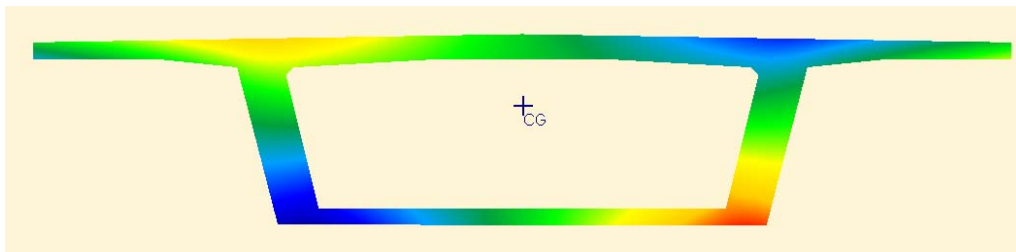


Wringing & Welving in betonnen kokerbruggen



Sander van Wijk
C1170600
TU Delft
CT3000
BSc-eindwerk
December 2006

Begeleiders:
Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. W.J.M. Peperkamp

Inhoudsopgave

Lijst van Figuren	4
Lijst van tabellen	5
Voorwoord	6
1 Inleiding	7
1.1 Probleemstelling	7
1.2 Doel	7
1.3 Aanpak	7
2 Wringing.....	9
2.1 Inleiding	9
2.2 Massieve gelijkzijdige driehoek.....	10
2.3 Koker.....	11
2.4 Brugligger.....	13
3 Welving	17
3.1 Inleiding	17
3.2 Welvingsconstante	17
3.3 Bi-moment.....	22
4 Formule voor welvingsspanning	26
4.1 Inleiding	26
4.2 Formule A	26
4.3 Formule B.....	30
5 Conclusies/aanbevelingen	32
Bronnenlijst	33
Bijlage A. Originele opdracht.....	34
Bijlage B. Theorie van De Saint Venant [1].....	35
Bijlage C. Oplossingen differentiaalvergelijkingen [1].....	38
Bijlage D. Formules van Bredt [1]	39
Bijlage E. Exacte coördinaten	40
Bijlage F. Overzicht meetresultaten.....	41
Bijlage G. Roark's formules voor torsie.....	42
Bijlage H. Resultaten formule A	43
Bijlage I. Resultaten formule B.....	45

Lijst van Figuren

- Figuur 1. Vervorming van een ligger door een wringmoment [1]
- Figuur 2. Elementennet van een doorsnede
- Figuur 3. Assenstelsel
- Figuur 4. Schuifspanningen in de y-richting van de doorsnede
- Figuur 5. Integratie van de schuifspanning over de dikte
- Figuur 6. Schuifspanningen in de z-richting van de doorsnede
- Figuur 7. Formules van Bredt
- Figuur 8. Voorbeeld van een betonnen kokerbrug
- Figuur 9. Schuifspanningen in de y-richting van de doorsnede
- Figuur 10. Plaatsing q-last op de kokerbrug
- Figuur 11. Welving van een vierkante doorsnede door wringing [1]
- Figuur 12. Screenshot berekening welvingsconstante
- Figuur 13. Welving van doorsnede met grootste uitkraging
- Figuur 14. Welving van de breedste doorsnede
- Figuur 15. Welving van de hoogste doorsnede
- Figuur 16. Welving van de dunste doorsnede
- Figuur 17. Welving van de dikste doorsnede
- Figuur 18. Interpretatie van het bi-moment
- Figuur 19. Verloop van het bi-moment in een kokerbrug
- Figuur 20. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de lengte van de uitkraging als variabele
- Figuur 21. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de breedte van de koker als variabele
- Figuur 22. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de totale hoogte als variabele
- Figuur 23. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de dikte als variabele
- Figuur 24. Grafiek van benadering door formule A
- Figuur 25. Grafiek van benadering door formule B

Lijst van tabellen

Tabel 1. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie uitkraging

Tabel 2. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie b_{box}

Tabel 3. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie hoogte

Tabel 4. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie dikte

Tabel 5. Verwijderde data formule A

Tabel 6. Verwijderde data formule B

Voorwoord

Dit verslag betreft een onderzoek naar de invloed van verschillende aspecten van betonnen kokerbruggen op schuifspanningen door wringing en normaalspanningen door verhinderde welving. Dit onderzoek vond plaats in het kader van het 'Bachelor of Science' eindwerk van de faculteit Civiele Techniek van de TU Delft. Ik wil dr. ir. P.C.J. Hoogenboom en ir. W.J.M. Peperkamp bedanken voor de begeleiding van dit project.

Schalkwijk, december 2006

Sander van Wijk
s.vanwijk@student.tudelft.nl

1 Inleiding

1.1 Probleemstelling

Voor bruggen en viaducten met grote overspanningen is de betonnen kokerbrug een interessante oplossing. Hierbij wordt een groot deel van de belasting door het wringend moment opgenomen. De capaciteit vloeit voort uit het principe van de gesloten koker. Door toepassing van hogere sterkte beton kan er steeds slanker worden geconstrueerd. Dit betekent wel dat de schuifspanningen door wringing groter worden. Normaalspanningen ontstaan als de ligter verhindert wordt te welven. Voor sommige belastinggevallen blijken deze spanningen niet verwaarloosbaar zoals eerst werd aangenomen.

Het berekenen van maximale spanningen in constructie-elementen gebeurt middels ontwerpformules of driedimensionale raamwerkprogramma's. In beide gevallen zal de wringstijfheid ingevoerd dienen te worden. De berekening van de wringtraagheidsmoment gebeurt exact voor enkele bijzondere doorsnedevormen zoals de cirkel, de ellips en de gelijkzijdige driehoek. Voor veel andere doorsneden bestaan benaderingsformules. Het is echter vaak niet duidelijk hoe nauwkeurig deze formules zijn. Speciale elementensoftware is een oplossing maar dit werk is specialistisch en tijdrovend.

Er is behoefte aan een ontwerpformule voor spanningen voor spanningen door wringing en verhinderde welving. De berekening van de wring- en welvingsstijfheid moet worden geanalyseerd en worden vergeleken met benaderingsformules.

1.2 Doel

Doel van deze studie is het maken van een geschikte ontwerpformule die het voor de constructeur makkelijker maakt om spanningen in kokerbruggen te berekenen. Het toetsen van de constructie zal dan uiteindelijk sneller verlopen. De te produceren formule dient een betere benadering te geven dan de beschikbare formules. Ook zal het wat betreft afmetingen toepasbaar moeten zijn voor het overgrote deel van de te ontwerpen betonnen kokerbruggen in de nabije toekomst. Er worden op korte termijn geen ingrijpende ontwikkelingen verwacht op het gebied van de kokerbruggenbouw.

1.3 Aanpak

Als eerste zal gekeken worden naar de berekening van het wringtraagheidsmoment. Enkele doorsnedevormen zullen worden geanalyseerd door een berekening volgens de eindige elementenmethode uit te voeren met het programma SCIA ESA-PT [3]. De uitkomsten worden vergeleken met de geldende benaderingsformules. Het computerprogramma zal ook spanningsverdelingen geven die gebruikt kunnen worden bij de vergelijking. Uiteindelijk zal een kokerbrug worden doorgerekend met veel-voorkomende afmetingen.

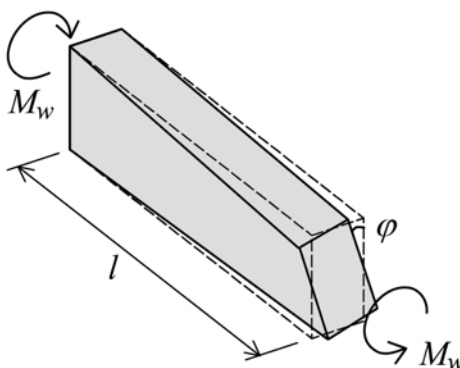
Vervolgens zal het programma ShapeDesigner de welvingsstijfheid uitrekenen van kokerbruggen met verschillende afmetingen. Ook dit gebeurt middels de eindige-elementen methode. Afmetingen worden zo gekozen dat normaalspanningen goed kunnen worden vergeleken door middel van een overzichtelijke tabel.

Tenslotte komt het computerprogramma DataFit aan bod. Deze zal proberen een curve te trekken zo dicht mogelijk bij de gecreëerde coördinaten uit de tabel. Op deze manier zal een formule ontstaan die de spanningen door verhinderde welving in kokerbruggen weergeeft.

2 Wringing

2.1 Inleiding

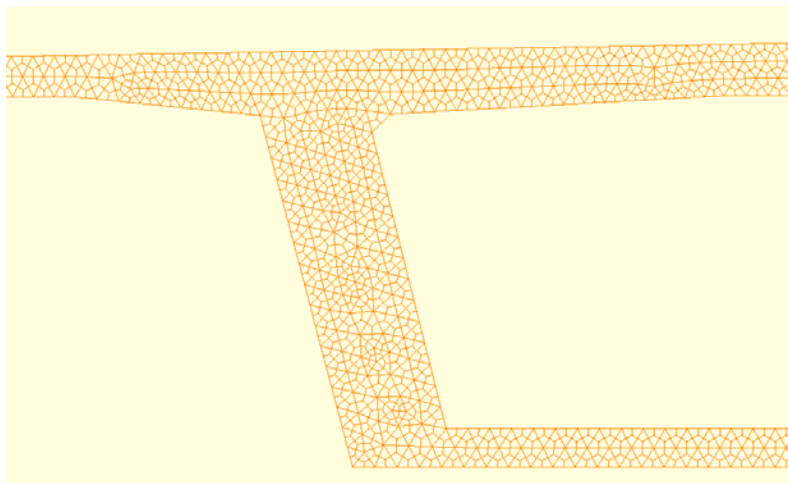
Een asymmetrische belasting over de breedte van een ligger of een ongelijke steunpuntszetting kan leiden tot een wringend moment. Hierdoor ontstaan schuifspanningen in het vlak van de doorsnede. Deze kunnen optreden omdat een ligger een bepaalde mate van wringstijfheid bezit. Deze stijfheid is afhankelijk van de glijdingsmodulus van het materiaal en het wringtraagheidsmoment van de doorsnede. In formulevorm ziet dat er als volgt uit:

$$GI_w = \frac{M_w l}{\varphi}$$


The diagram shows a 3D perspective of a rectangular beam of length l . At each end, a curved arrow indicates a twisting moment M_w . The right end of the beam is rotated relative to the left end by an angle φ , which is shown as the angle between the original vertical axis and the new position of the end face.

Figuur 1. Vervorming van een ligger door een wringmoment [1]

Voor enkele eenvoudige doorsnedevormen is de spanningsverdeling relatief gemakkelijk te berekenen. Er bestaan namelijk simpele (benaderings)formules voor bijvoorbeeld ronde, driehoekige en dunwandige doorsneden. Een andere manier om schuifspanningen door wringing te bepalen, is door de methode der eindige elementen te gebruiken. De doorsnede wordt hierbij opgedeeld in een groot aantal elementjes, waarbij voor elk afzonderlijk element en de relatie tussen de elementen vergelijkingen worden opgesteld.



Figuur 2. Elementennet van een doorsnede

In dit hoofdstuk worden bestaande formules voor wringing vergeleken met de uitkomsten die voortkomen uit de eindige elementenmethode (EEM). Het programma SCIA ESA-PT [3]

maakt gebruik van deze manier van rekenen. Het levert zo de spanningsverdeling en het wringtraagheidsmoment. Er zal een drietal doorsneden behandeld worden waarbij uit is gegaan van de volgende punten.

- De netgrootte van de elementen, gebruikt door ESA-PT, is klein genoeg
- Welving kan ongehinderd optreden (welving zal behandeld worden in hoofdstuk 3)

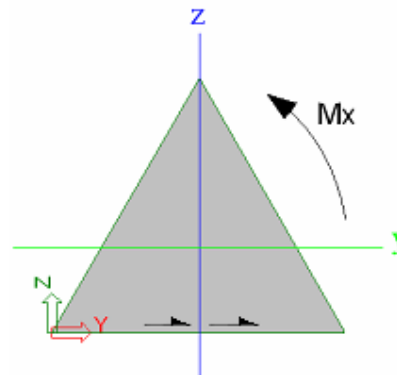
2.2 Massieve gelijkzijdige driehoek

Voor de massieve driehoekige gelijkzijdige doorsnede kunnen de differentiaalvergelijkingen volgens de theorie van 'De Saint Venant' (bijlage B) analytisch worden opgelost. Deze exacte formules voor een aantal doorsnedegrootheden zijn weergegeven in bijlage C. Als voorbeeld wordt $a = 100 \text{ mm}$ gebruikt. Voor het wringtraagheidsmoment en de maximale wringschuifspanning zijn de volgende waarden gevonden:

- $I_w = 3,12 \text{ E}+8 \text{ mm}^4$
- $\tau_{\max} = 4,81 \text{ E}-4 \text{ N/mm}^2$

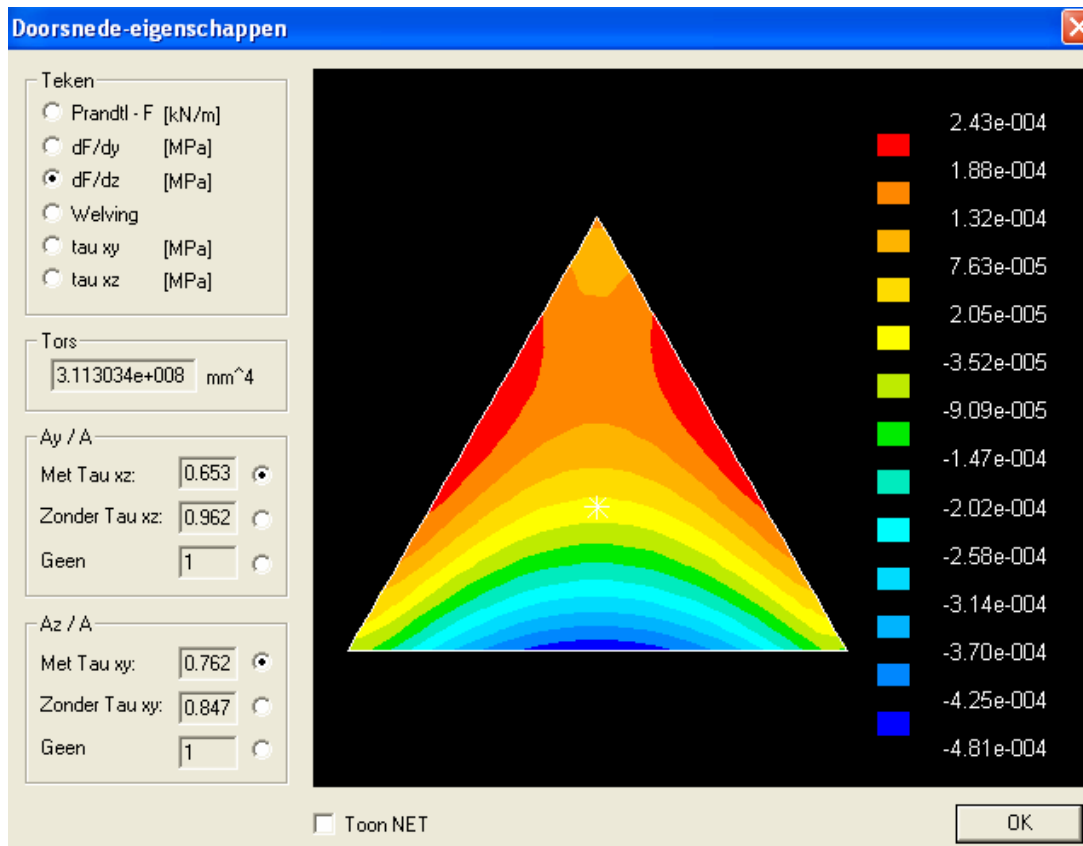
Bij de berekening van de maximale wringspanning is uitgegaan van een wringmoment ter waarde van 1.00 Nm . Dit is ook het moment dat ESA-PT gebruikt voor het berekenen van de spanningsverdeling in de doorsnede. Bij de invoer in het computerprogramma zijn de volgende gegevens gebruikt:

- zijde = $200\sqrt{3} \text{ mm}$
- hoogte = 300 mm
- netgrootte = 1 mm



Figuur 3. Assenstelsel

De berekening volgens de eindige-elementenmethode levert de resultaten weergegeven in figuur 4. Te zien is dat het wringtraagheidsmoment volgens ESA-PT ($I_w = 3,11 \text{ E}+8 \text{ mm}^4$) minimaal verschilt met de exacte oplossing. De maximale wringschuifspanning treedt op in de y -richting ter plaatse van het midden van de onderzijde van de doorsnede. Langs de twee schuine zijdes is deze spanning uiteraard ook aanwezig, echter alleen in die specifieke richting. Het resultaat van $-4,81 \text{ E}-4 \text{ MPa}$ is exact gelijk aan de waarde uit de analytische oplossing. Het min-teken geeft de richting van de schuifspanning aan. Bij een positief moment M_x met het gegeven assenstelsel (zie figuur 3) lopen de door de doorsnede te leveren schuifspanningen in de negatieve y -richting.



Figuur 4. Schuifspanningen in de y-richting van de doorsnede

De uitkomsten van ESA PT wijken dermate weinig af van de exacte oplossingen zodat gesteld kan worden dat de netgrootte voldoende klein is en de uitgevoerde EEM-berekening voldoet voor de massieve driehoekige gelijkzijdige doorsnede. Er kunnen nu andere doorsneden worden bekeken volgens hetzelfde concept.

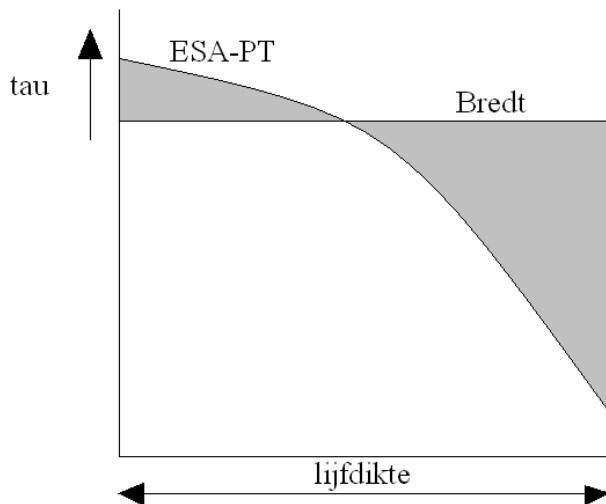
2.3 Koker

De benaderingsformules van Bredt (bijlage D) voor dunwandige ééncellige kokers kunnen vergeleken worden met een eindige-elementenmethode berekening van ESA-PT. Bredt gaat uit van een constante wringschuifspanning over de gehele dikte van het lijf of de flens van de koker. In werkelijkheid varieert de spanning over de flens- of lijfdikte iets. Voor de koker zijn afmetingen gekozen van 200 mm voor de hoogte en de breedte en 20 mm voor de dikte. Bij een verhouding tussen de hoogte en de dikte van 10:1 is de doorsnede eigenlijk niet meer dunwandig te noemen. De formules van Bredt leveren bij een wringmoment van 1 Nm de volgende waarden op:

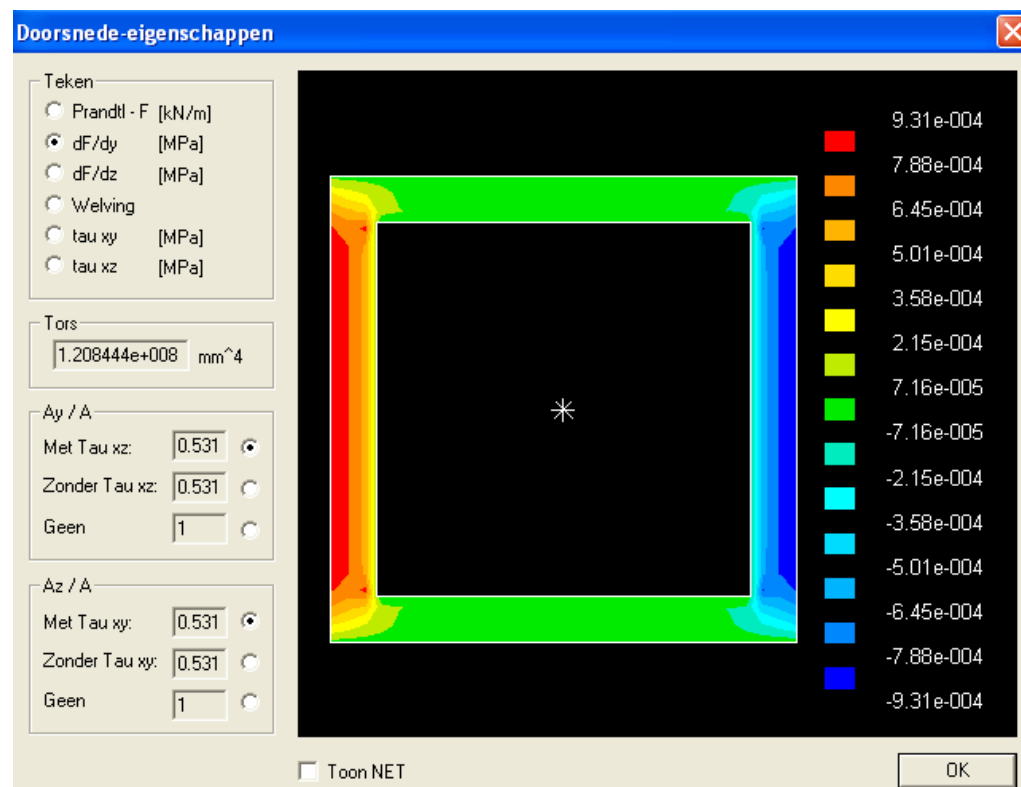
- $I_w = 1,17 \text{ E}+8 \text{ mm}^4$
- $\tau_{\max} = 7,72 \text{ E}-4 \text{ N/mm}$

De grootste wringschuifspanning van $7,72 \text{ E}-4 \text{ N/mm}^2$ treedt op in het element met de kleinste dikte omdat de constante schuifstroom immers 'uitgesmeerd' wordt over een kleinere dikte. De berekeningen volgens de eindige-elementenmethode door ESA-PT laten een geleidelijk

verloop zien over de dikte van de koker (figuur 6). Er zijn bij de invoer van de doorsnede geen afrondingsbogen gebruikt. Aan de buitenrand bedraagt de spanning $9,31 \text{ E-4 N/mm}^2$ en deze loopt met toenemende snelheid af naar $7,16 \text{ E-5 N/mm}^2$ bij de binnenrand. Integratie van de schuifspanning over de dikte levert de schuifstroom op en deze komt niet goed overeen met de schuifstroom volgens Bredt (figuur 5). De resultaten in ESA-PT zijn echter dusdanig klein geprojecteerd, dat met het blote oog aflezen erg onnauwkeurige waarden geeft.

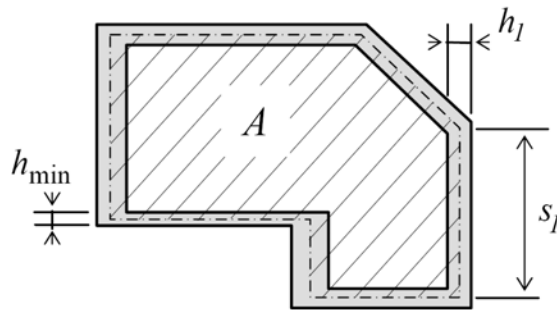


Figuur 5. Integratie van de schuifspanning over de dikte



Figuur 6. Schuifspanningen in de z-richting van de doorsnede

Het wringtraagheidsmoment bedraagt $1,21 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$. Met een afwijking van 3% wat betreft dit moment is 'Bredt' dus erg nauwkeurig. Het verschil zit hem in de bijdrage van de hoeken van de doorsnede omdat er uit wordt gegaan van hartlijnen in combinatie met dunwandigheid (zie figuur 7).



Figuur 7. Formules van Bredt

2.4 Brugligger

Een veel toegepaste doorsnedeform voor brugliggers is een vorm waarbij het wegdek en een kokerdoorsnede geïntegreerd zijn. Aan beide kanten bevindt zich een uitkraging waar - door een asymmetrische verkeersbelasting - een grote excentriciteit kan ontstaan. Het gevolg is een groot wringend moment dat eigenlijk alleen door een gesloten koker efficient kan worden opgenomen.



Figuur 8. Voorbeeld van een betonnen kokerbrug

De afmetingen en vorm kunnen erg variëren. Voor de berekening wordt voorlopig uitgegaan van de volgende doorsnede:

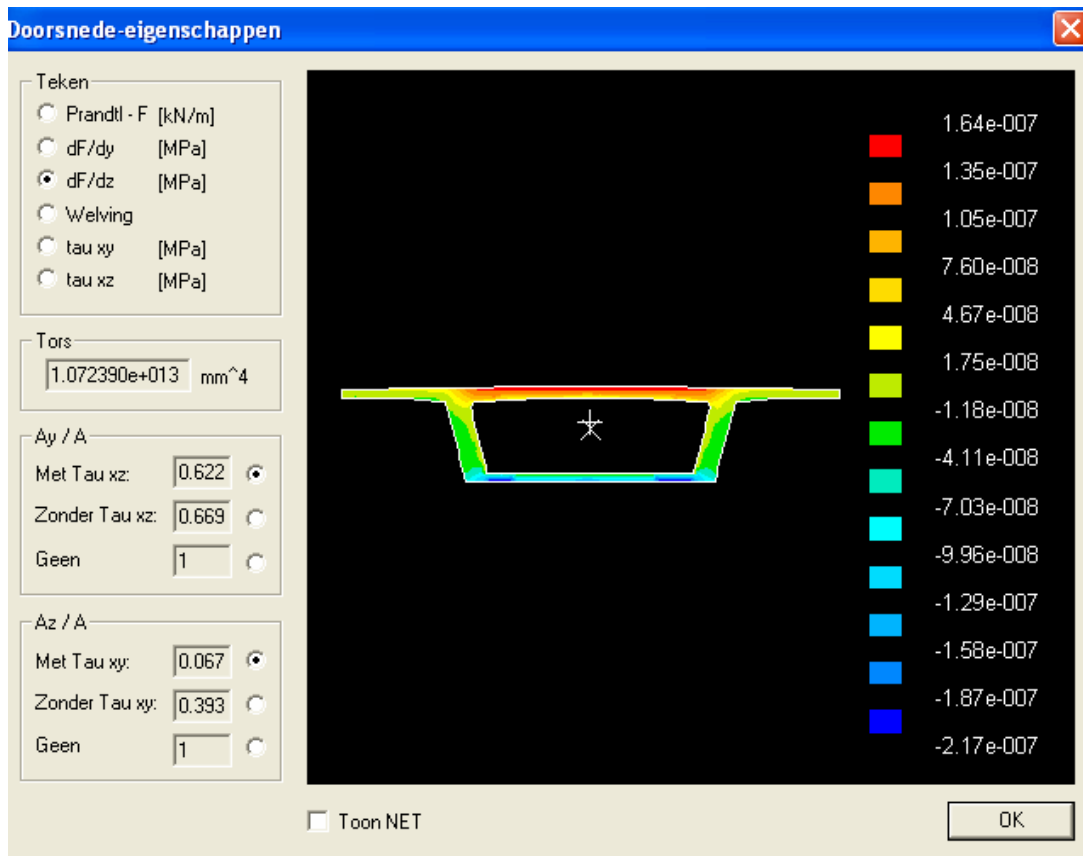
- hoogte = 2300 mm
- breedte = 12000 mm (bovenflens) en 6000 mm (koker)
- dikte onderflens = 200 mm
- dikte bovenflens = verlopend van 200 mm (uiteinden) naar 300 mm (hartlijn)
- lijfbreedte = 500 mm

Exacte coördinaten zijn te vinden in bijlage E. De verhouding tussen de hoogte/breedte en de dikte zijn groter dan 10:1. Dit profiel is dus dunwandiger dan de koker uit de vorige paragraaf. De uitkragingen hebben een verwaarloosbaar aandeel in de weerstand tegen wringing. Door het niet-meenemen van deze uitkragingen in de formules van Bredt zijn daarom toch kleine verschillen te verwachten met een eindige-elementenmethode berekening. De ingesloten oppervlakte tussen de hartlijnen is 12,1 m² groot. Invullen levert:

- $I_w = 9,679 \text{ E}+12 \text{ mm}^4$
- $\tau_{\max} = 2,062 \text{ E}-7 \text{ N/mm}^2$

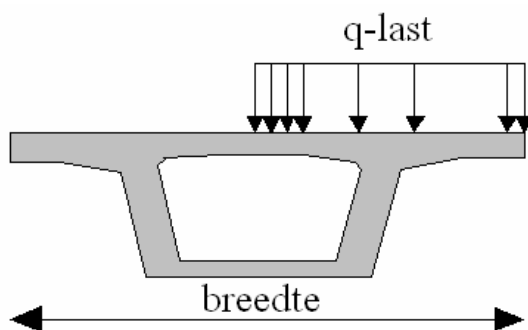
Figuur 9 geeft het wringtraagheidsmoment en de maximale wringspanningen volgens ESA-PT weer. Een wringtraagheidsmoment van 1,07 E+13 mm⁴ betekent dat 'Bredt' een 'acceptabele' 10% afwijkt. Voor de wringschuifspanning blijkt 'Bredt' ook een aardige benadering te geven; het verschil bedraagt hier slechts 5%. De maximale spanning van 2,17 E-7 N/mm² werkt in de onderflens.

Een kanttekening bij deze berekeningen is hier zeker op zijn plaats. De gekozen afmetingen corresponderen met een voorgespannen brugligger van beton. Vaak wordt er door de opdrachtgever geëist dat er geen scheuren in het beton ontstaan. In deze situatie zijn de voorgaande berekeningen geldig. Echter is het praktisch gezien onmogelijk om de ligger in meerdere richtingen voor te spannen. Daardoor ontstaan er door trek altijd wel kleine scheurtjes in het beton naast de krimpscheurtjes. Dit heeft negatieve gevolgen voor de wringstijfheid. Ook wordt de schuifstroom verdeeld over een kleinere breedte wat een verhoging van de schuifspanningen betekent. In dit onderzoek is volledig ongescheurd beton dus een belangrijk uitgangspunt, wat niet over het hoofd gezien dient te worden. De wringcapaciteit van de brugligger wordt in dit geval licht overschat.



Figuur 9. Schuifspanningen in de y-richting van de doorsnede

Een simpele handberekening tekening geeft een goede indicatie van de grootte van de schuifspanningen door wringing bij een brug. De spanningen uit de EEM-berekening kunnen worden vermenigvuldigd met het moment in Nm omdat ESA-PT een wringend moment gebruikt van 1,00 Nm en deze recht-evenredig in de formule van de wringspanning voorkomt.



Figuur 10. Plaatsing q-last op de kokerbrug

Gegevens:

- voorgespannen beton B65
- gelijkmatig verdeelde belasting $q = 5,5 \text{ kN/m}^2$
- lengte van de overspanning $l = 50 \text{ m}$
- belastingfactor $\gamma = 1,5$

Berekeningen:

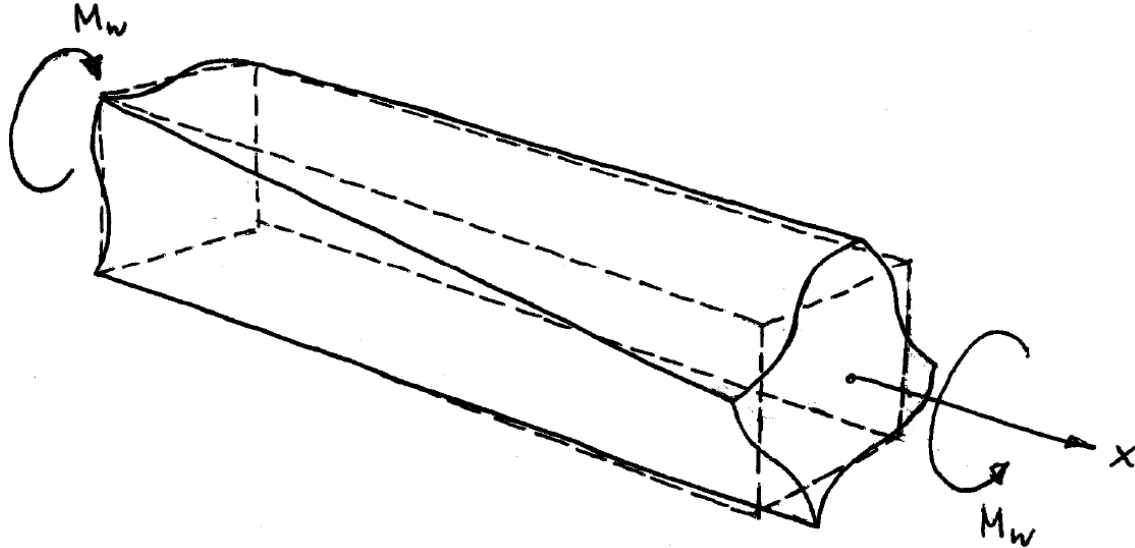
- $M_w = \gamma * q * \frac{b}{2} * \frac{l}{2} * \frac{b}{4} = 1,5 * 5,5 * \frac{12}{2} * \frac{50}{2} * \frac{12}{4} = 3,7 \text{ E}+3 \text{ kNm}$
- Maximale spanning $\tau_{\max} = 2,17 \text{ e-7} * 3,7 \text{ e}+6 = 0,81 \text{ N/mm}^2$

Volgens NEN 6720 kan beton met kwaliteit B65 een maximale schuifspanning ondergaan van $0,4 * f_b = 0,4 * 2,15 = 0,86 \text{ N/mm}^2$. Dit betekent dat naast afschuifspanning wringspanning ook een serieuze rol speelt bij de dimensionering van de wapening van brugliggers.

3 Welving

3.1 Inleiding

Als een ligger op wringing wordt belast, zullen de doorsneden willen welven. Welving is de vervorming loodrecht op een initieel vlakke doorsnede. Bij een inklemming wordt deze vervorming verhinderd wat resulteert in normaalspanningen. Hier ontstaan ook afwijkingen op de ideale wringtheorie. De wringspanningen berekend in hoofdstuk 2 treden namelijk alleen op als de welving ongehinderd kan optreden. De welvingstijfheid is een maat voor de krachten die nodig zijn om welving te verminderen.



Figuur 11. Welving van een vierkante doorsnede door wringing [1]

In formules voor kipberekeningen en wringberekeningen komt de welvingstijfheid van de profieldoorsnede voor. Traditioneel wordt de welvingstijfheid alleen in rekening gebracht voor dunwandige doorsneden. Hiervoor zijn tabellen opgesteld met veel voorkomende dunwandige profielen. Dit scheelt de constructeur veel werk bij het doorrekenen van verschillende constructie-elementen.

Voor dunwandige gesloten doorsneden – zoals kokerliggers – zijn de spanningen door verhinderde welving niet verwaarloosbaar zoals eerder werd gedacht. Jammer genoeg ontbreken simpele ontwerpformules voor deze minder voorkomende doorsneden. Voor deze gevallen kan de welvingstijfheid worden berekend met de eindige elementenmethode. In dit hoofdstuk zal daarom gekeken worden naar de invloed van welving op verschillende doorsnede-afmetingen van kokerbruggen.

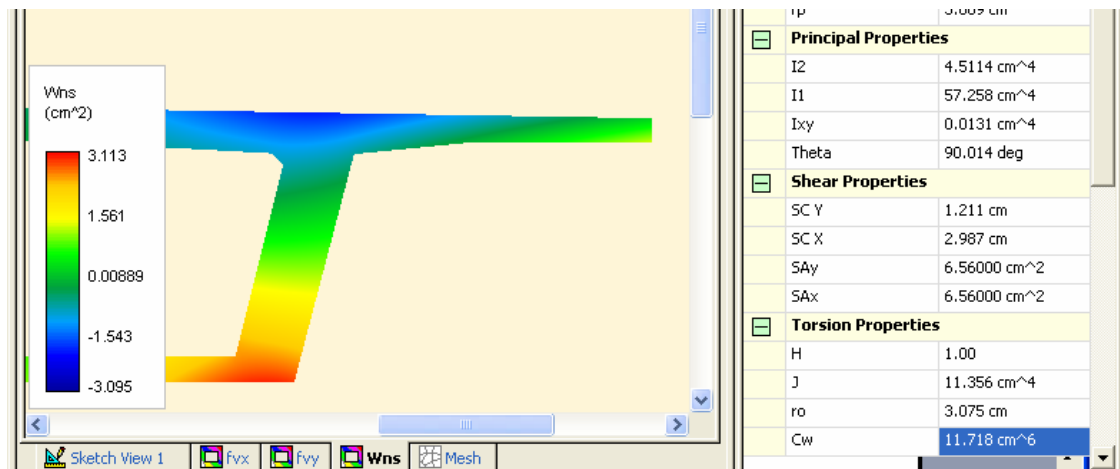
3.2 Welvingsconstante

De stijfheid van een profiel tegen welven is afhankelijk van de elasticiteitsmodulus van het materiaal en een constante die bepaald wordt door de vorm van de doorsnede. Deze constante wordt de welvingsconstante genoemd en heeft als eenheid m^6 . Het wordt verkregen door de gekwadeerde welvingsfunctie $\psi(y,z)$ te integreren over de oppervlakte van de doorsnede. Deze functie wordt gedefiniëerd in de theorie van De Saint Venant (bijlage B).

$$C_w = \int_A \psi^2 dA$$

Aangezien een programma als ESA PT de berekening van deze constante niet uitvoert, blijkt dat dit een redelijk complexe doorsnedegrootheid is. Hiervoor wordt het programma ShapeBuilder [4] gebruikt. ShapeBuilder berekent geometrische doorsnede-grootheden waaronder het gedrag bij wringing. De invoer van doorsneden gebeurt echter bij afmetingen in de orde van een honderdste van de brugligger. Als dit niet gebeurt, geeft ShapeBuilder namelijk een foutmelding bij de uitkomst van de welvingsconstante.

Als eerste wordt geprobeerd de welvingsconstante te berekenen van de doorsnede uit paragraaf 2.4. De mesh-size factor komt uit op 0,01 na een aantal keer verfijnen van het elementennet. Het programma geeft de welvingsconstante en andere resultaten na ongeveer 20 seconden.



Figuur 12. Screenshot berekening welvingsconstante

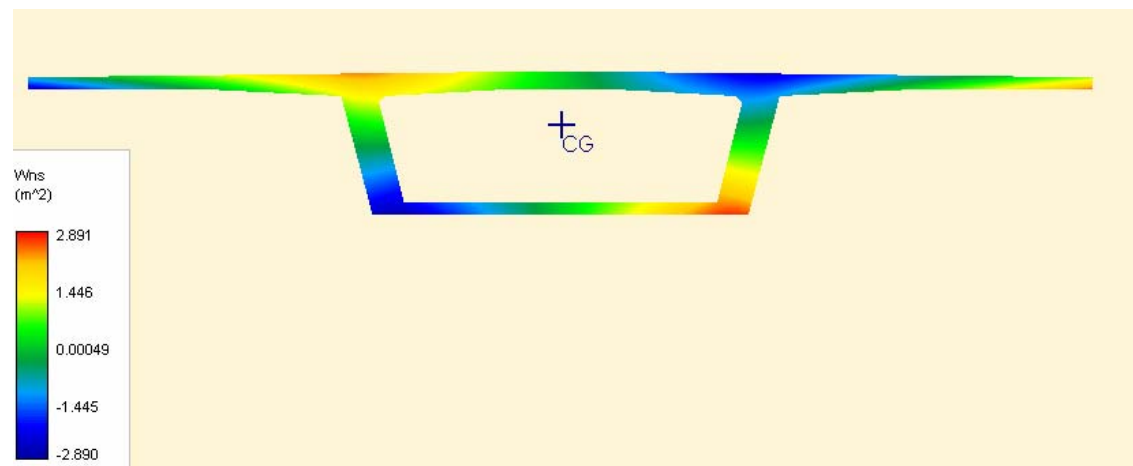
Van links naar rechts zien we achtereenvolgens de variatie van de welvingsfunctie ψ , de verdeling daarvan over de doorsnede en een deel van de lijst met doorsnedegrootheden waaronder het wringtraagheidsmoment (J) en de welvingsconstante (C_w). De eenheid correspondeert uiteraard met de invoer van de doorsnede. De resultaten komen dan dus uit op $\psi_{\max} = 3,113 \text{ m}^2$ (rode hoek) en $C_w = 11,718 \text{ m}^6$. Bij een oppervlakte van $6,56 \text{ m}^2$ komt de gemiddelde welving uit op:

$$\psi_{\text{gem}} = \sqrt{\frac{11,78}{6,56}} = 1,34 \text{ m}^2$$

Aangezien dit een aannemelijke waarde is gezien de variatie en de verdeling van de welving, bevestigt deze controle naar alle waarschijnlijkheid de berekening van de welvingsconstante. Er liggen twee even grote maxima onderin de hoeken van de onderflens. Deze zijn tegengesteld gericht, te zien aan de kleur en het minteken. Ook boven de lijven neemt de welvingsfunctie twee even grote waarden aan met verschillend teken. Deze toppen in de welvingsfunctie zijn echter lokaal en treden op boven het tegengesteld gerichte maximum (figuur 12). Er kan nu onderzocht worden wat de invloed is van veranderingen in vorm en afmetingen op de welvingsconstante. Daartoe onderscheiden we vier aspecten van de kokerdoorsnede; de uitkragingen, de breedte van de koker, de hoogte van de doorsnede en de

dikte van de lijven/fenzen. Per aspect is gekozen voor een logische en makkelijk hanteerbare parameter/variabele.

De uitkragingen lijken op het eerste gezicht weinig invloed te hebben op de welvingsconstante. Beide maxima liggen immers onderin de koker (rode hoek). Toch bereikt de welvingsfunctie bij het hoekpunt van de uitkraging een lokaal maximum. Bij het vergroten van de uitkraging tot 5 meter blijkt dit bovendien snel op te lopen. De gegevens zijn weergegeven in tabel 1.



Figuur 13. Welving van doorsnede met grootste uitkraging

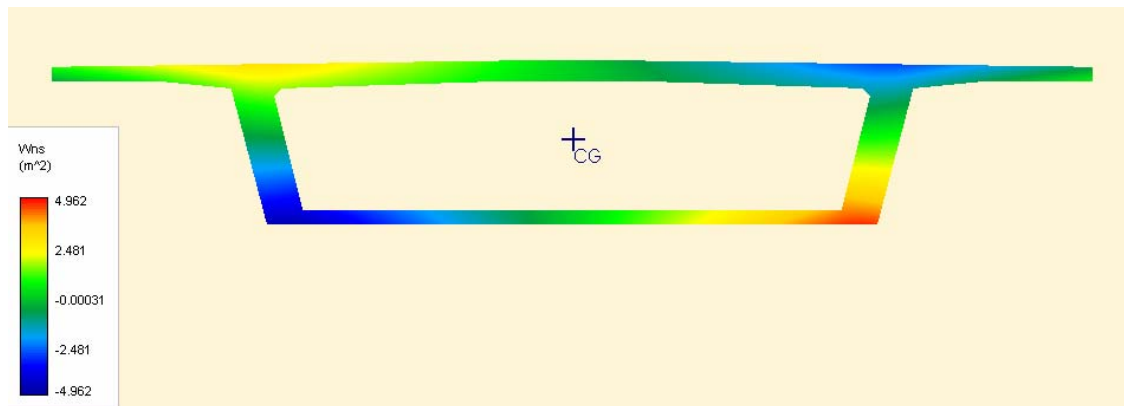
uitkraging (m)	$\psi_{\max}$ (m ²)	C_w (m ⁶)	I_w (m ⁴)
0.000	2.830	9.775	10.877
0.500	2.970	10.60	10.999
1.000	3.073	11.04	11.093
1.500	3.128	11.30	11.162
2.000	3.151	11.44	11.221
2.500	3.146	11.64	11.275
3.000	3.117	11.91	11.305
3.500	3.073	12.34	11.361
4.000	3.018	12.92	11.396
4.500	2.957	13.67	11.429
5.000	2.891	14.54	11.463

Tabel 1. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie uitkraging

Te zien is dat de maximale welving -gevarieerd over de lengte van de uitkraging- een maximum heeft bij twee meter. Vergroten of verkleinen betekent meer spreiding van de welving over de doorsnede. Verder moet opgemerkt worden dat bij een verhouding tussen de lengte van de uitkraging en de breedte van de koker van 1:1 beide maxima zich verplaatsen naar het uiterste puntje van de uitkraging. Dit valt echter buiten de scope van het onderzoek omdat deze afmetingen eigenlijk niet reëel zijn voor een brugligger. De koker is immers het belangrijkste onderdeel van de doorsnede. Bij het constant houden van de uitkraging kan de invloed van de breedte van de koker 'b_box' worden onderzocht. Deze parameter is gedefinieerd als de gemiddelde afstand tussen de hartlijnen van de lijven van de koker. Dit levert de volgende resultaten op.

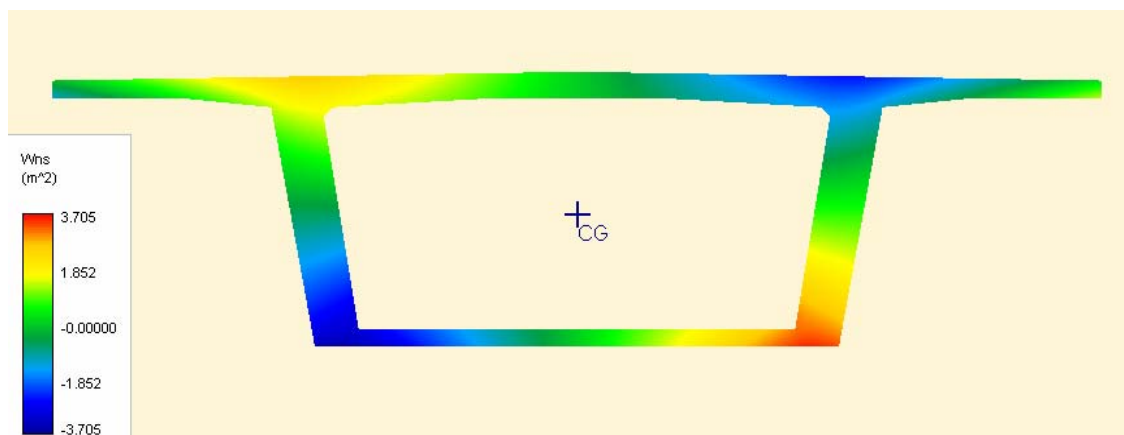
b_box (m)	$\psi_{\max}$ (m2)	C_w (m6)	I_w (m4)
3.500	1.684	3.424	7.349
4.000	2.049	4.898	8.319
4.500	2.413	6.769	9.305
5.000	2.779	9.073	10.291
5.500	3.146	11.640	11.275
6.000	3.513	15.126	12.260
6.500	3.877	18.935	13.241
7.000	4.240	23.307	14.223
7.500	4.602	28.283	15.206
8.000	4.961	33.880	16.187

Tabel 2. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie b_box



Figuur 14. Welving van de breedste doorsnede

Uit de gegevens blijkt dat een kokerligger welvingsstijver wordt naarmate de breedte van de koker zelf toeneemt. Dit effect is een stuk sterker dan bij de uitkraging. De verdeling van de welvingsfunctie over de doorsnede verandert nauwelijks. Als derde wordt de totale hoogte van de doorsnede behandeld. Dit aspect wordt verwacht een vergelijkbare invloed te hebben op de welving als de breedte van de koker. Bij de invoer wordt alles constant gehouden behalve de hoogte van de lijven. De hoogste doorsnede ziet er als volgt uit.

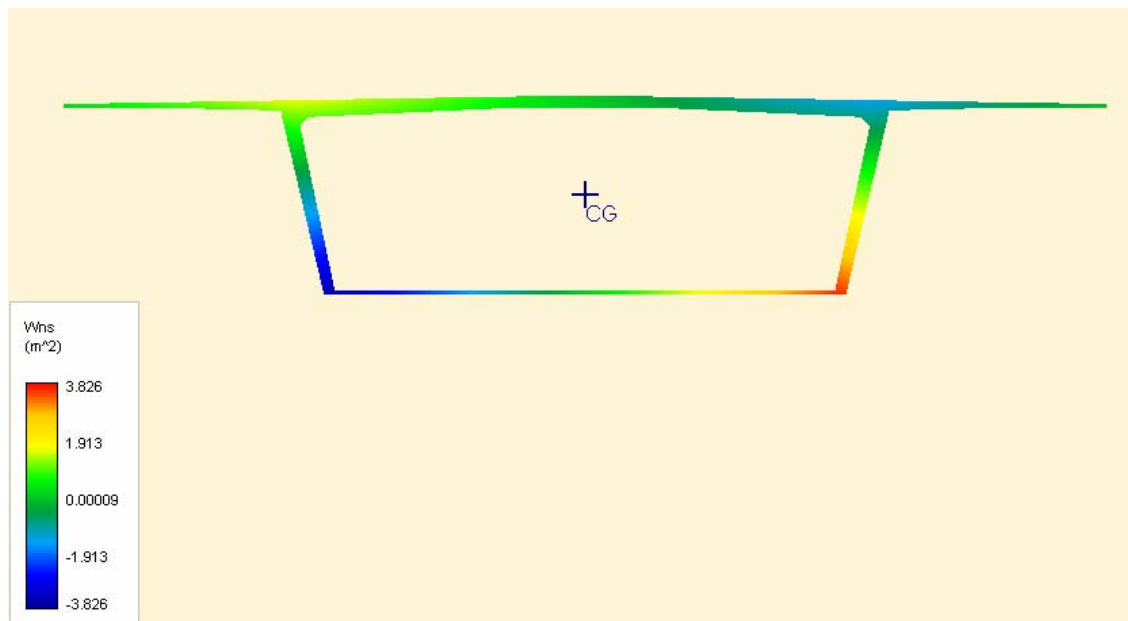


Figuur 15. Welving van de hoogste doorsnede

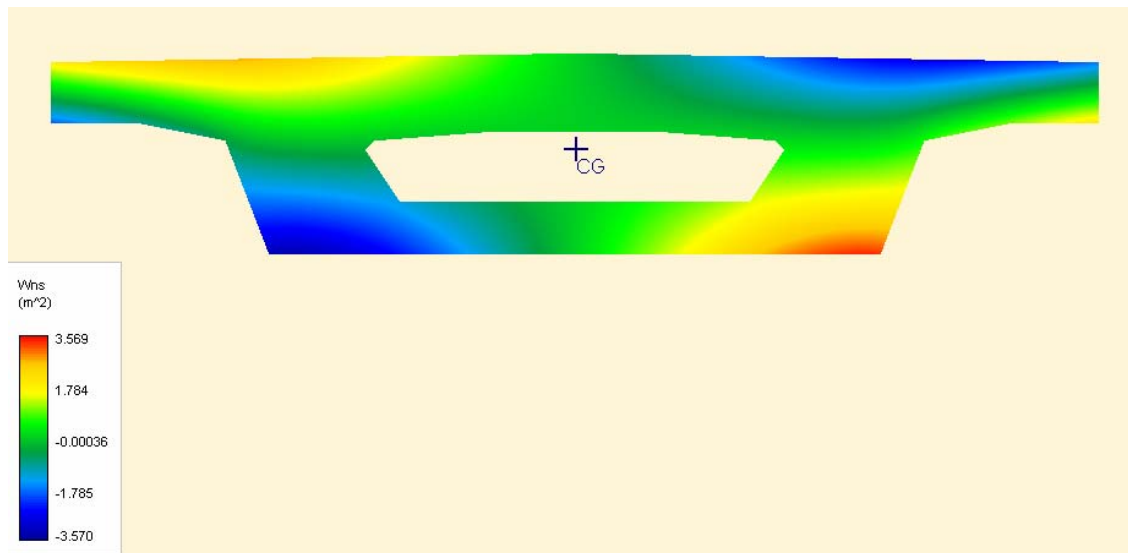
hoogte (m)	$\psi_{\max}$ (m2)	Cw (m6)	Iw (m4)
1.300	2.068	3.346	3.1654
1.500	2.325	4.697	4.4193
1.700	2.557	6.241	5.8655
1.900	2.772	7.951	7.4953
2.100	2.969	9.802	9.3009
2.300	3.146	11.64	11.275
2.500	3.310	13.83	13.411
2.700	3.459	15.95	15.700
2.900	3.593	18.11	18.138
3.100	3.711	20.29	20.717

Tabel 3. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie hoogte

Opvallend is dat het wringtraagheidsmoment hard groeit bij een toename van de hoogte van de doorsnede. Gezien de formule van Bredt is dit ook logisch omdat het ingesloten oppervlak sneller groter wordt dan bij variatie van de breedte. Het materiaal komt zo dus meer aan de buitenkanten te liggen. Het vierde aspect van de doorsnede is de dikte van de lijven en de flenzen. We stellen hierbij de diktes van de originele brugligger 1.0 en vergroten de dikte tot een factor 3.0. De kleinste doorsnede is veer keer zo smal, wat eigenlijk niet meer realistisch is voor een voorgespannen ligger. Eventueel biedt hogesterktebeton uitkomst in de toekomst. Dit ziet er als volgt uit:



Figuur 16. Welving van de dunste doorsnede



Figuur 17. Welving van de dikste doorsnede

diktefactor	$\psi_{\max}$ (m ²)	C_w (m ⁶)	I_w (m ⁴)
0.25	3.826	5.35	4.112
0.50	3.491	7.81	7.074
0.75	3.292	9.77	8.987
1.00	3.146	11.64	11.275
1.50	3.193	17.93	15.546
2.00	3.289	22.82	19.100
2.50	3.426	27.85	22.045
3.00	3.569	34.32	24.670

Tabel 4. Verandering $\psi_{\max}$, C_w en I_w door variatie dikte

Net als bij de uitkragingen lijkt het erop dat de maximale welving nauwelijks wordt beïnvloed door de dikte van de doorsnede. Een hypothese zou kunnen zijn dat de vorm van de koker dus een grote rol speelt bij welving en de (kleine) uitkragingen samen met de dikte weinig uitmaken. De welvingsconstante stijgt uiteraard bij het groter worden van de oppervlakte.

Zinvolle conclusies zijn nog niet te trekken uit de geleverde resultaten. De welvingsconstante en daarmee de welvingsstijfheid worden groter naarmate de uitkragingen, de breedte, de hoogte of de dikte groter worden. Dit klinkt vrij logisch omdat de ligger dan immers ook steviger oogt tegen een wringend moment. Om te kunnen kijken naar spanningen in de doorsnede, is meer kennis vereist van de welvingtheorie.

3.3 Bi-moment

De wringspanningen berekend in hoofdstuk 2 gelden alleen bij het uitgangspunt dat de welving ongehinderd kan optreden. De wringstijfheid bestaat dan uit de glijdingsmodulus en het berekend wringtraagheidsmoment. In de constructiepraktijk komt dit echter zelden voor. Daardoor ontstaan afwijkingen op de ideale wringtheorie. Dit vindt plaats bij opleggingen, daar waar wringmomenten aangrijpen en daar waar de doorsnede verandert. Bij een inklemming wordt de welving volledig verhinderd en vervangt het polair traagheidsmoment (I_p) het wringtraagheidsmoment (I_w). Vooral dunwandige doorsneden zijn gevoelig voor gehinderde welving. Normalspanningen door welving in een I-profiel worden beschreven volgens de volgende formule.

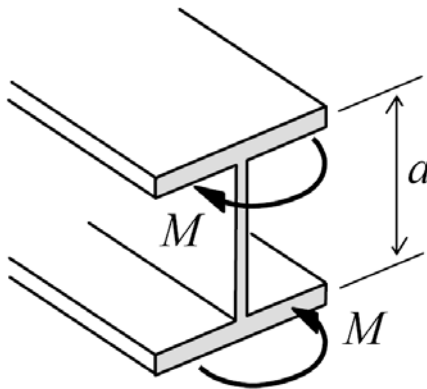
$$\sigma_{xx, \max} = \frac{B}{\frac{1}{6}(h-t)tb^2}$$

Hierin is B het zogenaamde bi-moment in de doorsnede, h de hoogte van het profiel, b de breedte van het profiel en t de dikte van de flenzen. De maximale spanning treedt op aan de randen van de flenzen. Een formule als deze zou erg welkom zijn op het gebied van kokerbruggen. Er zal dan ook geprobeerd worden om naar een dergelijke formule toe te werken. Het bi-moment is echter een term die in deze context om uitleg vraagt.

In 1940 ontwikkelde V.Z. Vlasov een wringtheorie waarin gehinderde welving is verwerkt. In deze theorie is de specifieke verwringing θ niet constant langs de x -as, wat bij 'De Saint Venant' (bijlage B) wel het geval was. Daarom wordt er ook wel gesproken over de uniforme en de niet-uniforme theorie. Vlasov kwam tot de volgende uitdrukking voor het bi-moment.

$$B = -\int \sigma_{xx} \psi dA$$

Dit ontstaat in een doorsnede wanneer welving gehinderd wordt. Het heeft de ongebruikelijke eenheid Nm^2 . Voor I-profielen kan het bi-moment duidelijk worden geïnterpreteerd. In figuur 18 stelt het moment M in elk van de flenzen maal hun onderlinge afstand 'a' het bi-moment voor.



Figuur 18. Interpretatie van het bi-moment

Bij gegeven doorsnedegrootheden en elasticiteitsmodulus kan het bi-moment berekend worden met de volgende formule. Griekse letter ϕ is nog steeds de hoekverdraaiing van een doorsnede uit een ligger. De Vlasov-theorie reduceert tot de theorie van 'De Saint Venant' als de welvingssijfheid nul of de welving vrij is ($B = 0$).

$$B = -EC_w \frac{d^2 \phi}{dx^2}$$

De voorbeeldberekening van de brugligger uit paragraaf 2.4 kan doorgetrokken worden naar welvingsspanningen. Exacte coördinaten van de invoer zijn te vinden in bijlage E. Benodigde formule daarbij is als volgt:

$$\sigma_{xx} = \frac{B}{C_w} \psi$$

Bij een gegeven welvingsconstante en een optredend bi-moment in de doorsnede hoort de maximale spanning bij de maximale welving. De grootte en de plaats hiervan is onderzocht in de vorige paragraaf. De berekening van het bi-moment vereist nog veel aandacht. In 'Roark's Formulas for Stress & Strain' [2] zijn uitwerkingen gegeven voor uniforme dunwandige liggers bij torsiebelasting (bijlage G). Om een indicatie te krijgen van de grootte van deze welvingsspanningen wordt met behulp van voorgaande formules een berekening uitgevoerd.

Voor de berekening van het bi-moment is de relatie tussen de elasticiteitsmodulus en de glijdingsmodulus van het materiaal een vereiste. Voor een homogeen en isotroop materiaal geldt onderstaande uitdrukking. Aangezien beton niet homogeen is en door de wapening de sterkte afhankelijk is van de richting, brengt een aanname als deze grote onnauwkeurigheid met zich mee. Toch zal deze uitdrukking voor de verhouding tussen de glijdingsmodulus en de elasticiteitsmodulus worden gebruikt.

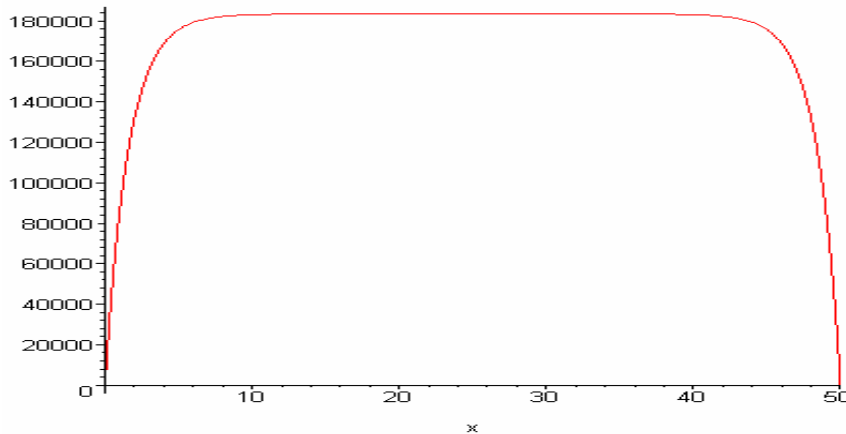
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Gegevens:

- voorgespannen beton B65
- dwarscontractiecoëfficiënt $\nu = 0,2$
- lengte van de overspanning $l = 50 \text{ m}$
- wringend moment $M_w = 3,7 \text{ E}+3 \text{ kNm}$
- wringtraagheidsmoment $I_w = 11,275 \text{ m}^4$ (paragraaf 2.4)
- welvingsconstante $C_w = 11,64 \text{ m}^6$
- beide uiteinden welven maar roteren niet (geval 2e in bijlage G)

Berekeningen:

- wringend moment per eenheid van lengte $t_0 = M_w / l = M_w / 50 = 74000 \text{ Nm} / \text{m}$
- verhouding $\frac{E}{G} = 2(1+\nu) = 2(1+0,2) = 2,4$
- dimensieloze factor $\beta = \sqrt{\frac{I_w * G}{C_w * E}} = \sqrt{\frac{11,275}{11,64 * 2,4}} = 0,64$
- bi-moment $B(x) = -EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{t_0}{\beta^2} \left[\frac{\cosh \beta(x-l/2)}{\cosh \beta l / 2} - 1 \right]$



Figuur 19. Verloop van het bi-moment in een kokerbrug

- maximale bi-moment $B_{\max} = -EC_w \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{t_0}{\beta^2} \left[\frac{1}{\cosh \beta l / 2} - 1 \right] = 183349 \text{ Nm}^2$
- maximale spanning $\sigma_{xx, \max} = \frac{B}{C_w} \psi_{\max} = \frac{183349}{11,64} 3,146 = 49555 \text{ N / m}^2$

De orde-grootte van de normaalspanningen in een standaard brugligger vallen dus binnen $0,1 \text{ N/mm}^2$. Dit is ten opzichte van de rekenwaarde van de trekspanning van beton (B65) van 2.15 N/mm^2 erg klein, namelijk maar enkele procenten. De berekening is uitgevoerd bij elke verandering van de uitkraging, breedte, hoogte en dikte van de doorsnede. Omdat aan de uitkomsten weinig waarde gehecht kan worden door de grove aanname, zijn ze niet in dit verslag opgenomen. Wel is duidelijk geworden dat bij het verkleinen van de dikte de spanningen exponentieel groeien. Dit is ook de reden dat bij staalconstructies veel meer aandacht wordt geschonken aan het fenomeen welving. Daarnaast heeft de hoogte van een brugligger een behoorlijke invloed op de welvingsspanningen. Bij het kleiner worden van de hoogte stijgen de welvingsspanningen steeds sneller. Verder zijn middelgrote uitkragingen en brede kokers de voorwaarden voor een toename van de normaalspanningen door welving.

In de formule voor welvingsspanning is dus het bi-moment de onzekere factor. Een mogelijkheid zou kunnen zijn het nader onderzoek verrichten naar de glijdingsmodulus van beton. Er kan dan een zekere marge kunnen worden gekozen waarbinnen het bi-moment zich bevindt. In dit onderzoek is hier niet verder op ingegaan. De verhouding tussen de welvingsconstante en de maximale welving wordt belangrijker geacht, ook omdat dit meer als doel gesteld werd vooraf. Vergelijking van onderstaande formules geeft inzicht in de manier waarop doorsnede-eigenschappen van kokerliggers in de berekening voor welvingsspanningen kunnen worden ingepast. De grootte van de verhouding $C_w/\psi_{\max}$ zal uitgedrukt moeten worden in de uitkraging, breedte, hoogte en dikte van de brugligger net zoals $1/6(h-t)tb^2$ dat voor een I-profiel doet. Met andere woorden; deze variabelen dienen te worden verwerkt in een formule voor $C_w/\psi_{\max}$ en daarmee dus in een formule voor maximale welvingsspanningen.

$$\sigma_{xx, \max} = \frac{B}{\frac{1}{6}(h-t)tb^2} \quad \sigma_{xx, \max} = \frac{B}{C_w / \psi_{\max}}$$

4 Formule voor welvingsspanning

4.1 Inleiding

Een formule opstellen waarbij de uitkomst afhankelijk is van één á twee variabelen, lukt de meeste curve-fitting programma's nog wel. In dit geval zijn er vier variabelen wat een niet-reële grafiek oplevert. Het computerprogramma DataFit [5] is hiervoor zeer geschikt. Dit zijn de voor-de-hand-liggende parameters gekozen in paragraaf 3.2.

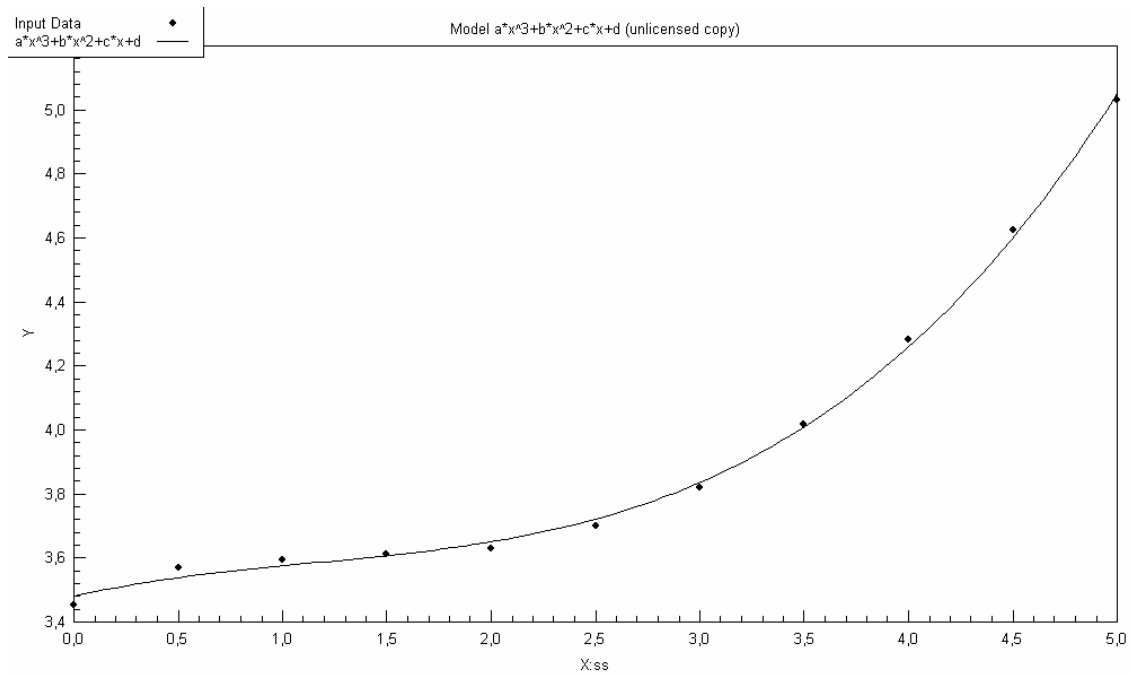
- lengte van de uitkragingen $u(m)$
- gemiddelde breedte van de koker $b_{box}(m)$
- totale hoogte van de doorsnede $h(m)$
- diktefactor $\alpha(-)$

Gecombineerd met een bepaald aantal constanten zal dit moeten resulteren in een formule voor C_w/ψ_{max} . Aangezien de welvingsconstante C_w de eenheid $Lengte^6 (L^6)$ draagt en ψ_{max} de eenheid $Lengte^2 (L^2)$ zal de formule de eenheid $Lengte^4 (L^4)$ moeten representeren. Voorbeeld hierbij is het I-profiel waar de breedte gekwadrateerd is (L^2) en vermenigvuldigd met een hoogtemaat (L) en een diktemaat (L).

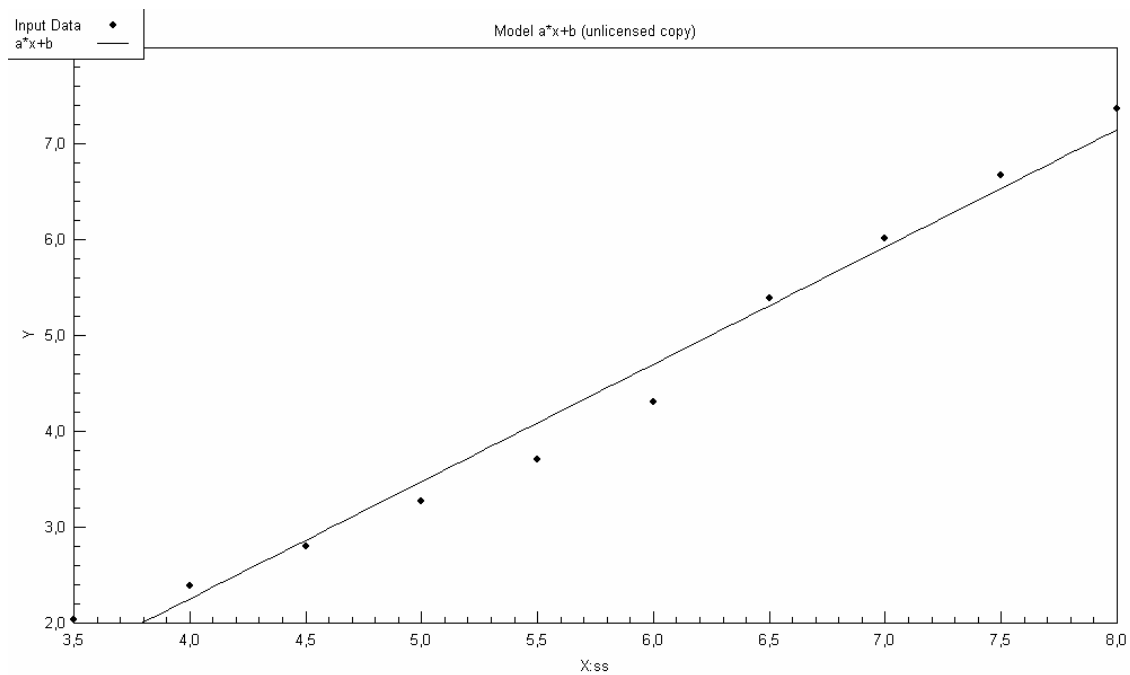
Datafit werkt volgens het principe van de kleinste overgebleven gesommeerde fouten. De tolerantie staat op 10^{-9} . Dit betekent dat er iteraties plaatsvinden totdat de som van alle overgebleven fouten kleiner is dan 10^{-9} . Deze nauwkeurigheid sluit natuurlijk niet uit dat sommige berekende waarden erg afwijken van de invoer. In het algemeen wordt als uitgangspunt gesteld dat een zeer groot deel van de waarden een foutmarge kleiner dan vijf procent moet hebben en enkele waarden een foutmarge hebben tussen vijf en tien procent. In dit hoofdstuk zullen twee oplossingen worden gepresenteerd en kritisch beoordeeld.

4.2 Formule A

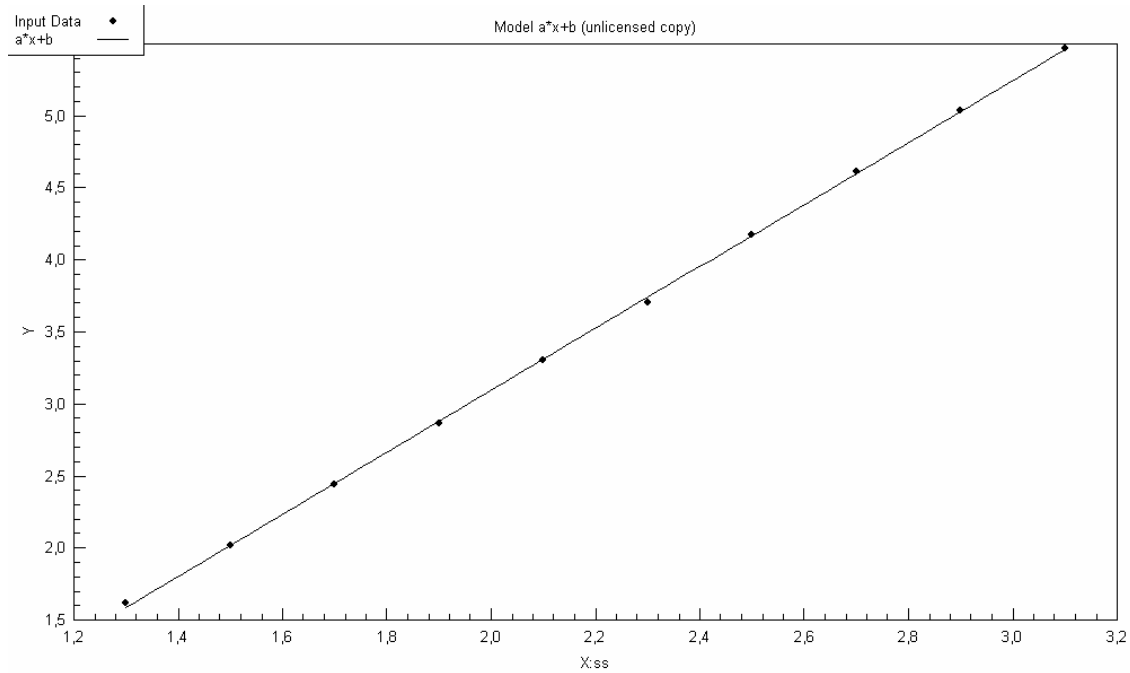
Er is in eerste instantie gekeken naar de variabelen apart. Hierbij wordt in kolom 'X' de variabele ingevoerd en in kolom 'Y' de daarbij behorende C_w/ψ_{max} . Vervolgens wordt een mogelijke basisformule gekozen, welke in deze gevallen nog onder lineaire regressie vallen. Datafit berekent dan de constanten die bij de beste benadering horen. De grafiek van de uitkraging lijkt het meest op een tweede- of derdegraadspolynoom (figuur 20). De andere drie variabelen kunnen worden beschreven met een rechte lijn oftewel een eerstegraadfunctie (figuur 21-23).



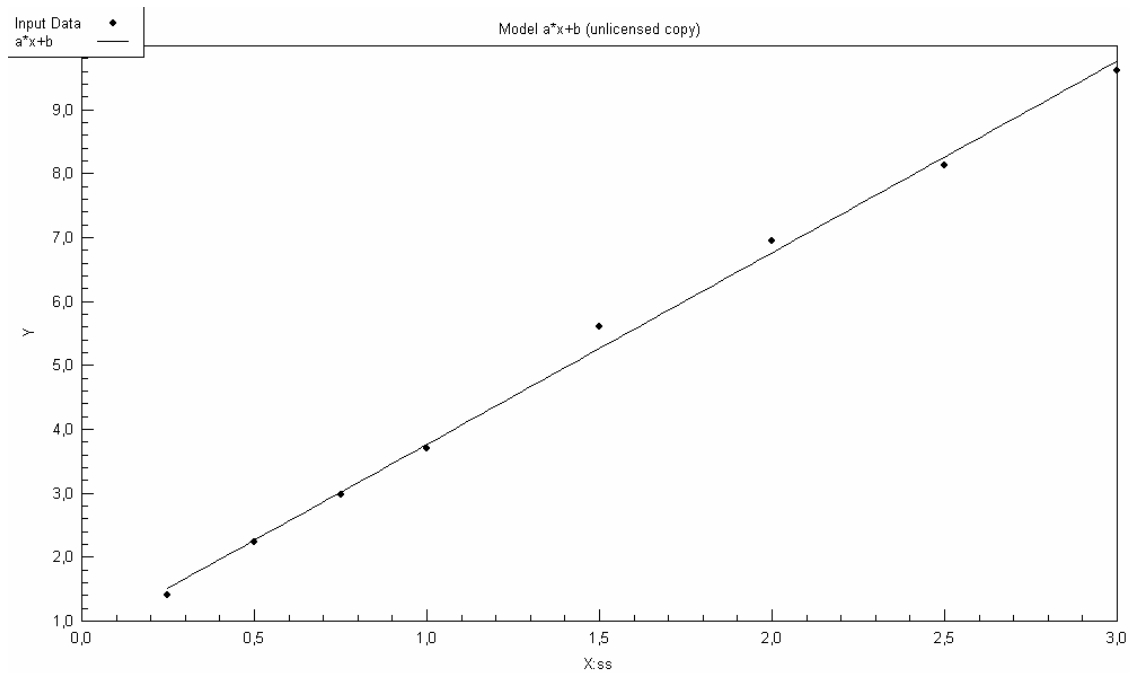
Figuur 20. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de lengte van de uitkraging als variabele



Figuur 21. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de breedte van de koker als variabele



Figuur 22. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de totale hoogte als variabele



Figuur 23. Grafiek van $C_w/\psi_{\max}$ met de dikte als variabele

Hoewel de een wat meer een rechte lijn volgt dan de ander, kan toch geconcludeerd worden dat de breedte, de hoogte en de dikte lineair evenredig zijn met $C_w/\psi_{\max}$. Gezien de eenheden van de breedte (L) en de hoogte (L) en de eenheidsloosheid van de diktefactor α ligt de keuze voor een gekwadrateerde lengte van de uitkraging voor de hand. Op deze manier kan in één formule de eenheid m^4 bereikt worden. We kiezen onderstaande basisformule en voeren alle data tegelijkertijd in.

$$C_w / \psi_{\max} = a(\alpha + b)(h + c)(b_box + d)(u + e)^2 + f$$

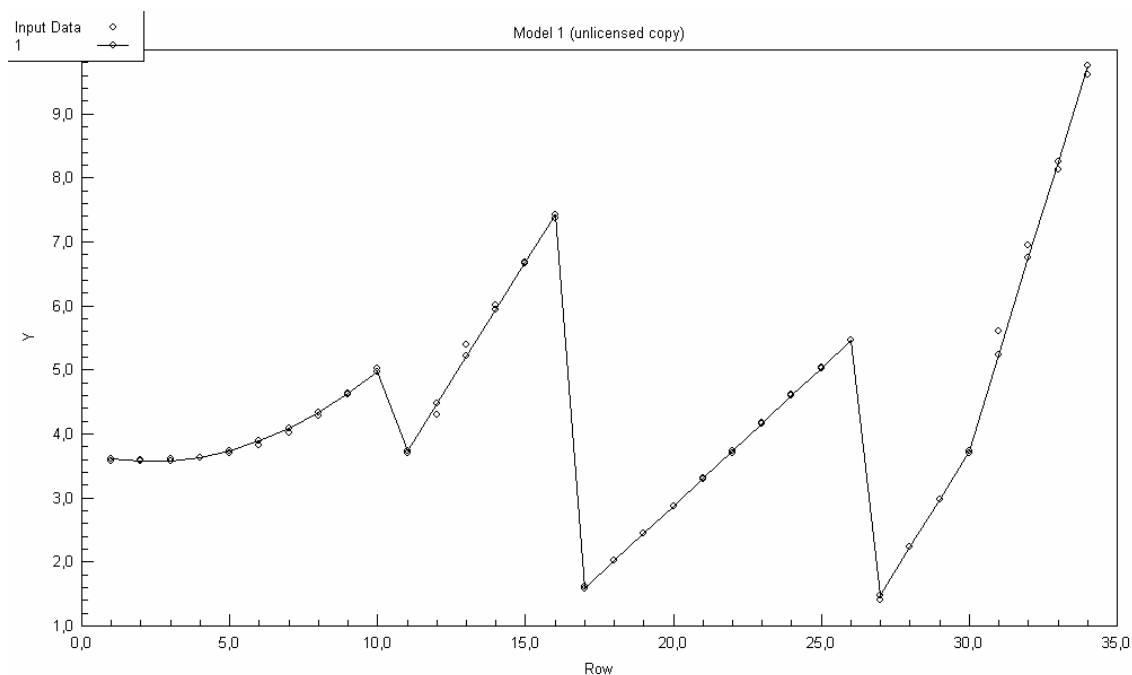
Omdat enkele fouten boven de tien procent eindigen, is er de noodzaak tot het verwijderen van enkele data (tabel 5). De plot laat zien dat het programma uiteindelijk wel een goede benadering heeft gevonden (figuur 24).

Verwijderde data			
diktefactor	hoogte (m)	b_box (m)	uitkraging (m)
1.00	2.300	5.500	0.000
1.00	2.300	3.500	2.500
1.00	2.300	4.000	2.500
1.00	2.300	4.500	2.500
1.00	2.300	5.000	2.500

Tabel 5. Verwijderde data formule A

Het bereik van de formule beperkt zich nu tot:

- $0,25 < \text{diktefactor} < 3,0$
- $1,3\text{m} < \text{hoogte} < 3,1\text{m}$
- $5,5\text{m} < b_box < 8,0\text{m}$
- $0,50\text{m} < \text{uitkraging} < 5,0\text{m}$



Figuur 24. Grafiek van benadering door formule A

De drie grootste procentuele fouten bedragen 6.6%, 5.8% en 3.9%. Er moet nog wel een opmerking gemaakt worden over het gebruik van de formule. De restrictie is dat alle variabelen in meters ingevoerd dienen te worden. Dit lijkt triviaal maar andere eenheden die gebruikt worden voor de dimensie lengte zoals de inch werkt hier dus niet. De uiteindelijke formule voor maximale welvingsspanningen in een kokerbrug ziet er dan als volgt uit.

$$\sigma_{xx,\max} = \frac{B}{209(\alpha - 0,95)(h - 2,224)(b_box - 5,389)(u - 1,198)^2 + 3,57}$$

4.3 Formule B

Het maken van een universele formule voor de factor $C_w/\psi_{\max}$ kan alleen als er geen constanten los worden opgeteld of afgetrokken. Voorwaarde blijft dat de eenheden moeten kloppen en dus de formule een dimensie heeft van m^4 . Een voorbeeld zou kunnen zijn

$$C_w/\psi_{\max} = a * \alpha * b_box * h * u^2$$

maar deze basisformule is te simpel om een oplossing te vinden. Andere mogelijkheden zijn geprobeerd zoals

$$C_w/\psi_{\max} = (a * \alpha + b * u)(c * b_box + d * h)(e * h + f * u)^2$$

waarin alpha nu de kleinste dikte representeert. Door verschuiving van variabelen zijn hier een aantal varianten op maar Datafit kan de zes constanten geen waarden meegeven waarvoor de formule een beetje in de buurt komt van de te verkregen data. Het probleem kan ook omgedraaid worden. Als er een (complexe) formule bestaat waarbij de benadering wel slaagt, kan er steeds een term weggehaald worden die het minst belangrijk is. Zo zijn er 35 verschillende termen te formeren uit vier variabelen waarbij de dimensie m^4 blijft.

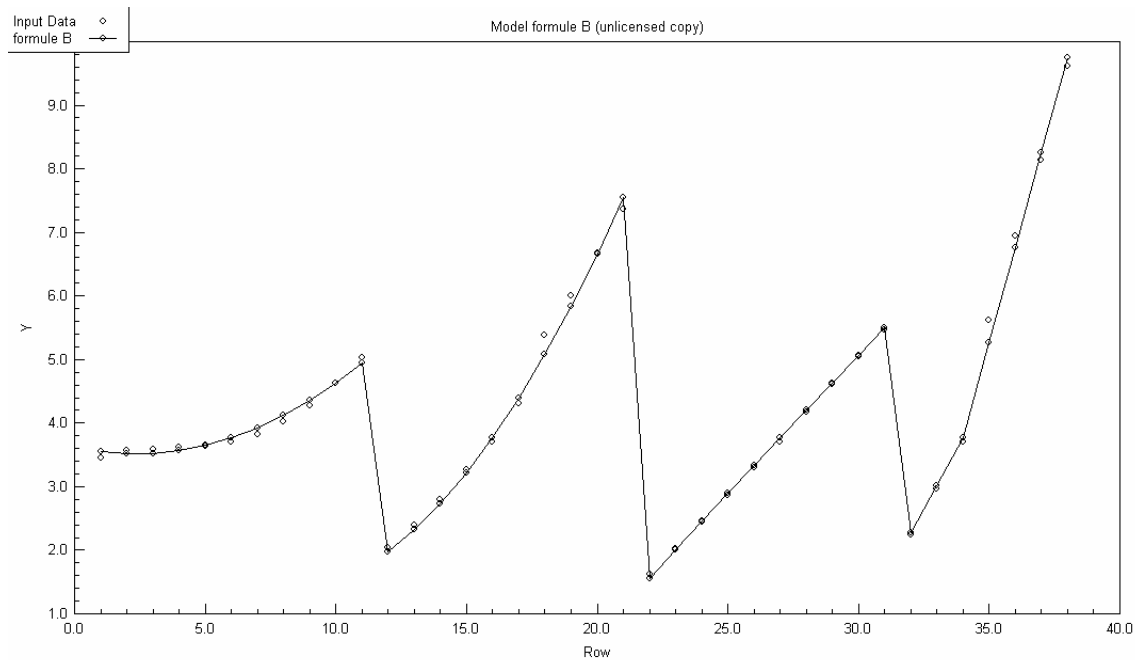
$$C_w/\psi_{\max} = a * \alpha^4 + b * b_box^4 + (...) + ah * \alpha * b_box * h^2 + ai * \alpha * b_box * h * u$$

Ook hier stelt alpha de kleinste dikte voor in de doorsnede. Deze is te vinden in de uitkragingen en in de onderflens. Voor het één-voor-één wegstrepen van de termen wordt een kansfunctie gebruikt uit de 'Fit Information' van Datafit. Deze functie geeft de kans weer dat een bepaalde constante de waarde '0' kan hebben oftewel verwijderd kan worden uit de formule zonder dat de regressie nauwkeurigheid afneemt. Een minimaal aantal constanten voor een aanvaardbare nauwkeurigheid wordt gevonden met de basisformule:

$$C_w/\psi_{\max} = a * h^3 * b_box + b * h^3 * u + c * h^2 * \alpha * u + d * h^2 * b_box * u + e * b_box^2 * h * u + f * u^2 * \alpha * h + g * u^2 * \alpha * b_box$$

Na het verwijderen van één datapunt levert dit de volgende resultaten op:

constante	waarde
a	0,0530
b	-0.105
c	0,000949
d	-0.0508
e	0,0237
f	0,000744
g	-0.000242



Figuur 25. Grafiek van benadering door formule B

Verwijderde data			
kleinste dikte	hoogte (m)	b_box (m)	uitkraging (m)
50	2.300	5.500	2.500

Tabel 6. Verwijderde data formule B

De drie grootste procentuele fouten zijn 6.2%, 5.8% en 3,5%. De uitdrukking voor $C_w/\psi_{\max}$ bezit zeven verschillende termen. Dit is teveel om het een voor constructeurs gemakkelijk bruikbare formule te noemen. Wel bestaat de optie tot het maken van een simpel programma'tje waarbij door invoer van de vier variabelen snel een uitvoer gerealiseerd kan worden. Een voordeel is ook dat de invoer en uitvoer kan geschieden op basis van millimeter, centimeters en meters maar ook op basis van inches, feet en yards. Dit maakt formule B universeel. Het bereik van de formule beperkt zich tot:

- $0,1\text{m} < \text{kleinste dikte} < 0,6\text{m}$
- $1,3\text{m} < \text{hoogte} < 3,1\text{m}$
- $3,5\text{m} < b_{\text{box}} < 8,0\text{m}$
- $\text{uitkraging} < 5,0\text{m}$

5 Conclusies/aanbevelingen

Het wringtraagheidsmoment van betonnen kokerbruggen kan aardig worden benaderd met een formule van 'Bredt'. Toch is het voor nauwkeurige berekeningen aan te raden om het profiel in te voeren in een eindige-elementen programma als ESA-PT [3]. Fouten kunnen namelijk oplopen naar tien procent. Het optreden van scheuren in de doorsnede geeft aanleiding tot een verlaging van de wringstijfheid. Onderzoek betreffende dit aspect is gewenst.

Door de dikwandigheid van betonnen kokerbruggen zijn schuifspanningen door wringing ongelijk verdeeld over de dikte van de lijven en flenzen. Aangezien deze spanningen een grote rol kunnen spelen bij de dimensionering van de afschuifwapening, is het verstandig om ook hier een eindige-elementen programma te gebruiken. Een formule van 'Bredt' kan een redelijke benadering geven, maar wordt onvoldoende geacht. Bovendien worden maximale schuifspanningen hierbij onderschat. Scheuren in de doorsnede betekent een verhoging van de schuifspanningen. Ook hier is nader onderzoek gewenst.

Maximale normaalspanningen door verhinderde welving bevinden zich bij betonnen kokerbruggen aan de onderkant van de onderflens onder beide lijven. Uitkragingen groter dan de breedte van de koker zorgen ervoor dat deze maximale spanningen zich verplaatsen naar de uiteinden van de uitkragingen. Andere aspecten van de doorsnede zoals de hoogte, breedte en dikte hebben een verwaarloosbare invloed op de ligging van maximale welvingsspanningen.

De grootte van de maximale welvingsspanning kan berekend worden met onderstaande formule. Hierin is 'B' het bi-moment in Nm². Alpha is een factor die van de dikte afhangt, 'h' de totale hoogte van de doorsnede, 'b_box' een maat voor de breedte van de koker en 'u' de lengte van de uitkragingen. Deze variabelen dienen allen te worden in gevoerd in meters.

$$\sigma_{xx,max} = \frac{B}{209(\alpha - 0,95)(h - 2,224)(b_box - 5,389)(u - 1,198)^2 + 3,57}$$

Een universele formule voor de maximale normaalspanning door verhinderde welving heeft onderstaande uitdrukking onder de deelstreep met bijbehorende constanten.

$$\frac{a * h^3 * b_box + b * h^3 * u + c * h^2 * \alpha * u + d * h^2 * b_box * u + e * b_box^2 * h * u + f * u^2 * \alpha * h + g * u^2 * \alpha * b_box}{}$$

constante	waarde
a	0,0530
b	-0.105
c	0,000949
d	-0.0508
e	0,0237
f	0,000744
g	-0.000242

Beide formules kunnen gebruikt worden voor een snelle berekening van de maximale welvingsspanning in kokerbruggen. Dit scheelt de constructeur veel specialistisch werk binnen het ontwerpproces.

Bronnenlijst

1. Aantekeningen over wringing, P.C.J. Hoogenboom, 11 juli 2006
http://www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/1TM5_aantekeningen.pdf
2. Roark's Formulas for Stress & Strain, 6th edition, Warren C. Young
<http://www.roarksformulas.com/>
3. SCIA ESA-PT Release 5.0 proefversie
http://www.scia-online.com/net/scia_es.html
4. ShapeBuilder 4.0 proefversie, Integrated Engineering Software (IES)
<http://www.iesweb.com/products/shapebuilder/index.htm>
5. DataFit proefversie 8.2, Oakdale Engineering Products
<http://www.oakdaleengr.com/>

Bijlage A. Originele opdracht

BSc – eindwerk

Structural
Engineering

Spanningen door verhinderde welving in kokerbruggen

Toelichting

Als een ligger op wringing wordt belast zullen de doorsneden willen welven. Bij een inklemming is deze welving niet mogelijk en daardoor zullen spanningen ontstaan. Algemeen wordt aangenomen dat deze spanningen alleen een rol spelen bij dunwandige open doorsneden. Bijvoorbeeld voor een I-profiel is de grootste spanning

$$\sigma_{xx,\max} = \frac{B}{\frac{1}{6}(h-t)tb^2}$$

Hierin is B het bi-moment in de doorsnede, h de hoogte van het profiel, b de breedte van het profiel en t de dikte van de flenzen.

Voor dunwandige gesloten doorsneden - zoals kokerliggers - zouden de spanningen door verhinderde welving verwaarloosbaar zijn. Recentelijk vonden we dat voor sommige belastinggevallen op kokerbruggen deze spanningen toch niet te verwaarlozen zijn. De berekeningen hiervoor zijn uitgevoerd met speciale elementensoftware voor analyse van doorsneden van prismatische liggers. Echter, dit is tijdrovend en specialistisch werk en er bestaat behoefte aan een ontwerpformule.



Figuur. Normalspanningen in een kokerbrug door verhinderde welving

Opdracht

Leidt een formule af voor de grootste normaalspanning in een kokerligger die ontstaat door verhinderde welving bij wringing.

Inventariseer de belastingssituaties en brugvormen waarvoor deze spanning belangrijk is.

Secties

Constructiemechanica en Betonconstructies

Nadere info

dr.ir. P.C.J. Hoogenboom	kamer 5.24	tel. 015 278 8081
	P.Hoogenboom@citg.tudelft.nl	
ir. W.J.M. Peperkamp	kamer 5.03	tel. 015 278 4576
	W.Peperkamp@citg.tudelft.nl	

Bijlage B. Theorie van De Saint Venant [1]

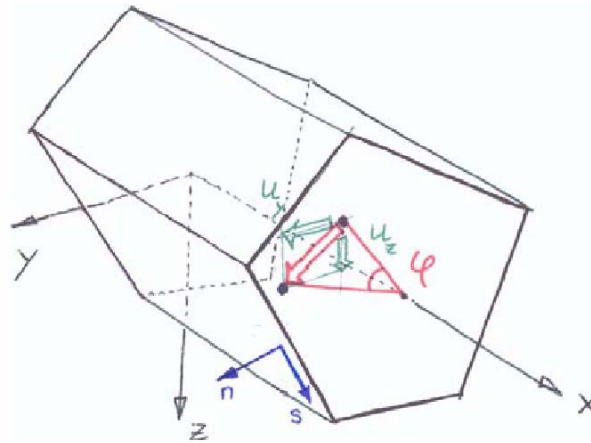
In 1856 publiceerde B. de Saint Venant een theorie voor wringing [6]. Uitgangspunt hiervan is dat een doorsnede roteert en welft.

$$u_y = -xz \theta$$

$$u_z = xy \theta$$

$$u_x = \psi(y, z) \theta$$

Hierin is $\theta = \frac{\phi}{l}$ de specifieke verwringing en ψ de welvingsfunctie die de vervorming van de doorsnede beschrijft (spreek uit: θ = teta, ϕ = fie, ψ = psie).



Figuur 5. Verplaatsing van een punt door een kleine rotatie van de doorsnede

Verplaatsingsmethode

In de verplaatsingsmethode wordt de welving als onbekende gekozen. Het resultaat van de afleiding [5] is de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

met de randvoorwaarde

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = z \cos \alpha - y \sin \alpha .$$

Hierin is α de hoek tussen de positieve y -as en de naar buiten gerichte normaalvector op de rand in het beschouwde punt. Als ψ is opgelost kunnen we de spanningen berekenen met

$$\sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \theta$$

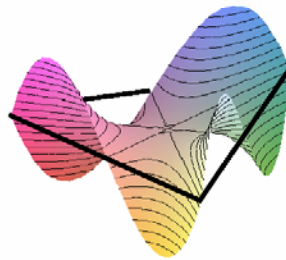
$$\sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \theta$$

en het wringmoment met

$$M_w = \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA.$$

De wringstijfheid is

$$GI_w = \frac{M_w}{\theta}.$$



Figuur 6. Welvingsfunctie $\psi(y, z)$ van een driehoekige doorsnede

Krachtenmethode

In de krachtenmethode worden de spanningen als onbekenden gekozen. Het resultaat van de afleiding is de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -G2\theta$$

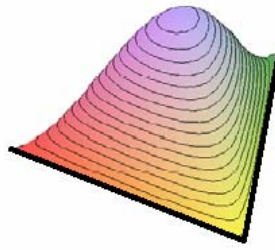
met de randvoorwaarde

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

De functie $\phi(y, z)$ heeft geen directe fysische betekenis. Deze functie heeft altijd de vorm van een heuvel en wordt daarom ϕ -heuvel genoemd (spreek uit fie-heuvel) (Fig. 7). Als ϕ is opgelost kunnen we de wringspanningen berekenen met

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$



Figuur 7. ϕ -heuvel van een driehoekige doorsnede

De spanning in willekeurige loodrechte richtingen n en s kunnen op dezelfde manier worden berekend:

$$\sigma_{xn} = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$\sigma_{xs} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

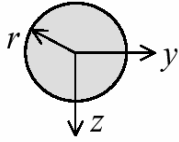
en het wringend moment met

$$M_w = 2 \int_A \phi \, dA.$$

De wringstijfheid is

$$GI_w = \frac{M_w}{\theta}.$$

Bijlage C. Oplossingen differentiaalvergelijkingen [1]

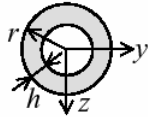


$$\psi = 0$$

$$\phi = \frac{1}{2} G\theta(r^2 - y^2 - z^2)$$

$$I_w = I_p = \frac{1}{2} \pi r^4$$

$$C_w = 0$$



$$\psi = 0$$

$$\phi = \frac{1}{2} G\theta(r^2 - y^2 - z^2)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\frac{1}{2} A r}$$

$$\sigma_{\max} = 0$$

$$I_w = I_p = \frac{1}{2} \pi (r^4 - (r-h)^4)$$

$$C_w = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\dots}$$

$$\sigma_{\max} = 0$$

$$I_w = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$I_p = \frac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2)$$

$$C_w = \frac{\pi a^3 b^3}{24} \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\frac{1}{2} A b}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\dots}$$

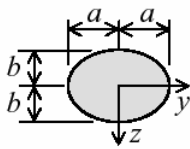
$$I_w = \frac{9}{5} \sqrt{3} a^4$$

$$I_p = 3\sqrt{3} a^4$$

$$C_w = \frac{3}{70} \sqrt{3} a^6$$

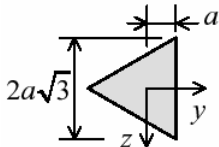
$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\frac{6}{5} \sqrt{3} a^3}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\frac{9}{70} \sqrt{3} a^4}$$



$$\psi = z y \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

$$\phi = \frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)$$



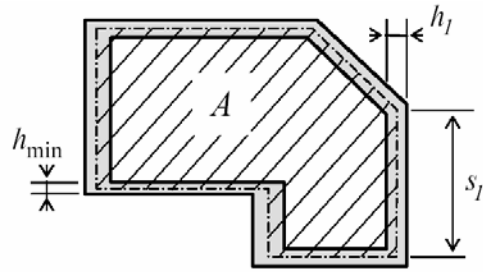
$$\psi = \frac{z}{6a} (3y^2 - z^2)$$

$$\phi = \frac{G\theta}{6a} (a - y)(2a + y - z\sqrt{3})(2a + y + z\sqrt{3})$$

Bijlage D. Formules van Bredt [1]

R. Bredt heeft in 1896 twee handige formules afgeleid voor dunwandige kokers [8]. We kunnen deze formules ook afleiden met de membraanalogie.

$$GI_w = G \frac{4A^2}{\sum_i \frac{s_i}{h_i}}$$
$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{2Ah_{\min}}$$



Bijlage E. Exacte coördinaten

buitenkant		binnenkant	
x	y	x	y
0.0	0.0	0.5	0.2
6.0	0.0	5.5	0.2
6.5	1.9	5.9	1.8
7.5	2.0	5.8	1.9
9.0	2.0	4.0	2.0
9.0	2.2	2.0	2.0
3.0	2.3	0.2	1.9
-3.0	2.2	0.1	1.8
-3.0	2.0		
-1.5	2.0		
-0.5	1.9		

Bijlage F. Overzicht meetresultaten

alpha	h	b_box	u	psie_max	Cw	Cw/psie_max	lw	B	sigma_max
m	m	m	m	m2	m6		m4	Nm2	N/m2
1.00	2.300	5.500	0.000	2.830	9.775		3.454	10.877	159606
1.00	2.300	5.500	0.500	2.970	10.60		3.569	10.999	171157
1.00	2.300	5.500	1.000	3.073	11.04		3.593	11.093	176751
1.00	2.300	5.500	1.500	3.128	11.30		3.613	11.162	179796
1.00	2.300	5.500	2.000	3.151	11.44		3.631	11.221	182694
1.00	2.300	5.500	2.500	3.146	11.64		3.700	11.275	183349
1.00	2.300	5.500	3.000	3.117	11.91		3.821	11.305	187104
1.00	2.300	5.500	3.500	3.073	12.34		4.016	11.361	192904
1.00	2.300	5.500	4.000	3.018	12.92		4.281	11.396	201351
1.00	2.300	5.500	4.500	2.957	13.67		4.623	11.429	212424
1.00	2.300	5.500	5.000	2.891	14.54		5.029	11.463	225273
1.00	2.300	3.500	2.500	1.684	3.424		2.033	7.349	98774
1.00	2.300	4.000	2.500	2.049	4.898		2.390	8.319	115497
1.00	2.300	4.500	2.500	2.413	6.769		2.805	9.305	133973
1.00	2.300	5.000	2.500	2.779	9.073		3.265	10.291	158188
1.00	2.300	5.500	2.500	3.146	11.640		3.700	11.275	183349
1.00	2.300	6.000	2.500	3.513	15.126		4.306	12.260	218207
1.00	2.300	6.500	2.500	3.877	18.935		5.390	13.241	252424
1.00	2.300	7.000	2.500	4.240	23.307		6.012	14.223	288205
1.00	2.300	7.500	2.500	4.602	28.283		6.671	15.206	324812
1.00	2.300	8.000	2.500	4.961	33.880		7.362	16.187	366267
1.00	1.300	5.500	2.500	2.068	3.346		1.618	3.1654	188743
1.00	1.500	5.500	2.500	2.325	4.697		2.020	4.4193	188760
1.00	1.700	5.500	2.500	2.557	6.241		2.441	5.8655	188970
1.00	1.900	5.500	2.500	2.772	7.951		2.868	7.4953	188398
1.00	2.100	5.500	2.500	2.969	9.802		3.301	9.3009	187168
1.00	2.300	5.500	2.500	3.146	11.64		3.700	11.275	183349
1.00	2.500	5.500	2.500	3.310	13.83		4.178	13.411	183149
1.00	2.700	5.500	2.500	3.459	15.95		4.611	15.700	180428
1.00	2.900	5.500	2.500	3.593	18.11		5.04	18.138	177326
1.00	3.100	5.500	2.500	3.711	20.29		5.47	20.717	173939
0.25	2.300	5.500	2.500	3.826	5.35		1.40	4.112	231070
0.50	2.300	5.500	2.500	3.491	7.81		2.24	7.074	196078
0.75	2.300	5.500	2.500	3.292	9.77		2.97	8.987	193073
1.00	2.300	5.500	2.500	3.146	11.64		3.70	11.275	183349
1.50	2.300	5.500	2.500	3.193	17.93		5.61	15.546	203835
2.00	2.300	5.500	2.500	3.289	22.82		6.94	19.100	212190
2.50	2.300	5.500	2.500	3.426	27.85		8.13	22.045	224366
3.00	2.300	5.500	2.500	3.569	34.32		9.62	24.670	247070

Bijlage G. Roark's formules voor torsie

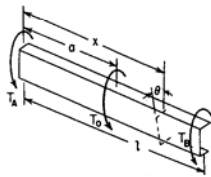
TABLE 22 Formulas for the elastic deformations of uniform thin-walled open members under torsional loading

NOTATION: T_a = applied torsional load (force-length); t_a = applied distributed torsional load (force-length per unit length); T_A and T_B are the reaction end torques at the left and right ends, respectively. θ = angle of rotation at a distance x from the left end (radians). θ' , θ'' , and θ''' are the successive derivatives of θ with respect to the distance x . All rotations, applied torsional loads, and reaction end torques are positive as shown (CCW when viewed from the right end of the member). E is the modulus of elasticity of the material; C_w is the warping constant for the cross section; K is the torsional constant (see Table 21 for expressions for C_w and K); and G is the modulus of rigidity (shear modulus) of the material.

The following constants and functions are hereby defined in order to permit condensing the tabulated formulas which follow. See page 98 for a definition of $\langle x-a \rangle^n$. The function $\text{Sinh } \beta \langle x-a \rangle$ is also defined as zero if x is less than a . $\beta = (KG/C_w E)^{1/2}$

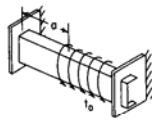
$F_1 = \cosh \beta x$	$F_{a1} = \langle x-a \rangle^0 \cosh \beta(x-a)$	$C_1 = \cosh \beta l$	$C_{a1} = \cosh \beta(l-a)$	$A_1 = \cosh \beta a$
$F_2 = \sinh \beta x$	$F_{a2} = \sinh \beta \langle x-a \rangle$	$C_2 = \sinh \beta l$	$C_{a2} = \sinh \beta(l-a)$	$A_2 = \sinh \beta a$
$F_3 = \cosh \beta x - 1$	$F_{a3} = \langle x-a \rangle^0 [\cosh \beta(x-a) - 1]$	$C_3 = \cosh \beta l - 1$	$C_{a3} = \cosh \beta(l-a) - 1$	
$F_4 = \sinh \beta x - \beta x$	$F_{a4} = \sinh \beta \langle x-a \rangle - \beta \langle x-a \rangle$	$C_4 = \sinh \beta l - \beta l$	$C_{a4} = \sinh \beta(l-a) - \beta(l-a)$	
	$F_{a5} = F_{a3} - \frac{\beta^2 \langle x-a \rangle^2}{2}$		$C_{a5} = C_{a3} - \frac{\beta^2(l-a)^2}{2}$	
	$F_{a6} = F_{a4} - \frac{\beta^3 \langle x-a \rangle^3}{6}$		$C_{a6} = C_{a4} - \frac{\beta^3(l-a)^3}{6}$	

1. Concentrated intermediate torque



$$\begin{aligned}\theta &= \theta_A + \frac{\theta'_A}{\beta} F_2 + \frac{\theta''_A}{\beta^2} F_3 + \frac{T_a}{C_w E \beta^3} F_4 + \frac{T_a}{C_w E \beta^3} F_{a4} \\ \theta' &= \theta'_A F_1 + \frac{\theta''_A}{\beta} F_2 + \frac{T_a}{C_w E \beta^2} F_3 + \frac{T_a}{C_w E \beta^2} F_{a3} \\ \theta'' &= \theta''_A F_1 + \theta'_A \beta F_2 + \frac{T_a}{C_w E \beta} F_3 + \frac{T_a}{C_w E \beta} F_{a2} \\ \theta''' &= \theta'_A \beta^2 F_1 + \theta''_A \beta F_2 + \frac{T_a}{C_w E} F_1 + \frac{T_a}{C_w E} F_{a1} \\ T &= T_A + T_a \langle x-a \rangle^0\end{aligned}$$

2c. Both ends free to warp but not twist



$$\theta_A = 0 \quad \theta'_A = 0$$

$$T_A = -\frac{t_a}{2l} (l-a)^2$$

$$\theta'_A = -\frac{t_a}{C_w E \beta^3} \left[\frac{\beta}{2l} (l-a)^2 - \frac{C_{a3}}{C_2} \right]$$

$$\theta_B = 0 \quad \theta'_B = 0$$

$$\theta'_B = -\frac{t_a}{C_w E \beta^3} \left[\frac{\beta}{2l} (l-a)^2 - \frac{C_1 C_{a3}}{C_2} + C_{a4} \right]$$

$$\theta''' = -\frac{t_a}{C_w E \beta} \frac{\cosh \beta a - \cosh \beta l}{\sinh \beta l}$$

$$T_B = -\frac{t_a}{2l} (l^2 - a^2)$$

If $a = 0$ (uniformly distributed torque over entire span),

$$\theta = \frac{t_a}{C_w E \beta^4} \left[\frac{\beta^2 x(l-x)}{2} + \frac{\cosh \beta(x-l/2)}{\cosh(\beta l/2)} - 1 \right]$$

$$\theta' = \frac{t_a}{C_w E \beta^3} \left[\frac{\sinh \beta(x-l/2)}{\cosh(\beta l/2)} - \beta(x-l/2) \right]$$

$$\theta'' = \frac{t_a}{C_w E \beta^2} \left[\frac{\cosh \beta(x-l/2)}{\cosh(\beta l/2)} - 1 \right]$$

$$\theta''' = \frac{t_a}{C_w E \beta} \frac{\sinh \beta(x-l/2)}{\cosh(\beta l/2)}$$

$$\text{Max } \theta = \frac{t_a}{C_w E \beta^4} \left[\frac{\beta^2 l^2}{8} + \frac{1}{\cosh(\beta l/2)} - 1 \right] \quad \text{at } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{Max } \theta' = \frac{\pm t_a}{C_w E \beta^3} \left(\frac{\beta l}{2} - \tanh \frac{\beta l}{2} \right) \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = l, \text{ respectively}$$

$$\text{Max } \theta'' = \frac{t_a}{C_w E \beta^2} \left[\frac{1}{\cosh(\beta l/2)} - 1 \right] \quad \text{at } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{Max } \theta''' = \frac{\pm t_a}{C_w E \beta} \tanh \frac{\beta l}{2} \quad \text{at } x = 0 \text{ and } x = l, \text{ respectively}$$

Bijlage H. Resultaten formule A

Model Definition:

$$Y = x * (a * x1 + b) * (c * x2 + d) * (e * x3 + f) * (g * x4 + i)^2 + j$$

Number of observations = 34

Number of missing observations = 0

Solver type: Nonlinear

Nonlinear iteration limit = 250

Diverging nonlinear iteration limit = 10

Number of nonlinear iterations performed = 139

Residual tolerance = 0.0000000001

Sum of Residuals = 8.13463607585163E-09

Average Residual = 2.3925400223093E-10

Residual Sum of Squares (Absolute) = 0.307353182589453

Residual Sum of Squares (Relative) = 0.307353182589453

Standard Error of the Estimate = 0.113165288882651

Coefficient of Multiple Determination (R^2) = 0.9972109519

Proportion of Variance Explained = 99.72109519%

Adjusted coefficient of multiple determination (R_a^2) = 0.9961650589

Durbin-Watson statistic = 1.64822100826459

Regression Variable Results

Variable	Value	Standard Error	t-ratio	Prob(t)
a	0.96548409139953	42291.1526376525	2.282945796E-005	0.99998
b	-0.912815410222681	39984.1035099218	-2.282945796E-005	0.99998
c	0.586449688540766	18449.1051149303	3.178743277E-005	0.99997
d	-1.30408468875398	41025.1654555518	-3.178743277E-005	0.99997
e	0.549915742152575	15300.7327168876	3.594048418E-005	0.99997
f	-2.96337159658011	82452.189057062	-3.594048418E-005	0.99997
g	4.85527609874042	932177.822055917	5.208529943E-006	1.0
i	-5.81727829051235	1116875.27145425	-5.20852994E-006	1.0
j	3.57259305403898	4.88198846797E-02	73.17905557	0.0
x	28.4860643190642	12281258.3015878	2.319474407E-006	1.0

X1	X2	X3	X4	Y	Calc	Residual	% Error
1	2.3	5.5	0.5	3.569	3.619775895	-0.0507758955	-1.422692505
1	2.3	5.5	1	3.593	3.576393451	0.01660654866	0.4621917245
1	2.3	5.5	1.5	3.613	3.581414282	0.03158571808	0.8742241374
1	2.3	5.5	2	3.631	3.634838387	-0.003838387229	-0.1057115734
1	2.3	5.5	2.5	3.7	3.736665767	-0.03666576728	-0.9909666833
1	2.3	5.5	3	3.821	3.886896422	-0.06589642207	-1.724585765
1	2.3	5.5	3.5	4.016	4.085530352	-0.0695303516	-1.731333456
1	2.3	5.5	4	4.281	4.332567556	-0.05156755587	-1.204567995
1	2.3	5.5	4.5	4.623	4.628008035	-0.005008034869	-0.1083286798
1	2.3	5.5	5	5.029	4.971851789	0.05714821139	1.136373263
1	2.3	5.5	2.5	3.7	3.736665767	-0.03666576728	-0.9909666833
1	2.3	6	2.5	4.306	4.474229649	-0.1682296487	-3.906865971
1	2.3	6.5	2.5	5.39	5.21179353	0.1782064699	3.306242484
1	2.3	7	2.5	6.012	5.949357412	0.06264258845	1.041959222
1	2.3	7.5	2.5	6.671	6.686921293	-0.01592129298	-0.2386642629
1	2.3	8	2.5	7.362	7.424485174	-0.0624851744	-0.8487527085
1	1.3	5.5	2.5	1.618	1.586469954	0.03153004603	1.948704946
1	1.5	5.5	2.5	2.02	2.016509117	0.003490883364	0.1728160081
1	1.7	5.5	2.5	2.441	2.446548279	-0.005548279297	-0.227295342
1	1.9	5.5	2.5	2.868	2.876587442	-0.008587441959	-0.2994226624
1	2.1	5.5	2.5	3.301	3.306626605	-0.00562660462	-0.1704515183
1	2.3	5.5	2.5	3.7	3.736665767	-0.03666576728	-0.9909666833
1	2.5	5.5	2.5	4.178	4.16670493	0.01129507006	0.2703463393
1	2.7	5.5	2.5	4.611	4.596744093	0.0142559074	0.3091717067
1	2.9	5.5	2.5	5.04	5.026783255	0.01321674473	0.2622369987
1	3.1	5.5	2.5	5.47	5.456822418	0.01317758207	0.2409064364
0.25	2.3	5.5	2.5	1.4	1.480919217	-0.0809192174	-5.7799441
0.5	2.3	5.5	2.5	2.24	2.232834734	0.007165265972	0.3198779452
0.75	2.3	5.5	2.5	2.97	2.984750251	-0.01475025065	-0.4966414362
1	2.3	5.5	2.5	3.7	3.736665767	-0.03666576728	-0.9909666833
1.5	2.3	5.5	2.5	5.61	5.240496801	0.3695031995	6.586509794
2	2.3	5.5	2.5	6.94	6.744327834	0.1956721662	2.819483663
2.5	2.3	5.5	2.5	8.13	8.248158867	-0.118158867	-1.453368598
3	2.3	5.5	2.5	9.62	9.7519899	-0.1319899003	-1.372036386

Bijlage I. Resultaten formule B

Model Definition:

Y =

$$i \cdot x_2^2 \cdot x_3 + j \cdot x_2^2 \cdot x_4 + x \cdot x_2^2 \cdot x_1 \cdot x_4 + y \cdot x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4 + ad \cdot x_3^3 \cdot x_2 \cdot x_4 + af \cdot x_4^4 \cdot x_1 \cdot x_2 + ag \cdot x_4^4 \cdot x_1 \cdot x_3$$

Number of observations = 38

Number of missing observations = 0

Solver type: Nonlinear

Nonlinear iteration limit = 250

Diverging nonlinear iteration limit = 10

Number of nonlinear iterations performed = 6

Residual tolerance = 0.0000000001

Sum of Residuals = 0.131689519201484

Average Residual = 3.46551366319695E-03

Residual Sum of Squares (Absolute) = 0.458600402522228

Residual Sum of Squares (Relative) = 0.458600402522228

Standard Error of the Estimate = 0.121628785127883

Coefficient of Multiple Determination (R²) = 0.9960047127

Proportion of Variance Explained = 99.60047127%

Adjusted coefficient of multiple determination (Ra²) = 0.9952314313

Durbin-Watson statistic = 1.43985629325853

Regression Variable Results

Variable	Value	Standard Error	t-ratio	Prob(t)
ad	2.36987168060491E-02	0.002818221193292	8.409104602	0.0
af	7.43900149340446E-04	1.17915969350925E-04	6.308731154	0.0
ag	-2.41899901424764E-04	4.67763711417654E-05	-5.171412308	0.00001
i	5.30329182926433E-02	1.34709224519951E-03	39.36843856	0.0
j	-0.104870196996659	1.42865665040924E-02	-7.340475892	0.0
x	9.49207789923095E-04	3.2123136752702E-05	29.54903804	0.0
y	-0.050837976867731	1.24650371598885E-02	-4.078445673	0.00029

X1	X2	X3	X4	Y	Calc	Residual	% Error
200	2.3	5.5	0	3.454	3.548883343	-0.09488334277	-2.747056826
200	2.3	5.5	0.5	3.569	3.516916107	0.0520838931	1.459341359
200	2.3	5.5	1	3.593	3.523000096	0.06999904041	1.948205967
200	2.3	5.5	1.5	3.613	3.567137901	0.04586209915	1.269363386
200	2.3	5.5	2	3.631	3.649326931	-0.01832693067	-0.5047350777
200	2.3	5.5	2.5	3.7	3.769568049	-0.06956804906	-1.880217542
200	2.3	5.5	3	3.821	3.927861256	-0.106861256	-2.796682963
200	2.3	5.5	3.5	4.016	4.124206552	-0.1082065515	-2.694386243
200	2.3	5.5	4	4.281	4.358603936	-0.07760393561	-1.812752525
200	2.3	5.5	4.5	4.623	4.631053408	-0.008053408261	-0.1742030772
200	2.3	5.5	5	5.029	4.941554969	0.08744503053	1.738815481
200	2.3	3.5	2.5	2.033	1.975662068	0.05733793238	2.820360668
200	2.3	4	2.5	2.39	2.321937847	0.06806215325	2.847788839
200	2.3	4.5	2.5	2.805	2.736347437	0.0686525633	2.447506713
200	2.3	5	2.5	3.265	3.218890837	0.04610916253	1.412225499
200	2.3	5.5	2.5	3.7	3.769568049	-0.06956804906	-1.880217542
200	2.3	6	2.5	4.306	4.388379071	-0.08237907147	-1.913122886
200	2.3	6.5	2.5	5.39	5.075323905	0.3146760953	5.838146481
200	2.3	7	2.5	6.012	5.830402549	0.1815974513	3.020583022
200	2.3	7.5	2.5	6.671	6.653615004	0.01738499641	0.2606055526
200	2.3	8	2.5	7.362	7.544961269	-0.1829612693	-2.485211481
200	1.3	5.5	2.5	1.618	1.561212823	0.05678717742	3.509714303
200	1.5	5.5	2.5	2.02	2.014714258	0.00528574163	0.2616703777
200	1.7	5.5	2.5	2.441	2.460884232	-0.01988423212	-0.8145936961
200	1.9	5.5	2.5	2.868	2.901139011	-0.03313901063	-1.155474569
200	2.1	5.5	2.5	3.301	3.336894861	-0.03589486068	-1.087393538
200	2.3	5.5	2.5	3.7	3.769568049	-0.06956804906	-1.880217542
200	2.5	5.5	2.5	4.178	4.200574843	-0.02257484257	-0.5403265335
200	2.7	5.5	2.5	4.611	4.631331508	-0.02033150799	-0.4409348946
200	2.9	5.5	2.5	5.04	5.063254312	-0.02325431211	-0.4613950816
200	3.1	5.5	2.5	5.47	5.497759522	-0.02775952173	-0.5074866861
100	2.3	5.5	2.5	2.24	2.276415193	-0.03641519336	-1.625678275
150	2.3	5.5	2.5	2.97	3.022991621	-0.05299162121	-1.78422967
200	2.3	5.5	2.5	3.7	3.769568049	-0.06956804906	-1.880217542
300	2.3	5.5	2.5	5.61	5.262720905	0.3472790952	6.190358204
400	2.3	5.5	2.5	6.94	6.75587376	0.1841262395	2.653115843
500	2.3	5.5	2.5	8.13	8.249026616	-0.1190266162	-1.464042019
600	2.3	5.5	2.5	9.62	9.742179472	-0.1221794719	-1.27005688