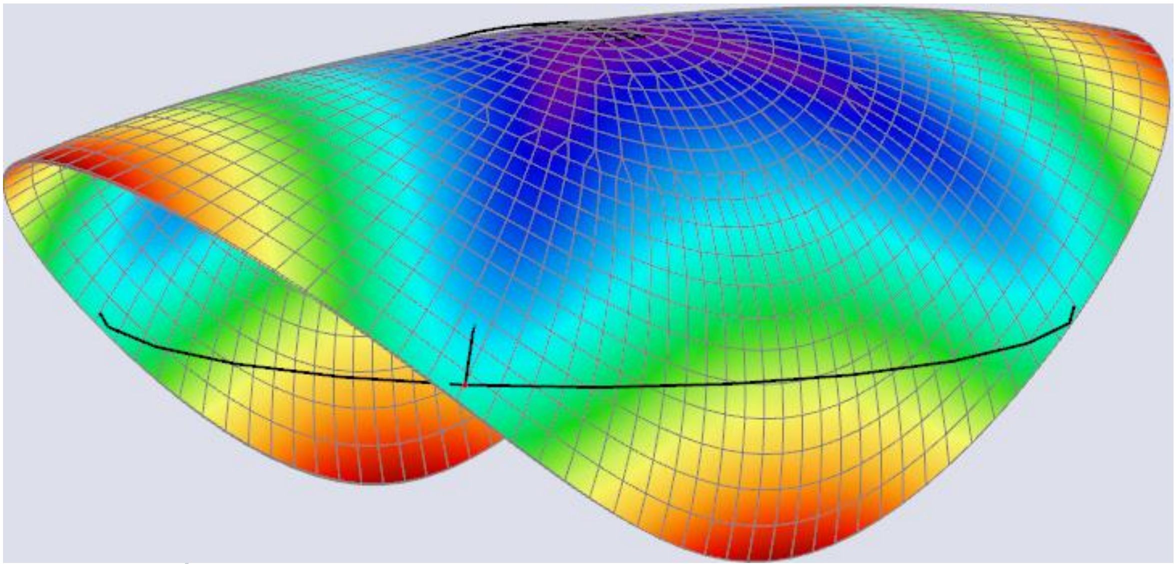
7-4-2024

Extensieloze vervorming van schaalconstructies

Martijn Westerhof

5402816



Bachelor eindproject

Faculteit Civiele techniek en Geowetenschappen

Technische Universiteit Delft

Onder begeleiding van Dr. P.C.J. Hoogenboom en T.R. van Woudenberg MSc

Voorwoord

Dit rapport is geschreven als eindproject voor de bacheloropleiding Civiele Techniek aan TU Delft. Het is vooral bedoelt voor lezers met voorkennis over constructie mechanica die meer willen weten over het gedrag van schaalconstructies. Mijn dank gaat naar Dr. P.C.J. Hoogenboom en T.R. van Woudenberg MSc, voor het begeleiden van het dit onderzoek.

Delft, april 2024
Martijn Westerhof

Samenvatting

Voor het ontwerpen op extensie(loze) vervorming in een schaalconstructie is het belangrijk om te begrijpen bij welke randvoorwaarden deze optreden. Bij extensieloze vervorming rekt de middelste vezel van ieder doorsnede van de schaal niet. Dit gaat gepaard met een schaal die veel vervormd en bij belasting grote spanningen heeft. Er is onderzocht of de volgende twee hypothese kloppen:

1) Voor de bolvormige schalen (positief gekromde schaal) waarbij de richting loodrecht op de schaal niet wordt verhinderd vervormd de bol extensieloos.
2) Voor een zadelvormige schaal (negatief gekromde schaal) waar de langs richting niet wordt verhinderd vervormd de schaal extensieloos.

Op basis van het principe van minimale potentiële energie, wil een schaalvorm zo extensieloos mogelijk vervormen ten gevolge van opgelegde belasting of opgelegde verplaatsing. Deze verplaatsing kan worden onderdrukt door belasting of door opleggingen.

In het FEM-programma SCIA zijn beide schalen gemodelleerd en bij vrij randen is de extensieloze eigenfrequentie gevonden. Deze extensieloze vormen zijn vervolgens benaderd door een SCIA-model met belasting en rolopleggingen.

Hierbij heeft het zadelmodel rechte randen met gelijke krommingen en lengtes. Deze schaal gedraagt zich extensieloos bij horizontale rollen. Bij het bolmodel hebben de randen een helling van 30°. Deze schaal gedraagt extensieloos wanneer vier punten aan de rand onder een hoek van ongeveer 49.2° rollend worden opgelegd. In welke richting ieder punt van de rand verplaatst bij deze vorm is niet gevonden.

Om te vinden voor welke rotatie van de opleggingen er in de schaal extensie of buiging overheerst de rolrichting gevarieerd. Voor zadelmodel blijkt dat bij een in hoofdstuk 4 gedefinieerde positieve rotatie tussen de 0° en 90° graden buiging overheerst en tussen de 90° en 180° geldt dit voor extensie. Extensie overheerst het meest wanneer de verplaatsing loodrecht op de rand vrij is, in dit geval bij een rotatie van 116.56°.

De extensieloze vervorming wordt bij het bolmodel snel onderdrukt wanneer de rotatie een aantal graden afwijkt van de gevonden 49.2°. Dat betekent dat voor bijna alle opleggingen extensie zal overheersen in de schaal.

De extensieloze vorm wordt bij variatie van de opleggingen niet snel onderdrukt bij de zadelvorm en wel bij de bolvorm. Dit betekent dat de kans op extensieloze vervorming die ongewenst optreedt groter is bij de zadelvorm.

Inhoud

1. Inleiding

Extensieloze vervorming bij een schaal is vervorming waarbij de middelste vezel van iedere doorsnede van de schaal niet rekt. Dit betekent dat de schaal de kracht niet afdraagt op normaalkrachten, ook wel membraamkrachten genoemd, maar op buiging van de doorsnede waarbij buigende momenten ontstaan. Het materiaal zal hierdoor grote spanningen ervaren, omdat een moment door een kleine dikte moet worden overgedragen. Een schaal die extensieloos kan vervormen gedraagt zich niet stijf en heeft naast grote spanningen ook grote verplaatsingen. Bij voorgeschreven belasting willen we vaak dat extensieloze vervorming niet optreedt en bij een voorgeschreven verplaatsing kan extensieloze vervorming gewenst zijn. Daarom is het belangrijk om te begrijpen bij welke randvoorwaarden extensieloze vervorming optreedt en bij welke niet.

Het doel van dit onderzoek is dan ook om regelmaat te vinden voor welke opleggingen extensie(loze) vervorming optreedt. De volgende twee hypotheses zijn getoetst:

1) Voor de bolvormige schalen (positief gekromde schaal) waarbij de richting loodrecht op de schaal niet wordt verhinderd vervormd de bol extensieloos.
2) Voor een zadelvormige schaal (negatief gekromde schaal) waar de langs richting niet wordt verhinderd vervormd de schaal extensieloos.

In dit onderzoek is met het FEM-programma SCIA gekeken of deze hypotheses kloppen en of deze algemener kunnen worden gemaakt. Het onderzoek beperkt zich tot de twee genoemde schaalvormen met vast parameters. Hierdoor kunnen verschillende resultaten worden vergeleken.

De opbouw van dit rapport is als volgt: In hoofdstuk 2 wordt er gekeken naar de theorie van extensieloze vervorming, waaruit de onderzoeksmethode wordt opgesteld. In hoofdstuk 3 wordt de extensieloze vorm van beide schalen gevonden en benaderd met opleggingen en voorgeschreven belasting. In hoofdstuk 4 wordt gekeken voor welke opleggingen buiging overheerst of extensie overheerst in de schaal. Tot slot worden in hoofdstuk 6 conclusies getrokken en aanbevelingen gedaan.

2. Analytische aanpak

In dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe extensieloze vervorming analytisch kan worden gevonden en wanneer deze toestand zich instelt bij opgelegde belasting of verplaatsing. Daarnaast wordt er ingegaan op de bestaande oplossingen van Loof (1978) en de theorie over extensieloze eigenfrequenties. Tot slot wordt er op basis van de besproken theorie de methode geformuleerd waarmee extensieloze vervormingen numeriek worden benaderd.

2.1. De theorie van extensieloze vervorming

De Sander-Koiter vergelijkingen beschrijven de gehele kracht en vervormingstoestand van schalen voor verschillende krommingen. De kracht en vormingstoestand ten gevolge van zowel krachtafdracht door buiging en door membraamkrachten wordt dus meegenomen. Het doel van dit onderzoek is om te vinden voor welke randvoorwaarden de rek in de middelste vezel voor iedere doorsnede van de schaal gelijk is aan nul, want dan is de schaal extensieloos. Het voldoet dus om enkel te kijken wanneer Vergelijking 1 (Hoogenboom, 2023, p38) geldt, waarbij enkel extensie door membraamkrachten, en dus geen buiging wordt meegenomen. Deze kinematische vergelijkingen beschrijven de rek van een punt en deze moeten gelijk zijn aan nul voor ieder punt om extensieloze vervorming te krijgen. Wanneer deze vergelijking wordt opgelost voor een bepaalde randvoorwaarde, wordt er een u_x, een u_y en een u_z gevonden. Dit is dus de verplaatsing waarvoor er extensieloze vervorming optreedt. Een vervormde stand kan dus worden gevonden op basis van deze vergelijking, waarvoor de schaal extensieloos is, maar er treden wel buigspanningen op.

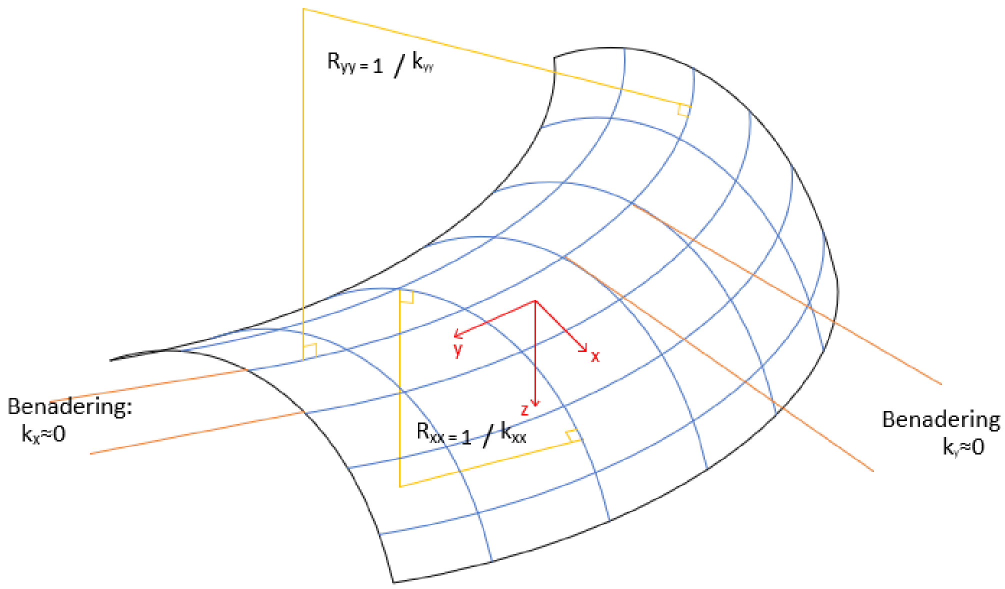
Vergelijking 1:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - k_{xx} u_z + k_x u_y = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} - k_{yy} u_z + k_y u_x = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2k_{xy} u_z - k_x u_x - k_y u_y = 0$$

In Figuur 2. 1 zijn de krommingsdefinities voor een schaal met kromming in twee richtingen toegelicht. Bij dit voorbeeld is de z-as naar beneden en is geprobeerd een zadelvormige schaal te tekenen. Bij de kromming in x-richting zou de raakcirkel in het negatieve z-y vlak liggen, dus is de kromming negatief. De kromming in de y-richting is positief, want de raakcirkel ligt in het positieve x-z vlak. De kromming is dus anders in beide richtingen en daarom is dit een voorbeeld van een negatief gekromde schaal. Bij een bolvormige schaal is de kromming in beide richting of positief of negatief, en dus wordt de kromming van deze schaal positief genoemd.



Figuur 2. 1: Voorbeeld van een negatief gekromde schaal, met bijbehorende krommingsdefinities.

2.2. Wanneer is er extensie of extensieloze vervorming in een schaalconstructie?

In het collegedictaat van Loof (1978) wordt onder andere gekeken naar wanneer extensie overheerst in de schaal of juist buiging. Zoals eerder gezegd geldt dat voor een opgelegde verplaatsing er ontworpen wil worden op extensieloze vervorming. In dit geval geeft dit kleinere spanningen, omdat de schaal zich dan niet stijf gedraagt doordat extensiekrachten de verplaatsingen niet tegengaan. De constructie zal ook bij opgelegde verplaatsing vervormen volgens het beginsel van potentiële energie.

‘Beginsel van minimum potentiële energie: indien meer verplaatsingstoestanden kinematisch mogelijk zijn, dan zal zich die toestand instellen, waarbij de potentiële energie een minimum bereikt.’ (Loof, 1978, p.3.3-7)

Loof maakt in het dictaat een schatting van de ordegrootte van spanningen, rekken en vervormingsenergie, ten gevolge een situatie waarin buiging overheerst en een situatie waarin extensie overheerst. Hieruit wordt de volgende conclusie getrokken:

‘Uit het geciteerde beginsel volgt dus inderdaad dat de kinematisch mogelijk gemaakte extensieloze verbuiging nagenoeg zal optreden (het ware minimum zal hiermee weinig schelen).’
(Loof, 1978, p.3.3-7)

Dit betekent dus dat bij opgelegde verplaatsingen de constructie zou extensieloos mogelijk vervormd, omdat dit de minste energie kost. Dit is een belangrijke conclusie die zal worden gebruikt in de onderzoeksmethode.

Bij opgelegde belasting wil een constructeur juist ontwerpen op extensie vervorming, wat zorgt voor kleine verplaatsingen en spanningen in dit geval. Door wederom de ordegroottes te beschouwen trekt Loof (1978) de volgende conclusie voor een schaal met opgelegde belasting:

‘Er zal zich dus een extensieloze verbuiging instellen tenzij deze kinematisch onmogelijk wordt gemaakt. Een extensieloze verbuiging, waarbij de belasting géén arbeid zou verrichten (de energie van plaats blijft gemiddeld nul) behoeft niet gevreesd te worden, want deze zal vanzelf niet optreden.’
(Loof, 1978, 3.3-9)

Dit betekent dus dat een schaal extensieloos zal vervormen ten gevolge van de belasting, tenzij de opleggingen dit onmogelijk maken. Zodra de opleggingen de extensieloze verplaatsing onderdrukken, vindt er ook vervorming ten gevolge van extensie plaats. In het tweede deel van de quote wordt benadrukt dat de extensieloze vervorming ook alleen zou optreden wanneer de belasting deze niet onderdrukt. Wanneer de belasting positieve arbeid verricht, dat wil zeggen de belasting heeft dezelfde richting als de verplaatsing, dan wordt extensieloze vervorming niet onderdrukt door de belasting en kan deze wel optreden. Als de belasting negatieve arbeid zal verrichten dan onderdrukt de belasting de extensieloze verplaatsing en zal deze niet optreden. Dit zijn twee belangrijke bevindingen die worden gebruikt voor de onderzoeksmethode.

2.3. De oplossing van Loof voor de zadelvormige schaal

H.W. Loof (1978) geeft in zijn collegedictaat oplossingen voor Vergelijking 1 voor verschillende vormen van schaalconstructies. Dit doet hij ook voor de hyperbolische paraboloïde, oftewel het de zadelvormige schaal. Deze oplossing wordt in dit hoofdstuk besproken, welke komt uit (Loof, 1978, p. 3.6-5). De functie en de kinematische vergelijkingen gelijk aan nul die gelden voor de zadelvorm zijn te zien in Vergelijking 2.

Vergelijking 2: De functie van de zadelvormige schaal, met bijbehorende kinematische vergelijkingen gelijk aan nul.

$$z = \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \ met$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} - \frac{1}{R_1} u_z = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} + \frac{1}{R_2} u_z = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} = 0$$

De notatie $\tilde{u}_x$ en $\tilde{u}_y$ zijn hulpgrootheden die de verplaatsingen volgens de normaal beschrijven, met $\tilde{u}_x = u_x + \frac{\partial z}{\partial x} u_z$ en $\tilde{u}_y = u_y + \frac{\partial z}{\partial y} u_z$. Het oplossen van deze differentiaalvergelijking geeft de algemene oplossing voor extensieloze vervorming, die te zien is in Vergelijking 3.

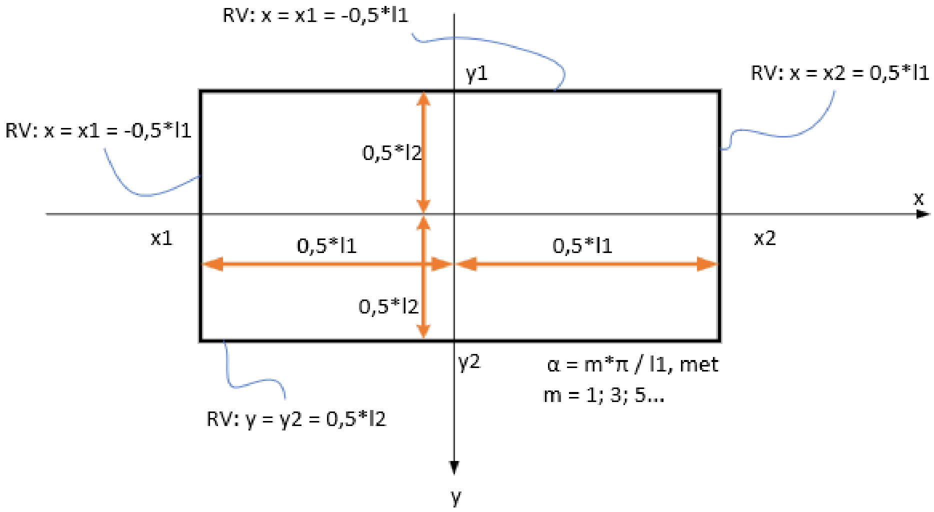
Vergelijking 3: De algemene oplossing voor extensieloze vervorming van de zadelvormige schaal.

$$\tilde{u}_x = \frac{1}{\alpha R_1}(c_1 \cos \tau\alpha y + c_2 \sin \tau\alpha y) \sin \alpha x \, , met \ \tau = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

$$\tilde{u}_y = \frac{\tau}{\alpha R_1}(-c_1 \sin \tau\alpha y + c_2 \cos \tau\alpha y) \cos \alpha x$$

$$\mathrm{u}_z = (c_1 \cos \tau\alpha y + c_2 \sin \tau\alpha y) \cos \alpha x$$

Wanneer de zadelvormige schaal op vier rechthoekszijden scharnierend wordt opgelegd, zoals in Figuur 2. 2, zien de oplossing eruit als in Vergelijking 4.



Figuur 2. 2: De randvoorwaarde voor de zadelvormige schaal, waarbij extensieloze vervorming optreedt.

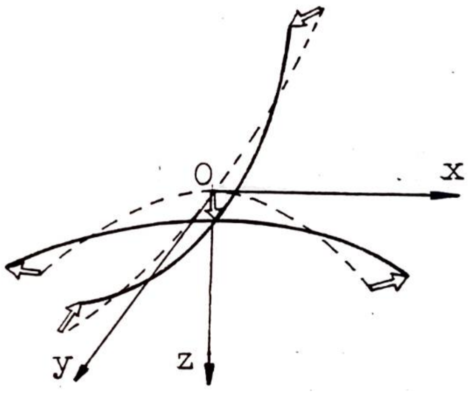
Vergelijking 4: De extensieloze verplaatsingen voor de zadelvormige schaal, opgelegd op de rechthoekige randen.

$$met\ \tau = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{l_1}{l_2}\ geldt: \quad \tilde{u}_x = \frac{l_1}{\pi R_1} c_1 \sin\frac{\pi x}{l_1} cos\frac{\pi y}{l_2}$$

$$\tilde{u}_y = -\frac{l_2}{\pi R_2} c_1\ cos\frac{\pi x}{l_1} sin\frac{\pi y}{l_2}$$

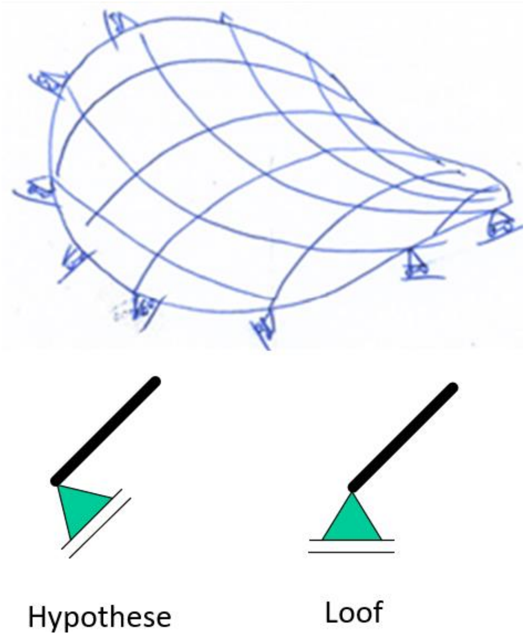
$$u_z = c_1 \cos\frac{\pi x}{l_1} \cos\frac{\pi y}{l_2}$$

Loof geeft deze verplaatsingen weer in enkel hoofdkrommingsrichting in Figuur 2. 3.



Figuur 2. 3: De extensieloze verplaatsingen van de hoofdkrommingen, opgelegd op vier randen (Loof, 1978, p.3.6-5).

Bij deze zadelvormige schaal wordt verplaatsing loodrecht op het vlak van de wanden niet verhinderd, wat in de figuur geprobeerd te tekenen is. Dit betekent dus de de extensieloze vorm van de zadelvormige schaal volgens Loof anders is dan volgens de hypothese voor deze vorm, weergegeven in Figuur 2. 4**Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.**.



Figuur 2. 4: De randvoorwaarden voor extensieloze verplaatsingen van de zadelvormige schaal volgens de hypothese en volgens Loof.

Of de door Loof extensieloze vorm van de zadelvormige schaal klopt, en dus hypothese niet, wordt in hoofdstuk 3 gecontroleerd.

2.4. Rayleighs extensieloze eigenfrequenties

In 2.2 is besproken dat een schaalconstructie bij een opgelegde verplaatsing zo extensieloos mogelijk vervormd, omdat dit de minste energie kost. Dit is analoog aan de bevindingen in het rapport van Ross (1967) waarin wordt onderzocht of lage eigenfrequenties van schalen extensieloos zijn bij verschillende randvoorwaarden. De natuurlijke frequentie van een systeem is de frequentie waarin een voorwerp trilt wanneer deze kort wordt belast en dus even uit zijn evenwichtstand wordt gebracht. Uit dit rapport blijkt extensieloze eigenfrequenties voor kunnen komen, welke lager zijn dan alle andere eigenfrequenties van de betreffende schaal. De laagste extensieloze eigenfrequentie komt voor wanneer de randen vrij zijn, deze worden ook welk Rayleighs extensieloze eigenfrequenties genoemd. Rayleigh heeft namelijk als eerst gekeken naar extensieloze eigenfrequenties in 'The Theory of Sound' (Strutt & Rayleigh, 1945). Daarnaast worden extensieloze eigenfrequenties sneller onderdrukt door verandering aan randcondities dan bij hogere frequenties (Ross, 1967). Rayleighs extensieloze eigenfrequenties kunnen dus alleen gevonden worden wanneer de rand vrij kan bewegen. Anders worden deze frequenties onderdrukt door de een oplegreactie, waardoor er per definitie wel extensie in de schaal zit.

2.5. De onderzoeksmethode

Wanneer Rayleighs extensieloze eigenfrequentie wordt gevonden, is te zien hoe de volledig extensieloze vervorming van de bolvormige en zadelvormige schaal er uit ziet. Wanneer de schaal met opgelegde verplaatsingen deze exacte vervorming heeft dan zijn er nergens extensiekrachten in de schaal. Deze vorm kan dan worden vergeleken met de hypothese en met de bevindingen van Loof, waaruit kan worden geconcludeerd of de hypothese moet worden aangepast of niet.

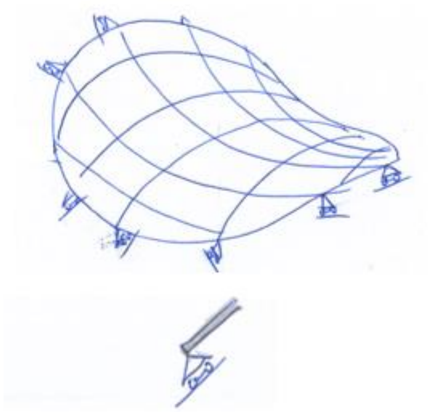
Volgens sectie 2.2 zal de schaal extensieloos vervormen wanneer de voorgeschreven belasting positieve arbeid verricht. Wanneer de randen rollend worden opgelegd zodat de extensieloze verplaatsingen van de rand nog kunnen optreden, dan zal er geen oplegreactie in de rol zitten, omdat deze de verplaatsing van de rand niet verhinderd. Echter moet de belasting wel worden overgebracht op de opleggingen, dus zal er altijd een oplegreactie zijn en bij een schaal betekent dat ook dat er daar extensiekrachten zijn. Bij voorgeschreven belasting wordt er dus wel gesproken over extensieloze vervorming, maar er wordt eigenlijk bedoelt dat de schaal zich extensieloos gedraagt. Enkel wanneer de opgelegde punten die zouden willen verplaatsen volgens de extensieloze eigenfrequentie geen kracht en dus geen weerstand bieden zal de schaal zich extensieloos gedragen. Dit betekent dus dat de opgelegde punten die volgens de extensieloze eigenfrequentie niet zouden bewegen alle kracht zouden moeten dragen, omdat deze kracht de verplaatsing niet hindert. Deze opleggingen onderdrukken dan alleen de eigenfrequenties waar globale translatie of rotatie voorkomt, maar dit is niet de vorm waarnaar wordt gezocht. Dit zal een vorm geven die overeenkomt met de laagste eigenfrequentie, waarbij buiging overheerst en spanningen en verplaatsingen dus groot zijn. Daarnaast kan er gekeken worden of dit opgelegde model dezelfde eigenfrequentie heeft als het model met vrije randen. Als dit het geval is dan verhinderen de opleggingen extensieloze verplaatsing niet en zal dit het model zijn waarvoor de schaal zich zo extensieloos mogelijk gedraagt bij een opgelegde belasting.

3. Numerieke aanpak

In dit hoofdstuk wordt de extensieloze vorm gevonden met behulp van SCIA. Dit wordt gedaan door de laagste extensieloze eigenfrequentie te vinden van beide schaalconstructie. Er wordt dan gekeken of deze overeenkomen met de verwachte vervorming. Vervolgens wordt deze vorm benaderd voor een opgelegde belasting met rolopleggingen, om te kijken of de schaal zich dan ook extensieloos gedraagt. Hieruit kan worden geconcludeerd of de hypothese inderdaad de extensieloze vervorming geeft of dat deze moet worden aangepast.

3.1. De zadelvormige schaal

Deze sectie zal zich focussen op de vraag: ‘Bij welke opleggingen is de zadelvormige schaal stijf en bij welke opleggingen treedt er extensie loze vervorming op?’ Volgens de hypothese zal er bij rolopleggingen die loodrecht op de rand staan wel extensieloze vervorming optreden. Dat betekent dus dat de opleggingen de verplaatsing in de richting van de rand niet verhinderen, zoals te zien is in Figuur 3. 1.



Figuur 3. 1: Het zadelvormige schaalmodel waarbij er extensieloze vervorming zou optreden.

3.1.1. Het SCIA-model voor de zadelvormige schaal

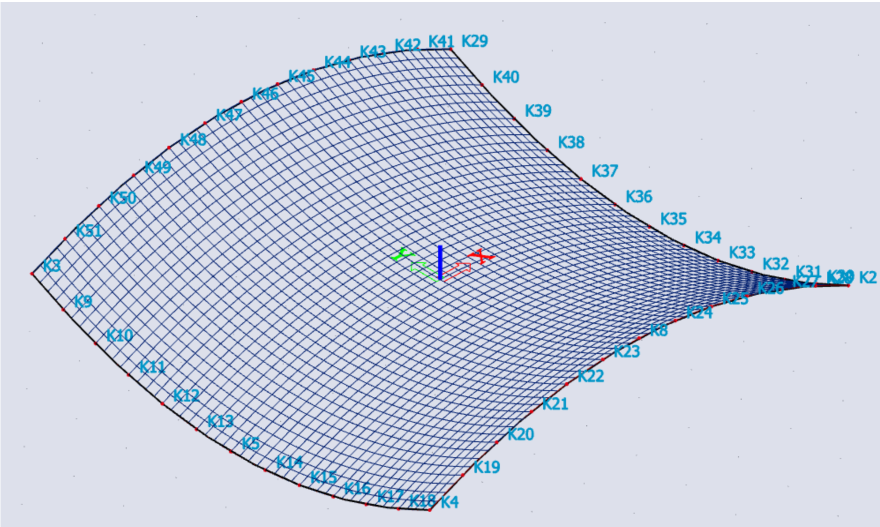
Het model van de zadelvormige schaal wordt net als alle ander modellen gemaakt in SCIA-engineer versie 21.1. SCIA gebruikt een rechtshandig x-y-z assenstelsel met de z-as omhoog. Dit assenstelsel wordt dus ook gebruikt in dit rapport voor positieve en negatieve aanduidingen. Het SCIA-model moet een hyperbolische paraboloïde benaderen, die over de hele lengte van de rand wordt ondersteund. De oriëntatie van de lijnondersteuning kan dan worden gevarieerd om de hypothese te testen en om te testen of er extensieloze vervorming optreedt bij een andere roloplegging op de rand.

De hyperbolische paraboloïde (vanaf nu wordt dit zadelvorm genoemd) heeft een negatieve kromming, omdat de kromming in x- en y-richting een tegenovergesteld teken hebben. Voor dit model ziet de functie er zo uit:

$$z(x, y) = -\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$$

Het zadelmodel heeft randen die evenwijdig zijn aan de x- en y-as en lengte van 8 meter.

In SCIA is het helaas niet mogelijk om lijnondersteuningen te roteren om een bepaalde as. Daardoor zal er dus worden gewerkt met puntondersteuningen, die kunnen worden geroteerd om de x-, y- en z-as. Er zal op ieder punt dat moet worden ondersteund zal dus een knooppunt moeten worden ingevoerd. Er wordt voor dit model gekozen om tien punten per rand in te voeren bij het tekenen van de schaal, dus om de 0.8 meter. Het SCIA-model dat wordt gebruikt voor alle berekeningen van de zadelvormige schaal is te zien in Figuur 3. 2.



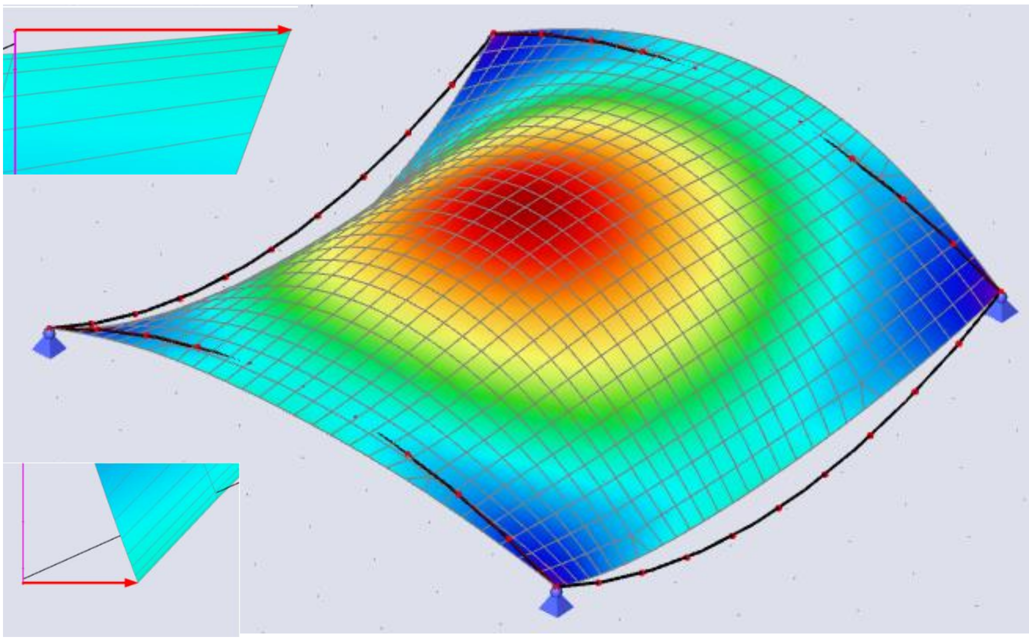
Figuur 3. 2: Het SCIA-model voor de zadelvormige schaal.

Het tekenen van het model is gedaan met de SCIA-functie ‘Schaal-vouwlichaam’. De schaal is van staal S235 en heeft een dikte van 20 mm. Wanneer er een belasting wordt toegepast op dit model zal dit -2 kN/m^2 sneeuwbelasting zijn, welke positieve arbeid verricht. Bij andere eigenschappen en belasting zal de schaal uiteraard meer of minder vervormingen of spanningen hebben. Omdat bij elke berekening van het zadelvormige model deze waardes worden gebruikt is het mogelijk om resultaten met elkaar te vergelijken en daaruit conclusies te trekken. Alle berekeningen zijn lineair elastisch, waarbij dwarskrachtvervorming wordt verwaarloosd.

Daarnaast is bij het tekenen van het model eerst een parabolische hulplijn getekend. Vervolgens is deze hulplijn benaderd door knooppunten om de 0.8 meter te verbinden met splines. Bij SCIA is het namelijk wel mogelijk om een keten van punten te verbinden met splines, waar dat niet mogelijk is met een parabolische lijn. Omdat de splines net als parabolische functies een polynoom zijn en omdat de parabolische lijn in stukjes wordt benaderd met splines is dit voldoende accuraat.

3.1.2. De extensieloze eigenfrequenties van de zadelvormige schaal

In deze sectie wordt gekeken hoe de zadelvorm trilt wanneer de randen vrij zijn en of dit overeenkomt met de hypothese. Volgens sectie 2.4 zijn er Rayleighs extensieloze eigenfrequenties wanneer de randen vrij kunnen bewegen. De schaal wordt belast door zijn eigen massa. Dit is afhankelijk van de gekozen parameters, dus de waarde van de laagste eigenfrequentie zelf zegt niet veel, maar kan wel worden vergeleken met andere waardes. In Figuur 3. 3 is de laagste eigenfrequentie te zien voor het model met vrije randen.



Figuur 3. 3: De extensieloze eigenfrequentie van het zadelmodel, waarbij de verplaatsing van de rand wordt uitgelicht.

Hier is een andere verplaatsing te zien dan volgens de hypothese. De waarde van deze eigenfrequentie is 1.5 Hz, welke kan worden vergeleken met modellen met rolopleggingen. Het doel is om de extensieloze eigenfrequentie te vinden, wanneer het zadelmodel wordt ondersteund aan de rand onder een bepaalde hoek. Doordat alle vier de randen worden ondersteund, zal bij iedere hoek van de randondersteuning de vier hoeken vast blijven. Daarom is er gekozen om voor dit model de hoeken scharnierend vast te zetten, welke enkel globale translatie en rotatie eigenfrequenties verhinderen. Dit betekent dus dat de randen alsnog vrij kunnen bewegen, dus dit is voor de zadelvorm de pure extensieloze vervorming waarnaar wordt gezocht. Voor de rand die in x-richting loopt verplaatst ieder punt in y-richting en voor de rand in y-richting verplaatst ieder punt in x-richting. Dit resultaat komt overeen met de oplossing voor de zadelvorm van Loof, welke is besproken in sectie 2.3. Dit is geen verrassing aangezien de vorm van deze zadelvorm voldoet aan de eis van gevonden door Loof die is besproken in sectie 2.3: $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{l_1}{l_2}$. De exacte verplaatsing kan worden gevonden met Vergelijking 4 uit sectie 2.3. In Vergelijking 5 worden de extreme verplaatsing op de punten waar de rand de x-as en y-as snijdt gevonden, waaruit blijkt dat de verplaatsing van de rand bij dit model dezelfde waarde heeft, waarvan de waarde afhankelijk is van c1.

Vergelijking 5: De extreme verplaatsing op de randen, volgens de oplossing van Loof.

Op (4,0,-1), met l_1=l_2=2 m en R_1=R_2=-2 m geldt:

$$\tilde{u}_x = \frac{l_1}{\pi R_1} c_1 \sin\frac{\pi x}{l_1} cos\frac{\pi y}{l_2} = \frac{8}{\pi * -2} * c_1 \sin\frac{\pi * 4}{8} * 1 \approx -1{,}273 * c_1\ m$$

$$\tilde{u}_y = -\frac{l_2}{\pi R_2} c_1\ cos\frac{\pi x}{l_1} sin\frac{\pi y}{l_2} = 0$$

$$u_z = c_1 \cos\frac{\pi x}{l_1} \cos\frac{\pi y}{l_2} = 0$$

Op (0, 4, -1) geldt:

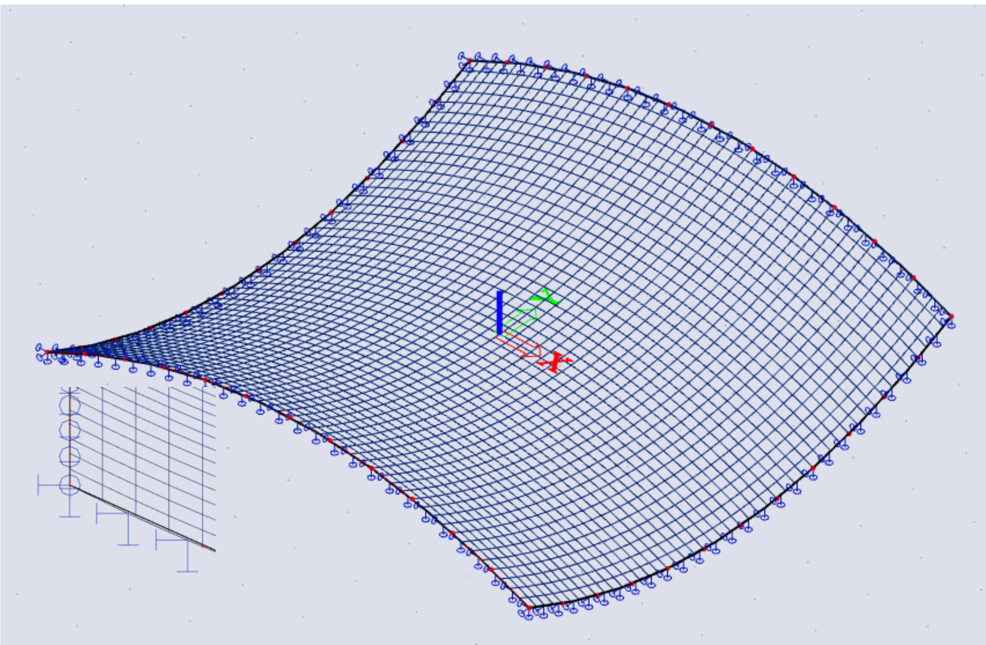
$$\tilde{u}_x = 0$$

$$\tilde{u}_y \approx 1{,}273 * c_1\ m$$

$$u_z = 0$$

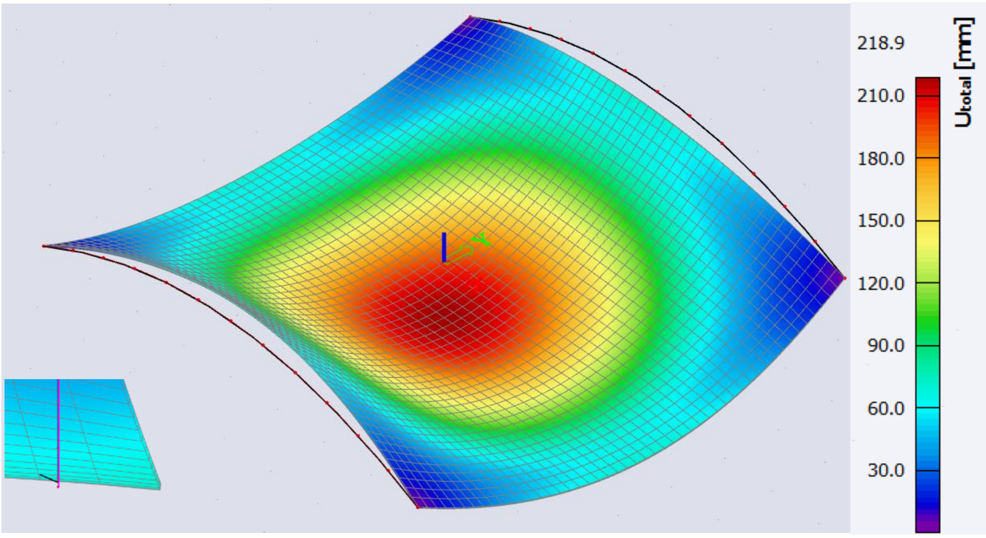
3.1.3. De benadering van de extensieloze vorm van de zadelvormige schaal

De in sectie 3.1.2 gevonden extensieloze eigenfrequentie lijkt randen te hebben die horizontaal verplaatsen. Om dit te testen wordt gekeken naar het model in Figuur 3. 4 , waarbij de randen in x-richting vrij kunnen verplaatsen in y-richting en randen in y-richting vrij kunnen verplaatsen in x-richting.

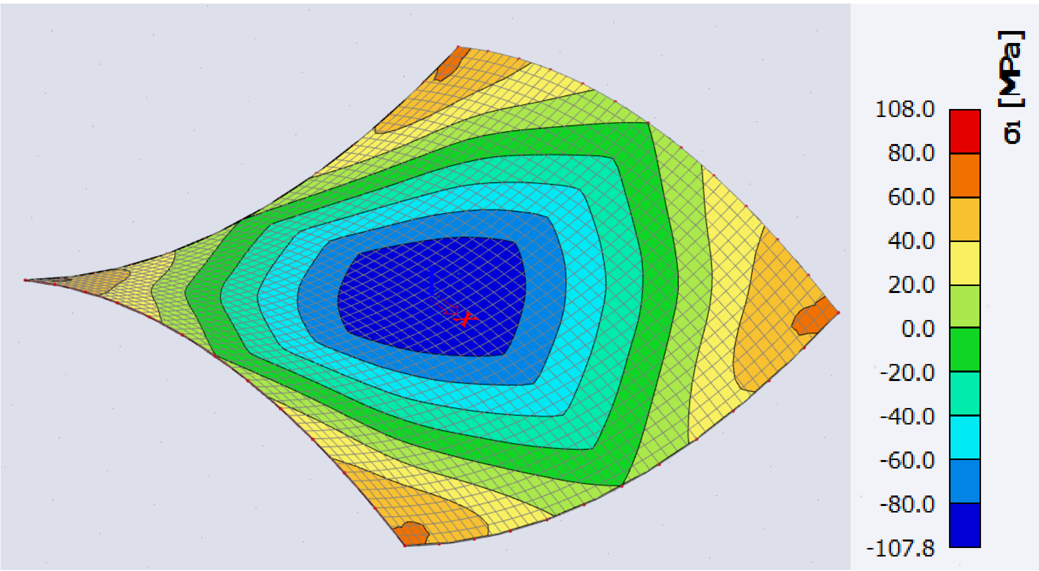


Figuur 3. 4: Het model voor het vinden van de extensieloze vervorming bij opgelegde belasting.

De laagste eigenfrequentie van dit model is 1.48 Hz en de trilvorm ziet er hetzelfde uit als in 3.1.2. De gevonden frequentie is 0.02 lager dan wanneer de randen vrij zijn. Dit moet vanwege een kleine onnauwkeurigheid zijn van SCIA, omdat bij beide modellen de hoeken niet verplaatsen en de randen verplaatsen in dezelfde richting. De verplaatsingen en hoofdspanningen ten gevolge van een sneeuwbelasting van -2 kN/m^2 zijn te zien in Figuur 3. 5 en Figuur 3. 6 respectievelijk.



Figuur 3. 5: De verplaatsingen in het extensieloze zadelmodel, ten gevolge van de belasting.



Figuur 3. 6: De hoofdspanningen in het extensieloze zadelmodel, ten gevolge van de belasting.

Dit zijn hele grote verplaatsingen en spanningen, wat duidt op extensieloos gedrag. Of dit de grootste verplaatsingen en spanningen zijn voor dit model wordt bekeken in hoofdstuk 4. Voor de spanningen is er ook te zien dat er geen lokale verstoringen optreden, maar de spanning in veel verschillende punten hoog is.

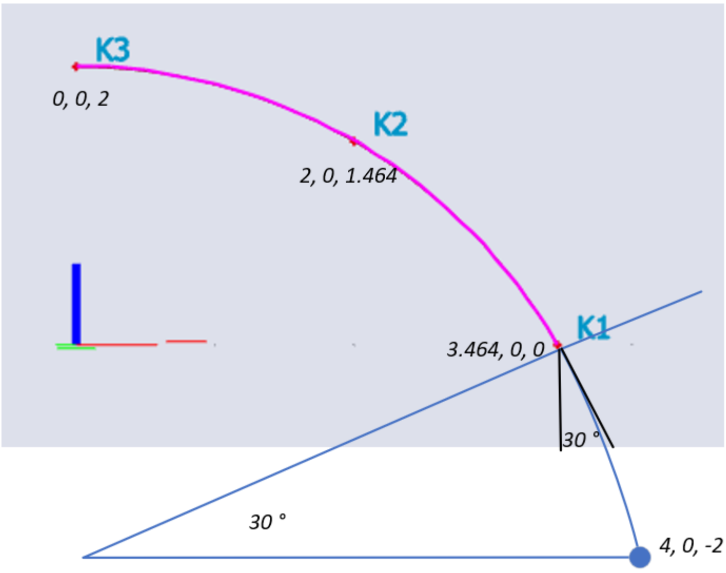
3.2. De bolvormige schaal

Deze paragraaf zal zich focussen op de vraag: ‘Bij welke opleggingen is de bolvormige schaal stijf en bij welke opleggingen treedt er extensie loze vervorming op?’ Volgens de hypothese zal er bij rolopleggingen die in de richting van de rand van de rand staan wel extensieloze vervorming optreden. Dat betekent dus dat de opleggingen de verplaatsing loodrecht op de rand niet verhinderen, zoals te zien is in Figuur 3. 7.

Figuur 3. 7: Het bolvormige schaalmodel waarbij er extensieloze vervorming zou optreden

3.2.1. Het SCIA-model van de bolvormige schaal

Het SCIA-model van de bolvormige schaal is gemaakt met de functie ‘schaal- omwentelingslichaam’. Dit wordt gebruikt om de roze lijn in Figuur 3. 8 om te zetten tot een 3D-bolvormige schaal.



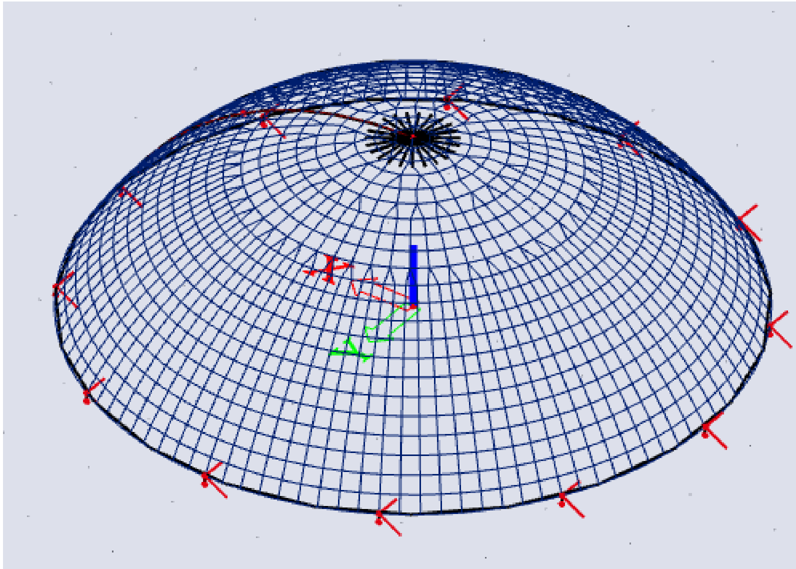
Figuur 3. 8: Vooraanzicht van de cirkelvormige lijn met bijbehorende punten.

De bolvormige schaal heeft een helling aan het uiteinde van 30 graden. Het middelpunt ligt op 2 meter onder de oorsprong en de bol heeft een straal van 4 meter. De punten op 30 en 60 graden zijn als volgt bepaald:

$$x_1 = 4 * \cos(30°) = 2 * \sqrt{3} \approx 3.64,\ z_1 = 4 * \sin(30°) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$x_2 = 4 * \cos(60°) = 2,\ z_2 = 4 * \sin(60°) - 2 = 2 * \sqrt{3} - 2 \approx 1.464$$

Bij deze bolvormige schaal zijn de interne knooppunten achteraf toegevoegd, niet zoals bij de zadelvormige schaal. Dit is gedaan door eerst de bol te tekenen en daarna om de 30° een kolom te plaatsen. Vervolgens is deze kolom verbonden aan de schaal zodat het knooppunt deel wordt van de schaal. Tot slot worden de kolommen toegevoegd aan een andere laag, waarbij aangevinkt is dat de kolommen enkel tot het constructiemodel behoren. De kolommen zullen dus niet worden meegenomen in berekeningen, en worden klein afgebeeld. Het bolmodel is te zien in Figuur 3. 9.

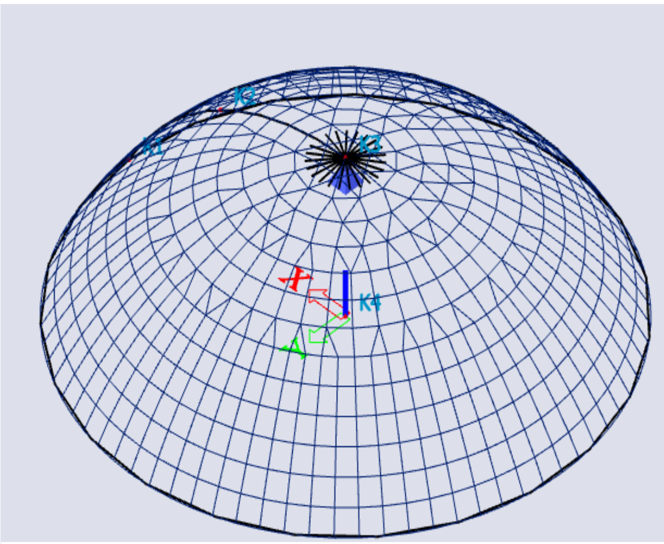


Figuur 3. 9: Het SCIA-model van de bolvormige schaal, waarbij de randen een helling van 30° hebben.

Net als het zadelmodel is het bolmodel van S235 staal met een dikte van 20 mm. Op dat de elementen van de mesh altijd bestaan uit vierkanten en driehoeken is het niet ideaal om een bolvormig oppervlak te benaderen. Door elementjes van 0.2 m bij 0.2 meter te gebruiken zijn de resultaten voldoende accuraat.

3.2.2. De extensieloze eigenfrequenties van de bolvormige schaal

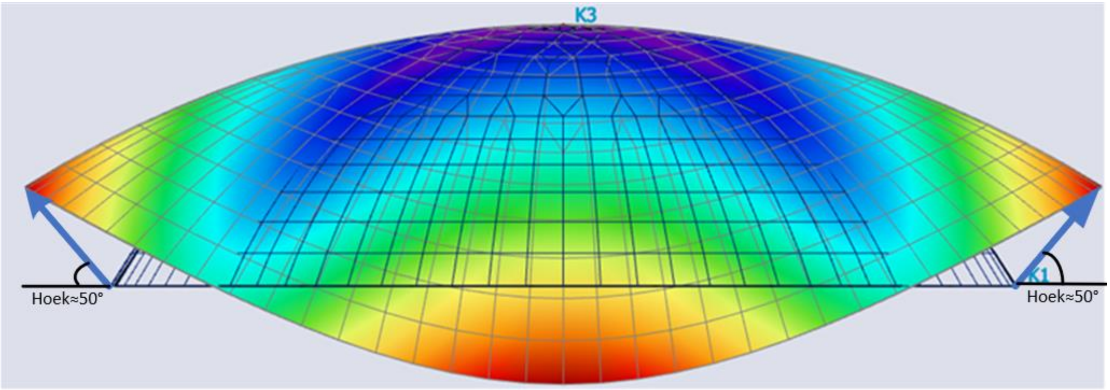
Om Rayleighs extensieloze eigenfrequenties te vinden voor het bolmodel ziet het model eruit als in Figuur 3. 10, waarbij de randen dus vrij zijn. In SCIA is het nodig om een ondersteuning aan te brengen, anders kan het programma geen berekeningen uitvoeren. Daarom is er gekozen om het



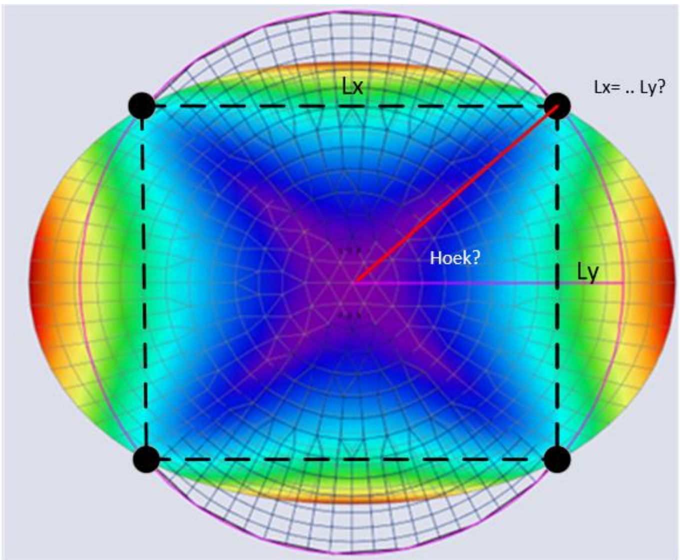
Figuur 3. 10: Het bolmodel voor het berekenen van eigenfrequenties.

middelpunt van de bol scharnierend te ondersteunen. Hierdoor kan het bolmodel als geheel niet meer transleren, maar het kan wel volledig vrij roteren.

De massa die wordt gebuikt voor de berekening van de eigenfrequentie is de massa van het model, net als bij 3.1.3. Bij de laagste drie eigenfrequenties roteert de bol als geheel om het vaste punt en wordt de kromming wat kleiner. Deze eigenfrequenties zijn een gevolg van de rotatievrijheid van het model om het vaste punt. Deze extensieloze verplaatsingen zullen nooit voorkomen bij het bolmodel dat wordt ondersteund op de randen. De 4^{e} en de 5^{e} eigenfrequentie hebben dezelfde vorm, deze is te zien in Figuur 3. 11, en heeft een waarde van 2.05 Hz. In Figuur 3. 10 is het zijaanzicht te zien van deze trilvorm, en in Figuur 3. 11 het bovenaanzicht.



Figuur 3. 11: Zijaanzicht van de 4^{e} eigenfrequentie van het bolmodel.



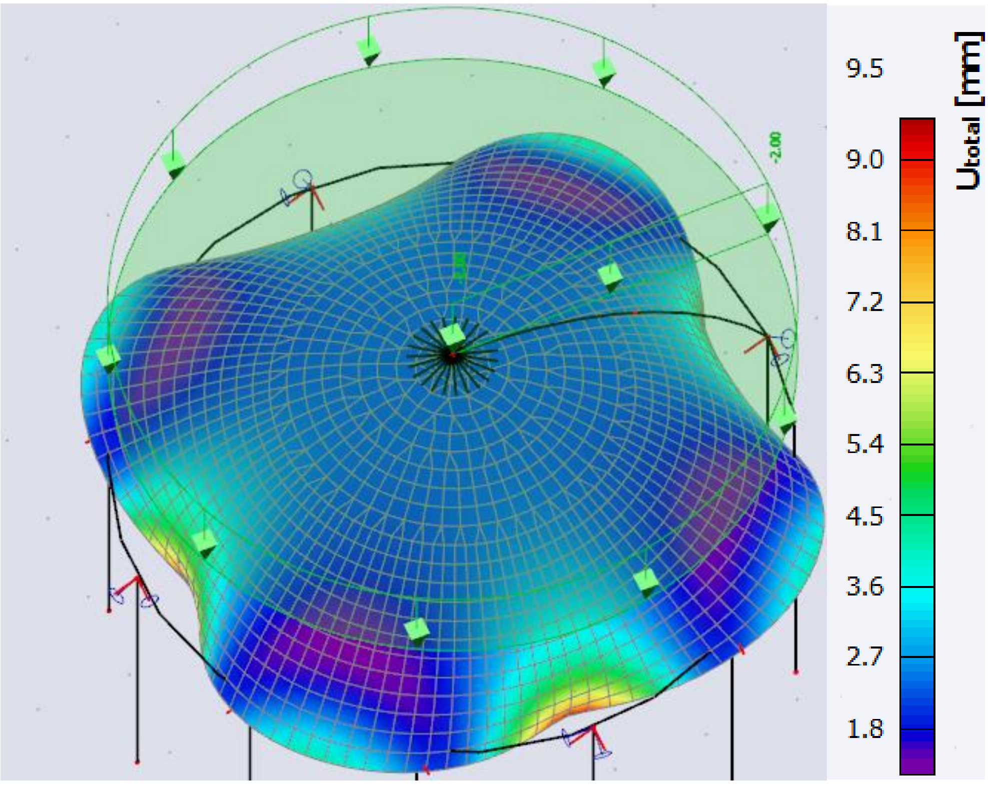
Figuur 3. 12: Bovenaanzicht van de 4^{e} eigenfrequentie van het bolmodel.

De hoek waaronder de randen verplaatsen is anders dan volgens de hypothese. Wanneer deze met een geodriehoek worden opgemeten lijkt de hoek rond de 50° te liggen. In het bovenaanzicht is te zien dat de schaal de rand snijdt in vier punten. De vier punten die hier zijn verbonden lijken een vierkant te vormen, maar door de afstand op te meten blijkt de horizontale lijn wat langer. Echter zouden de vier punten in werkelijkheid wel een vierkant moeten vormen, omdat de schaal volledig symmetrisch is. Daarnaast wordt hier een dynamische trilvorm beschouwd, waarbij de randen vibreren. Dat betekent dat de randen die hier omlaag worden weergegeven ook omhoog vibreren, dus is de trilvorm per definitie symmetrisch. Wanneer de element grootte kleiner wordt gemaakt, wordt de eigenfrequentie ook iets kleiner en meer symmetrisch. Dit betekent dus dat het resultaat uit Figuur 3. 12 door onnauwkeurigheid van de mesh komt.

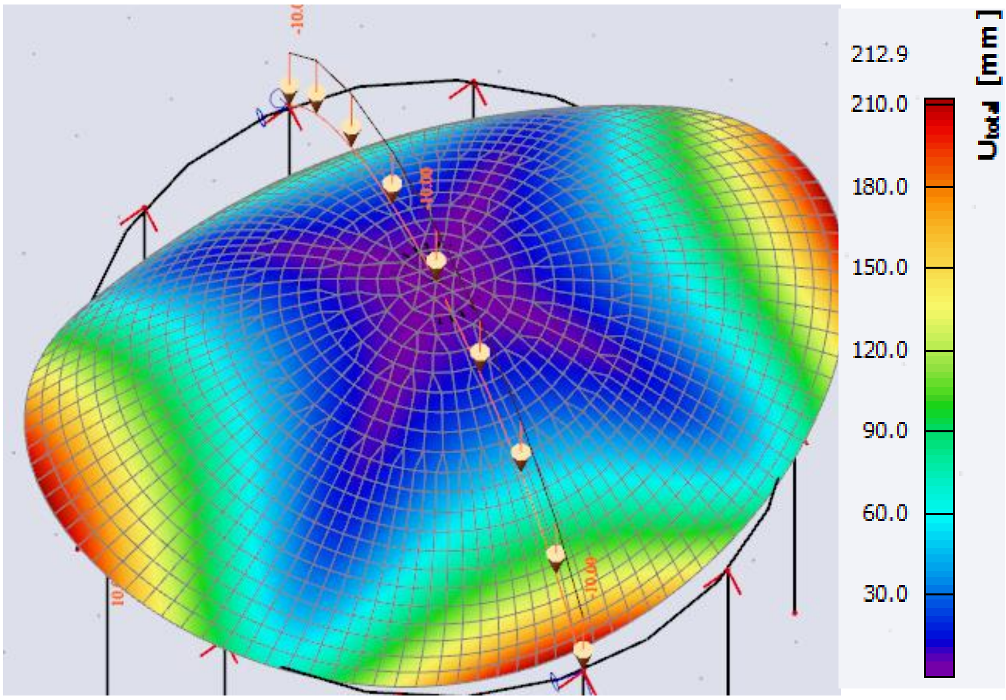
3.2.3. De benadering van de extensieloze vorm van de bolvormige schaal

Bij de extensieloze trilvorm uit sectie 3.2.2. beweegt de rand in de ene richting omhoog en in de andere richting naar beneden. Dit betekent dat de helft van de punten op de schaal omhoog bewegen en de andere helft omlaag. Als er een sneeuwbelasting zou worden toegepast over het hele model dan zal dus de helft van de belasting positieve arbeid verrichten en de andere helft negatieve arbeid. Dit betekent volgens sectie 2.2. dus dat de deze belasting extensieloze vervorming zal onderdrukken. Daarom zal dit model worden belast door een lijnbelasting van -10 kN/m over de y-as, waardoor de lijnlast positieve arbeid kan verrichten. Om een symmetrische vervorming te krijgen moeten de punten langs de x-as worden belast met 10 kN/m, waarbij deze belasting dus ook positieve arbeid verricht. De vervorming en spanning dit geeft voor de bol volgens de hypothese is te zien in de bijlage.

De randen van de bolvormige schaal lijkt volgens 3.2.2 dus onder een hoek rond de 50° te verplaatsen. Hierbij is de schaal symmetrisch door de x- en y-as en door de vlakken waarbij y=x en y=-x. Deze hoek wordt benaderd door de opleggingen van de bol in vier punten te roteren. Na trial en error geeft een hoek tussen de 49,2° en 49,3° de meeste vergelijkbare eigenfrequentie. Dit betekent dat de onder deze hoek de schaal het meest extensieloos vervormd, omdat onder deze hoek de eigenfrequentie het minst wordt onderdrukt door de opleggingen. Deze eigenfrequentie is 2.06 Hz. De vorm onder van de eigenfrequentie is hetzelfde als Figuur 3. 11. In Figuur 3. 13 en Figuur 3. 14 zijn de vervormingen te zien bij respectievelijk sneeuwbelasting van -2 kN/m^2 en de in 3.2.2 besproken lijnlast.

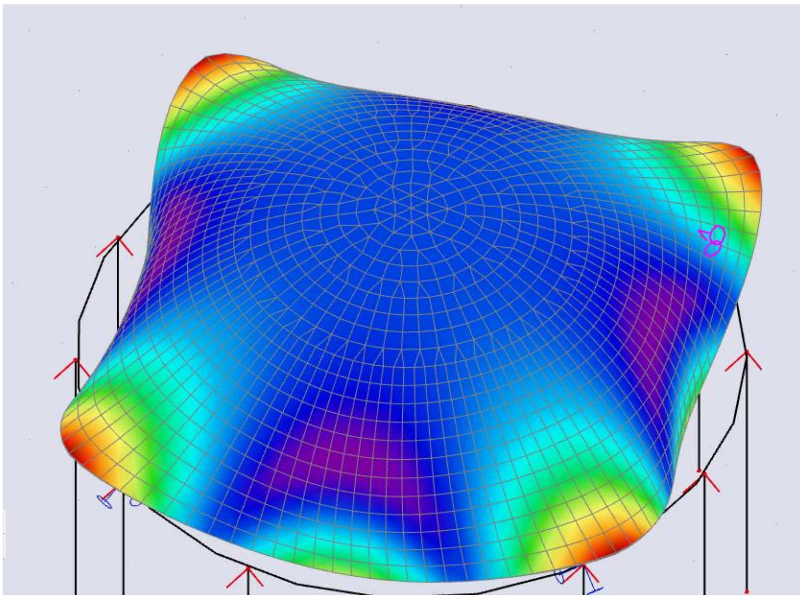


Figuur 3. 13: De vervorming van het bolmodel ten gevolge van de sneeuwbelasting.



Figuur 3. 14: De vervorming van het bolmodel ten gevolge van de lijnlasten.

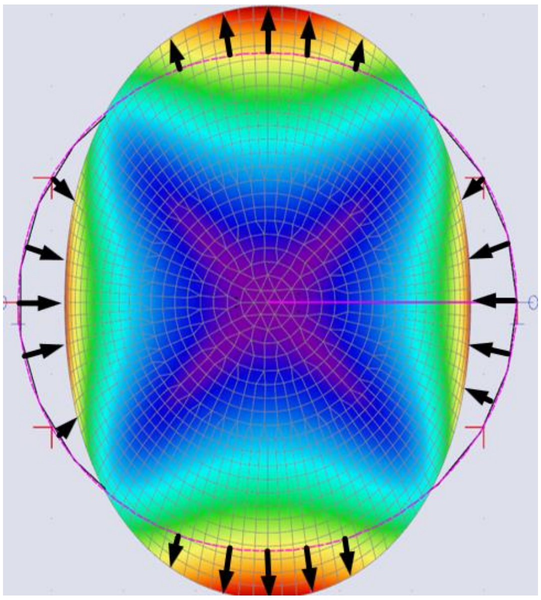
In de figuren is de invloed van de belasting goed zichtbaar. Er is al gevonden dat opleggingen de eigenfrequentie niet onderdrukken en bij de positieve arbeid verrichtende lijnlasten zijn de verplaatsingen enorm. Dit komt deels door de waarde van de belasting, maar vooral door het feit dat de extensieloze vervorming niet wordt onderdrukt door de belasting. Bij Figuur 3. 13 wordt deze de laagste eigenfrequentie dus wel onderdrukt. Wanneer er naar de eigenfrequenties wordt gekeken, blijkt deze vorm redelijk overeen te komen met de derde eigenfequentie, welke te zien is in Figuur 3. 15.



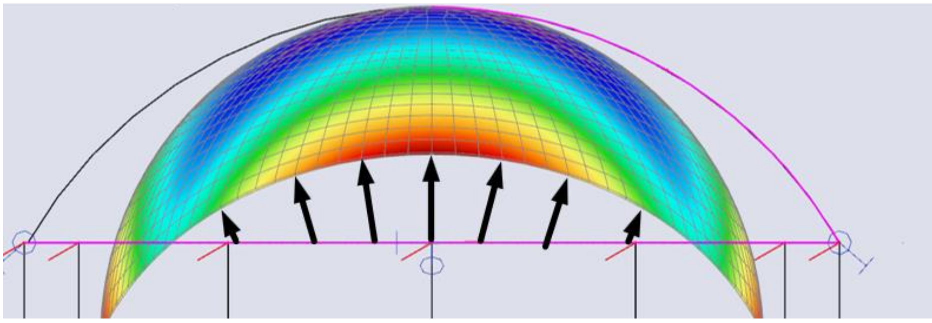
Figuur 3. 15: De derde eigenfrequentie van het bolmodel, welke wellicht ook extensieloos is.

Het verschil is echter dat de randen bij de sneeuwbelasting minder vrij omhoog kunnen bewegen dan bij de trilvorm. Deze exacte vorm is waarschijnlijk op een vergelijkbare methode als het vinden als de vorm van Figuur 3. 14, maar dan met twee paar lijnlasten in plaats van één paar. Dit is niet de laagste eigenfrequentie, maar ook bij deze lage eigenfrequentie zal extensie overheerst. Hier is dus weer te zien dat bij belasting de schaal zo extensieloos mogelijk vervormd. De belasting onderdrukt de laagste twee trilvormen meer dan de derde trilvorm, waardoor de vervoming overeenkomt met de derde eigenfrequentie. Deze trilvorm wordt ook een beetje onderdrukt door de belasting, waardoor de vorm niet helemaal overeenkomt.

Nu de verplaatsing van de vier extreme punten is gevonden, kan worden gekeken of ieder randpunt van de bolvormige schaal ook met deze hoek verplaatst. Nu wordt de schaal ondersteund op twaalf punten in plaats van vier. Eerst moet er dus worden gekeken of de eigenfrequentie van 2.06 wordt onderdrukt. Als dat wel het geval is dan onderdrukken de steunpunten de extensieloze vervorming, en zal er extensie optreden in de schaal. De laagste eigenfequentie is 32.09 Hz, wat betekent dat verplaatsing op de rand wordt onderdrukt. De maximale verplaatsing ten gevolgen van de in 3.2.1 besporken lijnlasten is ook maar 0.4 mm, welke te zien is in de bijlage.



Figuur 3. 16: Het bovenaanzicht van de extensieloze bolvorm, waarbij de verplaatsingen van de rand worden benadrukt.



Figuur 3. 17: Het bovenaanzicht van de extensieloze bolvorm, waarbij de verplaatsingen van de rand worden benadrukt.

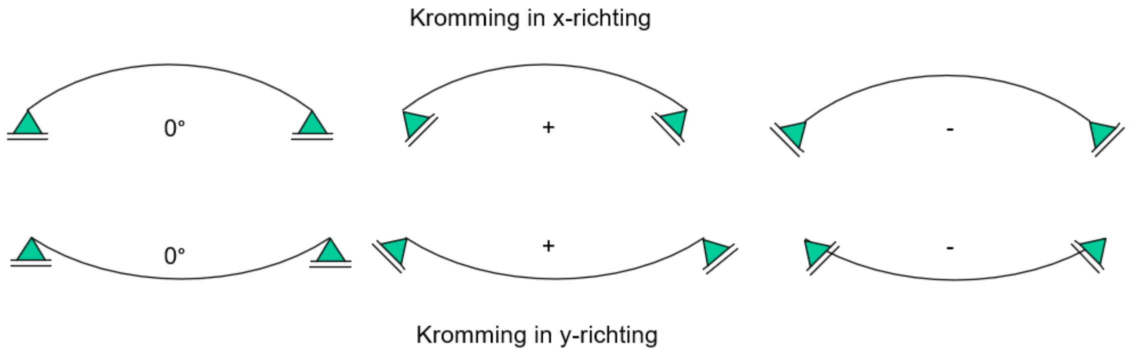
Dit komt doordat, in tegenstelling met de zadelvorm, de randen niet allemaal in dezelfde richting vervormen, zoals te zien is in Figuur 3. 16 en Figuur 3. 17. In welke richting ieder punt van de rand verplaatst wordt niet verder onderzocht. Deze kan wel worden gevonden en verloopt waarschijnlijk volgens een bepaalde functie. De conclusies worden verbonden aan het model opgelegd op vier punten, waar ook heel duidelijk te zien is of de schaal extensieloos vervormd of niet.

4. Variatie van de rolrichting

In het vorige hoofdstuk zijn de exacte richtingen van de rand gevonden, waarvoor de schaal volledig extensieloos vervormd. Er zijn ook oplegging waarbij buiging overheerst, maar er ook extensie in de schaal is. Dit zorgt nog steeds voor een grote vervorming en spanningen, dus dit wil ook worden voorkomen bij een opgelegde belasting. In dit hoofdstuk wordt gekeken bij welke rotatie van de opleggingen buiging overheerst en bij welke extensie overheerst, voor zowel de zadelvormige als de bolvormige schaal.

4.1. Bij welke opleggingen overheerst buiging in de zadelvormige schaal?

In deze sectie wordt de zadelvormige schaal op veertig punten rollend opgelegd, welke worden geroteerd om de richting van de rand. Er wordt begonnen bij de situatie waarin de schaal geen extensiekrachten heeft en puur op buiging de belasting afdraagt. Dit vindt plaats bij verticale opleggingen, waarbij de rand horizontaal kan verplaatsen. Deze rotatie wordt 0° genoemd als referentie, waarbij een positieve rotatie nu wordt gedefinieerd als in Figuur 4. 1. In het vorige hoofdstuk is namelijk gebleken dat de randen op deze manier vrijer kunnen bewegen, dus buiging zal hierbij meer overheersen dan bij een andere combinatie. Andere combinaties van rotaties worden daarom ook niet bekeken.



Figuur 4. 1: De positieve definitie voor de rotatie van de opleggingen in het zadelmodel.

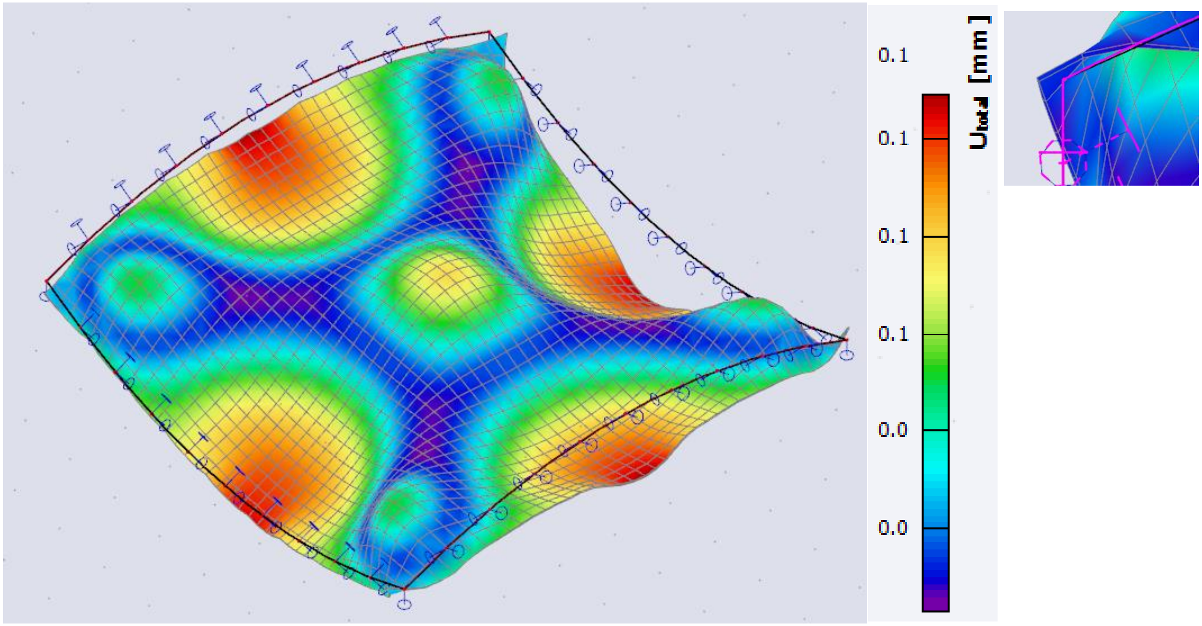
Als belasting wordt een sneeuwbelasting van -2 kN/m² gebruikt, waarvan in sectie 3.1 is aangetoond dat deze extensieloze vervorming niet onderdrukt. De parameters zijn hetzelfde als in sectie 3.1.1. Uit sectie 2.2 blijkt dat de schaal ten alle tijden zo extensieloos mogelijk wil vervormen. De opleggingen moeten dit dus verhinderen waardoor extensie optreedt.

Tabel 1 zijn een aantal resultaten te zien, voor extreme verplaatsing in mm, extreme hoofdspanning in MPa en laagste eigenfrequentie in Hz. In Figuur 4. 2 is de rotatie te zien waarbij extensie het meest overheerst in de schaal. Dit komt voor wanneer de verplaatsing loodrecht op de rand vrij is en de opleggingen geroteerd zijn met 116.56 ° (de helling van de rand).

Tabel 1: De resultaten voor verschillende rotaties bij het zadelvormige model.

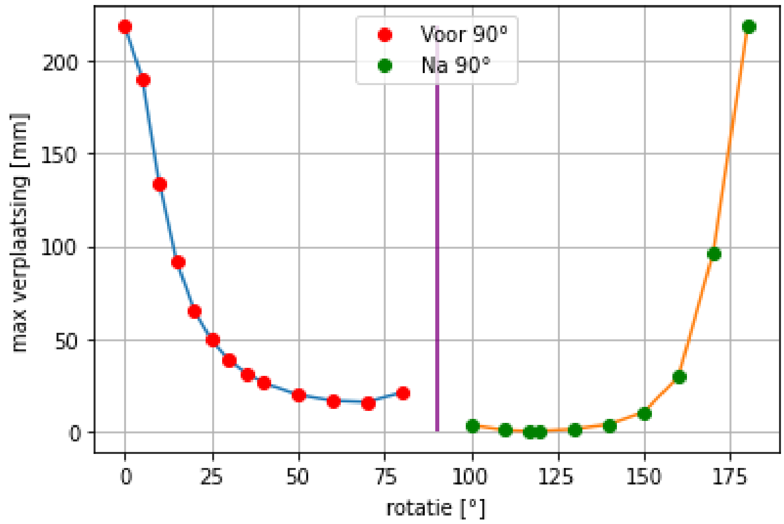
Rotatie om rand [°]	Extreme verplaatsing [mm]	Extreme hoofdspanning [MPa]	Extreme eigenfrequentie [Hz]
0 (max)	218.9	108	1.48
+5	190.7	193.5	1.59
+10	133.5	236.8	1.90
+15	91.6	227.5	2.31
+20	65.5	206.6	2.73
+25	49.3	186.2	3.17
+30	38.6	168.9	3.59
+35	31.4	154.5	4.01
+40	26.2	142.7	4.41
+50	19.7	124.8	5.13
+60	16.4	112.8	5.67
+70	15.7	106.7	5.76
+80	20.9	151.1	4.76
+90*	-	-	-
+100	3.3	50.8	10.94
+110	0.6	14.0	17.74
+116.56 (min)	0.1	4.3	19.39
+120	0.2	4.3	18.78
+130	1.2	20.7	12.98
+140	3.7	44.1	9.16
+150	10.3	78.2	6.72
+160	29.5	130.0	3.99
+170	96.2	18.7	2.22

Met 90° graden wordt de verplaatsing in z-richting niet verhinderd.

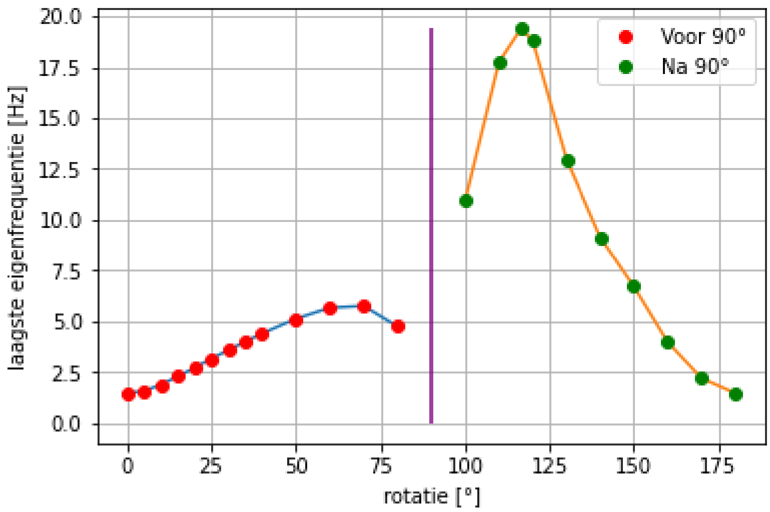


Figuur 4. 2: De vervorming van de zadelvormige schaal, waarbij extensie het meest overheerst.

In Figuur 4. 4 en Figuur 4. 3 zijn de resultaten van Tabel 1 samengevat voor respectievelijk de maximale verplaatsing en laagste eigenfrequentie.



Figuur 4. 4: De maximale verplaatsing van de zadelvorm, voor verschillende rotaties van de opleggingen.

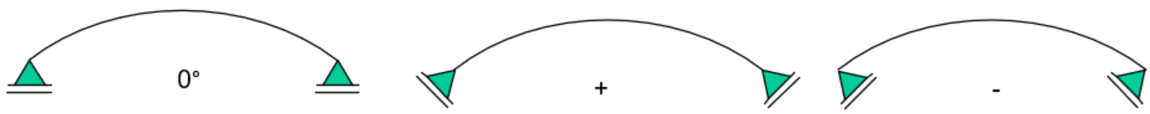


Figuur 4. 3: De kleinste eigenfrequentie van de zadelvorm, voor verschillende rotaties van de opleggingen.

Uit deze resultaten kan worden geconcludeerd dat wanneer de rotatie positief wordt gevarieerd buiging steeds minder overheerst in de schaal. De 90° Is duidelijk het kantelpunt, waarbij net onder de 90° buiging overheerst en net boven de 90° extensie overheerst. Rond de 90° overheerst buiging ook wat meer, maar dat komt omdat de bijna horizontale opleggingen de belasting niet goed kan afdragen. De spanningsresultaten zijn meer als ondersteuning voor de conclusie of in een schaal buiging of extensie overheerst. De resultaten van maximale hoofdspanning zijn namelijk op zichzelf niet veelzeggend, omdat er soms hogere maximale spanningen zijn bij een mindere buiging overheersende schaal. Dit komt door de benadering met puntopleggingen, waardoor lokale spanningen erg groot kunnen zijn. Dit is ook te zien bij het spanningsveld voor de maximale hoofspanning die bij 10 graden optreedt in de bijlage.

4.2. Bij welke opleggingen overheerst buiging in de bolvormige schaal?

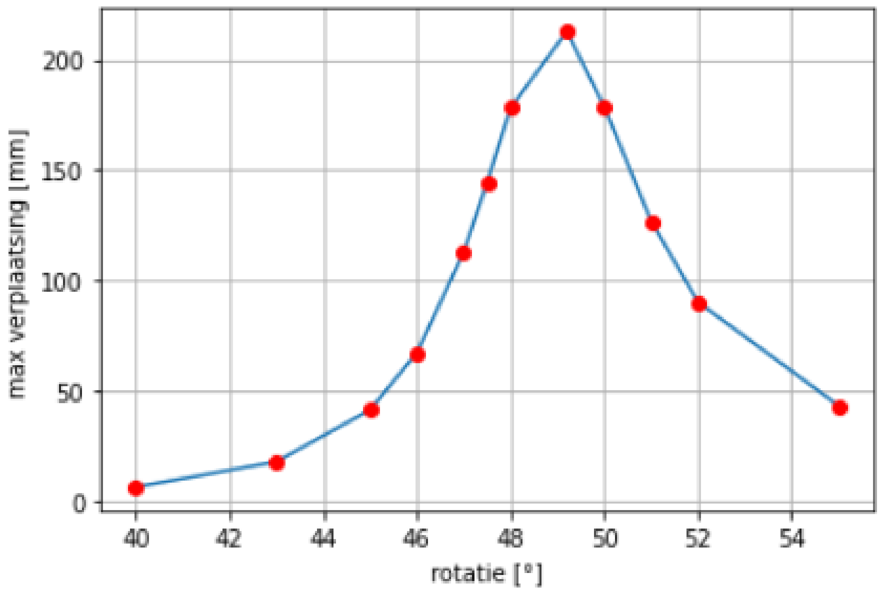
De aanpak van het vinden van opleggingen waarvoor buiging overheerst en extensie overheerst is vrijwel hetzelfde voor de bolvormige schaal. Voor de belasting wordt er echter het lijnlasten koppel gebruikt, welke is besproken in sectie 3.2.3. Daarnaast wordt deze schaal opgelegd op vier punten, omdat alleen de richting van de vier extreme verplaatsingen bekend zijn. Wanneer de schaal in meer punten wordt opgelegd is het nog niet gelukt om buiging te laten overheersen in de schaal, dus extensie overheerst voor bijna alle opleggingen in deze schaal. Het is dus alleen interessant om te kijken hoe gevoelig de schaal is voor richting verandering in deze vier punten. Hiervoor is de positieve richting gedefinieerd in Figuur 4. 5. De resultaten voor de rotatieverandering zijn te zien in Tabel 1Tabel 2. De resultaten voor de grootste verplaatsing en kleinste eigenfrequentie zijn samengevat in Figuur 3. 16 en Figuur 3. 17 respectievelijk.



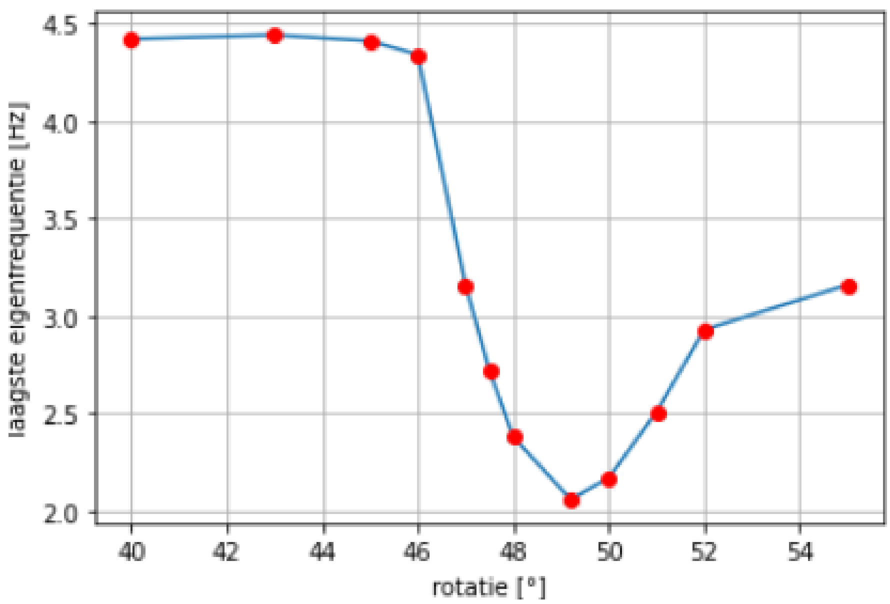
Figuur 4. 5: De positieve rotatie van de opleggingen voor het bolmodel.

Tabel 2: De resultaten voor verschillende rotaties bij het zadelvormige model.

Rotatie om rand [°]	Extreme verplaatsing met lijnlasten [mm]	Extreme hoofdspanning [MPa]	Extreme eigenfrequentie [Hz]
+40	6.1	106.9	4.42
+43	17.6	199.5	4.44
+45	41.2	311.8	4.41
+46	67.1	387.0	4.34
+47	112.7	449.1	3.16
+47.5	144.4	448.0	2.72
+48	178.2	409.5	2.38
+49.2	212.9	135.6	2.06
+50	178.8	213.8	2.17
+51	126.8	340.7	2.51
+52	90.1	361.4	2.93
+55	43.1	298.7	3.16



Figuur 4. 7: De maximale verplaatsing van de bolvorm, voor verschillende rotaties van de opleggingen.



Figuur 4. 6: De laagste eigenfrequentie van de bolvorm, voor verschillende rotaties van de opleggingen.

Ook aan deze resultaten is te zien dat voor een kleine verandering van de opleggingen de extensieloze vervorming wordt onderdrukt en extensiekrachten zullen overheersen in de schaal.

5. Conclusies en aanbevelingen

Het doel van dit onderzoek is om de volgende twee hypotheses te bevestigen of te verbeteren:

1) Voor de bolvormige schalen (positief gekromde schaal) waarbij de richting loodrecht op de schaal niet wordt verhinderd vervormd de bol extensieloos.
2) Voor een zadelvormige schaal (negatief gekromde schaal) waar de langs richting niet wordt verhinderd vervormd de schaal extensieloos.

Het volgende kan worden geconcludeerd over de extensieloze vorm van de schalen:

- Uit hoofdstuk 3 is gebleken dat bolvormige en zadelvormige schalen extensieloos kunnen vervormen door belasting wanneer deze rollend worden opgelegd op de rand. Dit richting is anders dan volgens de hypotheses welke daarom zijn verworpen.
- De exacte extensieloze vervorming is zichtbaar bij de trilvorm van de laagste eigenfrequentie van de schaal met vrije randen. Voor de zadelvormige schaal moeten de opleggingen op de rand horizontaal kunnen rollen voor extensieloze vervorming. Bij de bolvormige schaal moeten vier punten onder een hoek van ongeveer 49.2° kunnen rollen voor extensieloze vervorming.

Het volgende kan worden geconcludeerd over het optreden van deze vervorming:

- Voor zadelmodel blijkt dat bij een in hoofdstuk 4 gedefinieerde positieve rotatie tussen de 0° en 90° graden buiging overheerst en tussen de 90° en 180° geldt dit voor extensie. Extensie overheerst het meest wanneer de verplaatsing loodrecht op de rand vrij is, in dit geval bij een rotatie van 116.56°.
- De extensieloze vervorming wordt bij het bolmodel snel onderdrukt wanneer de rotatie een aantal graden afwijkt van de gevonden 49.2°. Dat betekent dat voor bijna alle opleggingen extensie zal overheersen in de schaal.
- De extensieloze vorm wordt bij variatie van de opleggingen niet snel onderdrukt bij de zadelvorm maar wel bij de bolvorm. Dit betekent dat er bij de zadelvorm per ongeluk kan worden ontworpen op extensieloze vervorming.
- Naast de randvoorwaardes kan ook de belasting de extensieloze vervorming onderdrukken. De schaal zal ook dan zo extensieloos mogelijk vervormen, wat kan lijken op een andere trillingsvorm waarbij buiging overheerst. Bij de zadelvorm zal dit bijna nooit gebeuren, omdat verticale belasting positieve arbeid verricht bij de extensieloze vervorming.
- Spatkracht kan bij de bolvormige schaal worden opgenomen door de ringkracht. Voor zadelvormige schalen met rechte randen geldt dit niet en moet de spatkracht worden tegengewerkt. Dit kan door de oplegging of door kabels, net zoals bij de ondersteuning van bogen.

Om de extensieloze vervorming van schalen nog beter te begrijpen wordt aanbevolen om te extensieloze verplaatsing van het bolmodel volledig te beschrijven, dus de verplaatsing van ieder punt op de rand. Daarnaast kan er worden onderzocht hoe de extensieloze vorm eruit ziet bij verschillende krommingen van zadelvormige en bolvormige schalen.

Bibliografie

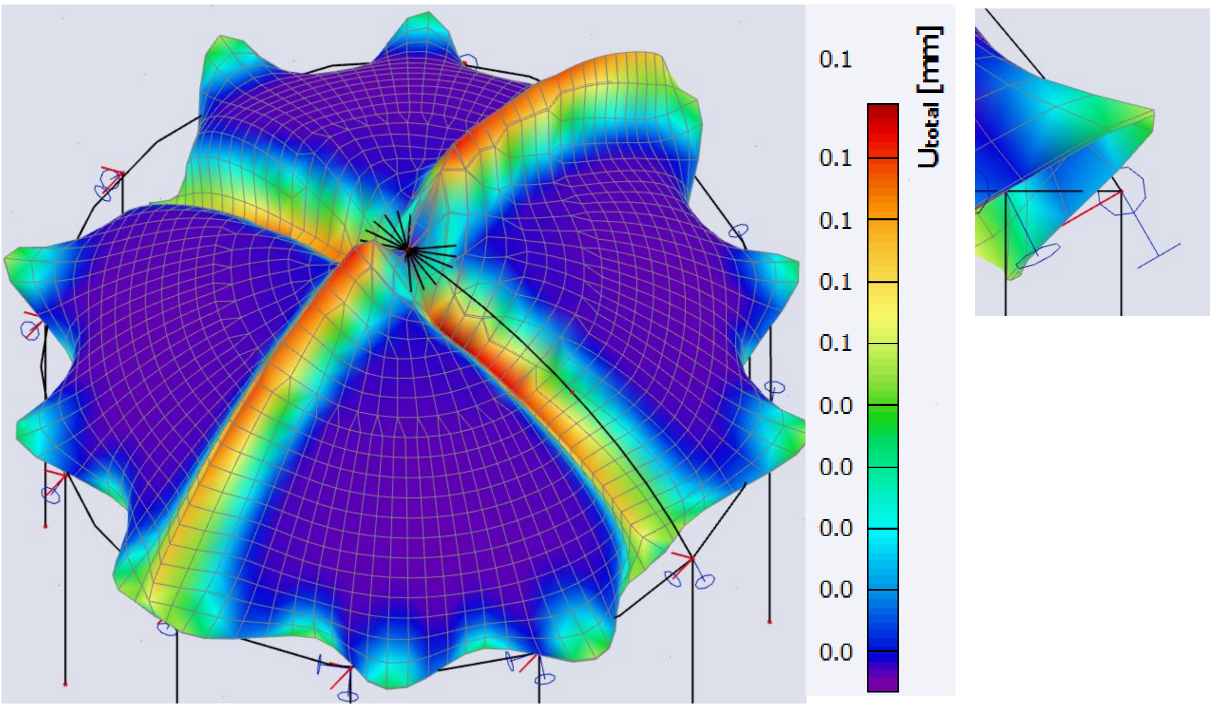
Hoogenboom, P. (2023). *Notes on Shell Structures.* Delft: Delft University of Technology. link: https://phoogenboom.nl/b17_handout_2.pdf

Loof, H. (1978). *Schalen I.* Delft: Technische Hogeschool Delft.

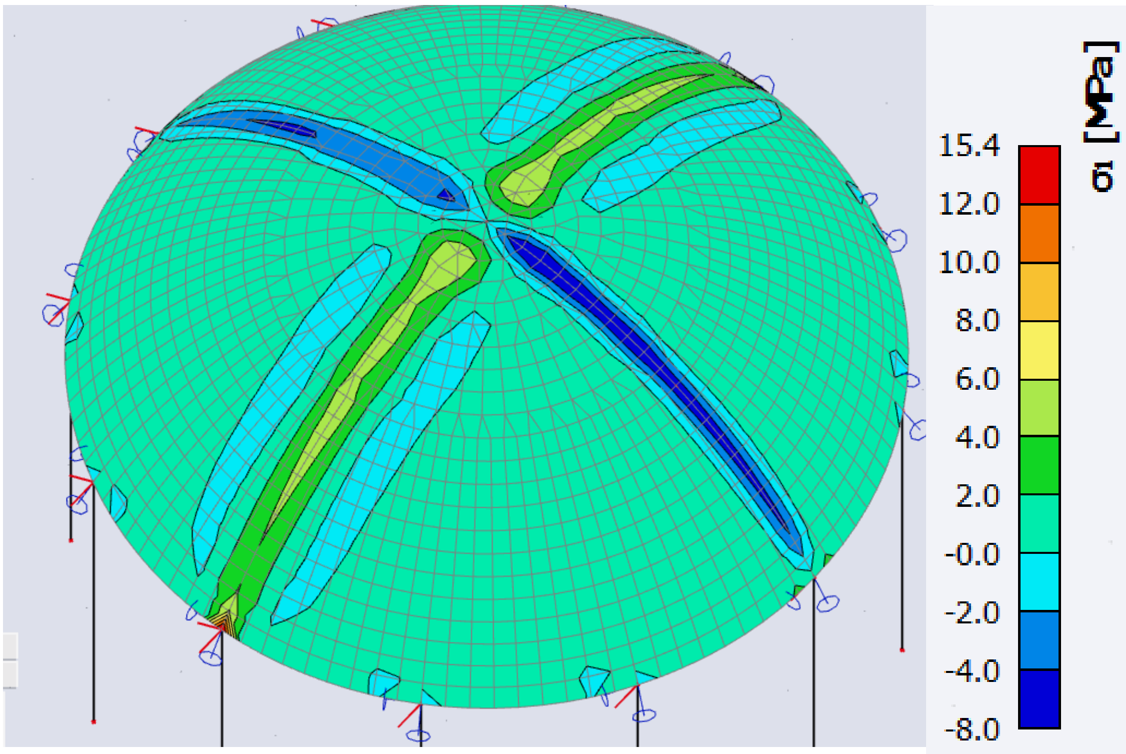
Ross, E. W. (1967). *On inextensional vibrations of thin shells.* Natick, Massachusetts: U. S. ARMY NATICK IABORATORIES. link: https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0658672.pdf

Strutt, J. W., & Rayleigh, B. (1945). *The theory of sound.* New York: Dover publications. link: ttps://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/PHYS181/%CE%92%CE%B9%CE%B2%CE%BB%CE%B9%CE%B1/Rayleigh%2C%20Robert%20B.%20Lindsay%20-%20The%20Theory%20of%20Sound%2C%20Two%20Volumes%20In%20One%20%281945%2C%20Dover%20Publications%29.pdf

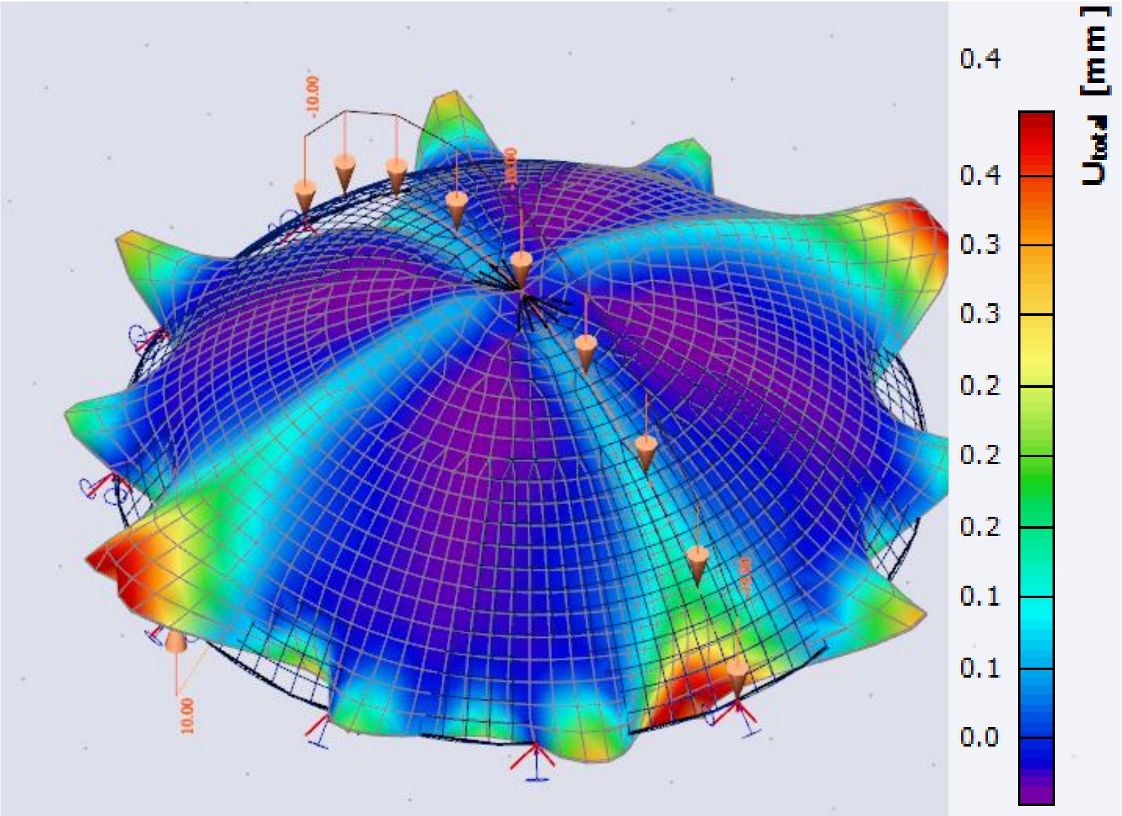
Bijlage: Resultaten



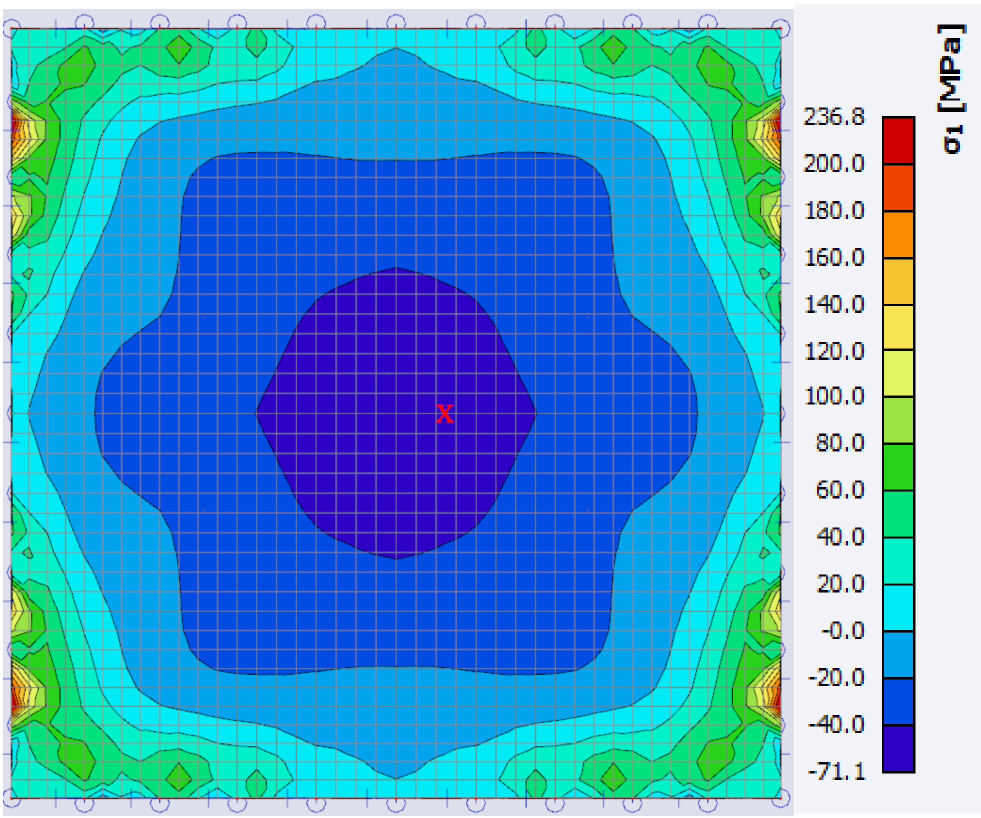
Figuur B1 1: Verplaatsingen van het bolmodel, ten gevolge van de lijnlasten, bij de opleggingen volgens de hypothese.



Figuur B1 2: De hoofdspanningen van het bolmodel, ten gevolge van de lijnlasten, bij de opleggingen volgens de hypothese.



Figuur B1 4: De verplaatsingen van het bolmodel, opgelegd met een rotatie van 49.2 graden, ten gevolge van de lijnlasten.



Figuur B1 3: De grootste hoofdspanning in het zadelmodel, welke optreedt bij een rotatie van 10 graden.