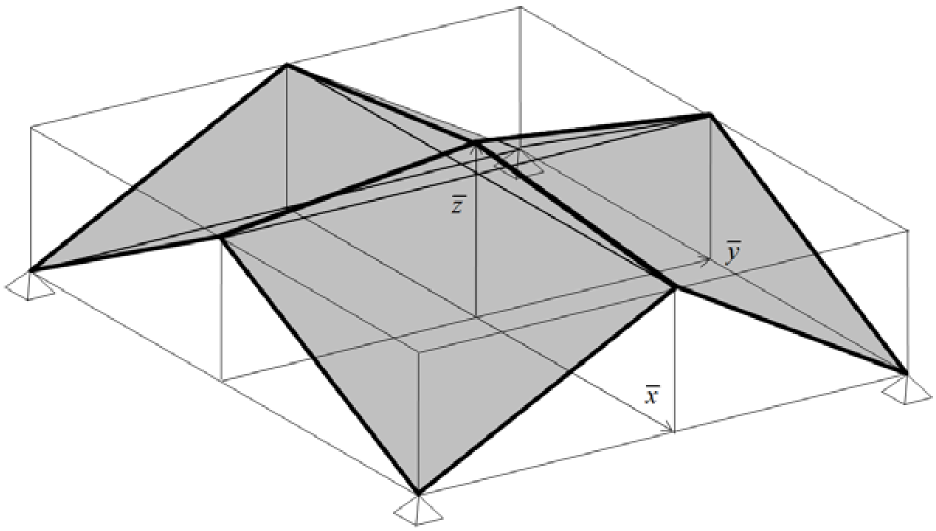
Figuur 1-3: Monge en de umbilics op een ellipsoïde

Er zijn vier verschillende typen umbilics bekend, namelijk lemon, star, (le)monstar en flame, zie figuur 1-4. Men maakt bij de umbilics onderscheid tussen het aantal richels, de rechte trajectbanen in het trajectenpatroon. We merken op dat het lemon-type slechts één richel heeft, het flame-type twee richels en de star- en (le)monstar-typen elk drie richels bevat. Bij de laatste twee types kan verder onderscheid worden gemaakt, wanneer gekeken wordt naar de hoek tussen de richels, die bij het monstar-type kleiner is dan bij het star-type. De verschillende typen zijn op het oog lastig te onderscheiden. De gezochte invarianten zouden de classificatie van de verschillende typen wel kunnen vereenvoudigen, doordat ieder type umbilic een aantal positieve en/of negatieve invarianten heeft.

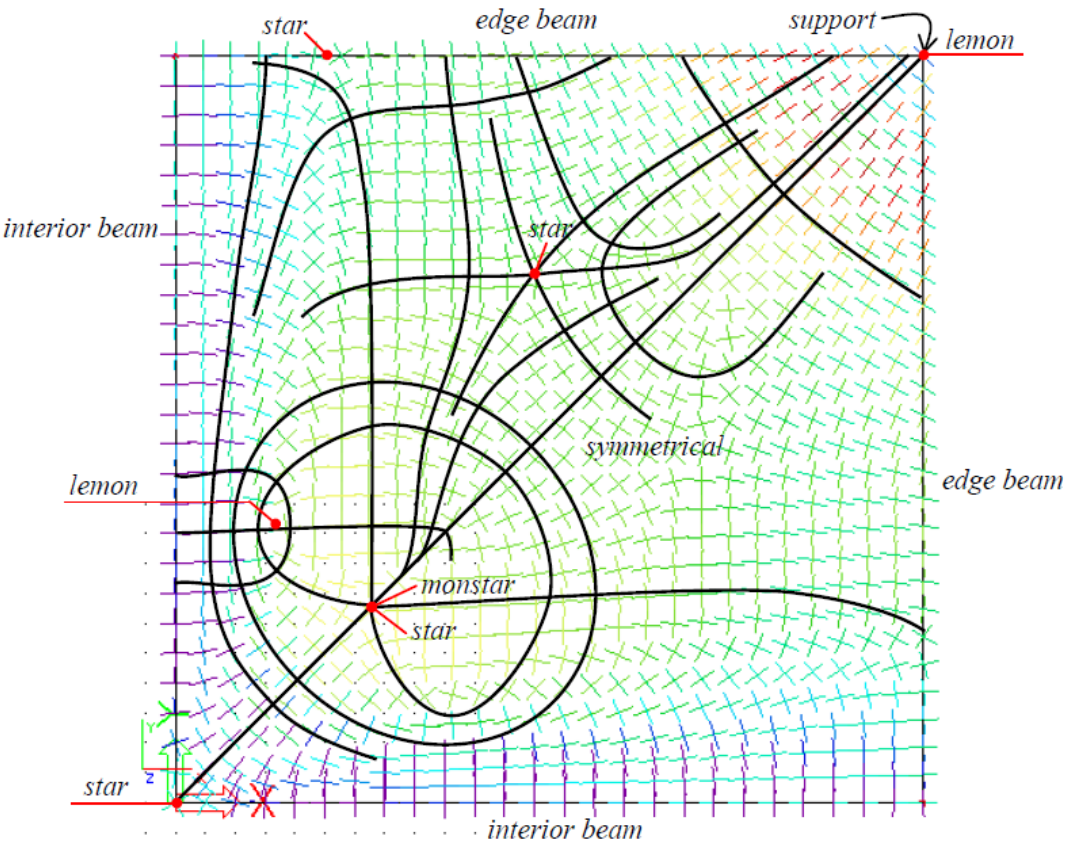


Figuur 1-4: *De vier verschillende typen umbilics.* [F6]

In figuur 1-6 is een voorbeeld weergegeven hoe je deze verschillende soorten umbilics in zo'n lijnenpatroon kunt herkennen. De lijnen in deze figuur zijn de moment trajectoriën van een hyparschil, waarvan er vier zijn weergegeven in figuur 1-5. Door op een nauwkeurige wijze de kruisjes in ieder punt te verbinden, zijn hier een aantal lijnen getekend. Op sommige plaatsen komen deze lijnen samen en herkennen we enkele umbilics uit figuur 1-4.



Figuur 1-5: *Een constructie bestaande uit vier hyparschillen* [F7]



Figuur 1-6: *Moment trajectoriën in een hyparschil* [F8]

1-2 Spanningstensor rondom umbilic

De spanningstoestand ín een umbilic is vrij simpel, namelijk een spanningstoestand die in iedere richting gelijk is. We zijn vooral geïnteresseerd in de spanningstoestand rondom een umbilic, omdat hier zich de merkwaardige patronen voordoen. Om inzicht te kunnen krijgen in deze patronen zullen we de spanningen σ_{xx}, σ_{yy} en σ_{xy} lineair moeten gaan benaderen met een Taylorbenadering. Hiermee beschrijven de toe- of afname van een spanning in een bepaalde richting. De Taylorbenadering [11] voor twee variabelen is in vergelijking 1-2 weergegeven.

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) =& f(x,y) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right] \\ &+ O\Big((\Delta x)^3\Big) \end{aligned} \tag{1-2}$$

De eerste-orde Taylorbenadering reduceert dan tot:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\right] + O\Big((\Delta x)^2\Big) \tag{1-3}$$

Als we nu de σ_{xx} willen benaderen in het punt (0,0), dan krijgen we vergelijking (1-6).

$$\sigma_{xx}(0+\Delta x, 0+\Delta y) = \sigma_{xx}(0,0) + \left[\frac{\partial \sigma_{xx}(0,0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \sigma_{xx}(0,0)}{\partial y}\Delta y\right] \tag{1-4}$$

Stel nu dat er in het punt (0,0) een bepaalde spanning p_1 heerst en we de Δ-symbolen voor het gemak weglaten, dan resteert:

$$\sigma_{xx}(x,y) = p_1 + \left[\frac{\partial \sigma_{xx}(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial \sigma_{xx}(0,0)}{\partial y}y\right] \tag{1-5}$$

Vervolgens kunnen we nog verder vereenvoudigen tot:

$$\sigma_{xx}(x,y) = p_1 + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}y \tag{1-6}$$

Dit geldt niet alleen voor σ_{xx}, maar ook voor σ_{yy} en σ_{xy}.

$$\sigma_{yy}(x,y) = p_2 + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x}x + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}y \tag{1-7a}$$

$$\sigma_{xy}(x,y) = p_3 + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}x + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}y \tag{1-7b}$$

Om alles overzichtelijk te houden is ervoor gekozen om deze partiële afgeleiden te vervangen door factoren. De volgorde van de nummering is in vergelijking (1-8) weergegeven.

$$a_1 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \qquad a_3 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \qquad a_5 = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \tag{1-8a}$$

$$a_2 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \qquad a_4 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \qquad a_6 = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \tag{1-8b}$$

Als we de partiële afgeleiden substitueren in vergelijking (1-6) en (1-7), dan krijgen we de vergelijkingen in (1-9). Deze formules gelden voor ieder punt, maar als we alleen naar umbilics kijken, kunnen we nog enkele vereenvoudigen doen. In umbilics geldt namelijk dat $p_1 = p_2$ en $p_3 = 0$, maar hierover meer in hoofdstuk 3.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= p_1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ \sigma_{yy} &= p_2 + a_3 \cdot x + a_4 \cdot y \\ \sigma_{xy} &= p_3 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y \end{aligned} \tag{1-9}$$

Er is reeds één invariant bekend, namelijk:

$$\delta_1 = (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \tag{1-10}$$

Het vermoeden bestaat dat er zes formules te vinden zijn, bestaande uit a_1 t/m a_6, die invariant zijn onder een willekeurige rotatie. Dit vermoedde is berust op het feit dat er zes factoren zijn, waarmee het spanningsbeeld rondom een umbilic geschetst kan worden. Het idee bestaat dat de facturen kunnen worden uitgedrukt in een combinatie van invarianten. Dus a_1 is te schrijven als een functie van δ_1 t/m δ_6. Om dit te bereiken heb je evenveel invarianten nodig als factoren, dus vandaar het getal zes.

Hoofdstuk 2

Invariantcontrole

Bij het zoeken naar onbekende formules, in dit geval de (vijf) resterende invarianten, is het belangrijk dat men zichzelf kan controleren als men denkt een nieuwe formule te hebben gevonden. Overigens kan de controle ook als middel gebruikt worden om nieuwe formules te vinden. De transformatie waaronder de combinatie van factoren invariant moet zijn is de rotatie. In het collegedictaat van CT2031 Mechanics of Structures [12] is in het hoofdstuk van 'Transformaties en Tensoren' beschreven hoe een transformatie van het coördinatenstelsel de spanningstensor beïnvloedt.

2-1 Rotatie van het coördinatenstelsel

Het uitvoeren van een transformatie van het coördinatenstelsel kan worden beschreven met een rotatiematrix in vergelijking 2-1. Deze rotatiematrix wordt veelvuldig gebruikt in de lineaire algebra en beschrijft hoe men van een x, y-assenstelsel roteert, met een willekeurige hoek φ, naar een nieuw r, s-assenstelsel.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

Omdat we te maken hebben met een tweede orde spanningstensor, moeten we deze spanningstensor zowel met de rotatiematrix als de inverse van de rotatiematrix vermenigvuldigen, zoals te zien in vergelijking 2-2a. De inverse rotatiematrix blijkt gelijk te zijn aan de getransponeerde matrix en dus kunnen we de vergelijking omschrijven tot de vergelijking weergegeven in 2-2b.

$$\bar{\sigma} = R^{-1} \cdot \sigma \cdot R \tag{2-2a}$$

$$\bar{\sigma} = R^{T} \cdot \sigma \cdot R \tag{2-2b}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rs} \\ \sigma_{rs} & \sigma_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

Als we dit vervolgens netjes uitwerken, komen we tot de vergelijkingen in 2-4:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{xx} \cdot \cos^2\varphi + 2\sigma_{xy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{yy} \cdot \sin^2\varphi \\ \sigma_{ss} &= \sigma_{xx} \cdot \sin^2\varphi - 2\sigma_{xy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{yy} \cdot \cos^2\varphi \\ \sigma_{rs} &= -\sigma_{xx} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sigma_{yy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi \end{aligned} \tag{2-4}$$

Met de dubbele hoekformules uit de goniometrie kunnen we deze vergelijkingen vereenvoudigen tot de vergelijkingen in 2-5, zodat dit het werken met Matlab gemakkelijker maakt.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos(2\varphi) + \sigma_{xy} \cdot \sin(2\varphi) \\ \sigma_{ss} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos(2\varphi) - \sigma_{xy} \cdot \sin(2\varphi) \\ \sigma_{rs} &= \phantom{\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \sigma_{xy} \cdot \cos(2\varphi) \end{aligned} \tag{2-5}$$

Door nu wederom de partiële afgeleiden te nemen naar de r- en s-richting kunnen we weer zes nieuwe factoren definiëren. Dit zijn de factoren b_1 t/m b_6, weergegeven in vergelijking (2-6).

$$b_1 = \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} \qquad b_3 = \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial r} \qquad b_5 = \frac{\partial\sigma_{rs}}{\partial r} \tag{2-6a}$$

$$b_2 = \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial s} \qquad b_4 = \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial s} \qquad b_6 = \frac{\partial\sigma_{rs}}{\partial s} \tag{2-6b}$$

Een formule bestaande uit deze factoren, die voor een willekeurige rotatie φ kan worden vereenvoudigd tot 'dezelfde' formule, maar dan met uitsluitend de factoren a_1 t/m a_6, is dus een invariant. In de literatuur was nog maar melding gemaakt van één invariant, die in vergelijking 2-7 is weergegeven.

$$\delta_1 = (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \tag{2-7}$$

De formule voldoet aan het gestelde criterium, want na het invullen van de bekende invariant in het Matlabprogramma, zie bijlage B, krijgen we dezelfde formule als output en is dus invariant gebleven onder de transformatie.

Voor de invarianten gebruiken we de notatie δ_i, waarbij de index staat voor de naam van de invariant. In dit geval staat δ_1 voor de eerste invariant en δ_2 voor de tweede, enzovoorts.

$$\delta_1 = (b_1 - b_3) \cdot b_6 - (b_2 - b_4) \cdot b_5 = (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \tag{2-8}$$

Hoofdstuk 3

Analyse spanningstensor

3-1 Eerste invariant δ_1

In het artikel van Berry en Hannay [3] wordt besproken hoe je de eerste invariant kunt afleiden. In het artikel spreekt men niet over een invariant, maar over de discriminant die de indexeigenschap van een umbilic beschrijft. De betekenis hiervan wordt in hoofdstuk 7 uiteengezet. In tegenstelling tot het artikel gebruiken wij hier de algemene spanningstensor, waarbij het verschil met Berry en Hannay in hoofdstuk 5 wordt besproken.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + a_1 x + a_2 y & p_3 + a_5 x + a_6 y \\ p_3 + a_5 x + a_6 y & p_2 + a_3 x + a_4 y \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

De hoofdrichting van de spanningstensor is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2(p_3 + a_5 x + a_6 y)}{p_1 + a_1 x + a_2 y - (p_2 + a_3 x + a_4 y)} \\ &= \frac{2(p_3 + a_5 x + a_6 y)}{p_1 - p_2 + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_4)y} \end{aligned} \tag{3-2}$$

De afleiding maakt gebruik van een contourintegratie van de gradiënt van de hoofdspanningsrichting θ, die in vergelijking 3-3 is omgeschreven.

$$\theta = \arctan\left(\frac{2(p_3 + a_5 x + a_6 y)}{p_1 - p_2 + (a_1 - a_3)x + (a_2 - a_4)y}\right) \tag{3-3}$$

Na het omschrijven van θ uit vergelijking 3-2 en hiervan de partiële afgeleiden te bepalen, kan met behulp van Maple de volgende contourintegraal worden berekend. Hierbij is gebruik gemaakt van de vectornotatie $\mathbf{r} = (x, y)$.

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{1}{2\pi}\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy\right) \\ &= \ldots \\ &= (a_2 - a_4)a_5 - (a_1 - a_3)a_6\end{aligned} \tag{3-4}$$

De formule is op een min-teken na hetzelfde als de invariant gegeven in vergelijking 1-10. Zoals hieronder te zien is, maakt dat voor de invariantie niet uit. Er is gekozen voor de linker notatie, omdat de eerste invariant ook op deze manier werd beschreven in het dictaat 'Notes on Shell Structures' van P.C.J. Hoogenboom [13].

```
I1a = simplify((b1-b3)*b6-(b2-b4)*b5)     I1b = simplify((b2-b4)*b5-(b1-b3)*b6)


I1a = a1*a6 - a2*a5 - a3*a6 + a4*a5       I1b = a2*a5 - a1*a6 + a3*a6 - a4*a5
```

$$\delta_1 = (b_1 - b_3)b_6 - (b_2 - b_4)b_5 \tag{3-5}$$

Door het gemak van een controlescript in Matlab kan men gemakkelijk 'experimenteren' met nieuw gevonden formules. Een voordeel aan werken met zo'n script is dat het niet altijd theoretisch onderbouwd hoeft te zijn. Een poging wagen kost immers weinig moeite of geld. Al snel bleken er na 'trial and error' twee formules te zijn die ook invariant waren onder een rotatie.

3-2 Tweede invariant δ_2

De eerste formule die voldeed aan het criterium, was de formule weergegeven in vergelijking 3-10. Door goed te kijken waaruit de termen σ_{rr} en σ_{ss} waren opgebouwd, werd al snel duidelijk dat een combinatie van de factoren b_1 en b_3 door simpelweg optellen voor een flinke vereenvoudiging zorgde. We zien namelijk een groot aantal termen dat tegen elkaar wegvalt na optelling van b_1 en b_3.

$$\begin{aligned}b_1 &= \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_2 - \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_4 + 2\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_5 + a_4\sin(\phi) \\ &\quad + (\cos(\phi))^3 a_1 - (\cos(\phi))^3 a_3 + a_3\cos(\phi) + 2a_6\cos(\phi) - 2(\cos(\phi))^3 a_6 \\ b_3 &= -\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_2 + \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_4 - 2\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_5 + a_2\sin(\phi) \\ &\quad - (\cos(\phi))^3 a_1 + (\cos(\phi))^3 a_3 + a_1\cos(\phi) - 2a_6\cos(\phi) + 2(\cos(\phi))^3 a_6\end{aligned} \tag{3-6}$$

$$b_1 + b_3 = a_1\cos(\phi) + a_2\sin(\phi) + a_3\cos(\phi) + a_4\sin(\phi) \tag{3-7}$$

Wat er overblijft na optellen van de termen b_1 en b_3, zijn dus de factoren a_1 t/m a_4 vermenigvuldigd met ofwel $\sin\varphi$ of $\cos\varphi$.

Wanneer we hetzelfde doen voor de factoren b_2 en b_4, dan verkrijgen we iets soortgelijks. Ook hier resteren er vier termen met daarin de factoren a_1 t/m a_4 vermenigvuldigd met ofwel $\sin\phi$ of $\cos\phi$.

$$\begin{aligned} b_2 &= 2\,\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_6 - \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_1 + \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_3 - a_3 \sin(\phi) \\ &\quad + (\cos(\phi))^3 a_2 - (\cos(\phi))^3 a_4 + a_4 \cos(\phi) - 2\,a_5 \cos(\phi) + 2\,(\cos(\phi))^3 a_5 \\ b_4 &= -2\,\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_6 + \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_1 - \sin(\phi)(\cos(\phi))^2 a_3 - a_1 \sin(\phi) \\ &\quad - (\cos(\phi))^3 a_2 + (\cos(\phi))^3 a_4 + a_2 \cos(\phi) + 2\,a_5 \cos(\phi) - 2\,(\cos(\phi))^3 a_5 \end{aligned} \tag{3-8}$$

$$b_2 + b_4 = -a_1 \sin(\phi) + a_2 \cos(\phi) - a_3 \sin(\phi) + a_4 \cos(\phi) \tag{3-9}$$

Echter als we goed kijken, dan zien we dat de term met factor a_1 in de situatie van $b_1 + b_3$ met een cosinus was vermenigvuldigt en in het tweede geval met een sinus. Door vervolgens gebruik te maken van $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, ziet men als snel dat dit resulteert in een invariant, namelijk:

$$\delta_2 = (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 \tag{3-10}$$

Wat opvalt aan deze functie ten opzicht van de reeds bekende invariant, is dat er in deze functie de factoren a_5 en a_6 niet voorkomen. Dit heeft tot gevolg dat de tweede invariant niet opgebouwd kan worden uit de eerste invariant.

3-3 Derde invariant δ_3

Op een soortgelijke wijze is ook de derde invariant gevonden. Hierbij is geprobeerd om met behulp van determinanten een invariant te kunnen achterhalen. Van 2D tensoren zijn namelijk ook algemene invarianten bekend, waarbij zowel het spoor van de matrix als de determinant van de matrix invariant is. Het gaat hier echter alleen om matrices, waarbij de spanningstoestand in één punt bekend is. Het gaat dus niet op voor onze lineaire benadering van de omgeving rondom een umbilic. Toch is besloten hier wel naar iets soortgelijks te kijken, met resultaat.

$$\sigma = \begin{bmatrix} p + a_1 x + a_2 y & + a_5 x + a_6 y \\ + a_5 x + a_6 y & p + a_3 x + a_4 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ a_5 & a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_2 & a_6 \\ a_6 & a_4 \end{bmatrix} y \tag{3-11}$$

Het vermoeden ontstond door te 'spelen' met de determinanten van de sub-matrices, dat daaruit weleens een nieuwe invariant kon ontstaan. Dat vermoeden bleek correct, want na optelling van de determinanten van de tweede en derde sub-matrix bleek een formule te ontstaan die onveranderd bleef na rotatie van het assenstelsel en dus invariant is.

```
I3 = simplify(b1*b3-b5^2+b2*b4-b6^2)
```

```
I3 = a1*a3-a5^2+a2*a4-a6^2
```

$$\delta_3 = b_1 b_3 - b_5^2 + b_2 b_4 - b_6^2 \tag{3-12}$$

De formule uit vergelijking 3-12 kan op een nettere, meer wiskundige manier worden afgeleid, zie hiervoor hoofdstuk 4.

3-4 Uniekheid

Bij het vinden van een nieuwe invariant is het uitermate belangrijk dat je jezelf controleert. Het kan namelijk zo zijn dat je een formule vind die is opgebouwd uit reeds eerder gevonden invarianten. Deze nieuwe formule telt dan niet mee voor het totale aantal unieke invarianten. De drie formules die in dit hoofdstuk zijn besproken zijn uniek, vanwege het feit dat er termen voorkomen in één invariant, maar niet in de andere. Dit is een belangrijk gegeven en hier dient rekening mee gehouden te worden tijdens de zoektocht.

Als we de termen van de eerste invariant uitschrijven, dan komt de term $a_1 a_6$ niet voor in de tweede en derde invariant. Dit geldt ook voor de kwadratische termen van a_1 t/m a_4 van de tweede invariant, die niet te vinden zijn in de eerste en derde invariant. Tenslotte zijn er nog de kwadratische termen van a_5 t/m a_6 van de derde invariant die ontbreken bij de andere twee invarianten. Hieruit kunnen we dus concluderen dat de drie invarianten uniek zijn.

Hoofdstuk 4

Algemene invarianten

4-1 Spoor

In hoofdstuk 1 zijn de twee belangrijke invarianten van een symmetrische 2x2 tensor besproken, namelijk I_A en II_A. Met de gegevens uit de gelineariseerde spanningstensor kunnen we de makkelijkste invariant, het spoor van de spanningstensor, proberen uit te rekenen.

$$I_A = tr(A) = A_{11} + A_{22} \tag{4-1}$$

Als we kijken naar de invariant na invullen van de gegevens, dan levert het weinig resultaat op. De formule die onderaan vergelijking 4-2 is weergegeven, is een lineaire functie waardoor we niet direct tot een invariant te komen.

$$\begin{aligned} I_\sigma &= tr(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ &= p_1 + a_1 x + a_2 y + p_2 + a_3 x + a_4 y \\ &= p_1 + p_2 + (a_1 + a_3)x + (a_2 + a_4)y \end{aligned} \tag{4-2}$$

Wel is het opvallend dat er een verband is met de tweede invariant $\delta_2 = (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2$.

$$\begin{aligned} \delta_2 = |\nabla I_\sigma|^2 &= \Big(\frac{\partial I_\sigma}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial I_\sigma}{\partial y}\Big)^2 \\ &= (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 \end{aligned} \tag{4-3}$$

Dit verband heet de norm van de gradiënt van het scalarveld $I_\sigma(x, y)$. De maximale gradiënt van een scalarveld bestaat onafhankelijk van het assenstelsel en is dus invariant. Dit verband zou ook bij de 3D-invarianten nog van pas kunnen komen in hoofdstuk 8.

De vraag is natuurlijk of dit ook geldt voor de andere scalair II_σ. Dit blijkt niet het geval te zijn, want deze scalair is van de tweede-orde en door alleen de gradiënt te nemen, resteren er termen met x en y. In hoofdstuk 6 is door een slimme toepassing van taylorbenadering alsnog resultaat behaald.

4-2 Determinant

Er zijn nog andere grootheden die invariant zijn, zoals bijvoorbeeld de hoofdkrommingen van een bepaald oppervlak. Hierbij gebruiken we alsnog II_σ, de determinant van de spanningstensor. Deze determinant is in formulevorm uitgewerkt in vergelijking 4-4.

$$\begin{aligned}
II_\sigma = det(\sigma) &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 \\
&= (p_1 + a_1x + a_2y)(p_2 + a_3x + a_4y) - (p_3 + a_5x + a_6y)^2 \\
&= p_1p_2 + p_1a_3x + p_1a_4y + a_1xp_2 + a_1x^2a_3 + a_1xa_4y + a_2yp_2 + a_2ya_3x \\
&\quad + a_2y^2a_4 - p_3{}^2 - 2p_3a_5x - 2p_3a_6y - a_5{}^2x^2 - 2a_5xa_6y - a_6{}^2y^2
\end{aligned} \tag{4-4}$$

We zien dus een functie van x en y, die dus invariant is onder rotatie en dus voor ieder assenstelsel zou moeten gelden. De determinantsfunctie is in Maple te plotten en geldt dus voor iedere richting van het assenstelsel. De twee parameters die een oppervlak beschrijven zonder afhankelijk te zijn van een assenstelsel zijn de hoofdkrommingen k_1 en k_2.

Met behulp van de drie volgende partiële afgeleiden van een bepaalde functie, in ons geval de determinantsfunctie, kunnen via vergelijking 4-6 de hoofdkrommingen worden bepaald.

$$k_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad k_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tag{4-5}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(k_{xx} - k_{yy})^2 + k_{xy}^2} \\
k_2 &= \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(k_{xx} - k_{yy})^2 + k_{xy}^2}
\end{aligned} \tag{4-6}$$

Aangezien er een wortelfunctie aanwezig in beide hoofdkrommingen, worden deze parameters vaak anders geformuleerd [14]:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \\
K &= k_1 \cdot k_2 = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2
\end{aligned} \tag{4-7}$$

H wordt hierbij vaak de gemiddelde kromming [15] genoemd en K de Gaussiaanse kromming [16]. Deze twee parameters zijn met behulp van Matlab uitgerekend en blijken inderdaad invariant te zijn, zie bijlage C.

4-2-1 Derde invariant δ_3

$$\delta_3 = b_1 \cdot b_3 - b_5^2 + b_2 \cdot b_4 - b_6^2 \tag{4-8}$$

4-2-2 Vierde invariant δ_4

$$\delta_4 = \Big(b_1b_4 + b_2b_3 - 2b_5b_6\Big)^2 - 4\Big(b_1b_3 - b_5^2\Big)\Big(b_2b_4 - b_6^2\Big) \tag{4-9}$$

4-3 Von Mises-spanning

De Von Mises-spanning is een grenscriterium voor plasticiteit, weergegeven in vergelijking 4-10. Deze spanning is ook invariant onder rotatie van het assenstelsel. De vraag is of we deze spanning kunnen uitdrukken in onze factoren a_1 t/m a_6. Aangezien we daarvoor alleen geïnteresseerd zijn in de 2D-variant van de Von Mises-spanning, zijn in vergelijking 4-11 alle termen met een z-coördinaat verwijderd. Hierbij wordt uitgegaan van de plane-stress situatie. Dit houdt in dat de spanningen in de z-richting gelijk aan nul zijn gesteld.

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2\Big) + 3\Big(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2\Big)} \tag{4-10}$$

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}^2\Big) + 3\sigma_{xy}^2} \tag{4-11}$$

Ook hier kunnen we weer gebruik maken van de spanningstensor.

$$\begin{aligned}\sigma_{vm} &= \sqrt{\frac{1}{2}\Big(((p_1 + a_1x + a_2y) - (p_2 + a_3x + a_4y))^2 + (p_2 + a_3x + a_4y)^2 + (p_1 + a_1x + a_2y)^2\Big)} \\ &\quad + \sqrt{3(p_3 + a_5x + a_6y)^2} \\ &= \sqrt{2\,a_1xa_2y - a_1xa_4y - a_2ya_3x + 2\,a_3xa_4y + 6\,a_5xa_6y + {p_1}^2 - p_1p_2 + {a_1}^2x^2 + {a_2}^2y^2} \\ &\quad + \sqrt{{p_2}^2 + {a_3}^2x^2 + {a_4}^2y^2 + 3\,{p_3}^2 + 3\,{a_5}^2x^2 + 3\,{a_6}^2y^2 - a_2yp_2 + 6\,p_3a_6y - p_1a_3x + 2\,p_1a_1x} \\ &\quad + \sqrt{2\,p_2a_3x - a_1xp_2 - p_1a_4y + 2\,p_1a_2y + 2\,p_2a_4y - a_1x^2a_3 + 6\,p_3a_5x - a_2y^2a_4}\end{aligned} \tag{4-12}$$

Wederom houden we, net als bij de determinantsfunctie, een formule over met termen met x^2, xy en y^2. Ook hier is het dus mogelijk om naar de gemiddelde en Gaussiaanse kromming te gaan kijken. In bijlage C is de Matlabcode hiervoor weergegeven. De resultaten waren op het eerste gezicht uitstekend; er ontstonden twee nieuwe formules die allebei invariant waren. Na wat vereenvoudigingen bleek helaas dat de invarianten niet uniek waren en dat deze konden worden opgebouwd uit de eerder gevonden invarianten.

$$\begin{aligned}VM_1 &= {a_1}^2 + {a_3}^2 - a_1a_3 + 3\,{a_5}^2 - a_2a_4 + {a_2}^2 + {a_4}^2 + 3\,{a_6}^2 \\ &= \delta_2 - 3\delta_3\end{aligned} \tag{4-13}$$

$$\begin{aligned}VM_2 &= \Big(-2\,a_1a_3 + 2\,{a_1}^2 + 2\,{a_3}^2 + 6\,{a_5}^2\Big)\Big(6\,{a_6}^2 - 2\,a_2a_4 + 2\,{a_2}^2 + 2\,{a_4}^2\Big) \\ &\quad - (2\,a_1a_2 - a_1a_4 - a_2a_3 + 2\,a_3a_4 + 6\,a_5a_6)^2 \\ &= 12\delta_1^2 - 3\delta_4\end{aligned} \tag{4-14}$$

De formules uit 4-13 en 4-14 zijn dus niet fout. Ze zijn net zo invariant als de formules van de eerdere invarianten. Echter zijn deze andere invarianten simpeler om te schrijven, vandaar dat het een verstandige keuze is om het bij de eerdere formules te houden en deze nieuw gevonden formules niet te gebruiken.

Hoofdstuk 5

Airy spanningsfunctie

In het artikel van Berry en Hannay [3] wordt beschreven hoe men met behulp van de Airy spanningsfunctie (χ) tot een tweetal discriminanten kunt komen, waarmee de eigenschappen van een umbilic kunnen worden beschreven. De Airy spanningsfunctie is een scalaire potentiaalfunctie die gebruikt kan worden om de spanningstensor te vinden. Echter kun je deze χ ook beschouwen als een functie die de hoogte van het oppervlak boven het x,y-vlak beschrijft. Op deze manier kun je de krommingstensor van dit oppervlak gelijkstellen aan de spanningstensor, zoals weergegeven in vergelijking 5-1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\chi}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \\ -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

In het geval dat de body forces gelijk aan nul zijn, zal moeten gelden dat $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$ (zie hiervoor bijlage D), waardoor de spanningsmatrix er als volgt uit komt te zien, zie vergelijking 5-2.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + a_1x + a_2y & a_5x + a_6y \\ a_5x + a_6y & p + a_3x + a_4y \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

$$= \begin{bmatrix} p + a_1x + a_2y & -a_4x - a_1y \\ -a_4x - a_1y & p + a_3x + a_4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\chi}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \\ -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

Met deze drie differentiaalvergelijkingen kan de Airy spanningsfunctie χ worden gevonden. Deze functie luidt:

$$\chi(x, y) = \frac{p}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(a_3x^3 + 3a_4x^2y + 3a_1xy^2 + a_2y^3) \tag{5-4}$$

5-1 Discriminanten

Zoals al eerder vermeld kunnen met deze Airy spanningsfunctie twee discriminanten worden afgeleid. Voor beide afleidingen wordt gebruik gemaakt van (de derde-orde termen van) de Airy spanningsfunctie uitgedrukt in poolcoördinaten. Hoe deze conversie plaatsvindt is in vergelijking 5-5 weergegeven.

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \\
y &= r\cos\phi \\
f_c(x,y) &= \frac{1}{6}(a_3x^3 + 3a_4x^2y + 3a_1xy^2 + a_2y^3) \\
f_c(\phi) &= \frac{1}{6}r^3(a_3\cos^3\phi + 3a_4\cos^2\phi\sin\phi + 3a_1\cos\phi\sin^2\phi + a_2\sin\phi)
\end{aligned}
\tag{5-5}
$$

De eerste discriminant kan worden berekend door de Airy spanningsfunctie gelijk aan nul te stellen, zie vergelijking 5-6.

$$
\begin{aligned}
f_c(\phi) &= a_3\cos^3\phi + 3a_4\cos^2\phi\sin\phi + 3a_1\cos\phi\sin^2\phi + a_2\sin\phi = 0 \\
f_c(t) &= a_3t^3 + 3a_4t^2 + 3a_1t + a_2 = 0
\end{aligned}
\tag{5-6}
$$

De tweede discriminant ontstaat door de afgeleide van de Airy spanningsfunctie gelijk aan nul te stellen, zie vergelijking 5-7.

$$
\begin{aligned}
f_c(\phi) &= r^3(a_3\cos^3\phi + 3a_4\cos^2\phi\sin\phi + 3a_1\cos\phi\sin^2\phi + a_2\sin\phi) \\
\frac{\partial f_c}{\partial\phi} &= a_3\left(\cos(\phi)\right)^3 + 3\,a_4\left(\cos(\phi)\right)^2\sin(\phi) + 3\,a_1\cos(\phi)\left(\sin(\phi)\right)^2 + a_2\left(\sin(\phi)\right)^3 \\
\frac{\partial f_c}{\partial\phi} &= -3\,a_3\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\right)^2 - 6\,a_4\left(\sin(\phi)\right)^2\cos(\phi) + 3\,a_4\left(\cos(\phi)\right)^3 - 3\,a_1\left(\sin(\phi)\right)^3 \\
&\quad + 6\,a_1\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\right)^2 + 3\,a_2\left(\sin(\phi)\right)^2\cos(\phi) \\
\frac{\partial f_c}{\partial\phi} &= a_4\left(\cos(\phi)\right)^3 - a_3\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\right)^2 + 2\,a_1\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\right)^2 - 2\,a_4\left(\sin(\phi)\right)^2\cos(\phi) \\
&\quad + a_2\left(\sin(\phi)\right)^2\cos(\phi) - a_1\left(\sin(\phi)\right)^3 \\
\frac{\partial f_c}{\partial\phi} &= a_4\left(\cos(\phi)\right)^3 + (2\,a_1 - a_3)\sin(\phi)\left(\cos(\phi)\right)^2 + (a_2 - 2\,a_4)\left(\sin(\phi)\right)^2 - a_1\left(\sin(\phi)\right)^3 = 0 \\
f_c'(t) &= a_4t^3 + (2a_1 - a_3)t^2 + (a_2 - 2a_4)t - a_1 = 0
\end{aligned}
\tag{5-7}
$$

Uit vergelijking 5-6 en 5-7 volgen dus twee derdegraadsvergelijkingen. De discriminant van een derdegraadsvergelijking kan als volgt worden berekend [17]:

$$
D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd \tag{5-8}
$$

De twee discriminanten die hieruit volgen, beschrijven de respectievelijk de contour- en lijneigenschap van de umbilics. De discriminanten zijn door Berry en Hannay beschreven zoals in vergelijking 5-9, waarbij ook een uitdrukking is te zien van de indexeigenschap, oftewel de eerste invariant. Het resultaat van de eerste invariant van Berry en Hannay [3] is anders dan het resultaat in hoofdstuk 3. Dit is vanwege het feit dat in het artikel is gerekend met de spanningstensor van vergelijking 5-2. Hierbij is dus uitgegaan van de situatie, waarbij er geen body forces aanwezig zijn en er geldt: $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$.

$$\begin{aligned} J(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= \alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\delta - \beta^2 \\ C(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2) - (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \\ P(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= 4\Big(3\gamma(\alpha - 2\gamma) - (\delta - 2\beta)^2\Big)\Big(3\beta(\delta - 2\beta) - (\alpha - 2\gamma)^2\Big) - \Big((\delta - 2\beta)(\alpha - 2\gamma) - 9\beta\gamma\Big)^2 \end{aligned} \tag{5-9}$$

In bijlage A staat een tabel waarmee de notatie kan worden vertaald naar de notatie met a_i of b_i. Er is hier gekozen om de notatie met b_i aan te houden, zodat makkelijk via Matlab gecontroleerd kan worden of de formule invariant is of niet. Op deze wijze kunnen we de vergelijkingen van 5-9 omschrijven tot de vergelijkingen in 5-10. De formules van de laatste twee discriminanten, C en P, zijn met vergelijking 5-8 berekend.

$$\begin{aligned} J(b_1,b_2,b_3,b_4) &= (b_3 - b_1)b_1 + (b_2 - b_4)b_4 \\ C(b_1,b_2,b_3,b_4) &= 4(b_3b_1 - b_4^2)(b_4b_2 - b_1^2) - (b_3b_2 - b_4b_1)^2 \\ P(b_1,b_2,b_3,b_4) &= 4\Big(3b_1(b_3 - 2b_1) - (b_2 - 2b_4)^2\Big)\Big(3b_4(b_2 - 2b_4) - (b_3 - 2b_1)^2\Big) - \\ &\qquad \Big((b_2 - 2b_4)(b_3 - 2b_1) - 9b_4b_1\Big)^2 \end{aligned} \tag{5-10}$$

De eerste twee discriminanten lijken veel op de eerste en vierde invariant. Deze bovenstaande discriminanten bleken in eerste instantie niet invariant te zijn als we de controle uitvoeren met de Matlabfile van bijlage B. Dit blijkt te komen vanwege de aannames voor de Airy spanningsfunctie. In bijlage E is de code op een aantal punten aangepast, zodat de discriminanten nu wel invariant zijn. De schuifspanning is hier herschreven met de voorwaarden $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$.

5-2 Geometrische umbilics

De Airy spanningsfunctie geldt alleen onder bepaalde voorwaarden. De eerste voorwaarde is dat de zogenaamde body forces nul zijn. Dit zijn krachten die door het hele volume van een lichaam werken. Een voorbeeld van zo'n body force is de zwaartekracht. De tweede voorwaarde is dat er wordt uitgegaan van plane stress, waardoor er dus alleen spanningen in het vlak optreden en σ_{zz} gelijk aan nul is.

Belangrijk om op te merken is dat wanneer de body forces gelijk aan nul zijn, er automatisch wordt voldaan aan de (vereenvoudigde) evenwichtsvoorwaarden in vergelijking 5-11.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 &\qquad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \\ a_1 + a_6 = 0 &\qquad a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 = -a_6 &\qquad a_4 = -a_5 \end{aligned} \tag{5-11}$$

We vonden dat de vergelijkingen van 5-10 invariant zijn onder rotatie van het assenstelsel. Ook de eerder gevonden invarianten zijn om te schrijven naar een functie van vier variabelen met de vergelijkingen: $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$.

Hieruit volgt een set van vier vergelijkingen die in vergelijking 5-12 is weergegeven.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (b_3 - b_1)b_1 + (b_2 - b_4)b_4 \\ \tau_2 &= (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 \\ \tau_3 &= 4(b_3 b_1 - b_4^2)(b_4 b_2 - b_1^2) - (b_3 b_2 - b_4 b_1)^2 \\ \tau_4 &= 4\Big(3b_1(b_3 - 2b_1) - (b_2 - 2b_4)^2\Big)\Big(3b_4(b_2 - 2b_4) - (b_3 - 2b_1)^2\Big) - \\ &\quad \Big((b_2 - 2b_4)(b_3 - 2b_1) - 9b_4 b_1\Big)^2 \end{aligned} \tag{5-12}$$

Er is een nieuwe notatie τ_i ingevoerd, waarmee wordt aangegeven dat dit invarianten zijn, die alleen geldig zijn in het geval zonder body forces. Merk op dat zowel δ_1 als δ_3 reduceren tot τ_1. Dit is een belangrijk gegeven, want we gaan van vijf (unieke) δ-invarianten naar vier (unieke) τ-invarianten.

Het vermoeden dat er zes invarianten voor de algemene situatie zijn, vanwege hetzelfde aantal variabelen, kunnen we hier gebruiken. De twee voorwaarden $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$ zijn in feite al twee van de zes vergelijkingen. Hierdoor verwachten we ook maar vier unieke τ-invarianten. Het is helaas niet gelukt om dit aan te tonen, maar het vermoeden bestaat dat de bovenstaande set vergelijkingen uniek is.

5-3 Gegeneraliseerde umbilics

Thorndike et al. [4], andere wetenschappers hebben in de stromingsleer een soortgelijk probleem beschreven. Want ook de stroomlijnen leken in sommige punten elkaar te naderen in bepaalde punten (umbilics), zoals dat ook in het spanningsveld het geval was. In dit artikel zijn drie net iets andere discriminanten opgesteld, weergegeven in vergelijking 5-13. Deze zijn echter op een paar punten, anders dan de discriminanten van Berry en Hannay. Als we de vergelijkingen van 5-13 vergelijken met die van 5-9, dan valt ons op dat sommige van de β's en γ's zijn vervangen door respectievelijk β_1 en γ_1.

$$\begin{aligned}
D_I &= (\alpha-\gamma)\gamma_1 + (\delta-\beta)\beta_1 \\
D_C &= 4(b_3b_1-\beta_1^2)(\beta\delta-\gamma_1^2) - (\alpha\delta+\beta\gamma-2\beta_1\gamma_1)^2 \\
D_L &= 4\Big(3\gamma(\alpha-\gamma-\gamma_1)-(\delta-\beta-\beta_1)^2\Big)\Big(3\beta(\delta-\beta-\beta_1)-(\alpha-\gamma-\gamma_1)^2\Big)- \\
&\quad \Big((\delta-\beta-\beta_1)(\alpha-\gamma-\gamma_1)-9\beta\gamma\Big)^2
\end{aligned} \tag{5-13}$$

Het verschil tussen de formules kan worden verklaard doordat de vergelijkingen van Berry en Hannay zijn afgeleid van de Airy spanningsfunctie en dus in wezen van een oppervlak. De vergelijkingen van Thorndike et al. zijn niet afgeleid van geometrische umbilics, maar zijn vergelijkingen die horen bij gegeneraliseerde umbilics. Deze umbilics kunnen dus alleen met de informatie uit de algemene spanningstensor worden beschreven. Door het omschrijven van de spanningstensor naar de Airy spanningsfunctie worden blijkbaar een aantal aannamen gedaan, die ervoor zorgen dat de resultaten die behaald worden via de Airy spanningsfunctie niet algemeen toepasbaar zijn. We kunnen de vergelijkingen van 5-13 wederom met behulp van de omschrijvingstabel herschrijven tot de vergelijkingen van 5-14.

$$\begin{aligned}
D_I &= -(b_3-b_1)b_6-(b_2-b_4)b_5 \\
&= (b_1-b_3)b_6-(b_2-b_4)b_5 = \delta_1 \\
D_C &= 4(b_3b_1-b_5^2)(b_4b_2-b_6^2)-(b_3b_2+b_4b_1-2b_5b_6)^2 \\
D_L &= 4\Big(3b_1(b_3-b_1+b_6)-(b_2-b_4+b_5)^2\Big)\Big(3b_4(b_2-b_4+b_5)-(b_3-b_1+b_6)^2\Big) \\
&\quad -\Big((b_2-b_4+b_5)(b_3-b_1+b_6)-9b_5b_6\Big)^2
\end{aligned} \tag{5-14}$$

Van de set vergelijkingen in 5-14 herkennen we bovenaan de eerste invariant. De tweede vergelijking is ook een bekende, namelijk de vierde invariant. Nu blijkt ook de laatste vergelijking invariant te zijn na controle met Matlab.

5-3-1 Vijfde invariant δ_5

De afleiding van de derde en laatste discriminant uit het artikel van Thorndike et al. wordt niet duidelijk beschreven. De formules worden kort toegelicht in de bijlage van het artikel, maar enige afleiding ontbreekt dus. Dit is wel jammer, omdat met een duidelijke afleiding de stap naar 3D een stuk gemakkelijker is.

In vergelijking 5-15 is de derde discriminant uit 5-14 nog even anders opgeschreven, zodat hij in dezelfde vorm staat als de vierde invariant met de kwadratische term vooraan. Verder zitten er in de invariant enkele terugkerende termen, die tot een nieuwe variabele zijn geschreven, zodat de hele invariant compacter kan worden opgeschreven.

$$\begin{aligned}
D_L &= \Big((a_2 - a_4 + a_5)(a_3 - a_1 + a_6) - 9a_5a_6\Big)^2 \\
&\quad - 4\Big(3a_5(a_2 - a_4 + a_5) + (a_3 - a_1 + a_6)^2\Big)\Big(3a_6(a_3 - a_1 + a_6) + (a_2 - a_4 + a_5)^2\Big) \\
\delta_5 &= \Big((a_2 - a_4 + a_5)(a_3 - a_1 + a_6) - 9a_5a_6\Big)^2 \\
&\quad - 4\Big(3a_5(a_2 - a_4 + a_5) + (a_3 - a_1 + a_6)^2\Big)\Big(3a_6(a_3 - a_1 + a_6) + (a_2 - a_4 + a_5)^2\Big) \\
\delta_5 &= \Big(a_{245}a_{316} - 9a_5a_6\Big)^2 - 4\Big(3a_5a_{245} + a_{316}^2\Big)\Big(3a_6a_{316} + a_{245}^2\Big) \\
&\text{met:} \qquad a_{245} = a_2 - a_4 + a_5 \\
&\qquad\qquad\; a_{316} = a_3 - a_1 + a_6
\end{aligned} \tag{5-15}$$

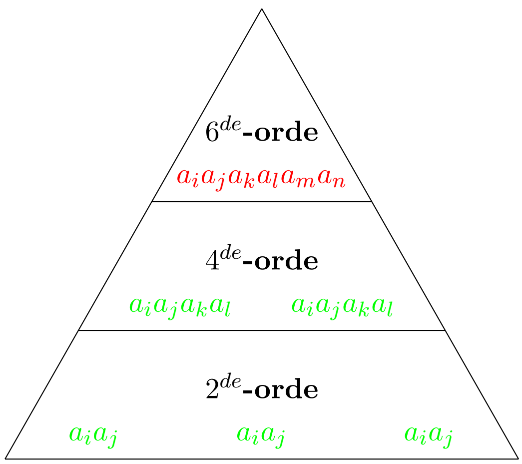
Hoofdstuk 6

Zesde invariant

6-1 Zesde invariant = Zesde-orde?

De zesde invariant was lastig om te vinden, omdat veel pogingen die tot een invariant leiden vaak niet tot unieke invarianten leidt. Er zijn naast de determinantsfunctie en Von Mises-spanningsfunctie nog wat andere kwadratische functies geprobeerd. De invarianten die uit de gemiddelde kromming H en de Gaussiaanse kromming K volgde bleken keer op keer te herleiden tot nul. Oftewel deze invarianten zijn uit te drukken in een (lineaire) combinatie van de eerste vijf invarianten en dus geen nieuwe invarianten.

In figuur 6-1 is een suggestie gedaan voor de zoektocht naar de zesde invariant. Door goed te kijken naar de bestaande invarianten, werd een patroon zichtbaar. Het idee ontstond om naar zesde orde vergelijkingen te kijken. Er is een flink aantal formules geprobeerd, waarvan enkele in bijlage B zijn weergegeven. Het was echter ondoenlijk om op deze wijze een invariant te vinden, door de soms lange rekentijd en grote aantal mogelijke combinaties.



Figuur 6-1: Aanpak voor de zesde invariant.

6-2 Terugredeneren uit τ-invarianten

In sectie 5-2 hebben we gezien hoe we van de set van zes δ-invarianten kunnen omschrijven tot een set van vier τ-invarianten. Na het omschrijven bleken δ_1 als δ_3 allebei te reduceren tot τ_1. Het idee ontstond om te kijken na de andere drie τ-invarianten en met de vergelijkingen $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$ te kijken of het mogelijk is om deze om te schrijven naar een unieke δ-invariant.

Als eerste is hierbij de τ_2-invariant onderzocht. Deze is op twee manier omgeschreven. Bij de eerste vergelijking T_1 is één b_1 en één b_4 omgeschreven en in de tweede vergelijking is tweemaal b_1 en b_4 omgeschreven. Beide formules bleken invariant te zijn na controle in het originele Matlabscript in bijlage B.

$$\begin{aligned} \tau_2 &= (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 \\ T_1 &= (b_1 + b_3)(b_3 - b_6) + (b_2 + b_4)(b_2 - b_5) \\ T_2 &= (b_3 - b_6)^2 + (b_2 - b_5)^2 \end{aligned} \tag{6-1}$$

Het is gelukt om aan te tonen dat één van deze formules is te schrijven als een combinatie van de ander en de bekende invarianten.

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 + \delta_1 - \delta_3 &= 0 \\ T_2 &= T_1 - \delta_1 + \delta_3 \end{aligned} \tag{6-2}$$

Verder is het niet gelukt om deze T_1 of T_2 te vereenvoudigen zonder gebruik te maken van de ander, waardoor het hier om een unieke δ-invariant gaat. Er is gekozen om T_2 als de zesde invariant te gebruiken, vanwege de compactere formule.

Om net als in sectie 3-4 aan te kunnen tonen dat de gevonden invariant uniek is, zullen we weer naar de afzonderlijke termen kijken. Opvallend is dat alle termen van vergelijking 6-3 ook in de invarianten δ_1 t/m δ_3 voorkomen. Dit wil niet meteen zeggen dat de invariant niet uniek is. Na een lange vereenvoudigingssessie is het niet gelukt om de zesde invariant uit te drukken in de andere invarianten. Vandaar dat deze als zijnde uniek wordt aangenomen, maar een wiskundig bewijs ontbreekt.

$$\delta_6 = (b_3 - b_6)^2 + (b_2 - b_5)^2 \tag{6-3}$$

6-3 Norm van de gradiënt van de determinantsfunctie

In sectie 4-1 is de tweede invariant afgeleid door de norm van de gradiënt te berekenen van de spoorfunctie van de algemene spanningstensor. Na overleg met de begeleiders is ook besloten om de norm van de gradiënt van de determinantsfunctie te gaan bepalen. Dit is in Matlab uitgevoerd, waarvan het script in bijlage F is weergegeven. Ook hier blijkt een invariante formule uit te komen. Deze formule is echter anders dan de eerder gevonden invarianten, omdat in deze formule ook de spanningen p_1, p_2 en p_3 van het punt zelf worden gebruikt. De vraag is nu of deze invariant ook tot de δ-invarianten behoort, of dat het net als de τ-invarianten een andere set invarianten vormt.

Als we deze invariant als een δ-invariant bestempelen blijken we nu ineens zeven invarianten te hebben. Dit kan twee dingen betekenen. Ten eerste zou ons vermoeden dat er zes invarianten zijn onjuist kunnen zijn. (Omdat er in deze formule ook gebruik wordt gemaakt van p_1 t/m p_3 zou dit ook kunnen betekenen dat er maar liefst negen invarianten zijn.) De tweede mogelijkheid is dat onze set van zes δ-invarianten niet uniek is, wat de meer realistische optie is van de twee. In vergelijking 6-4 is deze 'zevende' invariant weergegeven.

$$\begin{aligned}\delta_7 = {} & p_2^2(b_1^2+b_2^2)+p_1^2(b_3^2+b_4^2)+p_3^2(4b_5^2+4b_6^2)+p_1p_2(2b_1b_3+2b_2b_4)- \\ & p_2p_3(4b_1b_5+4b_2b_6)-p_1p_3(4b_3b_5+4b_4b_6)\end{aligned} \tag{6-4}$$

In een umbilic geldt: $p_1 = p_2 = p$ en $p_3 = 0$

$$\begin{aligned}\delta_7 &= p^2(b_1^2+b_2^2)+p^2(b_3^2+b_4^2)+p^2(2b_1b_3+2b_2b_4) \\ &= p^2\Big(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+2b_1b_3+2b_2b_4\Big) \\ &= p^2\Big((b_1+b_3)^2+(b_2+b_4)^2\Big) \\ &= p^2\delta_2\end{aligned} \tag{6-5}$$

Zoals te zien in vergelijking 6-5 is in dat geval de δ_7-invariant op een factor (p^2) na gelijk aan de δ_2-invariant.

Hoofdstuk 7

Interpretatie van de invarianten

Nu we onze zoektocht naar de invarianten van het 2D tensorveld hebben afgerond, kunnen we eens gaan kijken naar de interpretatie van de invarianten. De invarianten kunnen namelijk informatie geven over het soort umbilic. De vier soorten umbilics, *monstar, star, lemon* en *flame*, zijn in figuur 1-4 afgebeeld.

Uit de literatuur [5] was al bekend hoe de eerste invariant geïnterpreteerd kon worden. Deze interpretatie is kort samengevat in tabel 7-1.

$\delta_1 = (a_1 - a_3)a_6 - (a_2 - a_4)a_5$	
$\delta_1 < 0$	De umbilic is van het type *monstar* of *lemon*
$\delta_1 = 0$	Het vermoeden bestaat dat zich hier de standaard spanningssituatie voordoet en dus geen umbilics optreden.
$\delta_1 > 0$	De umbilic is van het type *star*

Tabel 7-1: Informatie die volgt uit de eerste invariant δ_1.

De tweede invariant is afgeleid door de norm van de gradiënt van het spoor te bepalen. Doordat er in de tweede invariant alleen kwadratische termen voorkomen kan deze nooit negatief zijn.

$$\begin{aligned} |\nabla I_\sigma|^2 &= 0 \\ \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial y}\right)^2 &= 0 \\ \frac{\partial I_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial I_\sigma}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial I_\sigma}{\partial x} &= -\frac{\partial I_\sigma}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial y}\right)^2 &\neq 0 \\ \text{Dus: } \frac{\partial I_\sigma}{\partial x} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{7-1}$$

Uit vergelijking 7-1 blijken de twee afgeleiden van het scalarveld van het spoor van de spanningstensor in gelijk te zijn aan nul. Dit houdt in dat in dit punt de grootte van het spoor niet veranderd in de omgeving. We zitten dus in een maximum of in een minimum van het spoorveld. Echter kunnen we hier verder niets uit concluderen, omdat hier alleen informatie uit volgt over de grootte van de elementen van de spanningstensor.

De derde invariant was afgeleid door de gemiddelde kromming H van de determinantsfunctie te bepalen. De interpretatie van deze derde invariant is lastig om te vertalen naar de spanningstensor. Er zijn drie situaties mogelijk; een negatieve, geen of positieve gemiddelde kromming van de determinantsfunctie. Naar mijn idee is hier geen directe informatie uit af te leiden over het soort umbilic wat er eventueel in dit punt zal optreden. Door deze invariant te berekenen voor de verschillende soorten umbilics kunnen we misschien achterhalen of er een direct verband is, maar dit valt nu buiten de scope van het bachelor eindwerk. Een soortgelijke aanpak zou ook meer duidelijkheid over de tweede invariant kunnen geven.

Doordat ook de vierde invariant al in de literatuur is genoemd, weten we al iets meer over de interpretatie van deze invariant. Berry en Hannay [3] spraken over een zogenaamde contoureigenschap. Hierbij kan men onderscheid maken tussen de elliptische en hyperbolische contourlijnen. Het omslagpunt ligt ergens bij de *star*-type umbilic. Hiermee wordt bedoeld dat bij elliptische contourlijnen zeker is dat het om een *star*-type gaat, maar dat bij hyperbolische contourlijnen in principe ieder type-umbilic aanwezig kan zijn. Dit is ook weergegeven in tabel 7-2.

$\delta_4 = \Big(a_1a_4 + a_2a_3 - 2a_5a_6\Big)^2 - 4\Big(a_1a_3 - a_5^2\Big)\Big(a_2a_4 - a_6^2\Big)$	
$\delta_4 < 0$	De contourlijnen zijn hyperbolisch, wat betekent dat het zich alle vier de typen umbilics zich kunnen voordoen.
$\delta_4 = 0$	Het vermoeden is dat hier sprake is van een *star*-umbilic en dat is gebaseerd op figuur 7-1.
$\delta_4 > 0$	De contourlijnen zijn elliptisch. Dit heeft direct tot gevolg dat de umbilic van het type *star* is.

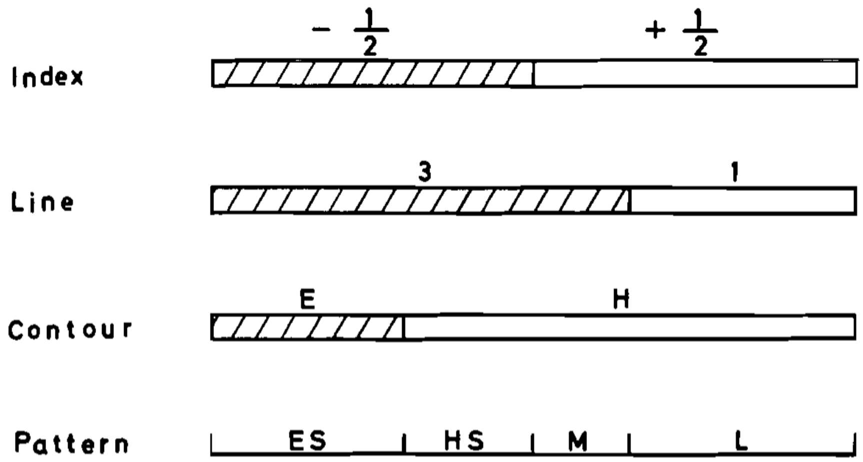
Tabel 7-2: Informatie die volgt uit de vierde invariant δ_4.

Tot slot geeft de vijfde, en meeste complexe invariant ons nog informatie over het aantal richels dat er door de umbilic heen gaan, zie tabel 7-3. Dit is hele belangrijke informatie, omdat men samen met de eerste invariant al een goede indicatie kunt maken van het type umbilic. Aangezien de eerste invariant eenvoudiger is te berekenen, wordt hier de voorkeur aan gegeven. Als men echter vindt $\delta_1 < 0$, dan zal alsnog de vijfde invariant worden berekend, zodat men wet of het een *lemon*- of een *monstar*-type is.

$\delta_5 = \left(a_{245}a_{316} - 9a_5a_6\right)^2 - 4\left(3a_5a_{245} + a_{316}^2\right)\left(3a_6a_{316} + a_{245}^2\right)$ met: $a_{245} = a_2 - a_4 + a_5$, $a_{316} = a_3 - a_1 + a_6$	
$\delta_5 < 0$	Door de umbilic gaat maar één richel en ligt hiermee gelijk het type umbilic vast, namelijk een *lemon*-type.
$\delta_5 = 0$	Nu gaan er twee richels door de umbilic en dit betekent dat of de normale situatie zich voordoet, de lijnen staan haaks op elkaar. Wanneer de richels niet haaks op elkaar staan, hebben we te maken met het *flame*-type umbilic.
$\delta_5 > 0$	Door de umbilic lopen drie richels, waardoor de umbilic dus zowel een *star* als een *monstar*-type kan zijn.

Tabel 7-3: Informatie die volgt uit de vijfde invariant δ_5.

De resultaten zijn in figuur 7-1 nog even grafisch samengevat.



Figuur 7-1: Classificatie van umbilics in de spanningstensor [F9]

Voor de interpretatie van de laatste twee gevonden invarianten uit hoofdstuk 6 gelden dezelfde reden als bij de tweede invariant. Het is aan de hand van de formule en de afleiding heel lastig om te voorspellen wat voor soort waarden de diverse umbilics voor de invariant aannemen. Ook hierbij luidt dus het advies om gewoon voorbeelden te gebruiken van diverse typen umbilics en proberen te achterhalen of er een verband te ontdekken is.

Hoofdstuk 8

Invarianten voor 3D spanningstensor

Op eenzelfde wijze als in hoofdstuk 1 kan ook voor de 3D spanningstensor een Taylorontwikkeling worden uitgevoerd. In de 3x3 symmetrische spanningstensor zijn er ten opzichte van de 2D situatie drie nieuwe termen bijgekomen. Één nieuwe normaalspanning (σ_{zz}) en twee nieuwe schuifspanningen (σ_{xz} en σ_{yz}). De resultaten van deze eerste-orde Taylorontwikkeling zijn weergegeven in vergelijking 8-1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + A_1 x + A_2 y + A_3 z & p_4 + A_{10} x + A_{11} y + A_{12} z & p_5 + A_{13} x + A_{14} y + A_{15} z \\ p_4 + A_{10} x + A_{11} y + A_{12} z & p_2 + A_4 x + A_5 y + A_6 z & p_6 + A_{16} x + A_{17} y + A_{18} z \\ p_5 + A_{13} x + A_{14} y + A_{15} z & p_6 + A_{16} x + A_{17} y + A_{18} z & p_3 + A_7 x + A_8 y + A_9 z \end{bmatrix} \tag{8-1}$$

Er is hier gekozen voor een notatie met hoofdletter, waarbij de factoren A_1 t/m A_{18} de partiële afgeleiden zijn van de tensorelementen.

$$A_1 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \qquad A_2 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \qquad A_3 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} \tag{8-2a}$$

$$A_4 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \qquad A_5 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \qquad A_6 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} \tag{8-2b}$$

$$A_7 = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} \qquad A_8 = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} \qquad A_9 = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{8-2c}$$

$$A_{10} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \qquad A_{11} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \qquad A_{12} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} \tag{8-2d}$$

$$A_{13} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \qquad A_{14} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} \qquad A_{15} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \tag{8-2e}$$

$$A_{16} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} \qquad A_{17} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \qquad A_{18} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \tag{8-2f}$$

Als eerst komen bij de factoren alle normaalspanningen aan bod en later ook de schuifspanningen. Deze volgorde is ook in de 2D-situatie gebruikt.

Er gelden in de 3D situatie ook dezelfde voorwaarden voor een umbilic als in de 2D situatie. Hier waren de normaalspanningen in een umbilic gelijk aan elkaar en de schuifspanning was gelijk aan nul. De voorwaarden vertalen zich als volgt naar de 3D situatie:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{yz} = 0 \end{cases} \tag{8-3}$$

Logischerwijs volgt hieruit dat:

$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 = p \\ p_4 = p_5 = p_6 = 0 \end{cases} \tag{8-4}$$

De rotatie van het assenstelsel is iets gecompliceerder geworden in de 3D situatie. In de 2D situatie beschreef de rotatiematrix de rotatie om de z-as. Aangezien zich nu in de z-richting ook spanningen kunnen voordoen, ontstaat ook de mogelijkheid om te roteren om de x- en de y-as. In de vergelijkingen 8-5 t/m 8-7 zijn de rotatiematrices weergegeven voor respectievelijk de z-, y- en x-as. De rotatiematrices beschrijven ieder een willekeurige rotatie, vandaar dat er nu ook drie verschillende hoeken (α, β en γ) zijn geïntroduceerd.

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8-5}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \tag{8-6}$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{8-7}$$

Deze drie rotatiematrices kunnen vereenvoudigd worden tot één matrix door deze simpelweg met elkaar te vermenigvuldigen. Een groot nadeel hierbij is dat de volgorde van vermenigvuldiging (zes mogelijkheden) invloed heeft op de uitkomst. Daarom is er een conventie om eerst om de y-as te roteren, vervolgens om de z-as en als laatste om de x-as, zie het resultaat in vergelijking 8-8. Dit wordt de volgorde van de Eulerhoek genoemd [18].

$$R_{tot}(\alpha,\beta,\gamma) = R_y(\beta)R_z(\gamma)R_x(\alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & \sin(\beta)\cos(\gamma) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)-\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)-\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \tag{8-8}$$

Net als in vergelijking 2-2b waarbij beschreven werd hoe men de spanningstensor van coördinatenstelsel kon veranderen, geldt dit ook voor de 3D situatie.

$$\bar{\sigma} = R_{tot}^T \cdot \sigma \cdot R_{tot} \tag{8-9}$$

Hiermee zijn we in staat om alle elementen uit de geroteerde spanningstensor uit te rekenen. Om vervolgens tot de nieuwe factoren te komen, dienen we van de elementen weer de partiële afgeleide in drie richtingen te nemen. Dit resulteert in achttien factoren, B_1 t/m B_{18}.

Het vermoeden is ook hier dat er dus achttien invarianten voor de 3D spanningstensor bestaan. De opgave om deze te vinden zal een stuk lastiger zijn dan de invarianten voor de 2D tensor, omdat ten eerste het aantal hierbij lager was en ten tweede waren deze minder complex. De invarianten van de 3D spanningstensor kunnen uit maar liefst achttien variabelen bestaan en de kans om deze met trial-and-error te vinden is nihil.

Verder is het aannemelijk dat zich in een volume relatief weinig 3D-umbilics bevinden, omdat de kans dat een umbilic in een vlak ook snijdt met een richel in de derde dimensie vrij klein is. Door de complexiteit van het probleem en de geringe informatie die de invarianten zullen opleveren is besloten om niet te gaan zoeken naar deze achttien invarianten.

Mocht men toch besluiten om hiernaar te gaan zoeken, zullen de afleidingen van de 2D invarianten goed bestudeerd moet worden.

De afleiding van de eerste invariant met de contourintegratie zou in principe ook voor de driedimensionale spanningstensor kunnen worden uitgevoerd, zie vergelijking 3-4. Deze formule die in vectornotatie is geschreven, kan dus eenvoudig worden uitgebreid. Echter zal dan ook gekeken moeten worden hoe de hoofdrichting van een driedimensionale spanningstensor kan worden berekend.

De tweede invariant is afgeleid door de norm van de gradiënt van het spoor van de matrix te berekenen. Het spoor van de driedimensionale spanningstensor is vrij eenvoudig te berekenen door simpelweg de diagonaalelementen bij elkaar op te tellen. Door ook hiervan de norm van de gradiënt uit te rekenen, zou men dus op een mogelijke invariant voor de 3D spanningstensor uit kunnen komen. Door op deze wijze iedere standaard invariant te analyseren is het mogelijk om een aantal invarianten te vinden.

Verder is de vraag wat voor invloed de volgorde van de drie rotatiematrices heeft op de invariantie van de bepaalde formules. Als men een formule heeft gevonden die invariant is, is deze dan voor ieder van de zes volgordes van roteren ook invariant?

Conclusie & Aanbevelingen

De onderzoeksvraag van dit bachelor eindwerk luidt:

Wat zijn de unieke invarianten van het (2D) tensorveld rondom een umbilic?

Er blijkt een onderscheid te zijn tussen twee belangrijke soorten umbilics, namelijk de gegeneraliseerde umbilics en de geometrische umbilics. In principe werd gezocht naar de invarianten van de gegeneraliseerde umbilic, omdat deze na het gebruiken van de voorwaarden $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$ zijn om te schrijven tot de invarianten van een oppervlak-umbilic. Verondersteld wordt dat er zes invarianten zijn van de gegeneraliseerde umbilic en met de zojuist genoemde voorwaarden dus vier invarianten bij de geometrische umbilic.

In vergelijking 8-10 zijn alle invarianten van de gegeneraliseerde umbilics weergegeven. De methodes om deze invarianten te vinden lopen heel erg uit een. Sommige invarianten zijn gevonden door trial-and-error met het Matlabscript. Andere invarianten zijn gevonden door naar twee invariante krommingen van de determinantsfunctie te kijken. Ook zijn er invarianten gevonden door goed de literatuur te bestuderen, waarbij reeds bestaande formules zijn gevonden. Echter was voorheen nooit aangetoond dat deze formules ook de eigenschap hadden van invariantie onder rotatie van het assenstelsel.

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= (a_1 - a_3) \cdot a_6 - (a_2 - a_4) \cdot a_5 \\
\delta_2 &= (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2 \\
\delta_3 &= a_1 \cdot a_3 - a_5^2 + a_2 \cdot a_4 - a_6^2 \\
\delta_4 &= \Big(a_1 a_4 + a_2 a_3 - 2a_5 a_6\Big)^2 - 4\Big(a_1 a_3 - a_5^2\Big)\Big(a_2 a_4 - a_6^2\Big) \\
\delta_5 &= \Big(a_{245} a_{316} - 9a_5 a_6\Big)^2 - 4\Big(3a_5 a_{245} + a_{316}^2\Big)\Big(3a_6 a_{316} + a_{245}^2\Big) \\
&\quad \text{met:} \qquad a_{245} = a_2 - a_4 + a_5 \qquad \text{en} \qquad a_{316} = a_3 - a_1 + a_6 \\
\delta_6 &= (a_3 - a_6)^2 + (a_2 - a_5)^2 \\
\delta_7 &= p_2^2(a_1^2 + a_2^2) + p_1^2(a_3^2 + a_4^2) + p_3^2(4a_5^2 + 4a_6^2) + p_1 p_2(2a_1 a_3 + 2a_2 a_4) \\
&\quad - p_2 p_3(4a_1 a_5 + 4a_2 a_6) - p_1 p_3(4a_3 a_5 + 4a_4 a_6)
\end{aligned}
\tag{8-10}
$$

De uniekheid van de eerste drie invarianten uit de set vergelijkingen is bewezen door de aanwezigheid van termen in de ene vergelijking, die niet te vinden waren in de andere twee vergelijkingen. Ondanks het gebrek aan wiskundig bewijs is het vermoeden groot dat de vierde en vijfde invariant ook behoren tot deze set unieke invarianten.

Aangezien er werd gesteld dat er zes invarianten waren en er zeven in de lijst staan, kijken we kritisch naar de laatste twee invarianten. De zesde invariant van de lijst is afgeleid door de voorwaarden $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$ te gebruiken bij de tweede invariant, waardoor een nieuwe invariant is ontstaan. Wederom is er geen wiskundig bewijs dat de uniekheid van de invariant kan aantonen, maar het vermoeden is wel dat hij uniek is na vele mislukte pogingen tot vereenvoudiging.

De zevende en tevens laatste invariant is afgeleid via de norm van de gradiënt van de determinantsfunctie. Dit leidde eerder met succes tot de afleiding van de tweede invariant, waarbij naar de spoorfunctie werd bekeken. Ten opzichte van de eerdere invarianten verschijnen nu drie nieuwe variabelen, namelijk de spanningen p_1 t/m p_3. De vraag is of deze invariant nog wel tot dezelfde set invarianten behoort of tot een andere set invarianten, waarbij er in iedere formule de variabelen p_1 t/m p_3 voorkomen.

Er zijn dus twee opties mogelijk. De eerste is dat de set van de eerste zes invarianten niet uniek is en er dus één invariant kan worden uitgedrukt in de andere invarianten. De tweede optie is dat er blijkbaar meer dan zes invarianten bestaan voor de gegeneraliseerde umbilic. De voorkeur gaat uit naar de tweede situatie, tot het tegendeel bewezen is.

Daarnaast waren er de invarianten van de geometrische umbilic. De set van vier invarianten is afgeleid met behulp van de Airy-spanningsfunctie, waarvan de resultaten in vergelijking 8-11 zijn weergegeven. De set is vermoedelijk uniek, maar dit is niet wiskundig bewezen.

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (a_3 - a_1)a_1 + (a_2 - a_4)a_4 \\
\tau_2 &= (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2 \\
\tau_3 &= 4(a_3a_1 - a_4^2)(a_4a_2 - a_1^2) - (a_3a_2 - a_4a_1)^2 \\
\tau_4 &= 4\Big(3a_1(a_3 - 2a_1) - (a_2 - 2a_4)^2\Big)\Big(3a_4(a_2 - 2a_4) - (a_3 - 2a_1)^2\Big) - \\
&\quad \Big((a_2 - 2a_4)(a_3 - 2a_1) - 9a_4a_1\Big)^2
\end{aligned} \tag{8-11}$$

Verder is de interpretatie van de invarianten van de gegeneraliseerde umbilic in hoofdstuk 7 onderzocht. Hierbij kon gebruik gemaakt worden van de literatuur die er over dit onderwerp al beschikbaar is. Van sommige invarianten is bekend dat bijvoorbeeld een positieve waarde, de umbilic van het type *star* is. Het is niet gelukt om dit voor iedere invariant te doen, omdat bij sommige invarianten het heel lastig te beredeneren wat de effecten zullen zijn. Vandaar dat er in het vervolg gekeken zal moeten worden naar voorbeelden van diverse typen umbilics. Door bij deze umbilics de invarianten te berekenen, is het mogelijk om verbanden te herkennen, net als bij de overige invarianten.

Tot slot is er een opzet gemaakt voor de umbilics in drie dimensies. Al snel bleek dat door het toevoegen van een extra dimensie het probleem dusdanig complex werd, dat het buiten de scope van dit bachelor eindwerk viel. Toch is een korte analyse gemaakt van de afleidingen uit de tweedimensionale situatie die eventueel gebruikt kunnen worden om in de driedimensionale situatie tot een invariant te komen.

Bijlage A

Factornotatie

In de diverse literatuurartikelen worden keer op keer andere notaties gebruikt. In deze bijlage wordt een vergelijking gemaakt tussen de diverse factoren, zie overzichtstabel A-1.

Partiële afgeleide	Factor	Berry en Hannay [3]	Thorndike et al. [4]	Hutchinson et al. [5]
$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$	a_1	γ	γ	a
$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}$	a_2	δ	δ	b
$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x}$	a_3	α	α	c
$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$	a_4	β	β	d
$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$	a_5	-	$-\beta_1$	$-d_1$
$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$	a_6	-	$-\gamma_1$	$-a_1$

Tabel A-1: Overzicht van de diverse notaties voor de factoren a_1 t/m a_6 in de literatuur.

Bijlage B

Matlabcode

Voor de controle van de gevonden invarianten is gebruik gemaakt van een Matlab-script, waarbij een rotatie van het assenstelsel wordt uitgevoerd om te kijken of de invariant gelijk blijft.

B-1 Invariantcontrole.m

```
%% Controle van een gevonden invariant

%% Definieren van variabelen

syms('r','s','f')
syms('p1','p2','p3')
syms('a1','a2','a3','a4','a5','a6')

x = r*cos(f)-s*sin(f);
y = r*sin(f)+s*cos(f);

%% Elementen uit spanningstensor

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

%% Willekeurige rotatie

nrr = 1/2*(nxx+nyy) + 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) + nxy*sin(2*f);
nss = 1/2*(nxx+nyy) - 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) - nxy*sin(2*f);
nrs =                - 1/2*(nxx-nyy)*sin(2*f) + nxy*cos(2*f);

b1  = diff(nrr,r);
b2  = diff(nrr,s);
```

```
b3   = diff(nss,r);
b4   = diff(nss,s);
b5   = diff(nrs,r);
b6   = diff(nrs,s);

%% Invarianten

I1   = simplify((b1-b3)*b6-(b2-b4)*b5)
I2   = simplify((b1+b3)^2+(b2+b4)^2)
I3   = simplify(b1*b3-b5^2+b2*b4-b6^2)
I4   = simplify((b1*b4+b2*b3-2*b5*b6)^2-4*(b1*b3-b5^2)*(b2*b4-b6^2))
I5   = simplify((4*(3*b6*(b3-b1+b6)+(b2-b4+b5)^2)*...
       (3*b5*(b2-b4+b5)+(b3-b1+b6)^2)-((b2-b4+b5)*(b3-b1+b6)-9*b5*b6)^2))

%% Zesde invariant

T1   = simplify((b3-b6)^2+(b2-b5)^2)
expand((a3-a6)^2+(a2-a5)^2)

T2   = simplify((b1+b3)*(b3-b6)+(b2+b4)*(b2-b5))
expand((a1+a3)*(a3-a6)+(a2+a4)*(a2-a5))

simplify(T2-T1-I3+I1)

%% Pogingen voor de zesde invariant

T1   = simplify(b1*b2*b3*b4*b5*b6);
T2   = simplify((b1+b3)^2*(b2+b4)^2*(b5+b6)^2);
T3   = simplify((b1+b3+b5)^3*(b2+b4+b6)^3);
```

Output

```
I1 = a1*a6 - a2*a5 - a3*a6 + a4*a5


I2 = a1^2 + 2*a1*a3 + a2^2 + 2*a2*a4 + a3^2 + a4^2


I3 = - a5^2 - a6^2 + a1*a3 + a2*a4


I4 = a1^2*a4^2 - 2*a1*a2*a3*a4 + 4*a1*a3*a6^2 - 4*a1*a4*a5*a6 + a2^2*a3^2 -
     4*a2*a3*a5*a6 + 4*a2*a4*a5^2


I5 = - 12*a1^3*a6 + 3*a1^2*a2^2 - 6*a1^2*a2*a4 + 6*a1^2*a2*a5 + 36*a1^2*a3*a6 +
     3*a1^2*a4^2 - 6*a1^2*a4*a5 + 3*a1^2*a5^2 + 36*a1^2*a6^2 - 6*a1*a2^2*a3 -
     6*a1*a2^2*a6 + 12*a1*a2*a3*a4 - 12*a1*a2*a3*a5 + 12*a1*a2*a4*a6 -
     66*a1*a2*a5*a6 - 36*a1*a3^2*a6 - 6*a1*a3*a4^2 + 12*a1*a3*a4*a5 -
     6*a1*a3*a5^2 - 72*a1*a3*a6^2 - 6*a1*a4^2*a6 + 66*a1*a4*a5*a6 -
     60*a1*a5^2*a6 - 36*a1*a6^3 + 12*a2^3*a5 + 3*a2^2*a3^2 + 6*a2^2*a3*a6 -
     36*a2^2*a4*a5 + 36*a2^2*a5^2 + 3*a2^2*a6^2 - 6*a2*a3^2*a4 + 6*a2*a3^2*a5 -
     12*a2*a3*a4*a6 + 66*a2*a3*a5*a6 + 36*a2*a4^2*a5 - 72*a2*a4*a5^2 -
     6*a2*a4*a6^2 + 36*a2*a5^3 + 60*a2*a5*a6^2 + 12*a3^3*a6 + 3*a3^2*a4^2 -
     6*a3^2*a4*a5 + 3*a3^2*a5^2 + 36*a3^2*a6^2 + 6*a3*a4^2*a6 -
     66*a3*a4*a5*a6 + 60*a3*a5^2*a6 + 36*a3*a6^3 - 12*a4^3*a5 + 36*a4^2*a5^2 +
     3*a4^2*a6^2 - 36*a4*a5^3 - 60*a4*a5*a6^2 + 12*a5^4 - 24*a5^2*a6^2 +
     12*a6^4


T1  = a2^2 - 2*a2*a5 + a3^2 - 2*a3*a6 + a5^2 + a6^2
ans = a2^2 - 2*a2*a5 + a3^2 - 2*a3*a6 + a5^2 + a6^2


T2  = a1*a3 + a2*a4 - a1*a6 - a2*a5 - a3*a6 - a4*a5 + a2^2 + a3^2
ans = a1*a3 + a2*a4 - a1*a6 - a2*a5 - a3*a6 - a4*a5 + a2^2 + a3^2


T2 - T1 - I3 + I1 = 0
```

Bijlage C

Krommingsfuncties

C-1 Determinantsfunctie

```
%% Afleiding van derde en vierde invariant.

clear all;

syms('x','y')
syms('p1','p2','p3')
syms('a1','a2','a3','a4','a5','a6')

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

%% Determinantsfunctie

Det = expand(nxx*nyy-nxy^2)

kxx = diff(Det,x,2);
kyy = diff(Det,y,2);
kxy = diff(diff(Det,x),y);

% Principal curvature

k1  = 1/2*(kxx+kyy)+sqrt(1/4*(kxx-kyy)^2+kxy^2);
k2  = 1/2*(kxx+kyy)-sqrt(1/4*(kxx-kyy)^2+kxy^2);

% Mean curvature

H   = (k1+k2)/2;
H   = (kxx+kyy)/2;

```

```
% Gaussian curvature

K    = simplify(k1*k2);
K    = expand(kxx*kyy-kxy^2);

%% Rotatie van coördinatenstelsel

syms('r','s','f')
clear x
clear y

x = r*cos(f)-s*sin(f);
y = r*sin(f)+s*cos(f);

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

nrr = 1/2*(nxx+nyy) + 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) + nxy*sin(2*f);
nss = 1/2*(nxx+nyy) - 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) - nxy*sin(2*f);
nrs =               - 1/2*(nxx-nyy)*sin(2*f) + nxy*cos(2*f);

b1   = diff(nrr,r);
b2   = diff(nrr,s);
b3   = diff(nss,r);
b4   = diff(nss,s);
b5   = diff(nrs,r);
b6   = diff(nrs,s);

% Invariant 3 - Gemiddelde kromming H

I3   = simplify(b1*b3-b5^2+b2*b4-b6^2)

% Invariant 4 - Gaussiaanse kromming K

I4   = simplify(4*(b1*b3-b5^2)*(b2*b4-b6^2)-(b1*b4+b2*b3-2*b5*b6)^2)
```

```
Det = p1*p2 - p3^2 - a5^2*x^2 - a6^2*y^2 + a1*p2*x + a3*p1*x - 2*a5*p3*x +
      a2*p2*y + a4*p1*y - 2*a6*p3*y + a1*a3*x^2 + a2*a4*y^2 + a1*a4*x*y +
      a2*a3*x*y - 2*a5*a6*x*y


I3 = - a5^2 - a6^2 + a1*a3 + a2*a4


I4 = - a1^2*a4^2 + 2*a1*a2*a3*a4 - 4*a1*a3*a6^2 + 4*a1*a4*a5*a6 - a2^2*a3^2 +
     4*a2*a3*a5*a6 - 4*a2*a4*a5^2
```

C-2 Von Mises-spanningsfunctie

```
%% Von Mises-spanning

clear all; clc
syms('x','y')
syms('p1','p2','p3')
syms('a1','a2','a3','a4','a5','a6')

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

%% Von Mises-spanningsfunctie

VM  = expand(sqrt(1/2*((nxx-nyy)^2+nxx^2+nyy^2)+3*nxy^2))

kxx = diff(VM^2,x,2);
kyy = diff(VM^2,y,2);
kxy = diff(diff(VM^2,x),y);

% Principal curvature

k1  = 1/2*(kxx+kyy)+sqrt(1/4*(kxx-kyy)^2+kxy^2);
k2  = 1/2*(kxx+kyy)-sqrt(1/4*(kxx-kyy)^2+kxy^2);

% Mean curvature

Km  = (k1+k2)/2;
Km  = (kxx+kyy)/2;

% Gaussian curvature

K   = simplify(k1*k2);
K   = expand(kxx*kyy-kxy^2);

%% Rotatie van coördinatenstelsel

syms('r','s','f')
clear x
clear y

x = r*cos(f)-s*sin(f);
y = r*sin(f)+s*cos(f);

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

nrr = 1/2*(nxx+nyy) + 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) + nxy*sin(2*f);
nss = 1/2*(nxx+nyy) - 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) - nxy*sin(2*f);
nrs =                - 1/2*(nxx-nyy)*sin(2*f) + nxy*cos(2*f);
```

```
b1  = diff(nrr,r);
b2  = diff(nrr,s);
b3  = diff(nss,r);
b4  = diff(nss,s);
b5  = diff(nrs,r);
b6  = diff(nrs,s);

% Invariant 5* - Gemiddelde kromming H

I5  = simplify(b1^2 - b1*b3 + b3^2 + b2^2 - b2*b4  + b4^2 + 3*(b5^2 + b6
    ^2))

% Invariant 6* - Gaussiaanse kromming K

I6  = simplify(4*(-b1*b3+b1^2+b3^2+3*b5^2)*(3*b6^2-b2*b4+b2^2+b4^2) - ...
      (2*b1*b2-b1*b4-b2*b3+2*b3*b4+6*b5*b6)^2)

%% Vereenvoudiging van de invarianten

I1  = simplify((b1-b3)*b6-(b2-b4)*b5);
I2  = simplify((b1+b3)^2+(b2+b4)^2);
I3  = simplify(b1*b3-b5^2+b2*b4-b6^2);
I4  = simplify(4*(b1*b3-b5^2)*(b2*b4-b6^2)-(b1*b4+b2*b3-2*b5*b6)^2);

V5  = I5 - I2 + 3*I3
V6  = I6 - 12*expand(I1^2) + 3*I4

% Conclusie: De gevonden formules kunnen worden opgebouwd uit andere
% invarianten en zijn dus niet 'nieuwe' invarianten.
```

```
VM = (a1^2*x^2 + 2*a1*a2*x*y - a1*a3*x^2 - a1*a4*x*y + 2*a1*p1*x - a1*p2*x +
     a2^2*y^2 - a2*a3*x*y - a2*a4*y^2 + 2*a2*p1*y - a2*p2*y + a3^2*x^2 +
     2*a3*a4*x*y - a3*p1*x + 2*a3*p2*x + a4^2*y^2 - a4*p1*y + 2*a4*p2*y +
     3*a5^2*x^2 + 6*a5*a6*x*y + 6*a5*p3*x + 3*a6^2*y^2 + 6*a6*p3*y + p1^2 -
     p1*p2 + p2^2 + 3*p3^2)^(1/2)

I5 = a1^2 - a1*a3 + a2^2 - a2*a4 + a3^2 + a4^2 + 3*a5^2 + 3*a6^2

I6 = 3*a1^2*a4^2 + 12*a1^2*a6^2 - 6*a1*a2*a3*a4 - 24*a1*a2*a5*a6 -
     12*a1*a3*a6^2 + 12*a1*a4*a5*a6 + 3*a2^2*a3^2 + 12*a2^2*a5^2 +
     12*a2*a3*a5*a6 - 12*a2*a4*a5^2 + 12*a3^2*a6^2 - 24*a3*a4*a5*a6 +
     12*a4^2*a5^2

V5 = 0

V6 = 0
```

Bijlage D

Afleiding Airy spanningsfunctie

De resultaten uit hoofdstuk 5 volgen uit de afleiding van de Airy spanningsfunctie. Met de drie vergelijkingen die volgen uit (D-1) kunnen we de Airy spanningsfunctie bepalen door middel van integratie, zie (D-2) t/m (D-4).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + a_1 x + a_2 y & a_5 x + a_6 y \\ a_5 x + a_6 y & p + a_3 x + a_4 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{D-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= p + a_1 x + a_2 y \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= py + a_1 xy + \frac{a_2}{2} y^2 + f_1(x) \\ \chi &= \frac{p}{2} y^2 + \frac{a_1}{2} xy^2 + \frac{a_2}{6} y^3 + f_1(x) y + f_2(x) \end{aligned} \tag{D-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= p + a_3 x + a_4 y \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} &= px + \frac{a_3}{2} x^2 + a_4 xy + f_3(y) \\ \chi &= \frac{p}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{a_4}{2} x^2 y + f_3(y) x + f_4(y) \end{aligned} \tag{D-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} &= -a_5 x - a_6 y \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\frac{a_5}{2} x^2 - a_6 xy + f_5(y) \\ \chi &= -\frac{a_5}{2} x^2 y - \frac{a_6}{2} xy^2 + \int f_5(y)\ \mathrm{d}y + f_6(x) \end{aligned} \tag{D-4}$$

Aangezien geldt dat de vergelijkingen voor χ in (D-2) t/m (D-4) gelijk moeten zijn, kunnen we de verschillende onbekende oplossen. Alledrie de vergelijkingen voor χ zijn weergegeven in vergelijking (D-5) t/m (D-7).

$$\chi = \frac{p}{2}y^2 + \frac{a_1}{2}xy^2 + \frac{a_2}{6}y^3 + f_1(x)y + f_2(x) \tag{D-5}$$
$$\chi = \frac{p}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{2}x^2y + f_3(y)x + f_4(y) \tag{D-6}$$
$$\chi = -\frac{a_5}{2}x^2y - \frac{a_6}{2}xy^2 + \int f_5(y)\ \mathrm{d}y + f_6(x) \tag{D-7}$$

Als we vergelijking (D-5) vergelijken met (D-6), dan kunnen we hieruit $f_1(x)$ en $f_2(x)$ oplossen. Andersom had dit ook gekund, zodat $f_3(x)$ en $f_4(x)$ bepaald kunnen worden.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{a_4}{2}x^2 & \qquad f_3(y) &= \frac{a_1}{2}y^2 \\ f_2(x) &= \frac{p}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 & \qquad f_4(y) &= \frac{p}{2}y^2 + \frac{a_2}{6}y^3 \end{aligned} \tag{D-8}$$

De uiteindelijke Airy spanningsfunctie ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} \chi(x,y) &= \frac{p}{2}(x^2+y^2) + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{2}x^2y + \frac{a_1}{2}xy^2 + \frac{a_2}{6}y^3 \\ \chi(x,y) &= \frac{p}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{6}(a_3x^3 + 3a_4x^2y + 3a_1xy^2 + a_2y^3) \end{aligned} \tag{D-9}$$

Omdat ook vergelijking (D-7) aan vergelijking (D-9) moet voldoen, volgt hieruit:

$$\begin{aligned} f_5(y) = f_4(y) &= \frac{p}{2}y^2 + \frac{a_2}{6}y^3 & \qquad a_5 &= -a_4 \\ f_6(x) = f_2(x) &= \frac{p}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 & \qquad a_6 &= -a_1 \end{aligned} \tag{D-10}$$

Dit brengt ons tot bijna dezelfde vergelijkingen als in (D-1), echter nu is aangetoond dat vanwege evenwicht ook moet gelden dat $a_5 = -a_4$ en $a_6 = -a_1$, waardoor men op de matrix komt in (D-11).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\chi}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} \\ -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + a_1x + a_2y & -a_4x - a_1y \\ -a_4x - a_1y & p + a_3x + a_4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{D-11}$$

Let op: De Airy spanningsfunctie is alleen geldig in het geval dat er een statische evenwichtssituatie zich voordoet en er geen uitwendige krachten op het object worden uitgevoerd.

Bijlage E

Geen body forces

```
%% Situatie zonder bodyforces

clear all;
clc;

%% Definieren van variabelen

syms('r','s','f')
syms('p')
syms('a1','a2','a3','a4','a5','a6')

x = r*cos(f)-s*sin(f);
y = r*sin(f)+s*cos(f);

%% Spanningstensor die voldoet aan Airy spanningsfunctie

nxx = p+a1*x+a2*y;
nyy = p+a3*x+a4*y;
nxy = -a4*x-a1*y;

%% Willekeurige rotatie

nrr = 1/2*(nxx+nyy) + 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) + nxy*sin(2*f);
nss = 1/2*(nxx+nyy) - 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) - nxy*sin(2*f);
nrs =                - 1/2*(nxx-nyy)*sin(2*f) + nxy*cos(2*f);

b1  = diff(nrr,r);
b2  = diff(nrr,s);
b3  = diff(nss,r);
b4  = diff(nss,s);
b5  = diff(nrs,r);
b6  = diff(nrs,s);

```

```
%% Invarianten

I1  = simplify((b1-b3)*b6-(b2-b4)*b5)

I2  = simplify((b1+b3)^2+(b2+b4)^2)

I3  = simplify(b1*b3-b5^2+b2*b4-b6^2)

I4  = simplify((b1*b4+b2*b3-2*b5*b6)^2-4*(b1*b3-b5^2)*(b2*b4-b6^2))
T4  = expand((a2*a3-a4*a1)^2-4*(a1*a3-a4^2)*(a2*a4-a1^2))

I5  = simplify((4*(3*b6*(b3-b1+b6)+(b2-b4+b5)^2)*(3*b5*(b2-b4+b5)+(b3-b1+
    b6)^2)-((b2-b4+b5)*(b3-b1+b6)-9*b5*b6)^2))
T5  = expand((4*(3*a1*(a3-2*a1)-(a2-2*a4)^2)*(3*a4*(a2-2*a4)-(a3-2*a1)^2)
    -((a2-2*a4)*(a3-2*a1)-9*a1*a4)^2))

%% Vereenvoudiging

I2  = simplify(I1 + I2)
```

```
I1 = - a1^2 + a3*a1 - a4^2 + a2*a4


I2 = a1^2 + 2*a1*a3 + a2^2 + 2*a2*a4 + a3^2 + a4^2


I3 = - a1^2 + a3*a1 - a4^2 + a2*a4


I4 = 4*a1^3*a3 - 3*a1^2*a4^2 - 6*a1*a2*a3*a4 + a2^2*a3^2 + 4*a2*a4^3
T4 = 4*a1^3*a3 - 3*a1^2*a4^2 - 6*a1*a2*a3*a4 + a2^2*a3^2 + 4*a2*a4^3


I5 = 96*a1^4 - 144*a1^3*a3 + 12*a1^2*a2^2 - 156*a1^2*a2*a4 + 72*a1^2*a3^2 +
     183*a1^2*a4^2 - 12*a1*a2^2*a3 + 102*a1*a2*a3*a4 - 12*a1*a3^3 -
     156*a1*a3*a4^2 - 12*a2^3*a4 + 3*a2^2*a3^2 + 72*a2^2*a4^2 - 12*a2*a3^2*a4 -
     144*a2*a4^3 + 12*a3^2*a4^2 + 96*a4^4
T5 = 96*a1^4 - 144*a1^3*a3 + 12*a1^2*a2^2 - 156*a1^2*a2*a4 + 72*a1^2*a3^2 +
     183*a1^2*a4^2 - 12*a1*a2^2*a3 + 102*a1*a2*a3*a4 - 12*a1*a3^3 -
     156*a1*a3*a4^2 - 12*a2^3*a4 + 3*a2^2*a3^2 + 72*a2^2*a4^2 - 12*a2*a3^2*a4 -
     144*a2*a4^3 + 12*a3^2*a4^2 + 96*a4^4

Vereenvoudiging tweede invariant
I2 = a2^2 + 3*a4*a2 + a3^2 + 3*a1*a3
```

Bijlage F

Norm van gradiënt van determinantsfunctie

```
%% Norm van de gradiënt van de determinantsfunctie

%% Definieren van variabelen

clear all; clc
syms('x','y')
syms('p1','p2','p3','p')
syms('a1','a2','a3','a4','a5','a6')

%% Bepalen norm van de gradient

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

Det = nxx*nyy-nxy^2;
TD  = taylor(Det,[x,y]);

TDx = diff(TD,x);
TDy = diff(TD,y);
TDx = subs(TDx,[x,y],[0,0])
TDy = subs(TDy,[x,y],[0,0])

T7  = TDx^2+TDy^2

I7  = taylor(T7,[p1,p2,p3])

% In een umbilic vereenvoudigt zich deze tot de tweede invariant.

I2  = simplify(subs(I7,[p1,p2,p3],[p,p,0])/p^2)
```

```
%% Willekeurige rotatie

syms('r','s','f')
x = r*cos(f)-s*sin(f);
y = r*sin(f)+s*cos(f);

nxx = p1+a1*x+a2*y;
nyy = p2+a3*x+a4*y;
nxy = p3+a5*x+a6*y;

nrr = 1/2*(nxx+nyy) + 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) + nxy*sin(2*f);
nss = 1/2*(nxx+nyy) - 1/2*(nxx-nyy)*cos(2*f) - nxy*sin(2*f);
nrs =                - 1/2*(nxx-nyy)*sin(2*f) + nxy*cos(2*f);

b1  = diff(nrr,r);
b2  = diff(nrr,s);
b3  = diff(nss,r);
b4  = diff(nss,s);
b5  = diff(nrs,r);
b6  = diff(nrs,s);

q1  = subs(nrr,[r,s],[0,0]);
q2  = subs(nss,[r,s],[0,0]);
q3  = subs(nrs,[r,s],[0,0]);

Ta7 = simplify(subs(I7,[a1,a2,a3,a4,a5,a6,p1,p2,p3],[b1,b2,b3,b4,b5,b6,q1
    ,q2,q3]));
I7  = taylor(Ta7,[p1,p2,p3])
```

```
TDx = a1*p2 + a3*p1 - 2*a5*p3

TDy = a2*p2 + a4*p1 - 2*a6*p3

T7  = (a1*p2 + a3*p1 - 2*a5*p3)^2 + (a2*p2 + a4*p1 - 2*a6*p3)^2

I7  = p2^2*(a1^2 + a2^2) + p1^2*(a3^2 + a4^2) + p3^2*(4*a5^2 + 4*a6^2) +
      p1*p2*(2*a1*a3 + 2*a2*a4) - p2*p3*(4*a1*a5 + 4*a2*a6) -
      p1*p3*(4*a3*a5 + 4*a4*a6)

I2  = a1^2 + 2*a1*a3 + a2^2 + 2*a2*a4 + a3^2 + a4^2

I7  = p2^2*(a1^2 + a2^2) + p1^2*(a3^2 + a4^2) + p3^2*(4*a5^2 + 4*a6^2) +
      p1*p2*(2*a1*a3 + 2*a2*a4) - p2*p3*(4*a1*a5 + 4*a2*a6) -
      p1*p3*(4*a3*a5 + 4*a4*a6)
```

Literatuurlijst

[1] Wikipedia. *Invariantie — Wikipedia, de vrije encyclopedie*. d.d. 07-05-2013. URL: http://nl.wikipedia.org/w/index.php?title=Invariantie&oldid=37374794.

[2] Thierry Delmarcelle en Lambertus Hesselink. „The topology of symmetric, second-order tensor fields". In: *Proceedings of the conference on Visualization'94*. IEEE Computer Society Press. 1994, p. 140–147.

[3] MV Berry en JH Hannay. „Umbilic points on Gaussian random surfaces". In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 10.11 (1977), p. 1809.

[4] AS Thorndike, CR Cooley en JF Nye. „The structure and evolution of flow fields and other vector fields". In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 11.8 (1978), p. 1455.

[5] HJ Hutchinson, JF Nye en PS Salmon. „The Classification of Isotropic Points in Stress Fields". In: *Journal of structural mechanics* 11.3 (1983), p. 371–381.

[6] *Tensor — Wolfram MathWorld*. d.d. 05-05-2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/Tensor.html.

[7] *Invariant — Wolfram MathWorld*. d.d. 05-05-2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/Invariant.html.

[8] Wikipedia. *Invariants of tensors — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. d.d. 28-05-2013. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Invariants_of_tensors&oldid=552495130.

[9] *Umbilic Point — Wolfram MathWorld*. d.d. 05-05-2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/UmbilicPoint.html.

[10] Bryan S. Morse. *Lecture 11: Differential Geometry*. 2000. URL: http://www.dai.ed.ac.uk/CVonline/LOCAL-COPIES/MORSE/diffgeom.pdf.

[11] *Taylor Series — Wolfram MathWorld*. d.d. 23-05-2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html.

[12] Coen Hartsuijker en Hans Welleman. *Mechanics of Structures CT4145/CT2031. Module: Introduction into Continuum Mechanics*. 2007.

[13] P.C.J. Hoogenboom. *Notes on Shell Structures.* Lecture Book. 2013.

[14] Wikipedia. *Differential geometry of surfaces — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. d.d. 28-05-2013. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Differential_geometry_of_surfaces&oldid=539082910.

[15] Wikipedia. *Mean curvature — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. d.d. 28-05-2013. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mean_curvature&oldid=540595006.

[16] Wikipedia. *Gaussian curvature — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. d.d. 28-05-2013. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_curvature&oldid=550532020.

[17] Wikipedia. *Discriminant — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. d.d. 30-05-2013. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Discriminant&oldid=556900419.

[18] *Maths - Standards — Euclidean Space*. d.d. 06-06-13. URL: http://www.euclideanspace.com/maths/standards/index.htm.

[19] Nicholas M Patrikalakis en Takashi Maekawa. *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer Verlag, 2002.

Lijst met figuren