

“Spanningen in boortunnels ten gevolge van grond- en waterdruk”

Eindrapportage

Bachelor Eindwerk (CT3000)

M.C. Veldhuizen
Stud. Nummer: 1005936

Begeleiders:
Dr.Ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. W.J.M. Peperkamp

Voorwoord

Dit rapport is de eindrapportage van het onderzoek naar “spanningen in boortunnels ten gevolge van grond- en waterdruk”. Het onderzoek is gedaan in het kader van het “Bachelor eindwerk” aan de faculteit civiele techniek en geowetenschappen van de Technische Universiteit Delft. Dit eindwerk is de afsluiting van de bacheloropleiding civiele techniek.

Geïnteresseerden in de uitkomsten van het onderzoek, die in dit rapport zijn opgesteld dienen enige voorkennis te hebben van de werking van krachten op een elementair deeltje in een slanke ligger. Het model dat in dit onderzoek wordt gegenereerd is beknopt weergegeven in bijlage A. Enkele uitkomsten van het model met verschillende parameters zijn weergegeven in bijlage B en C.

Veel dank is verschuldigd aan de beide begeleiders, de heren Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom en Ir. W.J.M. Peperkamp. Beiden hebben met hun kritieken, adviezen en hulp een grote bijdrage geleverd aan de totstandkoming van dit rapport.

Delft, Oktober 2003

M.C. Veldhuizen

Samenvatting

Dit rapport betreft het onderzoek naar spanningen in boortunnels veroorzaakt door grond- en waterdruk. Er is een algemeen model opgesteld om deze spanningen te berekenen. Bovendien is de geldigheid van de volgende hypothese uitgewerkt:

“Grond- en waterdruk geven geen buigende momenten in de tunnelbuiswand”

De tunnelbuis wordt in dit onderzoek gemodelleerd als een volledig ingebedde ring. Na samenvoegen van de constitutieve kinematische en evenwichtsvergelijkingen blijkt dat er geen algemene vergelijking voor optredende spanningen in boortunnels op te stellen is. Om een model te genereren dient de dwarskrachtvervorming te worden verwaarloosd, en de belasting te worden gesplitst in een continu en een variërend gedeelte. De continue belasting veroorzaakt spanningen gevormd door de extensie en een secundair moment. Variërende belastingen zorgen voor een overheersende buigingscomponent ten opzichte van de extensie.

De gegeven hypothese betreft het voorkomen van buigende momenten, en is dus afhankelijk van de variërende belasting. Omdat het niet mogelijk is een algemene vergelijking op te stellen voor de tunnelbuiswand, en er zodoende aanvaardbare benaderingen moeten worden gemaakt kan de hypothese niet waterdicht worden bewezen. Door een aantal numerieke gevallen te beschouwen met de variërende belasting van de vorm $K(r\cos\theta)$ op basis waarvan de hypothese is opgesteld, blijkt de gehele tunnelbuis een verticale translatie te ondergaan. Deze volledige translatie heeft tot gevolg dat er geen buigend moment optreedt in de doorsnede. Deze hypothese is beperkt tot de situaties waarbij de tunnelbuis gelijk kan worden gemodelleerd zoals de uitgangspunten in dit onderzoek.

De optredende snedekrachten zijn naar aanleiding van het beschouwde model dus zeer klein, en betreffen alleen een normaalkracht en een secundair moment door de continue belasting. In het geval van de HSL tunnel wordt een spanning van $0,1 \text{ N/mm}^2$. Het is zeer waarschijnlijk dat de gebruikte grondparameters en belastingconfiguraties niet gelijk zijn aan die van de HSL tunnel, aangezien de optredende spanning vrijwel zeker van een grotere orde zal zijn dan de in dit rapport berekende.

Inhoudsopgave

VOORWOORD.....	III
SAMENVATTING.....	V
INHOUDSOPGAVE	VI
1 INLEIDING	1
2 OMSCHRIJVING ONDERZOEK	2
2.1 DOELSTELLING	2
2.2 BELANG VAN HET ONDERZOEK	2
2.3 RANDVOORWAARDEN	2
2.4 UITGANGSPUNTEN	3
3 AFLEIDING DIFFERENTIAALVERGELIJKING.....	4
3.1 INLEIDING.....	4
3.2 EVENWICHTSVERGELIJKINGEN	4
3.3 CONSTITUTIEVE VERGELIJKINGEN	6
3.4 KINEMATISCHE VERGELIJKINGEN	6
3.5 COMBINEREN CONSTITUTIEVE, KINEMATISCHE EN EVENWICHTSVERGELIJKINGEN TOT EEN DIFFERENTIAALVERGELIJKING	9
3.6 OPSTELLEN VEREENVOUDIGDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING	11
3.6.1 DIFFERENTIAALVERGELIJKING BIJ VARIERENDE BELASTING.....	11
3.6.2 DIFFERENTIAALVERGELIJKING BIJ CONSTATE BELASTING	13
4 OPLOSSEN DIFFERENTIAALVERGELIJKING	16
4.1 HOMOGENE OPLOSSING.....	16
4.2 PARTICULIERE OPLOSSING.....	16
4.3 TOTALE OPLOSSING	17
5 KWANTIFICEREN BELASTINGEN EN PARAMETERS	21
5.1 IN TOEPASBAAR VORM SCHRIJVEN VAN BELASTINGEN	21
5.2 KWANTIFICEREN PARAMETERS TUNNELMODEL	22
6 GESTELDE HYPOTHESE.....	24
6.1 VERGELIJKEN MODELUITVOER MET HYPOTHESE	24
6.2 VERKLARING VOOR HET GELDEN VAN DE HYPOTHESE.....	26
7 SPANNINGEN IN DE TUNNELDOORSNEDE	30
8 CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN.....	33
LITERATUUR.....	34
A. BEKNOPT OVERZICHT ONTWIKKELD MODEL.....	35
B. BUIGEND MOMENT ONDER VERSCHILLENDE BELASTINGGEVALLEN	37
C. ANDERSOORTIGE BELASTINGEN TOEGEPAST OP HET ONTWIKKELD MODEL.....	41
D. MAPLE INVOER VAN HET MODEL.....	45
E. ZELFEVALUATIE.....	47
F. NOTULEN STARTBESPREKING D.D. 25-09-2003	48

1 Inleiding

Dit onderzoek bouwt voort op het werk van Q.C. de Rijke naar spanningen in boortunnels door het sturen van de boorkop [7]. Hierbij werd de tunnelbuis met omringende grond gemodelleerd als een verend ondersteunde ligger. De hiervoor afgeleide differentiaalvergelijking kon exact worden opgelost. In dit project is gepoogd dezelfde aanpak te volgen voor de vervormingen in de omtreksrichting van een tunnelbuis. Hiervoor werd de tunnelbuis gemodelleerd als een verend gesteunde ring.

Het is gebleken dat het afleiden van een differentiaalvergelijking voor een verend gesteunde ring veel moeilijker is dan voor een ligger. Een rigoureuze afleiding van de kinematische relaties sterk niet-lineaire vergelijkingen waarin niet eenvoudig te zien is welke termen het gedrag overheersen. De invloed van dwarskracht-vervorming moet verwaarloosd worden en de belasting en aanpak geschiedt in twee gedeelten om een oplosbare differentiaalvergelijking te verkrijgen. Niettemin kon hiermee een goed inzicht verkregen worden in de invloed van verschillende parameters op de krachtswerking in de HSL-tunnel.

De opbouw van het rapport is als volgt: In hoofdstuk 2 wordt het onderzoek uitgelegd, en worden de randvoorwaarden en uitgangspunten weergegeven. In hoofdstuk 3 worden de evenwichtsvergelijkingen, constitutieve vergelijkingen en kinematische vergelijkingen geformuleerd van een deel van de tunnelling. Vervolgens wordt de differentiaalvergelijking afgeleid en vereenvoudigd. In hoofdstuk 4 worden de randvoorwaarden opgesteld en wordt de differentiaalvergelijking opgelost. In hoofdstuk 5 worden de parameters gekozen voor berekening van de HSL-tunnel. In hoofdstuk 6 wordt onderzocht wat de belangrijkste invloeden zijn op de momenten in de omtreksrichting van de HSL-tunnel. Hoofdstuk 7 geeft het verloop van de spanningen weer zoals ontwikkeld in dit model. Tenslotte volgen in hoofdstuk 8 de conclusies en aanbevelingen.

2 Omschrijving Onderzoek

2.1 Doelstelling

Het doel van het onderzoek was het bestuderen van de krachtswerking in de omtreksrichting van tunnelbuizen met een analytische methode.

In het onderzoek is tevens de volgende hypothese gevalideerd¹: “Water- en gronddruk geven geen momenten in een tunnelwand.” Het is gebleken dat dit inderdaad bij benadering geldig is mits de grond over de omtrek van de buis een constante stijfheid heeft.

2.2 Belang van het onderzoek

Het berekenen en dimensioneren van tunnelbuizen is een actueel onderwerp. Vele methoden worden toegepast met verschillende nauwkeurigheden en gebruiksgemak. Er bestond geen directe noodzaak voor het hier beschreven onderzoek maar de voorgestelde analytische aanpak heeft duidelijke voordelen. Een parameterstudie kan heel eenvoudig worden uitgevoerd waardoor de consequenties van wijzigingen in het ontwerp kunnen worden voorspeld. Hierdoor is de methode in het bijzonder geschikt voor het voorontwerp van een tunnelbuis.

Het onderzoek heeft geresulteerd in een analytische methode voor berekening van de momenten, dwarskracht en normaalkracht en de vervorming van de tunneldoorsnede. Hiermee kunnen de spanningen in de omtreksrichting van tunnelbuiswanden worden berekend op kritieke plaatsen. Dit is gedemonstreerd voor een eenvoudig model van een tunnelbuis.

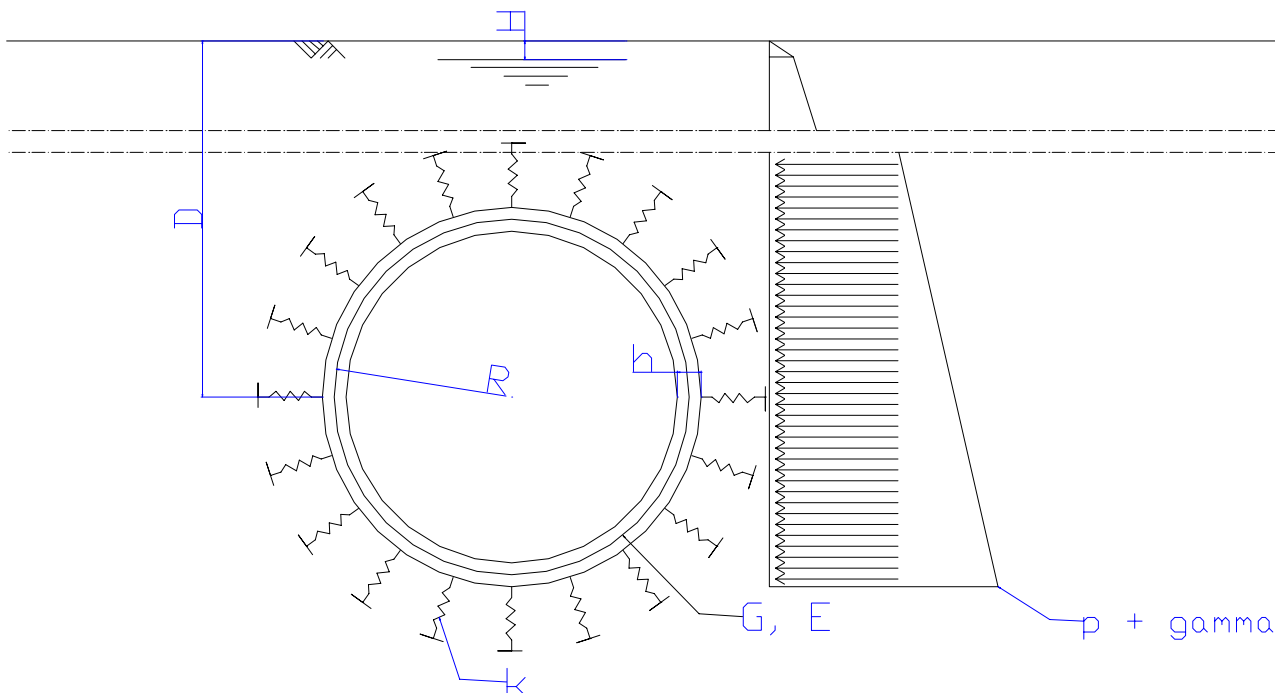
2.3 Randvoorwaarden

Voor een concrete toepassing wordt uitgegaan van een situatie van de tunnelbuis, zoals deze voorkomt in de HSL-tunnel onder het Groene Hart. De tunnel bestaat uit een buis, met in het midden een aangebrachte scheidingsmuur. Deze muur heeft echter geen constructieve functie, zodat de buis als ring opgevat kan worden. Het ballastbed, en de railbaan in de tunnel worden niet meegenomen in het model. De enige parameters die refereren aan de Groene-Harttunnel zijn de grondparameters en de grootte en hoogteligging van de tunnelbuis.

¹ De hypothese is geformuleerd door dhr. Hoogenboom naar aanleiding van een korte studie naar verend ondersteund ringen.

2.4 Uitgangspunten

- De spanningen en vervormingen worden opgesteld voor de dwarsdoorsnede van de tunnelbuis.
- De tunnelbuis en de omgevende grond worden geschematiseerd als een verend ondersteund ringmodel.
- De omgevingscondities worden bepaald met de volgende parameters (figuur 1).
 - Straal tunnelbuis (R) [m]
 - Wanddikte (h) [m]
 - Elasticiteitsmodulus tunnelwand (E) [N/mm^2]
 - Glijdingsmodulus tunnelwand (G of ν) [N/mm^2]
 - Diepteligging tunnel (D) [m]
 - Hoogte freatisch vlak (H) [m]
 - Elasticiteit van de grond (k) [kN/m]
 - Massa grond nat (γ_{nat}) en droog (γ_{droog}) [kN/m^3]
 - Dichtheid water ρ_{water}
 - Gravitatieversnelling (g) [m/s^2]



Figuur 1, Model van de HSL-tunnel

3 Afleiding Differentiaalvergelijking

3.1 Inleiding

De differentiaalvergelijking die in dit rapport opgesteld wordt, moet de relatie weergeven tussen de uitwendige belasting die later uitgewerkt worden, en de vrijheidsgraden. De vrijheidsgraden van de tunnelwand zijn:

- Rotatie φ
- Radiale verplaatsing u_r
- Tangentiele verplaatsing u_t

De uitwendige belastingen worden na uitwerking ontbonden in twee parameters:

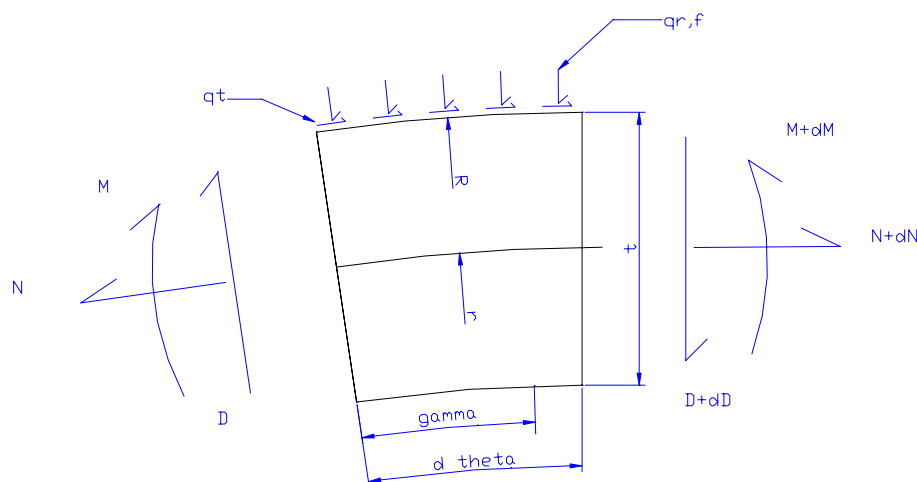
- Radiele belasting q_r
- Tangentiele belasting q_t

Schematisch is het verband tussen de belastingen en vrijheidsgraden als volgt gedefinieerd:

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_t \\ \varphi \end{bmatrix} \Leftarrow \text{kinematisch} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \\ u_r \end{bmatrix} \Leftarrow \text{constitutief} \Rightarrow \begin{bmatrix} N \\ D \\ M \\ f \end{bmatrix} \Leftarrow \text{evenwicht} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_r \\ q_t \end{bmatrix}$$

Om de differentiaalvergelijking te krijgen wordt het stelsel van kinematische, constitutieve en evenwichtsvergelijkingen gecombineerd.

3.2 Evenwichtsvergelijkingen



Figuur 2, Snedekrachten

Met behulp van figuur 1 kunnen de evenwichtsvergelijkingen voor de tangentiële en radiale richting en de vergelijking voor het momentevenwicht opgesteld worden.

Tangentieel evenwicht:

$$\begin{aligned}
 N - (N + dN)\cos(d\theta) + (D + dD)\sin(d\theta) + \int_{\gamma=0}^{d\theta} (f + q_r)\sin\gamma d\gamma R - \int_{\gamma=0}^{d\theta} q_t d\gamma R \cos\gamma &= 0 \\
 N - N\cos(d\theta) - dN\cos(d\theta) + D\sin(d\theta) - R\cos(d\theta)(f + q_r) + R(f + q_r) - q_t R\sin(d\theta) &= 0 \\
 \sin(d\theta) \approx d\theta \\
 \cos(d\theta) \approx 1
 \end{aligned}
 \quad \boxed{-\frac{dN}{d\theta} + D - q_t R = 0} \quad (1)$$

Radieel evenwicht:

$$\begin{aligned}
 D - (D + dD)\cos(d\theta) - (N + dN)\sin(d\theta) - \int_{\gamma=0}^{d\theta} (f + q_r)R d\gamma \cos\gamma - \int_{\gamma=0}^{d\theta} q_t d\gamma R \sin\gamma &= 0 \\
 D - D\cos(d\theta) - dD\cos(d\theta) - N\sin(d\theta) - dN\sin(d\theta) - (f + q_r)R\sin(d\theta) + q_t R\cos(d\theta) - q_t R &= 0 \\
 \sin(d\theta) \approx d\theta \\
 \cos(d\theta) \approx 1
 \end{aligned}
 \quad \boxed{-\frac{dD}{d\theta} - N - (f + q_r)R = 0} \quad (2)$$

Momentevenwicht:

$$\begin{aligned}
 M + Dr\sin(d\theta) - N(r - r\cos(d\theta)) - (M + dM) - \\
 \int_{\gamma=0}^{d\theta} [(f + q_r)d\gamma R \sin\gamma (R\cos\gamma - r\cos(d\theta)) + (f + q_r)d\gamma R \cos\gamma (r\sin(d\theta) - R\sin\gamma)] + \\
 \int_{\gamma=0}^{d\theta} [q_t R d\gamma \cos\gamma (R\cos\gamma - r\cos(d\theta)) - q_t R d\gamma \sin\gamma (r\sin(d\theta) - R\sin\gamma)] &= 0 \\
 M + Dr\sin(d\theta) - Nr + Nr\cos(d\theta) - M - dM + Rr(-f - q_r + f\cos(d\theta) + q_r\cos(d\theta)) \\
 + q_t R^2 d\theta - q_t Rr\sin(d\theta) &= 0 \\
 \sin(d\theta) \approx d\theta \\
 \cos(d\theta) \approx 1
 \end{aligned}
 \quad \boxed{-\frac{dM}{d\theta} + Dr + q_t \frac{Rh}{2} = 0} \quad (3)$$

De evenwichtsvergelijkingen leveren met de gestelde vereenvoudigingen in totaal drie differentiaalvergelijkingen (1,2,3). De gestelde vereenvoudigingen van de $\sin(d\theta)$ en $\cos(d\theta)$ zijn geoorloofd omdat de evenwichtsvergelijkingen opgesteld worden voor het geval dat $d\theta$ naar 0 gaat.

3.3 Constitutieve vergelijkingen

In het algemene geval gelden de volgende Constitutieve vergelijkingen:

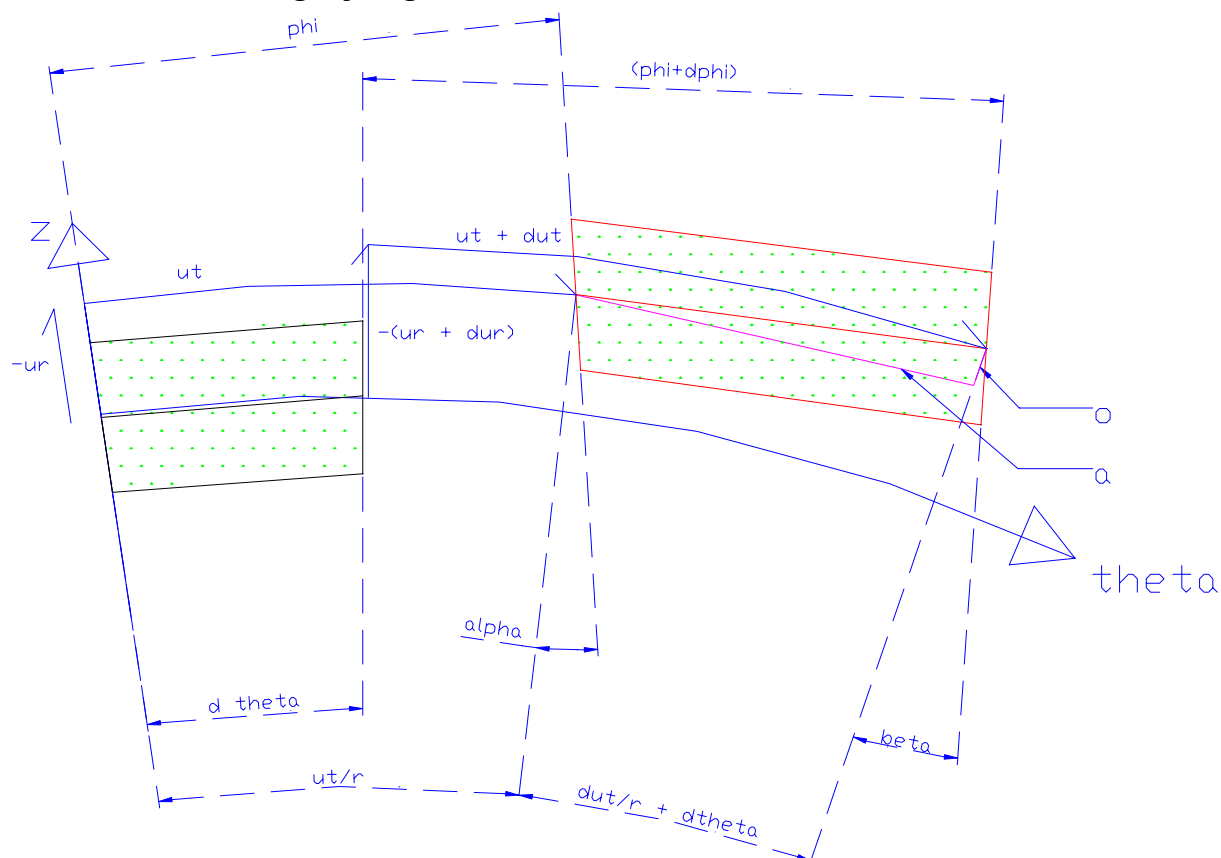
$$N = EA\varepsilon = E \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon dz \quad (4)$$

$$M = -EI\kappa = -E \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon z dz \quad (5)$$

$$D = GA_d \gamma \quad (6)$$

$$f = -k u_r \quad (7)$$

3.4 Kinematische vergelijkingen



Figuur 3, Verplaatsingsparameters

De rek ε wordt in algemene zin als volgt gedefinieerd: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_{nieuw} - d\theta(r+z)}{d\theta(r+z)}$ (8)

l_{nieuw} is de nieuwe lengte van het deeltje $d\theta$ en hangt af van de afstand z tot de as van het deeltje $d\theta$. l_{nieuw} wordt als volgt gedefinieerd (figuur 3):

$$l_{nieuw} = \tilde{l} + z \tan(\alpha) - z \tan(\beta) + z \tan\left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right). \quad (9)$$

$\tilde{l}$ geeft de lengte weer van het vervormde deeltje bij $z=0$. De term “ $z \tan(\alpha) - z \tan(\beta)$ ” geven de rek over de hoogte z weer ten gevolge van vervorming door buiging en afschuiving. De beide hoeken α en β geven de hoekverdraaiing van de beide doorsneden weer (figuur 3).

De laatste term van vergelijking (9): $z \tan\left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right)$ geeft de afstand over de hoogte z weer tussen de beide doorsneden. $\left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right)$ uit vergelijking (9) geeft de hoek na de verplaatsingen in radiale en tangentele richting tussen de beide doorsneden weer (figuur 3).

$\tilde{l}$ volgt uit de stelling van pythagoras:

$$\tilde{l} = \sqrt{o^2 + a^2} \text{ waarin } o = -dur \text{ en } a = \left(\frac{dut}{r} + d\theta\right)(r - u_r) \quad (10)$$

$$\tilde{l} \text{ kan als volgt worden benaderd: } \tilde{l} = a + \frac{o^2}{2a}$$

$$\tilde{l} = dut + rd\theta - ur \cdot dut - ur \cdot d\theta + \frac{dur^2}{2(dut + rd\theta - ur \cdot dut - ur \cdot d\theta)} \quad (11)$$

$$\tilde{l} = d\theta \left[\frac{du_t}{d\theta} - u_r + r + \left(\frac{du_r}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{2r} \right] \quad (12)$$

Zoals te zien is, is de term $ur \cdot dut$ verwaarloosd op basis van de aanname dat de verplaatsingen klein zijn. In de breuk in vergelijking 11 zijn alle termen verwaarloosbaar klein t.o.v. r , dus worden ook verwaarloosd.

De termen α , β en $\left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right)$ uit vergelijking (9) worden als zeer klein verondersteld wat tot gevolg heeft dat (9) overgaat in:

$$l_{nieuw} = \tilde{l} + z \tan(\alpha) - z \tan(\beta) + z \tan\left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right) = \tilde{l} + z \left(\alpha - \beta + \left(\frac{du_r}{r} + d\theta\right) \right) \quad (13)$$

Voor α , β geldt:

$$\alpha = \left(\frac{u_t}{r} + \varphi \right) \quad \beta = \left(\frac{u_t}{r} + \frac{du_t}{r} + d\theta - d\theta + \varphi + d\varphi \right)$$

Beide parameters ingevuld in vergelijking (13):

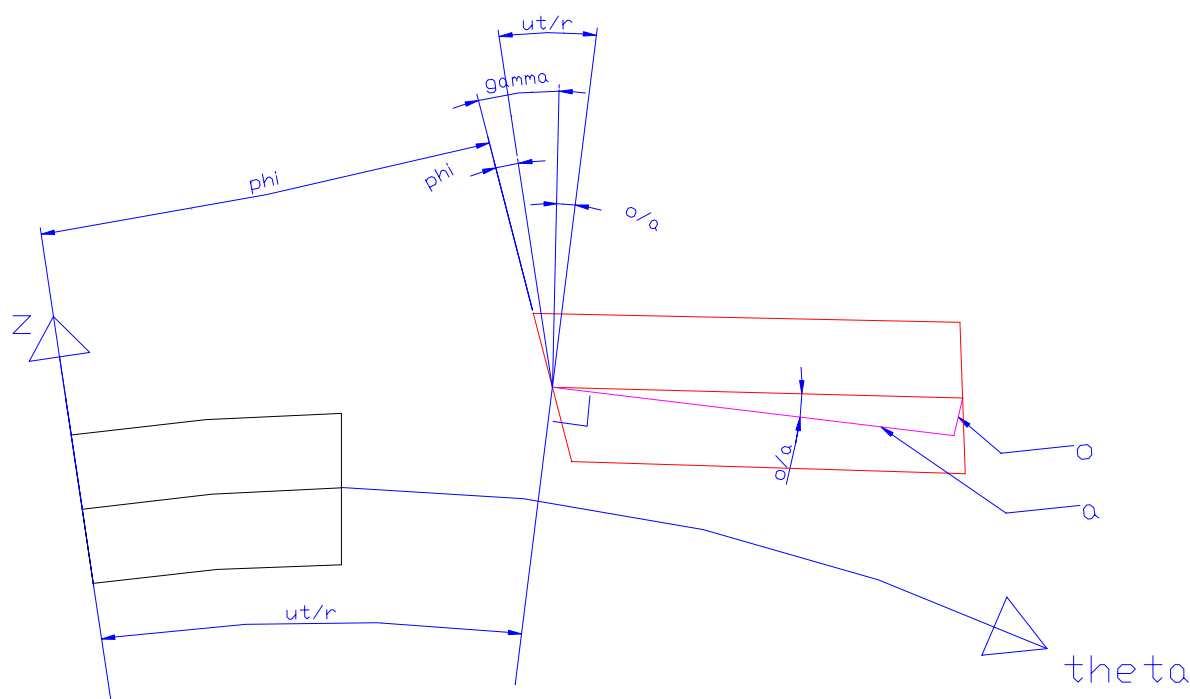
$$l_{\text{nieuw}} = \tilde{l} + z \left(\frac{u_t}{r} + \varphi - \frac{u_t}{r} - \frac{du_t}{r} - \varphi - d\varphi + \frac{du_t}{r} + d\theta \right) = \tilde{l} + zd\theta \left(1 - \frac{d\varphi}{d\theta} \right) \quad (14)$$

Nu de l_{nieuw} bekend is, kan een handzame formule voor de rek worden opgesteld:

$$\varepsilon = \frac{d\theta \left[\frac{du_t}{d\theta} - u_r + r + \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{2r} \right] + zd\theta \left(1 - \frac{d\varphi}{d\theta} \right) - d\theta(r+z)}{d\theta(r+z)}$$

$$\varepsilon = \frac{\left[\frac{du_t}{d\theta} - u_r + \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{2r} \right] + z \left(-\frac{d\varphi}{d\theta} \right)}{(r+z)} \quad (15)$$

Met deze rek ε zijn de relaties tussen het buigend moment en de normaalkracht met de verplaatsingen en rotatie bekend. Nu is het zaak om ook de afschuifhoek γ uit te drukken in de twee verplaatsingsgrootheden en de rotatie φ .



Figuur 4, Rotatie doorsneden

$$\gamma + \frac{o}{a} = \frac{u_t}{r} + \varphi \quad (16)$$

$$\frac{o}{a} = \frac{-du_r}{du_t + rd\theta} \approx \frac{-du_r}{rd\theta} \quad du_t \text{ in de noemer vervalt want } du_t \ll rd\theta \quad (17)$$

de uitdrukking voor γ volgt uit het invoegen van vgl. (17) in (16):

$$\boxed{\gamma = \frac{u_t}{r} + \frac{du_r}{rd\theta} + \varphi} \quad (18)$$

Als laatste dient nog een uitdrukking voor de kromming κ gevonden te worden. Deze term kan zoals eerder gesteld worden uitgedrukt in constitutieve vergelijking (5).

$$\kappa = \frac{-E \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon z dz}{El_{zz}} = \frac{12 \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon z dz}{h^3} \quad (19)$$

Om de uitdrukking voor de kromming wat handelbaarder te maken wordt de integraal in vergelijking (19) middels een Taylorontwikkeling vereenvoudigd waarbij de grootte van de hoogte h ten opzichte van de straal verwaarloosd wordt, en dit resulteert in de volgende formule voor de kromming:

$$\boxed{\kappa = \frac{\frac{du_t}{d\theta} r - u_r r + \left(\frac{du_r}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{2} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{r^3}} \quad (20)$$

3.5 Combineren constitutieve, kinematische en evenwichtsvergelijkingen tot een differentiaalvergelijking

Nu de constitutieve, kinematische en evenwichtsvergelijkingen bekend zijn, kan het stelsel differentiaalvergelijkingen opgesteld worden volgens de relaties aangegeven in paragraaf 2.1. Eerst worden de kinematische en constitutieve vergelijkingen gecombineerd:

$$N = EA\varepsilon = E \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon dz = E \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\frac{du_t}{d\theta} - u_r + \left(\frac{du_r}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{2r} \right] + z \left(-\frac{d\varphi}{d\theta} \right)}{(r+z)} dz \quad (21)$$

De hoogte h van de tunnelwand ten opzichte van de straal r kan verwaarloosd worden, oftewel $h \ll r$. De integraal in vergelijking (21) kan worden vereenvoudigd middels een Taylorontwikkeling. De ontwikkeling voor de term binnen de integraal luidt dan:

$$\left(\frac{du_t}{rd\theta} - \frac{u_r}{r} + \left(\frac{du_r}{rd\theta} \right)^2 \frac{1}{2} \right) h + \left(2 \frac{d\varphi}{r^2 d\theta} + 2 \frac{du_t}{r^3 d\theta} - 2 \frac{u_r}{r^3} + \left(\frac{du_r}{r^2 d\theta} \right)^2 \right) \frac{h^3}{24}$$

Na verwaarlozing van de termen met de orde $1/r^3$ of kleiner en het uitwerken van de integraal in vergelijking (21) kan als uitdrukking voor de normaalkracht worden gesteld:

$$N = EA \left[\frac{du_t}{rd\theta} - \frac{u_r}{r} + \left(\frac{du_r}{rd\theta} \right)^2 \frac{1}{2} \right] + EI \frac{d\varphi}{r^2 d\theta} \quad (22)$$

Uitdrukkingen voor de dwarskracht en het buigend moment zijn vrij eenvoudig te verkrijgen door het combineren van vergelijkingen (5), (6), (16) en (18):

$$D = GA_d \gamma = GA_d \left(\frac{u_t}{r} + \frac{du_r}{rd\theta} + \varphi \right) \quad (23)$$

$$M = EI \kappa = EI \left(\frac{\frac{du_t}{d\theta} r - u_r r + \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{2} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)}{r^3} \right) \quad (24)$$

$$f = -k u_r \quad (7)$$

De snedekrachten zijn uitgedrukt in drie onbekende vervormingsgrootheden (u_r , u_t en φ). De snedekrachten zijn via drie evenwichtsvergelijkingen (1,2,3) uitgedrukt in de belastingen q_t en q_r . Combineren van vergelijkingen (22,23,24,7) en (1,2,3) leidt tot het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

Vergelijking (1): $-\frac{dN}{d\theta} + D - q_t R = 0$ gaat zo over in:

$$\frac{-EA r \frac{d^2 u_t}{d\theta^2} + EA r \frac{du_r}{d\theta} - EA \frac{du_r}{d\theta} \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} - EIr \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + GAR^2 \varphi + GAR u_t + GAR \frac{du_r}{d\theta}}{r^2} = R q_t \quad (25)$$

Vergelijking (2): $-\frac{dD}{d\theta} - N - (f + q_r)R = 0$ wordt:

$$\frac{- \left(+2EA r^2 \frac{d\varphi}{d\theta} 2GA_d r \frac{du_t}{d\theta} + 2GA_d r \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + 2EA r \frac{du_t}{d\theta} - 2EA r u_r + EA \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 - EI \frac{d\varphi}{rd\theta} - 2k u_r r^3 - k u_r r^2 h \right)}{2r^2} = -R q_r \quad (26)$$

en tenslotte vergelijking (3): $-\frac{dM}{d\theta} + Dr + q_t \frac{Rh}{2} = 0$:

$$\frac{-EIr \frac{d^2 u_t}{d\theta^2} + EIr \frac{du_r}{d\theta} - EI \frac{d^2 u_r}{d\theta^2} \frac{du_r}{d\theta} - EIr^2 \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + GAR^4 \varphi + GAR^3 u_t + GAR^3 \frac{du_r}{d\theta}}{r^3} = -q_t \frac{Rh}{2} \quad (27)$$

Het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (25,26,27) blijkt niet op te lossen met het algemene computerrekenprogramma "Waterloo Maple". De complexiteit is te groot en dus zullen er vereenvoudigingen gemaakt moeten worden.

3.6 Opstellen vereenvoudigde differentiaalvergelijking

Vereenvoudigingen in de differentiaalvergelijking komen voort uit vereenvoudigingen in de kinematische en evenwichtsvergelijkingen. De constitutieve relaties veranderen uiteraard niet.

De eerste vereenvoudiging die gemaakt wordt, is dat de dwarskrachtvervorming γ nul gesteld wordt. Deze vereenvoudiging is gerechtvaardigd in het geval van slanke constructies. Eerder is gesteld dat $h \ll r$, zodat de tunnelbuisconstructie als slanke constructie beschouwd kan worden en zodoende de afschuiving een ondergeschikte rol speelt. Deze vereenvoudiging heeft de volgende consequentie voor de kinematische vergelijking (18):

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{u_t}{r} + \frac{du_r}{rd\theta} + \varphi = 0 \\ \varphi &= -\frac{u_t}{r} - \frac{du_r}{rd\theta}\end{aligned}\quad (28)$$

Het belastinggeval wordt op twee manieren beschouwd, die samen te totale oplossing geven. De extensie in dunwandige buizen zoals de tunnel die hier wordt beschouwd is globaal gezien alleen maatgevend indien er een constante belasting op de tunnelbuiswand aanwezig is. Bij een variatie in de belasting krijgen de spanningen en dus rekken veroorzaakt door het buigend moment de overhand. De twee gevallen waarin de totale belasting wordt gesplitst zijn dan ook een continu en een variabel deel. Het eerste deel van de belasting dat wordt beschouwd is het variabele deel.

3.6.1 Differentiaalvergelijking bij variërende belasting

Bij een over de omtrek variërende belasting zijn de vervormingen veroorzaakt door een buigend moment maatgevend ten opzichte van de normaalkrachtvervorming. Om dit geval te beschouwen wordt de extensie nul gesteld en de rekstijfheid als oneindig aangenomen.

In formulevorm: $\varepsilon(z=0) = 0$ en $EA = \infty$.

Om de effecten van de bovenstaande verwaarlozing te kwalificeren moet de afleiding van de extensie worden beschouwd. De rek op de as ($z=0$) wordt gegeven volgens vergelijking (8):

$$\varepsilon(0) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_{\text{nieuw}} - rd\theta}{rd\theta} = 0 \quad (8)$$

$$l_{\text{nieuw}}(0) = \tilde{l} = rd\theta$$

$$\tilde{l} = d\theta \left[\frac{du_t}{d\theta} - u_r + r + \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{2r} \right] = rd\theta \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\frac{du_t}{d\theta} &= u_r - \left(\frac{du_r}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{2r} \\ \frac{du_t}{d\theta} &\approx u_r\end{aligned}\quad (29)$$

Nu de rek nul gesteld is, kan de kromming κ voor dit geval bepaald worden om tot een bruikbare uitdrukking te komen. Bekend is de volgende definitie voor de kromming:

$$\kappa = \frac{\frac{du_t}{d\theta}r - u_r r + \left(\frac{du_r}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{2} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{r^3} \quad (20)$$

Wanneer de in deze paragraaf gemaakte vereenvoudigingen worden ingevuld in vergelijking (20) en bij verwaarlozing van de kwadratische term die een factor kleiner is dan de overige termen in vergelijking (30), volgt de volgende formule voor de kromming:

$$\kappa = \frac{\frac{du_t}{d\theta}r - u_r r + r^2 \left(\frac{d}{d\theta} \left(-\frac{u_t}{r} - \frac{du_r}{rd\theta}\right)\right)}{r^3} = -\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} = \frac{d\varphi}{rd\theta} \quad (30)$$

De kinematische relaties zijn nu vereenvoudigd en het maatgevende onderdeel, de kromming is uitgedrukt in één vrijheidsgraad namelijk de radiale verplaatsing. Nu kunnen de Evenwichtsvergelijkingen worden vereenvoudigd.

De evenwichtsvergelijkingen voor het radiale en het momentevenwicht zijn:

$$-\frac{dD}{d\theta} - N - (f + q_r)R = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{dM}{d\theta} + Dr + q_t \frac{Rh}{2} = 0 \quad (3)$$

Wanneer vergelijking (2) in vergelijking (3) wordt ingevoegd ontstaat de vergelijking bij verwaarlozing van het verschil tussen R (omtrek) en r (omtrek door het midden van de tunnelwand):

$$-\frac{d^2 M}{d\theta^2} - Nr = \left(f + q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2}\right) r^2 \quad (31)$$

De extensie is verwaarloosd in de vereenvoudigingen voor de kinematische relaties. De normaalkracht wordt gegeven volgens de constitutieve relatie

$$N = EA\varepsilon(0) + EI \frac{d\varphi}{r^2 d\theta} = \frac{M}{r} \quad (32)$$

De evenwichtsvergelijking die dan gevormd wordt:

$$-\frac{d^2 M}{d\theta^2} - M = \left(f + q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2}\right) r^2 \quad (33)$$

Benodigde constitutieve relaties voor vergelijking (33) zijn:

$$M = EI \kappa \quad (5)$$

$$f = -k u_r \quad (7)$$

Wanneer nu vergelijkingen (32),(5),(7) en vereenvoudigde vergelijking voor de kromming (31) gecombineerd worden ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} -EI \frac{d^2}{d\theta^2} \left(-\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} \right) - EI \left(-\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} \right) &= \left(-k u_r + q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2} \right) r^2 \\ EI \left(\frac{d^4 u_r}{r^2 d\theta^4} + \frac{2d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} + \frac{u_r}{r^2} \right) + k u_r r^2 &= \left(q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2} \right) r^2 \end{aligned} \quad (34)$$

De nu verkregen lineaire differentiaalvergelijking is wel op te lossen met de correcte randvoorwaarden en een goede definitie van de belasting. Deze oplossing wordt nader uitgewerkt in hoofdstuk 4

3.6.2 Differentiaalvergelijking bij constante belasting

Het tweede limietgeval dat beschouwd wordt, is de constante belasting op de tunnelbuis. In dit geval speelt de extensie een maatgevende rol ten opzichte van de buiging. In formulevorm kan dit als volgt worden weergegeven:

$$\frac{d\varphi}{rd\theta} = 0$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{rd\theta} &= \frac{d}{rd\theta} \left(-\frac{u_t}{r} - \frac{du_r}{rd\theta} \right) = 0 \\ \frac{du_t}{d\theta} &= -\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (35)$$

De belasting is over de gehele omtrek gelijk, evenals de omgevingscondities. Dit houdt in dat de verplaatsing u_r over de gehele omtrek constant moet zijn. Oftewel:

$$\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} = \frac{du_r}{d\theta} = 0$$

Hieruit volgt de volgende uitdrukking voor de normaalkracht:

$$N = EA \left[\frac{du_t}{rd\theta} - \frac{u_r}{r} + \left(\frac{du_r}{rd\theta} \right)^2 \frac{1}{2} \right] + EI \frac{d\varphi}{r^2 d\theta} = -EA \frac{u_r}{r} \quad (36)$$

Uiteraard verandert ook de uitdrukking voor het buigend moment. De formule voor de algemene uitdrukking van de kromming is als volgt:

$$\kappa = \frac{\frac{du_t}{d\theta} r - u_r r + \left(\frac{du_r}{d\theta}\right)^2 \frac{1}{2} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{r^3} \quad (20)$$

Bij constante u_r van de term met betrekking tot de buiging wordt de volgende vergelijking voor de kromming gevormd:

$$\kappa = \frac{-u_r}{r^2}$$

Dit geeft de volgende uitdrukking voor het buigend moment:

$$M = EI\kappa = -\frac{EI}{r^2}(u_r) \quad (37)$$

De relatie tussen het buigend moment en de normaalkracht is in dit geval:

$$N = M \frac{EA}{EI} r \quad (38)$$

De normaalkracht is echter wel een orde groter dan in het eerste geval. Dit volgt de verwachtingen aangezien in dit geval de extensie wel een rol speelt.

De evenwichtsvergelijking volgt uit de volgende relaties

$$-\frac{dN}{d\theta} + D - q_t R = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{dD}{d\theta} - N - (f + q_r) R = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{d^2 N}{d\theta^2} - N = \left(f + q_r + \frac{dq_t}{d\theta}\right) R \quad (39)$$

Na invullen van de vergelijking (36) voor de normaalkracht in de vergelijking (39) wordt de volgende differentiaalvergelijking gevormd:

$$\frac{EA}{r} \left(\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + u_r \right) = \left(-ku_r + q_r + \frac{dq_t}{d\theta} \right) R \quad (40)$$

Als belasting is uitgegaan van slechts een constante radiale belasting, zodat de afgeleide van de tangentele belasting niet wordt meegenomen. Bovendien is de tweede afgeleide van de radiale verplaatsing nul. Zo kan voor de radiale verplaatsing in dit geval worden gesteld:

$$u_r = \frac{q_r r^2}{kr^2 + EA} \quad (41)$$

In het algemene geval kan differentiaalvergelijking (40) worden opgelost met de volgende randvoorwaarden die zijn opgesteld aan de hand van symmetrieoverwegingen:

$$\frac{du_r}{d\theta}(\theta = 0) = 0 \quad \frac{du_r}{d\theta}(\theta = \pi) = 0$$

Uiteraard zal in het hier beschouwde geval vergelijking (41) als oplossing van de differentiaalvergelijking gelden met de bovenstaande randvoorwaarden.

4 Oplossen differentiaalvergelijking

In dit hoofdstuk wordt de oplossing van de differentiaalvergelijking (34) met betrekking tot de variërende belasting beschouwd. De vergelijking welke de vervorming door constante belasting weergeeft is geen differentiaalvergelijking en is al opgelost in paragraaf 3.6.2

4.1 Homogene Oplossing

De oplossing van de opgestelde differentiaalvergelijking bestaat uit twee delen, een homogene, algemene oplossing, geldend voor elk belastinggeval. En ten tweede een particuliere oplossing die de opgelegde belasting verwerkt in het model.

Voor de homogene oplossing wordt de belasting op het systeem nul gesteld. De homogene vergelijking die opgelost dient te worden is dus:

$$EI \left(\frac{d^4 u_r}{r^2 d\theta^4} + \frac{2d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} + \frac{u_r}{r^2} \right) + k u_r r^2 = \left(q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2} \right) r^2 \quad (34)$$

$$u_r = C1 e^{\sqrt{-1+\lambda}\theta} + C2 e^{\sqrt{-1-\lambda}\theta} + C3 e^{-\sqrt{-1+\lambda}\theta} + C4 e^{-\sqrt{-1-\lambda}\theta} \quad (42)$$

waarvoor geldt:

$$\lambda = \sqrt{-\frac{kr^4}{EI}}$$

In het algemeen geldt dat $k \cdot r^4 / EI$ positief zijn. λ in het algemeen dus een complex getal zonder een reeel deel.

4.2 Particuliere oplossing

De maatgevende variabele radiale belastingen op de tunnelbuis zullen in dit onderzoek van de volgende vorm zijn, deze vorm wordt in hoofdstuk 5 nader toegelicht:

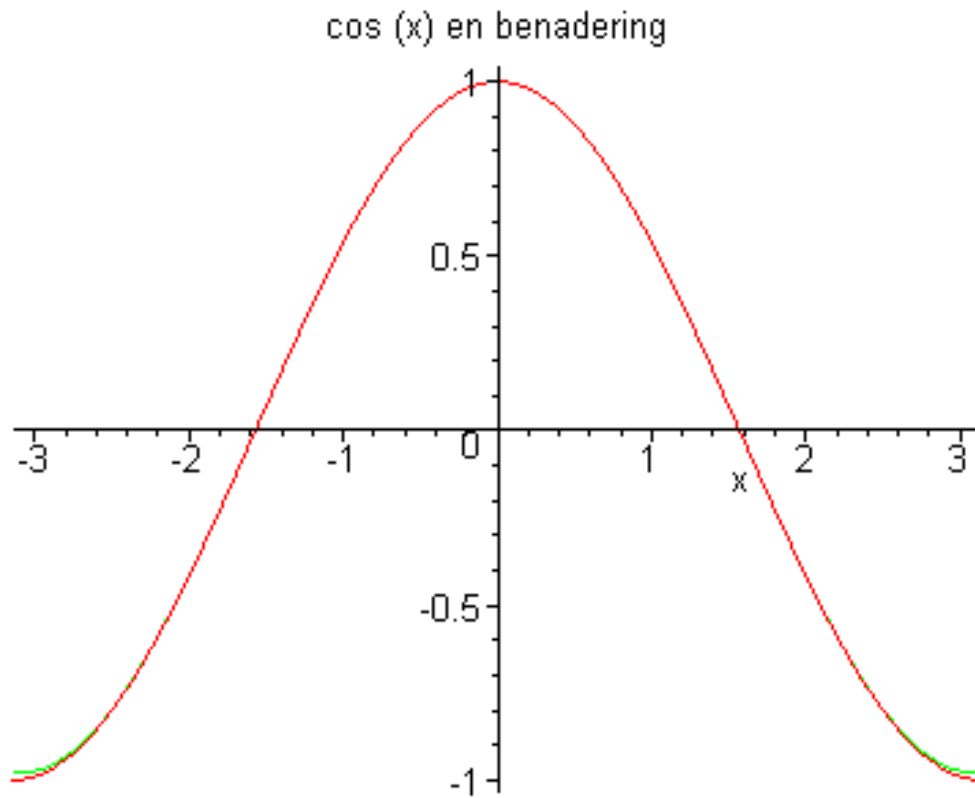
$$q_r = K(-R \cos(\theta)) \quad (43)$$

R = straal tunnelbuis

K = constante die afhangt van de belasting

Belasting in bovenstaande vorm geeft echter geen particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking. Benaderingen van vergelijking (37) zijn vrij eenvoudig te maken met een Taylorontwikkeling van de cosinus rond $\theta = 0$ (vergelijking (37)). Bij een afbreekterm van de orde θ^{10} kan de benadering nauwkeurig genoeg genoemd worden (figuur 5).

$$q_r = -KR - \frac{KR\theta^2}{2} + \frac{KR\theta^4}{24} - \frac{KR\theta^6}{720} + \frac{KR\theta^8}{40320} \quad (44)$$



Figuur 5, benadering cosinus

Wanneer deze belasting (38) wordt ingevoerd in de differentiaalvergelijking wordt er een particuliere oplossing gevonden.

Omdat bij de afleiding van de vereenvoudigde differentiaalvergelijking uitgegaan is van de ondergeschikte rol van de extensie in het hele systeem, wordt de tangentieel gerichte belasting die voor het moment een zeer geringe invloed heeft niet meegenomen. In de differentiaalvergelijking komt dit ook duidelijk naar voren:

$$EI \left(\frac{d^4 u_r}{r^2 d\theta^4} + \frac{2d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} + \frac{u_r}{r^2} \right) + k u_r r^2 = \left(q_r - \frac{dq_t}{rd\theta} \frac{h}{2} \right) r^2 \quad (34)$$

De tangentele belasting wordt in het rechterlid vermenigvuldigd met de factor $h/2$. In eerder gemaakte vereenvoudigingen wordt de wanddikte h verwaarloost ten opzichte van de straal r , wat de rechtvaardiging is van het weglaten van de invloed van de tangentele belasting op de radiale verplaatsing.

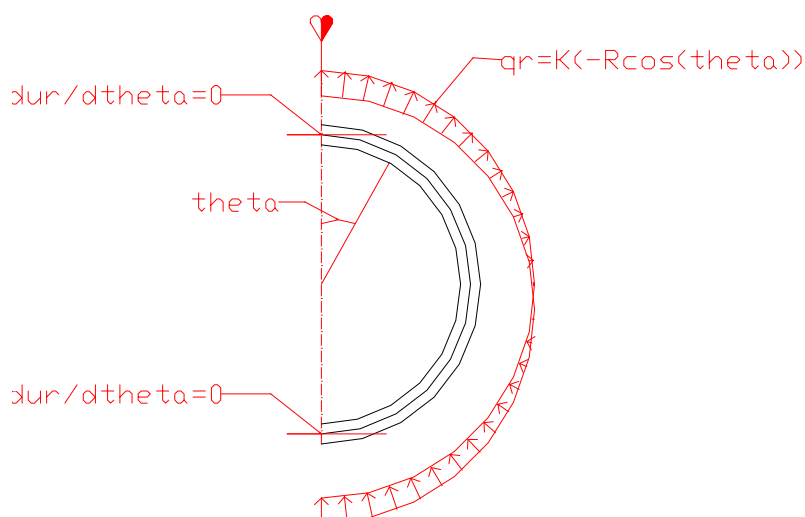
4.3 Totale oplossing

De totale oplossing bestaat uit een samenvoeging van de particuliere en homogene oplossing:

$$u_r = u_{r,\text{hom}} + u_{r,p} \quad (45)$$

Deze totale oplossing kent nog vier onbekenden, te weten C1, C2, C3 en C4. Deze kunnen opgelost worden als de correcte randvoorwaarden bekend zijn. Daarom worden de te gebruiken randvoorwaarden eerst toegelicht.

De tunnelbuis betreft een continu en symmetrisch systeem. Van deze twee eigenschappen wordt gebruik gemaakt bij de formulering van de randvoorwaarden. Op basis van symmetrie kan worden gesteld dat bij gelijke omgevingscondities aan weerszijden van de verticale symmetrieas, de helling van de omtrek van de tunnelbuis aan de top en onderzijde van de buis volledig horizontaal zal moeten lopen.

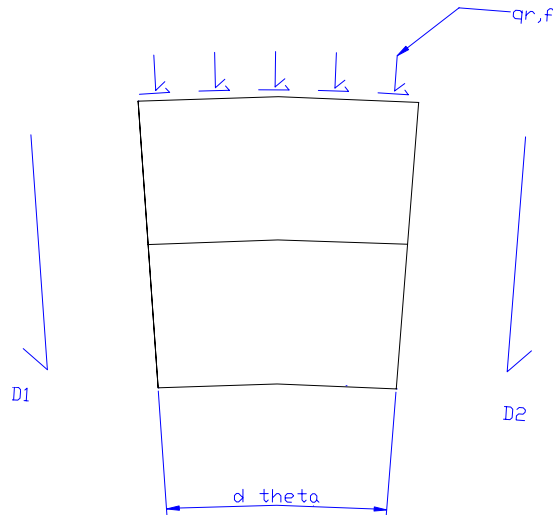


Figuur 6, symmetrie tunnelbuis en variabele belastingen (de belasting is voor de duidelijkheid iets van de tunnel af weergegeven)

In formulevorm kunnen deze randvoorwaarden worden weergegeven:

$$\frac{du_r}{d\theta}(\theta = 0) = 0 \quad \frac{du_r}{d\theta}(\theta = \pi) = 0 \quad (46)$$

Als derde en vierde randvoorwaarde wordt de dwarskracht in de top ($\theta = 0$) en de onderkant ($\theta = \pi$) van de tunnelbuiswand beschouwd. In deze beschouwing wordt wederom de symmetrie als uitgangspunt genomen. In figuur 7 zijn de relevante werkende krachten op het deeltje $d\theta$ in de top van de buis ($\theta = 0$).



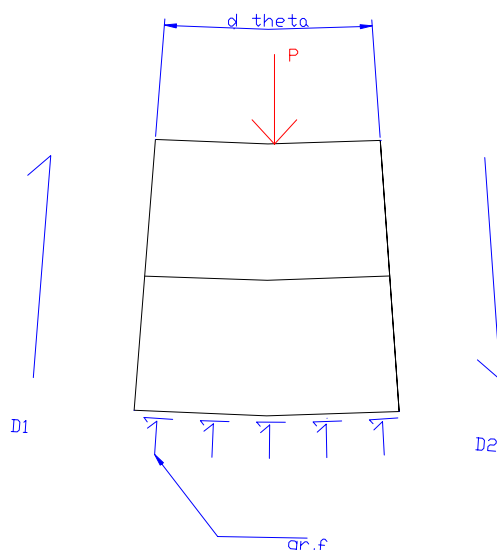
Figuur 7, D - evenwicht aan de top van de buis

Beschouwd wordt het limietgeval als $d\theta$ nadert tot 0. In dit limietgeval spelen de uitwendige belastingen q_r en f geen rol. $D1$ is de dwarskracht veroorzaakt voor de rechterhelft van de tunnel ($0 < \theta < \pi$) en $D2$ wordt veroorzaakt door de linkerhelft van de tunnel. ($-\pi < \theta < 0$) In het deeltje heerst uiteraard een evenwichtssituatie wat inhoudt dat $D1 = -D2$. Uit symmetrieoverwegingen (figuur 6) kan worden gesteld dat $D1 = D2$, aangezien de belastingen aan beide zijden gelijk zijn. Dit houdt in dat de voor de dwarskrachten moet gelden:

$$D1 = D2 = D(\theta = 0) = 0$$

$$D = \frac{dM}{d\theta} = EI \frac{d\kappa}{d\theta} = EI \left(-\frac{du_r}{d\theta r^2} - \frac{d^3 u_r}{r^2 d\theta^3} \right) \quad (47)$$

Aan de onderzijde van de tunnelbuiswand ($\theta = \pi$) geldt in principe hetzelfde. Als de vierde randvoorwaarde inhoudt dat een snedekracht of verplaatsing ook nul is, is de oplossing van de differentiaalvergelijking triviaal. Om dit te voorkomen wordt er in de doorsnede op ($\theta = \pi$) een puntlast aangenomen (figuur 8). Over de gehele lining houdt dit dus een lijnlast in.



Figuur 8, D- evenwicht onder in de tunnelbuis

Uit figuur 8 kan opgemaakt worden dat in het limietgeval $d\theta$ nadert tot 0, wanneer de q_r en f geen relevante rol spelen de dwarskracht $D2$ als volgt kan worden uitgedrukt:

$$D(\theta = \pi) = \frac{dM}{rd\theta}(\theta = \pi) = EI \left(-\frac{du_r}{r^3 d\theta} - \frac{d^3 u_r}{r^3 d\theta^3} \right) = -\frac{P}{2} \quad (48)$$

De dwarskracht is alleen afhankelijk van de puntlast P , omdat de dwarskracht veroorzaakt door de overige belastingen in de top en de punt 0 is (figuur 7).

Er zijn nu 4 randvoorwaarden geformuleerd, in de vergelijking voor de radiale verplaatsing (42) stonden nog 4 onbekenden wat betekent dat de differentiaalvergelijking opgelost kan worden.

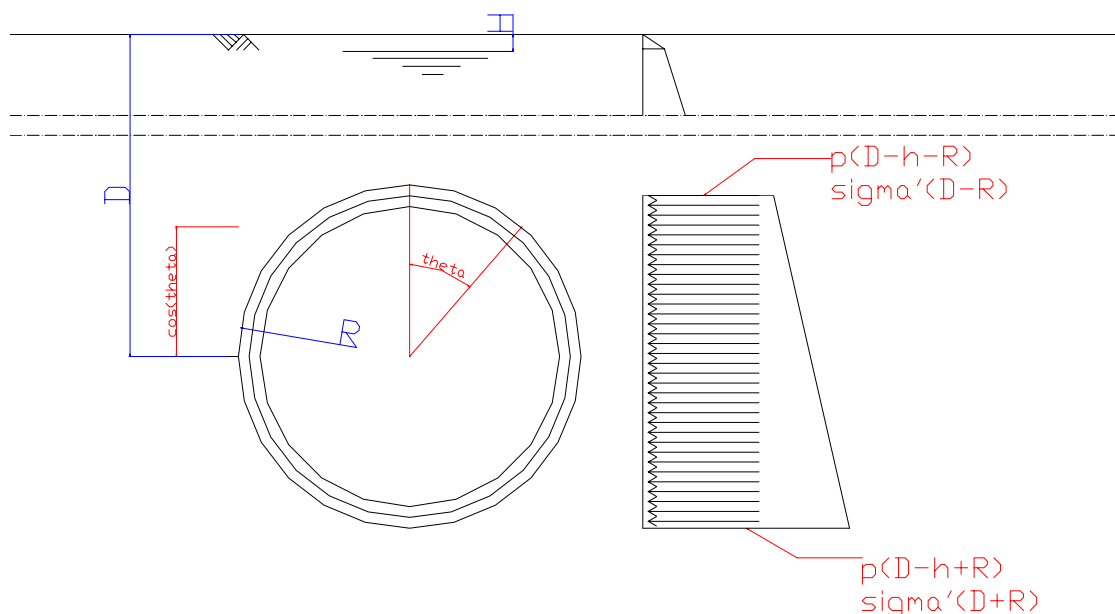
De homogene oplossing (42) is echter te complex om een algemene uitdrukking voor de vier constanten op te stellen. Dit heeft te maken met het feit dat de term λ in de homogene oplossing complex is voor alle soortgelijke gevallen als het in dit onderzoek beschouwde. De vierkantswortel van dit getal is de macht. Normale complexe e-machten kunnen vrij eenvoudig worden omgeschreven tot een cosinus en een imaginaire sinus, maar door de aanwezigheid van de wortel wordt dit verhinderd.

Nu de constanten niet zijn uit te drukken in de bekende variabelen, blijft het bij het opstellen van een methode voor de berekening van spanningen in tunnelbuizen. Middels enige numerieke voorbeelden zullen de resultaten in het vervolg van het rapport worden toegelicht.

5 Kwantificeren Belastingen en Parameters

5.1 In toepasbaar vorm schrijven van belastingen

De uitwendige belastingen op de tunnel als grond- en waterdruk zijn over de hoogte van de tunnel niet constant en de ronde vorm van de tunnel geeft ook enige moeilijkheden bij het opstellen van de belastingen in een bruikbare formule vorm



Figuur 9, Grond- en waterdruk

De grond- en waterdruk verloopt zoals te zien is in figuur 9 lineair met de diepte. De diepte uitgedrukt in θ verloopt volgens een cosinus. Verder geldt dat de waterdruk alzijdig is, en dat de radiale druk door het water dus gelijk is aan de waterdruk.

$$q_{r,water}(\theta) = p(\theta) = \rho_{water} g (D - H - R \cos \theta) \quad (49)$$

ρ_{water} = soortelijk gewicht water

Als tweede onderdeel van de belastingen geldt de gronddruk. Een uitgebreide analyse van de grondspanningen op de tunnelwand valt niet binnen het kader van dit onderzoek. Om de formulering wat eenvoudig te houden wordt er vanuit gegaan dat de radiale belasting op de tunnelwand over de gehele omtrek gelijk is aan de verticale korrelspanning. Hierin zijn dus zowel de verticale als horizontale gronddruk verdisconteerd.

Als de gronddruk op deze manier in formulevorm wordt uitgedrukt:

$$q_{r,grond} = \gamma_{droog} H + (\gamma_{nat} - \rho_{water}) (D - H - R \cos \theta) \quad (50)$$

γ_{droog} = soortelijk gewicht droge grond

γ_{nat} = soortelijk gewicht natte grond

De totale uitwendige belasting door water en gronddruk kan geformuleerd worden door het combineren van vergelijkingen (49) en (50):

$$q_{r,grond} = \gamma_{droog}H + \gamma_{nat}(D - H - R \cos \theta) \quad (51)$$

Eerder is bij de afleidingen van de differentiaalvergelijkingen naar voren gekomen dat de belasting dient te worden gesplitst in een continu en een variabel deel. In vergelijking (51) zijn duidelijk een variabele en een continue belasting te onderscheiden:

$$q_{r,grond,var} = \gamma_{nat}(-R \cos \theta) \quad (52)$$

$$q_{r,grond,cont} = \gamma_{droog}H + \gamma_{nat}(D - H) \quad (53)$$

In paragraaf 4.2 werd de variabele belasting aangenomen volgens vergelijking (43):

$$q_r = K(-R \cos(\theta)) \quad (43)$$

Deze vorm blijkt goed overeen te komen met de variabele belasting (52).

5.2 Kwantificeren parameters tunnelmodel

Als uitgangspunt in dit rapport is de HSL-tunnel onder het Groene Hart genomen. De parameters zullen in eerste instantie overeenkomen met de eigenschappen van deze tunnel. Dit houdt in dat de groottes van de tunneldoorsnede als volgt zijn gegeven:

Afmeting	Grootte
Straal R	7.500 mm
Diepte ligging D	25 m.
Wanddikte h	0.6 m
Grondwaterstand	1 m - m.v.
gamma droog	16 kN/m ³
gamma nat	20 kN/m ³
Elasticiteitsmodulus beton	30.000 N/mm ²

De rekstijfheid EI en buigstijfheid EA dient bepaald te worden voor een elementair deeltje dθ, en niet voor de gehele tunneldoorsnede als ring. De beide waarden worden in dit geval:

$$EI = E \frac{h^3}{12} = 5,4 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2 \quad EA = Eh = 1,80 \cdot 10^7 \text{ N}$$

Als laatste parameter moet de Elasticiteitsmodulus k van de grond nog bepaald worden. Deze waarde wordt met de volgende vergelijking bepaald:

$$k = C10\sigma' \quad (54)$$

De waarde van C10 loopt uiteen van 20 tot 200. In de verdere beschouwingen zal een waarde C10 van 100 aangehouden worden. Voor de effectieve grondspanning σ' zal de waarde rond het midden van de tunnelbuis aangehouden worden. Oftewel de effectieve spanning op 25 m. diepte. Deze spanning wordt als volgt bepaald:

$$\sigma' = H\gamma_{droog} + (D - H)(\gamma_{nat} - \rho_{water}g) \quad (55)$$

De twee laatste vergelijkingen leveren de volgende waarde voor de elasticiteitsmodulus van de grond:

$$k = 25,6 \text{ N/mm}^2$$

6 Gestelde hypothese

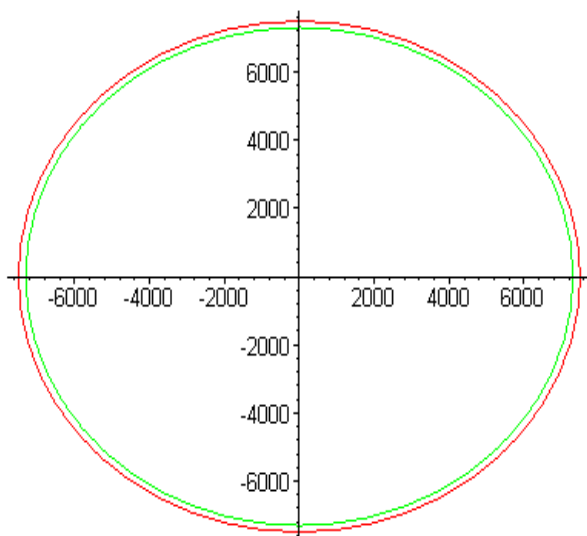
In de doelstelling van het onderzoek is reeds aangegeven dat er een hypothese gesteld is die in dit onderzoek is beschouwd. De hypothese luidt als volgt:

“Water en gronddruk geven geen buigende momenten in de tunnelbuiswand”

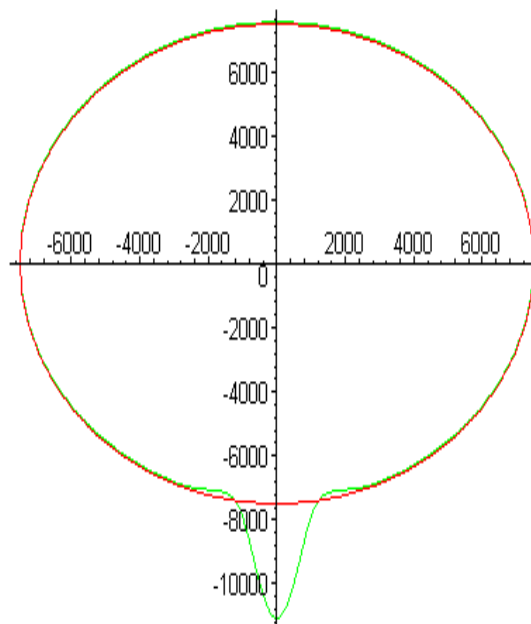
In het onderzoek is naar voren gekomen dat er geen handzame vergelijking is op te stellen voor de verplaatsingen ten gevolge van de vervorming door het buigend moment ten gevolge van variabele belasting. Een daadwerkelijk algemeen geldend bewijs voor bovenstaande stelling is binnen het kader van dit onderzoek niet te geven. Door een numeriek voorbeeld met hun resultaten te geven kan wel worden gezegd binnen welke restricties deze hypothese geldt. In bijlage B zijn nog een aantal numerieke voorbeelden uitgewerkt. Vervolgens worden deze uitkomsten verklaard.

6.1 Vergelijken modeluitvoer met hypothese

Wanneer de parameters van de Groene-harttunnel worden ingevoerd in de opgestelde differentiaalvergelijking (34), de vergelijking voor de verplaatsing ten gevolge van extensie (41) en de bijbehorende randvoorwaarden worden voor de radiale verplaatsing de volgende figuren gevonden:



Figuur 11, radiale verplaatsing ten gevolge van extensie



Figuur 10, radiale verplaatsing ten gevolge van buiging

In figuur 11 is de radiale verplaatsing ten gevolge van de constante belasting 10.000 x vergroot en de onvervormde tunnelbuisomtrek weergegeven. De groene lijn is de vervormde toestand. De extensie is onder de constante belasting constant, en de radiale verplaatsingen dus ook.

Figuur 10 geeft de radiale verplaatsing ten gevolge van de variabele belasting weer. De verplaatsingen zijn in deze figuur ook 10.000 x vergroot. De puntlast P die onder aan de

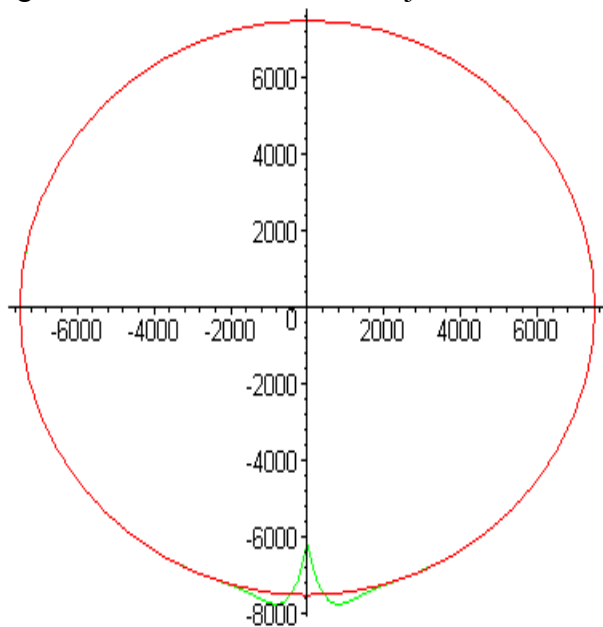
tunnelbuis als randvoorwaarde is aangebracht heeft een grootte van 10 kN. Het valt op dat de verplaatsing over de gehele omtrek vrijwel nihil is, met uitzondering van het gedeelte van de omtrek rondom de puntlast. Dit gedeelte hoeft ook niet verder beschouwd te worden omdat dit slechts een manier was om de differentiaalvergelijking op te lossen. De puntlast heeft verder geen fysische betekenis.

Nu de vervorming van de tunnelbuis bekend is, kan het buigend moment om de omtrek van de buis bepaald worden. Er geldt immers:

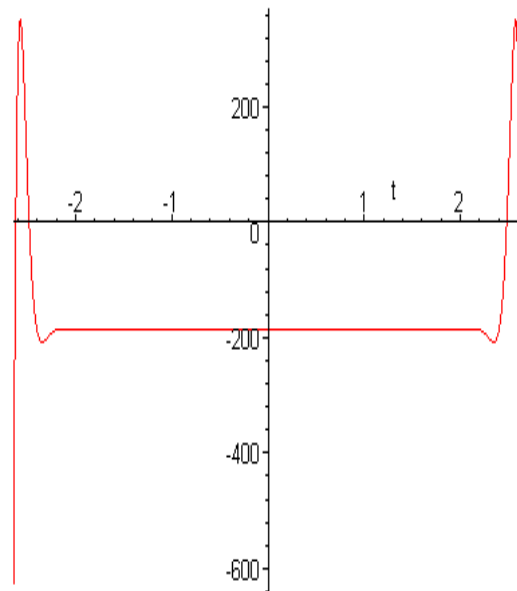
$$M = EI\kappa = EI\left(-\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2 u_r}{r^2 d\theta^2}\right) \text{ voor de verplaatsing ten gevolge van variabele belasting} \quad (56)$$

$$M = EI\kappa = -\frac{EI}{r^2}(u_r) \text{ voor de verplaatsing ten gevolge van constante belasting} \quad (37)$$

De momentlijn is dan eenvoudig te bepalen uit de bekende radiale verplaatsingen. In de figuren 12 en 13 is de momentlijn voor de tunnelbuis weergegeven:



Figuur 13, Totale momentenlijn rond de omtrek



Figuur 12, Totale momenten lijn (Nmm) (t=hoek theta vanaf de top van de buis)

De momentlijn (het buigend moment is een factor 1000 verkleind) volgt het karakter van de verplaatsing. Het moment is overal vrijwel gelijk met uitzondering van de verstoring aan de onderkant van de tunnelbuis ten gevolge van de puntlast. In het rechterfiguur is het buigend moment weergegeven in het gebied waar de puntlast nog geen invloed heeft op het moment. We vinden hier een waarde zo ongeveer -195 Nmm. Deze waarde is zeer klein en deze waarde kunnen we dan ook verwaarlozen. Voor dit geval is de hypothese dus correct. In bijlage C zijn nog een aantal vaak extreme gevallen opgenomen. Bij hoge belastingen en een lage grondstijfheid neemt het moment wel toe, maar de resultaten zijn nog altijd te verwaarlozen.

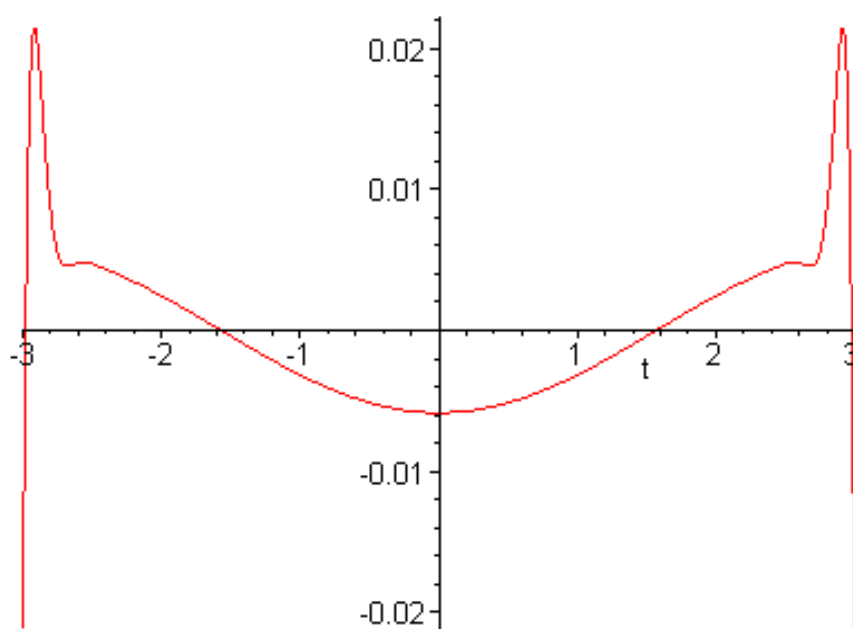
6.2 Verklaring voor het gelden van de hypothese

Om de hypothese te verklaren dienen de verplaatsingen en momenten nader bekeken te worden. De radiale verplaatsing ten gevolge van de continue belasting is continu over de gehele omtrek van de tunnelbuis. Deze continue verplaatsing geeft een continu moment volgens de vergelijking

$$M = EI\kappa = -\frac{EI}{r^2}(u_r) \quad (37)$$

Dit moment ten gevolge van de extensie is klein, en bij benadering kan deze dan ook nul gesteld worden. Zie ook het getallenvoorbeeld in paragraaf 6.1.

De radiale verplaatsing ten gevolge van de variabele belasting geeft een ander verhaal. Het voorbeeld uit paragraaf 6.1 geeft de volgende verplaatsingen:

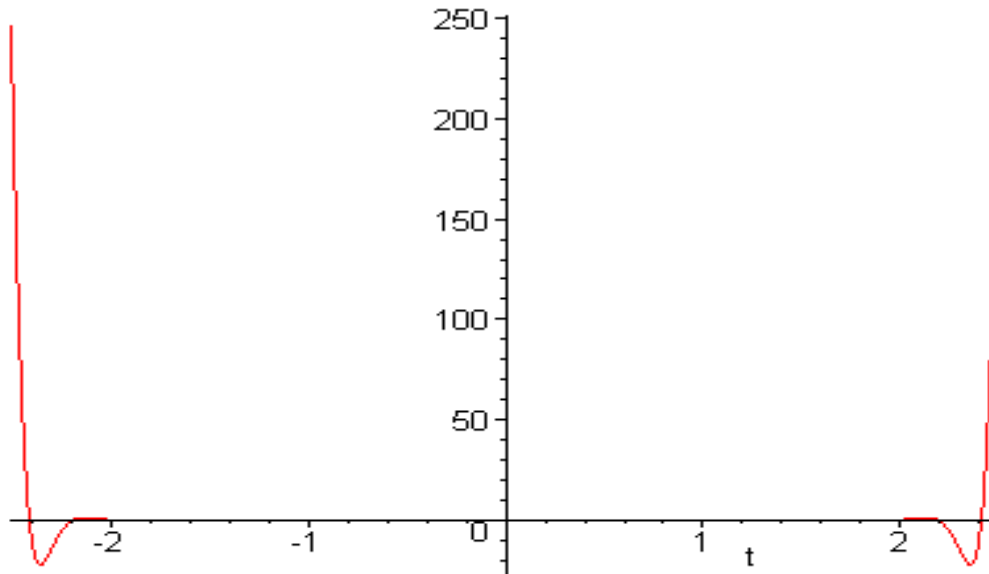


Figuur 14, radiale verplaatsing door continue belasting (mm)

Als we de extremen in figuur 14 rond ($\theta = \pm\pi$) buiten beschouwing laten, deze zijn immers als randvoorwaarde opgelegd en hebben verder geen betekenis, zien we een harmonische verdeling van de verplaatsingen. Het buigend moment in het geval van variabele belasting wordt gegeven door:

$$M = EI\kappa = EI\left(-\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2u_r}{r^2 d\theta^2}\right) \quad (56)$$

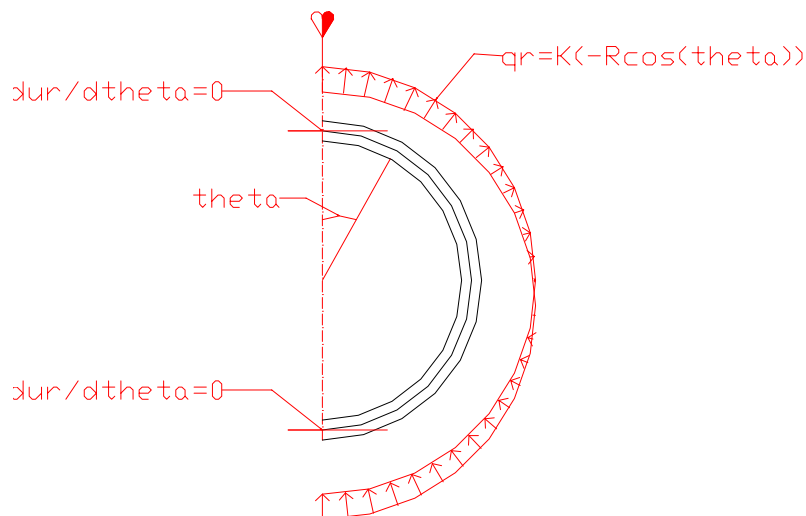
Het moment weergegeven over de omtrek ziet er als volgt uit:



Figuur 15, buigend moment door variabele belasting (Nmm)

Het blijkt dat de variabele belasting in het geheel geen buigend moment geeft. De extremen worden wederom veroorzaakt door de puntlast P uit de randvoorwaarden.

De verklaring voor deze ring zonder buigend moment kan worden gevonden door nogmaals naar de optredende verplaatsing te kijken. Deze is harmonisch, en is aan de top negatief. Deze verplaatsingen zijn te verwachten als de niet variabele belasting wordt beschouwd.

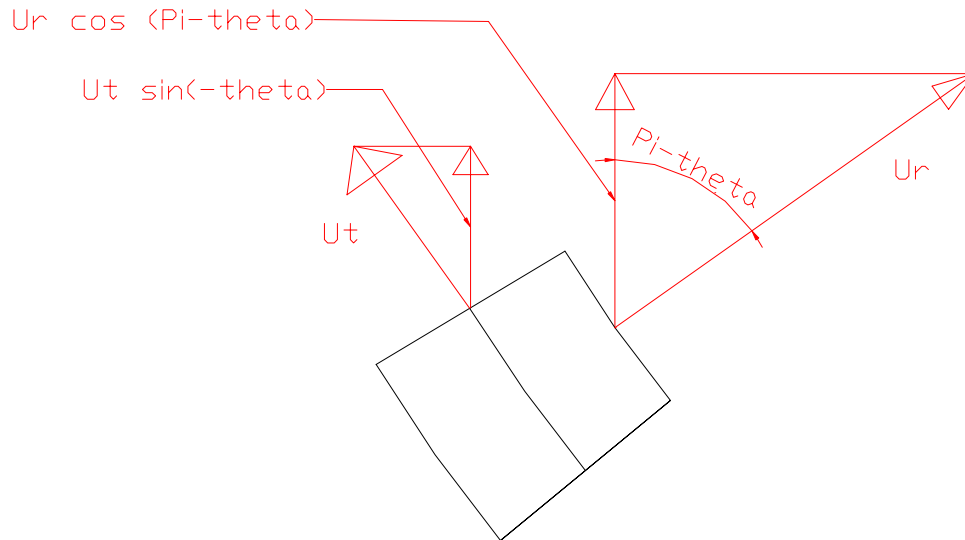


Figuur 16, variabele belasting

De belasting geeft trek aan de bovenzijde en druk aan de onderzijde. Dit zou kunnen duiden op een starre verplaatsing van de gehele tunnelbuis. Naast de radiale verplaatsing speelt nu ook de tangentiële verplaatsing een rol. Deze is bekend volgens de volgende formule:

$$\frac{du_t}{d\theta} \approx u_r \quad (29)$$

De verticale componenten van u_r en u_t zijn daar voor nodig (figuur 17).

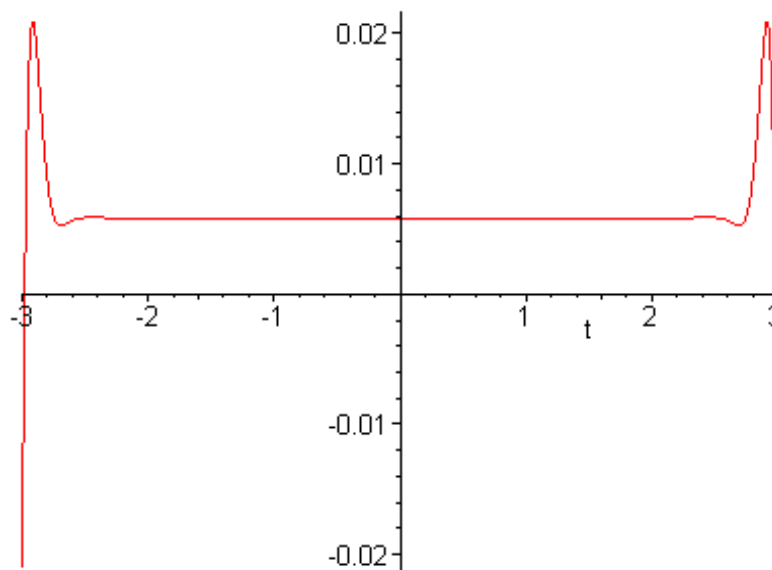


Figuur 17, verticale component u_r

De totale verticale verplaatsing wordt dus gegeven door:

$$u_{vert} = u_r \cos(\pi - \theta) + u_t \sin(-\theta) = -u_r \cos(\theta) - \frac{du_r}{d\theta} \sin(\theta) \quad (57)$$

Wanneer deze verticale verplaatsing wordt uitgezet tegen de omtrek ontstaat de volgende figuur:



Figuur 18, Verticale verplaatsing ten gevolge van de variabele belasting (mm)

Wanneer de randstorings in figuur 18 door de puntlast P niet meegenomen worden, blijkt dat de gehele tunnelbuis een gelijke verticale translatie ondergaat.

De tunnelbuis lijkt dus te vervormen door de aanwezige radiale verplaatsing, maar bij een nadere beschouwing blijkt dit een starre verplaatsing te zijn. Deze starre verplaatsing wordt niet veroorzaakt door buigende momenten, dus de afwezigheid van deze is dan ook verklaard. Het enige buigend moment wat wel aanwezig is, is het secundair moment veroorzaakt door de extensie, welke niet gelijk is over de hoogte van de tunnelwand.

Geconcludeerd kan worden dat de hypothese bij benadering geldt onder de volgende restricties:

- De omliggende grond dient geschematiseerd te worden als verenmodel met een constante elasticiteit, bovendien moet de tunnel als volledig ingebed worden beschouwd.
- De belasting door water- en gronddruk dient over de gehele omtrek op te treden en verloopt lineair over de hoogte van de tunnelbuis.
- Het buigend moment dat aanwezig is wordt veroorzaakt door een niet e rek over de tunneldoorsnede ten gevolge van een continue radiale belasting. Dit moment is echter zeer klein.

7 Spanningen in de tunneldoorsnede

Nu de snedekrachten bepaald zijn uit de opgelegde belastingen, kunnen de optredende spanningen worden bepaald. In het algemene geval worden in een doorsnede twee optredende spanningen beschouwd. Te weten:

- Normaalspanning in tangentele richting σ_t
- Schuifspanning σ_{tr}

De schuifspanningen worden veroorzaakt door de optredende dwarskracht. De normaalspanningen zijn het gevolg van buigende momenten en de normaalkracht. Deze twee spanningen worden gegeven volgens de volgende definities:

$$\sigma_t = -\frac{Mz}{I} + \frac{N}{A} \quad (58)$$

$$\sigma_{tr} = \frac{DS}{bI} = \frac{dM}{rd\theta} \frac{S}{I} \quad (59)$$

I = traagheidsmoment van de doorsnede

A = oppervlak van de doorsnede

S = statisch moment van de doorsnede.

Deze spanningen dienen voor dezelfde twee gevallen te worden beschouwd zoals eerder in het onderzoek ook is gedaan. Met andere woorden de belasting wordt gesplitst in een continu en een variabel gedeelte.

Allereerst worden de spanningen door variabele belasting bepaald. In hoofdstuk 6 is bepaald dat de variabele belasting geen buigend moment geeft in de doorsnede. De dwarskracht is in dat geval ook nul, aangezien er geldt:

$$D = \frac{dM}{rd\theta}$$

In hoofdstuk 3.6.1 is de relatie tussen het moment en de normaalkracht ten gevolge van de variërende belasting opgesteld:

$$N = \frac{M}{r} \quad (32)$$

Het buigend moment is nul, en volgens vergelijking (32) is de normaalkracht in dat geval ook nul.

Concluderend kan worden gesteld dat er door de variabele belasting geen snedekrachten en dus ook geen spanningen ontstaan in de doorsnede. De belasting heeft alleen een verticale translatie tot gevolg, zoals eerder is bewezen in hoofdstuk 6.2.

De constante belasting veroorzaakt wel snedekrachten, en dus ook spanningen. In paragraaf 3.6.2 zijn de relaties tussen de vervormingen, belastingen en snedekrachten afgeleid:

$$N = EA \left[\frac{du_t}{rd\theta} - \frac{u_r}{r} + \left(\frac{du_r}{rd\theta} \right)^2 \frac{1}{2} \right] + EI \frac{d\varphi}{r^2 d\theta} = -EA \frac{u_r}{r} \quad (36)$$

$$M = N \frac{EI}{EAR} \quad (38)$$

$$u_r = \frac{q_r r^2}{kr^2 + EA} \quad (41)$$

De normaalspanningen worden gegeven door vergelijking (58), wanneer de bovenstaande vergelijkingen (36), (38) worden ingevuld ontstaat de volgende formule voor de normaalspanningen:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= -\frac{N \frac{EI}{EAR} z}{I} + \frac{N}{A} = \frac{N}{A} \left(1 - \frac{z}{r} \right) = \frac{Eu_r}{r} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) \\ \sigma_t &= \frac{E \frac{q_r r^2}{kr^2 + EA} \left(\frac{z}{r} - 1 \right)}{r} = \frac{Eq_r r}{kr^2 + EA} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

De schuifspanning wordt gegeven door de volgende vergelijking:

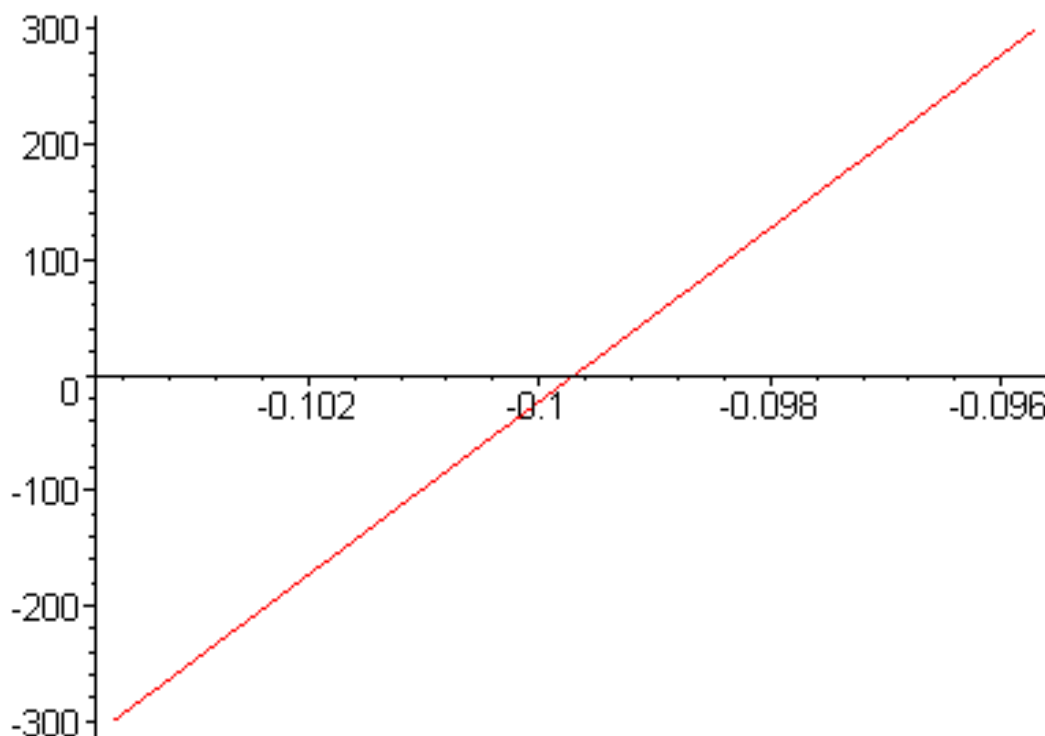
$$\sigma_{tr} = \frac{DS}{bI} = \frac{dN}{r^2 d\theta} \frac{S}{A} = -\frac{dq_r}{d\theta} \frac{ES}{r(kr^2 + EA)} \quad (60)$$

In dit beschouwde onderdeel van de belasting is deze constant. Eerder is al gebleken dat een constante belasting ook een constant moment oplevert, en dientengevolge geen dwarskracht veroorzaakt. Deze afwezigheid van de dwarskracht leidt ertoe dat er geen schuifspanning ontstaat. Vergelijking (60) drukt de schuifspanning uit in de afgeleide van de radiale belasting. Deze belasting is constant, met als gevolg een afgeleide met de waarde nul en daaruit volgt weer dat de schuifspanning nul is.

De totale aanwezige spanning in de tunnelbuis kan als volgt uitgedrukt worden:

$$\sigma = \frac{Eq_r r}{kr^2 + EA} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) \quad (61)$$

Slechts de normaalspanning door een constante radiale belasting veroorzaakt dus spanningen in de doorsnede. Onder de gegeven omstandigheden is deze ook constant over de gehele omtrek. De spanningen variëren wel over de hoogte z van de tunnelbuiswand. De spanningen zoals die zouden optreden volgens dit model en de parameters van de HSL-spoortunnel zoals eerder gebruikt zijn weergegeven in figuur 19.



Figuur 19, Spanningen in de HSL tunnel volgens het opgestelde model (N/mm²)

Zoals te zien in figuur 19, zijn de optredende spanningen zeer klein. Als we de opgestelde formule voor de optredende spanningen nogmaals wordt beschouwd:

$$\sigma = \frac{Eq_r r}{kr^2 + EA} \left(\frac{z}{r} - 1 \right) \quad (61)$$

In de breuk in vergelijking (61) overheerst de term kr^2 de term EA . Verder geldt dat de termen k en q_r , respectievelijk de elasticiteit van de grond en de radiale belasting (van de grond) beiden afhankelijk zijn van de omliggende grond. Termen die de omgevingscondities veranderen zoals bijvoorbeeld de diepteligging van de tunnel, grondwaterstand of het soortelijk gewicht van grond veranderen zowel de elasticiteit als de belasting, zodat de optredende spanningen in de tunnel vrijwel niet veranderen in de bijlage B is dit met een aantal voorbeelden toegelicht.

Opgemerkt moet worden dat de bovenstaande spanningen alleen gelden als de belastingen uit gelijksoortige componenten bestaan als gegeven in hoofdstuk 5. Bij belastingen met een ander periodiek karakter, zoals bijvoorbeeld een ovaliserende belasting kunnen er wel buigende momenten ontstaan ten gevolge van de over de omtrek variërende belasting. Ten gevolge van deze momenten ontstaat een geheel ander spanningverloop over de omtrek.

8 Conclusies en aanbevelingen

Na onderzoek van spanningen in boortunnels ten gevolge van radiale grond en waterdruk zijn de volgende conclusies totstandgekomen.

- Spanningen die worden berekend komen in deze orde vrijwel zeker niet voor in de situatie van de HSL tunnel. Grondparameters en belastingconfiguraties alsmede de geldigheid van het onderzochte model dienen daarom nader te worden onderzocht
- De afleiding van kinematische relaties voor een ring is vele ordes ingewikkelder dan voor de rechte staaf. Verantwoorde benaderingen met betrekking tot dwarskrachtvervorming en verwaarlozing van een aantal tweede orde termen zijn noodzakelijk.
- De ontwikkelde methode voor het bepalen van spanningen in boortunnels is te gebruiken voor andersoortige en ingewikkelder belastingen dan de in dit onderzoek gebruikte. Benaderingen van deze belastingen dienen wel op dezelfde manier te worden uitgevoerd en geverifieerd.
- De spanningen onder de gebruikte belastingsvorm zijn voornamelijk het gevolg van de ontstane normaalkracht.
- De afgeleide differentiaalvergelijking voor een variërende belasting blijkt niet consistent omdat de lengte van de neutrale lijn verandert, ondanks dat deze bij het opstellen van deze differentiaalvergelijking nul is gesteld. De fout die hierdoor ontstaat blijkt voor praktische gevallen aanvaardbaar.
- De gestelde hypothese omtrent het voorkomen van een buigend moment is bij benadering geldig bij de gegeven vorm van de uitwendige belasting, en modellering als een volledig ingebedde ring.

Verder analytisch onderzoek naar spanningen in boortunnels zal gedaan moeten worden om het werkelijke gedrag van een tunnelling beter te benaderen. Het verdient aanbeveling om de volgende zaken nader te onderzoeken

- De belasting die als uitgangspunt diende voor dit onderzoek is een zeer grove benadering van de werkelijkheid. Een nadere kwantificering van de grondparameters, en implementatie in het model zal een meer werkelijkheidsgetrouwe vervorming van de tunnelbuis als uitkomst geven.
- Het model van de tunnel als volledig ingebedde ring zal op geldigheid moeten worden gevalideerd. Mogelijk dat door de diepteligging, of omliggende grondsoorten het model als niet volledig ingebed kan worden geschematiseerd. De elasticiteit van de grond zoals in dit onderzoek gedefinieerd is ook een grove benadering, en kan misschien ook nauwkeuriger worden bepaald.
- Naast belasting van buiten de tunnelwand zullen in tunnels ook belastingen van binnenuit optreden. Onderzocht kan worden hoe deze belastingen het krachten spel in de ring beïnvloeden en misschien wel maatgevend zijn ten opzichte van de grond- en waterdruk.
- Een numerieke vergelijking van de uitkomsten van dit model ten opzichte van bestaande en algemeen gebruikte eindige elementen modellen zou een goed beeld opleveren van de aanvaardbaarheid van de in dit model gemaakte vereenvoudigingen.

Literatuur

- 1 Mechanica van Constructies, elastostatica van slanke structuren, A.L. Bouma.
- 2 Mechanica van Kromme Staven, introductie tot de theorie van schalen, Prof. Dr. Ir. J. Blaauwendraad.
- 3 Grondmechanica, A. Verruijt.
- 4 Geboorde tunnels met betonnen segmenten, CT3150, dr. ir. A.G. Kooiman, dr. Ir. C. van der Veen, ir. C.B.M. Blom.
- 5 Design philosophy of concrete linings for tunnels in soft soils, C.B.M. Blom
- 6 Bored and Immersed Tunnels, Ctw5305, K.J. Bakker
- 7 Spanningen in boortunnels door het sturen van de boorkop, Q.C. de Rijke

A. Beknopt overzicht ontwikkeld model

Het in dit onderzoek ontwikkelde model voor het berekenen van verplaatsingen, snedekrachten en spanningen in boortunnels wordt hier kort en schematisch weergegeven. Opgemerkt moet worden dat de doorsnedegrootheden niet voor de gehele doorsnede maar voor een deeltje $d\theta$. De grootheden worden dan:

$$EI = Eh^3$$

$$A = h$$

- Verdeel de radiale belasting in een continu en een variërend deel, en benader het variërende deel met een taylorontwikkeling die op nauwkeurigheid geverifieerd moet worden.

$$q_{r,const} = C.$$

$$q_{r,var} = K(-R \cos(\theta)) = -KR - \frac{KR\theta^2}{2} + \frac{KR\theta^4}{24} - \frac{KR\theta^6}{720} + \frac{KR\theta^8}{40320}$$

Belastingen hierboven dienen als voorbeeld voor de vorm waarin ze geïmplementeerd moeten worden.

- Stel de differentiaalvergelijking voor de vervorming veroorzaakt door de variërende belasting op door de belasting en de grondelasticiteit k in te vullen:

$$EI \left(\frac{d^4 u_r}{r^2 d\theta^4} + \frac{2d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} + \frac{u_r}{r^2} \right) + k u_r r^2 = \left(q_r - \frac{dq_r}{rd\theta} \frac{h}{2} \right) r^2 \quad (34)$$

- Los u_r op uit de ontstane differentiaalvergelijking met de volgende randvoorwaarden:

$$\frac{du_r}{d\theta}(\theta = 0) = 0 \quad \frac{du_r}{d\theta}(\theta = \pi) = 0 \quad (46)$$

$$D(\theta = 0) = EI \left(-\frac{du_r}{d\theta r^2} - \frac{d^3 u_r}{r^2 d\theta^3} \right) = 0 \quad (47)$$

$$D(\theta = \pi) = EI \left(-\frac{du_r}{r^3 d\theta} - \frac{d^3 u_r}{r^3 d\theta^3} \right) = -\frac{P}{2} \quad (48)$$

- Bepaal de snedekrachten M , N en D ten gevolge van de variërende belasting:

$$M = EI \left(-\frac{u_r}{r^2} - \frac{d^2 u_r}{r^2 d\theta^2} \right) \quad (56)$$

$$N = \frac{M}{r} \quad (32)$$

$$D = \frac{dM}{rd\theta}$$

- De verplaatsing ten gevolge van de continue belasting kan worden berekend met:

$$\frac{EA}{r} \left(\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + u_r \right) = \left(-ku_r + q_r + \frac{dq_t}{d\theta} \right) R \quad (40)$$

en de randvoorwaarden:

$$\frac{du_r}{d\theta}(\theta = 0) = 0 \quad \frac{du_r}{d\theta}(\theta = \pi) = 0$$

- Bepaal de snedekrachten N en M ten gevolge van de continue belasting:

$$N = -EA \frac{u_r}{r} \quad (36)$$

$$M = -\frac{EI}{r^2} (u_r) \quad (37)$$

- Ten slotte kunnen de spanningen worden berekend volgens de volgende twee formules:

$$\sigma_t = -\frac{Mz}{I} + \frac{N}{A} \quad (58)$$

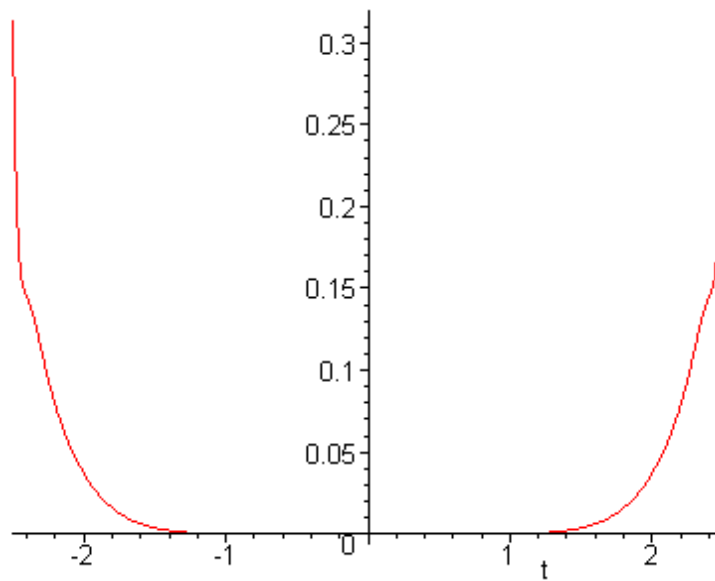
$$\sigma_{tr} = \frac{DS}{bI} = \frac{dM}{rd\theta} \frac{S}{I} \quad (59)$$

B. Buigend moment onder verschillende belastinggevallen

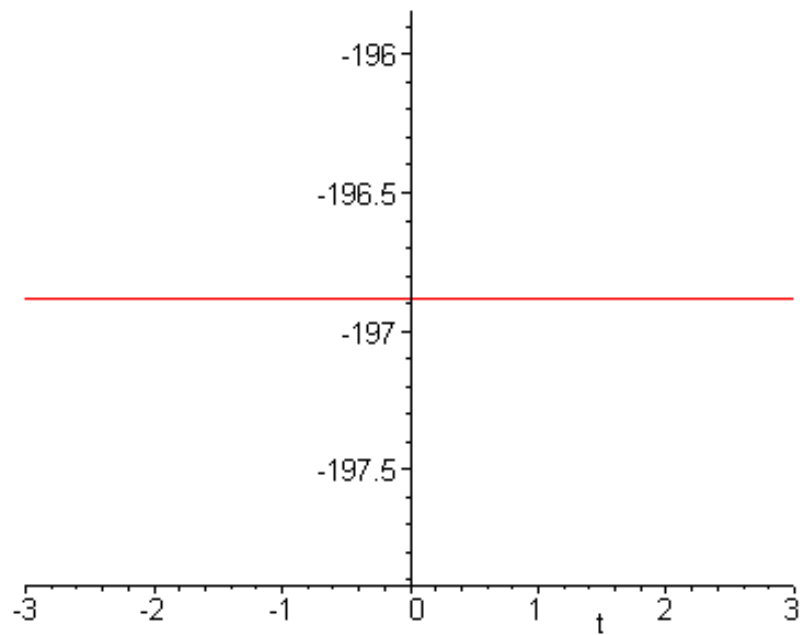
In deze bijlage worden een aantal gevallen beschouwd waaruit opgemaakt kan worden dat de hypothese in het algemene geval geldig is.

De plots zijn over het algemeen van $\theta = -2$ tot 2 radialen, waarbij $\theta = 0$ de top van de tunnelbuis voorstelt het moment is gegeven in Nmm.

Allereerst wordt er een diepteligging van 250 m. aangenomen. De belasting neemt hierdoor aanzienlijk toe. Overige parameters als afmeting van de tunnelbuis, en grondparameters worden gelijk aan de HSL-tunnel gehouden. De elasticiteit van de grond echter ook, aangezien deze afhankelijk is van de optredende korrelspanning.

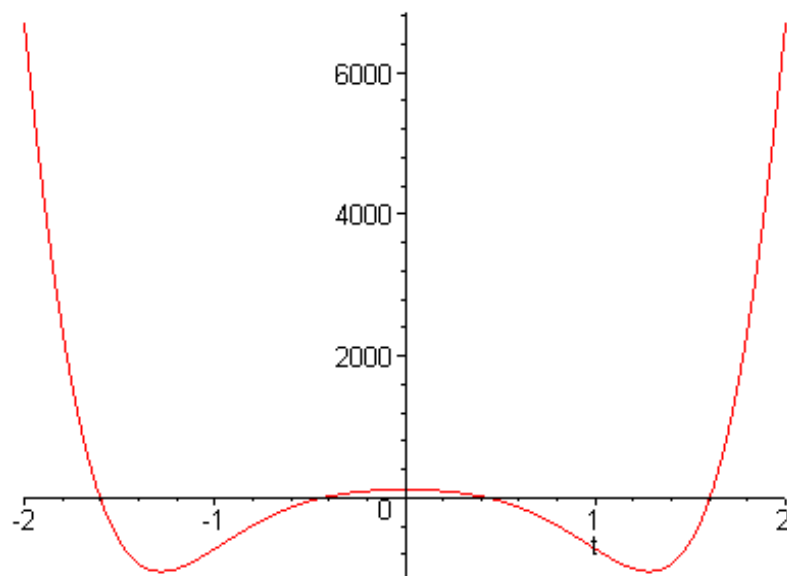


Figuur 20 , Buigend moment ten gevolge van de variabele belasting op D = 250 m (Nmm)

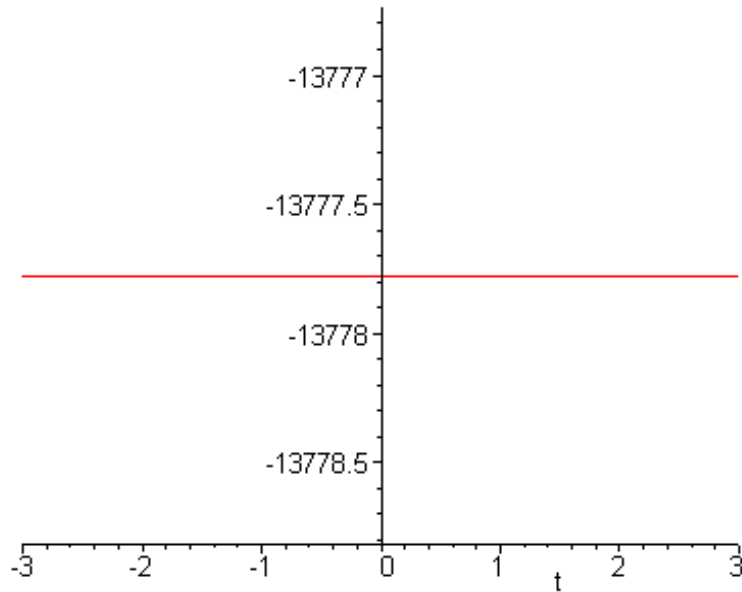


Figuur 21, Buigend moment ten gevolge van de continue belasting op $D=250$ m (Nmm)

Als tweede geval nemen we de elasticiteit van de grond een factor 1000 kleiner. De overige parameters inclusief de diepteligging zijn gelijk aan de HSL-tunnel.

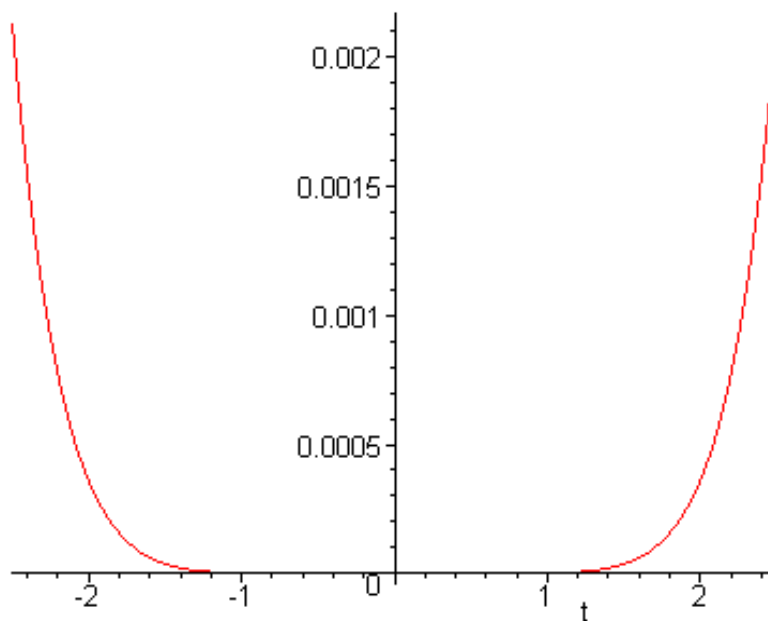


Figuur 22, Buigend moment door variërende belasting en $k = k/1000$ (Nmm)



Figuur 23, Buigend moment door continue belasting en $k = k/1000$ (Nmm)

Tenslotte wordt een geval beschouwd waarin de EI een factor 1000 kleiner is dan de EI uit de parameters van de Groene-Harttunnel.



Figuur 24, Buigend moment ten gevolge van variabele belasting met $EI = EI/1000$

Het buigend moment door de constante belasting is: -0.183 Nmm.

Alle drie de gevallen laten een zeer klein moment rond de top van de tunnelbuis zien ($t=0$). Het geval waarin de elasticiteit van de grond k zeer klein wordt genomen ten opzichte van de overige parameters geeft wel een buigend moment in een groot gedeelte van de omtrek. Dit is het gevolg van de mindere ondersteuning van de grond en de daardoor grotere invloed van de puntlast P aan de onderzijde door de minder stijve ondersteuning van de grond.

Wat verder opvalt is dat wanneer de tunnel een veel grotere diepteligging opgelegd krijgt, het buigend moment nauwelijks toeneemt (van 195 Nmm naar 197 Nmm). Dit wordt veroorzaakt door de overheersende aanwezigheid van de elasticiteit van de grond in de uitdrukking voor het moment ten gevolge van een continue belasting.

$$M = -EI \frac{q_r}{kr^2 + EA}$$

De elasticiteit van de grond k wordt bepaald aan de hand van de aanwezige korrelspanning en verloopt dus gelijk over de diepte met de belasting, die wordt bepaald door de aanwezige totale grondspanning.

Uit de drie belastinggevallen kan goed geconcludeerd worden dat het buigend moment in een tunnelwand ten gevolge van uitwendige radiale grondbelasting te verwaarlozen is. Met de beperking dat de tunnelbuis als een volledig ingebedde ring met een constante elasticiteit van de grond over de omtrek beschouwd kan worden.

C. Andersoortige belastingen toegepast op het ontwikkelde model

Om te laten zien dat er naast de gebruikte vorm van de belastingen ook andere belastinggevallen toegepast kunne worden, worden in deze bijlage enige voorbeelden toegelicht.

Het eerste geval betreft een belasting met een ovaliserende werking. Deze belasting wordt regelmatig toegepast in het ontwerp van tunnelbuizen.

Kenmerk van een dergelijke belasting is de volgende vorm:

$$q_r = -Kr \cos(2\theta)$$

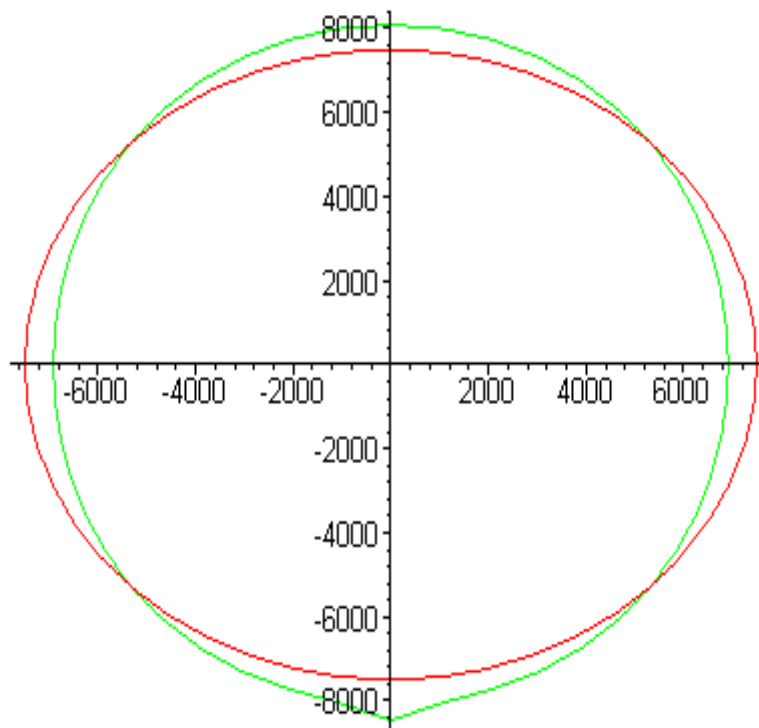
K = constante om de grootte van de belasting aan te geven

r = straal van de tunnelbuis

θ = hoek binnen de tunnelbuis waarbij $\theta = 0$ de top voorstelt

De benadering van deze cosinus volgens een Taylorontwikkeling kunnen slechts de termen de vanaf orde t^{18} verwaarloosd worden, om een nauwkeurige benadering te krijgen binnen het bereik $-\pi$ tot π .

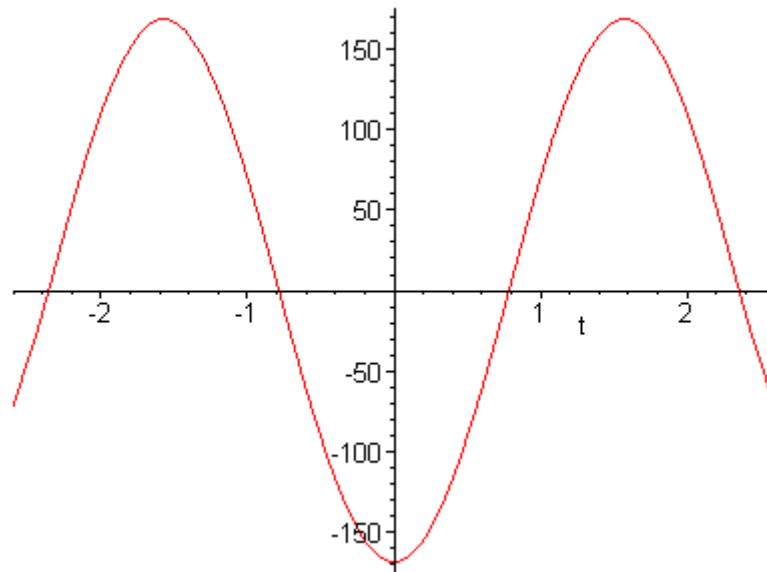
Wanneer deze belasting in het ontwikkelde model (bijlage A) geïmplementeerd wordt, en alle parameters gelijk worden genomen aan die van de HSL-tunnel zoals in het rapport zijn beschreven ontstaat het volgende figuur voor de verplaatsingen:



Figuur 25, Verplaatsingen ten gevolge van een ovaliserende belasting

In het figuur 25 is duidelijk de ovale vorm van de overdreven weergegeven vervormde tunnelbuis waar te nemen. Verder is er gewerkt met een vrij kleine puntlast P .

Wanneer het buigend moment ten gevolge van deze belasting bekeken wordt zien we de volgende plot ontstaan:



Figuur 26, Buigend moment bij ovaliserende belasting (Nmm)

Uit figuur 26 is op te maken dat het maximale buigend moment zo rond de 170 Nmm. ligt. In het rapport is opgemaakt dat de buigende momenten door een radiale grond- en waterdruk te verwaarlozen zijn. In dit geval treffen we een relatief klein moment voor een tunnelbuisdoorsnede met een wanddikte van 600 mm. dus de stelling geldt in dit geval ook bij benadering.

Het tweede belastinggeval wat beschouwd wordt is het eigen gewicht. De belasting zal in dit geval de volgende vorm aannemen:

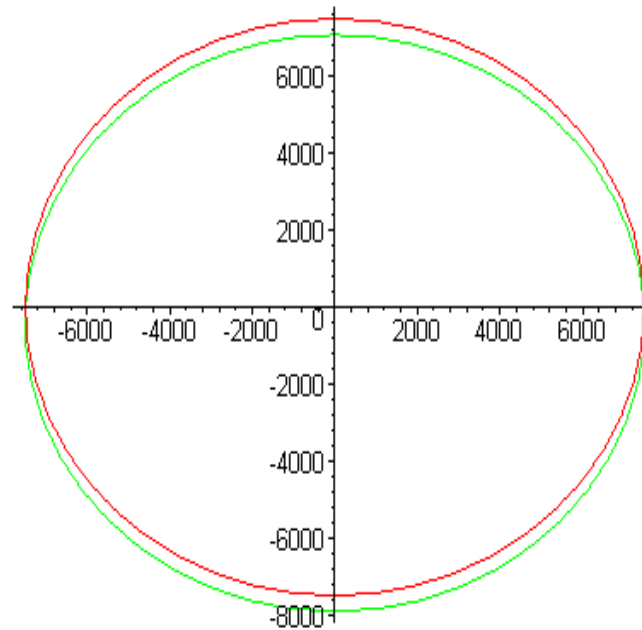
$$q_r = \gamma_{\text{beton}} h \cos(\theta)$$

$$q_t = \gamma_{\text{beton}} h \sin(\theta)$$

γ_{beton} = soortelijk gewicht beton

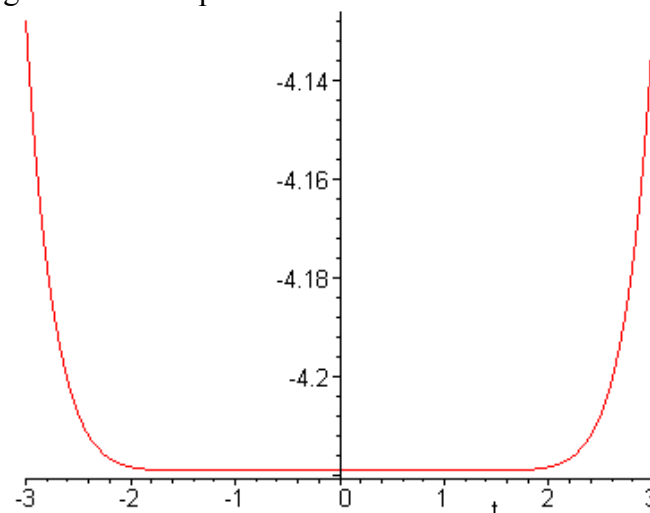
h = dikte van de tunnelbuiswand

Naast een radiale component heeft het eigen gewicht ook een tangentiële component. Wanneer deze twee belastingcomponenten en de parameters van de HSL tunnel in het model worden geplaatst ontstaat het volgende figuur voor de verplaatsingen:



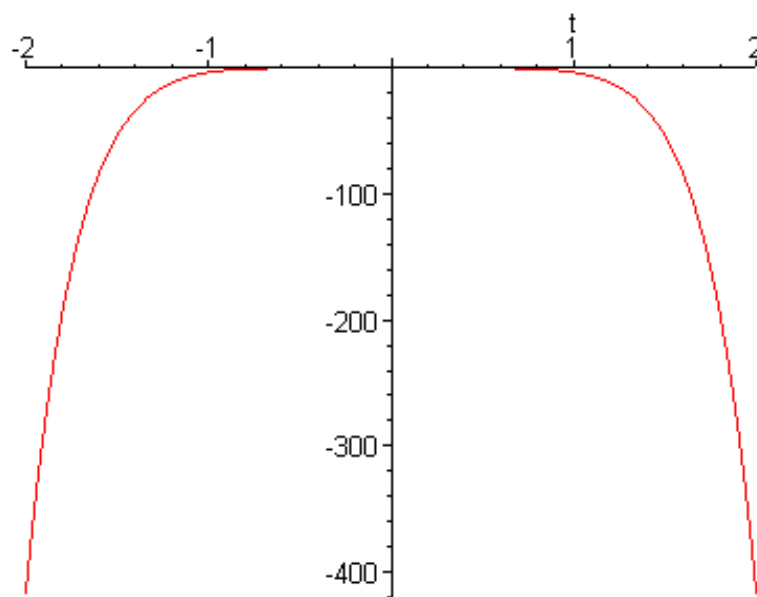
Figuur 27, vervorming ten gevolge van belasting door het eigen gewicht

Wanneer de verticale component van deze verplaatsingen worden beschouwd zien we dat er een translatie van de gehele tunnel optreedt:



Figuur 28, verticale verplaatsing ten gevolge van het eigen gewicht (mm)

Nu bekend is dat de tunnel een starre verplaatsing ondergaat kan verwacht worden dat er geen of een te verwaarlozen moment optreedt in de tunnel. Dit blijkt ook zo op te treden volgens figuur 29.



Figuur 29, Buigend moment ten gevolge van eigen gewicht

In deze bijlage zijn twee totaal verschillende belastingen in het model ingevoerd. Zo is aangegeven dat het model goed gebruikt kan worden voor andere belastinggevallen dan de in het onderzoek beschouwde.

D. Maple invoer van het model

Variërende belasting

```

> restart:
> d:=25000: # mm diepte van de bovenkant van de buis
> gamma2:=16000/1000^3: # N/mm3 soortelijk gewicht van de grond (droog)
> gamma1:=20000/1000^3: # N/mm3 soortelijk gewicht van de grond (nat)
> g:=10: # m/s2 gravitatie-versnelling
> C10:=100: # -- factor elasticiteitsmodulus van grond,
droog zand 20<C10<200
> H:=1000: # mm grondwaterstand
> r:=7500: # mm straal van de buis
> h:=600: # mm wanddikte van de buis
> E:=30000: # N/mm2 elasticiteitsmodulus van het beton
> P:=10000: # N puntlast
>
> EA:=E*h: # N rekstijfheid van de buiswand
> EI:=E*1/12*h^3: # N/mm3 buigstijfheid van de buiswand
(buislengte = 1 mm)
> sigma:=(gamma2*H+(gamma1-10000/1000^3)*(d-H)): # N/mm2 grondspanning
> k:=C10*sigma*1*r/r: # N/mm2 veerstijfheid van de grond
> q:=(+gamma1*(-r*cos(t))): # N/mm grondbelasting
> q:=mtaylor(q,t=0,10):
>
> kappa:=- (diff(ur(t),t,t)+ur(t))/r^2:
> M:=EI*kappa:
> f:=-k*ur(t):
> eq1:=simplify((f+q)=-(diff(M,t,t)+M)/r^2):
> bound_cond:= D(ur)(0)=0, D(ur)(Pi)=0, (D@@3)(ur)(0)=0,
(D@@3)(ur)(Pi)=P*r^3/(2*EI):

> evalc(evalf((dsolve({eq1,bound_cond},{ur(t)}))):
> u:=-.5859375000e-2+0.*I+.2929687500e-2*t^2-.2441406250e-3*t^4+.8138075086e-5*t^6-
.1453208318e-6*t^8-.3059562784e-
19*exp(13.89783482*t)*cos(13.93376521*t)+.4684561214e-
19*exp(13.89783482*t)*sin(13.93376521*t)-.3059562784e-19*exp(-
13.89783482*t)*cos(13.93376521*t)-.4684561214e-19*exp(-
13.89783482*t)*sin(13.93376521*t):
> with(plottools):
> graph1:=plot({r,r-u*1000},t=-Pi..Pi,coords=polar):
> rotate(graph1,Pi/2): # vervorming tunnelbuiswand
> plot(u,t=-3..3): # vervorming tunnelbuiswand
> ut:=int(u,t):
> plot(-u*cos(t)+ut*sin(-t),t=-3..3): # verticale translatie
>
> M:=-EI*(diff(u,t,t)+u)/r^2:
> graph2:=plot({r,r+M/1000},t=-Pi..Pi,coords=polar):
> rotate(graph2,Pi/2): # momentlijn
> plot(M,t=-2.5..2.5): # momentlijn
> N:=M/r:
> plot({N},t=-2..2): # normaalkrachtlijn
>
> D1:=EI/r^3*(-diff(u,t)-diff(u,t,t,t)):
> plot({r,r-D1},t=Pi/1.2..Pi): # dwarskrachtlijn
>
> lengte:=2*int(r-u,t=0..Pi):
> rek:=evalf((abs(lengte)-2*Pi*r)/(2*Pi*r)):

```

Constante belasting:

```
> restart:
> d:=25000: # mm diepte van de bovenkant van de buis
> gamma2:=16000/1000^3: # N/mm3 soortelijk gewicht van de grond (droog)
> gamma1:=20000/1000^3: # N/mm3 soortelijk gewicht van de grond (nat)
> g:=10: # m/s2 gravitatie-versnelling
> C10:=100: # -- factor elasticiteitsmodulus van grond,
droog zand 20<C10<200
> H:=1000: # mm grondwaterstand
> r:=7500: # mm straal van de buis
> h:=600: # mm wanddikte van de buis
> E:=30000: # N/mm2 elasticiteitsmodulus van het beton
> P:=10000: # N puntlast
>
> EI:=E*h^3/12: Iz:=h^3/12: # Nmm2 buigstijfheid van de wand
> EA:=E*h: A:=h: # N rekstijfheid van de buiswand (buislengte
= 1 mm)
>
> sigma:=(gamma2*H+(gamma1-10000/1000^3)*(d-H)): # N/mm2 grondspanning
> k:=C10*sigma*1*r/r: # N/mm2 veerstijfheid van de grond
> q:=(gamma2*H+gamma1*(d-H)): # N/mm grondbelasting
> q:=mtaylor(q,t=0,10):
>
> epsilon:=- (ur(t))/r:
> N:=EA*epsilon:
> f:=-k*ur(t):
> eq1:=simplify((q+f)=-(diff(N,t,t)+N)/r):
> bound_cond:= D(ur)(0)=0, D(ur)(Pi)=0, (D@@2)(ur)(0)=0 :
> (dsolve({eq1,bound_cond},{ur(t)})):
> u:= q*r^2/(k*r^2+EA):
>
> with(plottools):
> plot({r,r-u*10000},t=-Pi..Pi,coords=polar):
> graph1:=plot({r,r-u*10000},t=-Pi..Pi,coords=polar): # vervormingslijn
> rotate(graph1,Pi/2):
> M:=-EI/r^2*u:
> graph2:=plot({M},t=-Pi..Pi,coords=polar):
> rotate(graph2,Pi/2): # momentlijn
> plot(M,t=-3..3):
>
> N:=-EA*u/r:
> M:=EI/EA*N/r:
> sigma:=N/A-M*z/Iz:
> plot(sigma,z=-300..300): # optredende spanningen
```

E. Zelfevaluatie

In deze bijlage zijn mijn bevindingen van de structuur en opzet van het bachelor eindwerk uiteengezet.

Wat allereerst opvalt is de totaal andere organisatie in vergelijking met eerder uitgevoerde projecten in de bacheloropleiding. Dit project is allereerst individueel, en toegespitst op een smal wetenschappelijk onderwerp in plaats van een ellenlange uitwijding over de effecten van het plaatsen van een gebouw of weg X op de plaats Y.

Doordat het eindwerk zo toegespitst is op één onderwerp wordt er een grote diepgang behaald. Met deze grotere diepgang stijgt tegelijk het niveau van het onderzoek. Door dit hogere niveau zijn de contacten met de begeleider intensiever geweest wat zeker als positief is ervaren.

Deze diepgang heeft er voor gezorgd dat mijn algemene kennis van mechanica gegroeid is. De algemene modellering op elementair niveau van een constructiedeel zal mij in het vervolg veel beter afgaan.

Verder heeft dit onderzoek een veel aanspraak gemaakt op mijn kennis van de technische wiskunde. Zo nu en dan moet bij de uitwerking van de optredende wiskundige problemen opgelet worden dat het beoogde eindresultaat niet uit het oog verloren gaat. Met andere woorden is het zaak dat er een goed beeld is wat men probeert uit te rekenen.

Tenslotte kan ik over het geheel zeggen dat de opzet van het Bachelor eindwerk mij goed is bevallen. Zeven weken lang zijn vrijwel al mijn vrije uren gaan zitten in dit onderzoek. Door deze intensiteit bleef ik gemotiveerd en kan er in korte tijd een behoorlijk resultaat gepresenteerd worden.

Als aangenomen mag worden dat een afstudeerwerk een bachelor-eindwerk in het kwadraat is dan zou ik bijna willen zeggen dat ik er naar uit zie om af te studeren.

F. Notulen Startbespreking d.d. 25-09-2003

Aanwezig:

- Dr.Ir. P.C.J. Hoogenboom
- Ir. W.J.M. Peperkamp
- M.C. Veldhuizen

Dhr. Peperkamp heeft de opmerking dat de startnotitie en dan met name de paragrafen 1.1 en 1.2 te veel uitgaat van het beoogd resultaat. Vervolgens vraagt hij zich af door wie de hypothese omtrent het voorkomen van momenten in tunnelbuiswanden gesteld is. Dhr Hoogenboom geeft aan dat de hypothese voortkomt uit een tentamensom die hij eerder heeft bedacht.

Dhr. Peperkamp zegt dat het uitgangspunt met betrekking tot de diepteligging van de tunnel niet juist is. De tunnel ligt hoger dan 3 x de diameter. Dhr Veldhuizen stelt dat dan het ringmodel iets aangepast moet worden, van de top af moet naar beide richtingen 45 graden zonder verende ondersteuning gemodelleerd worden.

Er wordt gesteld dat de belasting misschien beter als randvoorwaarde opgenomen zou kunnen worden. Het is echter al het geval dat de HSL-tunnel als geheel al in de randvoorwaarden is opgenomen, en de belasting vloeit daaruit voort.

Voor de vergelijking met bestaande modellen zou gezocht kunnen worden naar afstudeeronderzoeken met vergelijkbare projecten stelt dhr Hoogenboom. De belastingen in dergelijke afstudeeronderzoeken zouden dan in het te ontwikkelen model kunnen worden geïmplementeerd, en vervolgens kunnen de uitkomsten worden vergeleken.

Als aanvulling op de literatuur geeft dhr Hoogenboom het dictaat: “mechanica van kromme staven” en komt dhr Peperkamp met een voorstel om een CUR rapport met betrekking tot (riool) buizen door te nemen.

Over het geheel merkt dhr. Peperkamp op dat het een vrij hoog niveau is voor een bachelor Eindwerk. Dhr Hoogenboom is het daar mee eens en noemt de uitdaging ook groter dan gedacht.